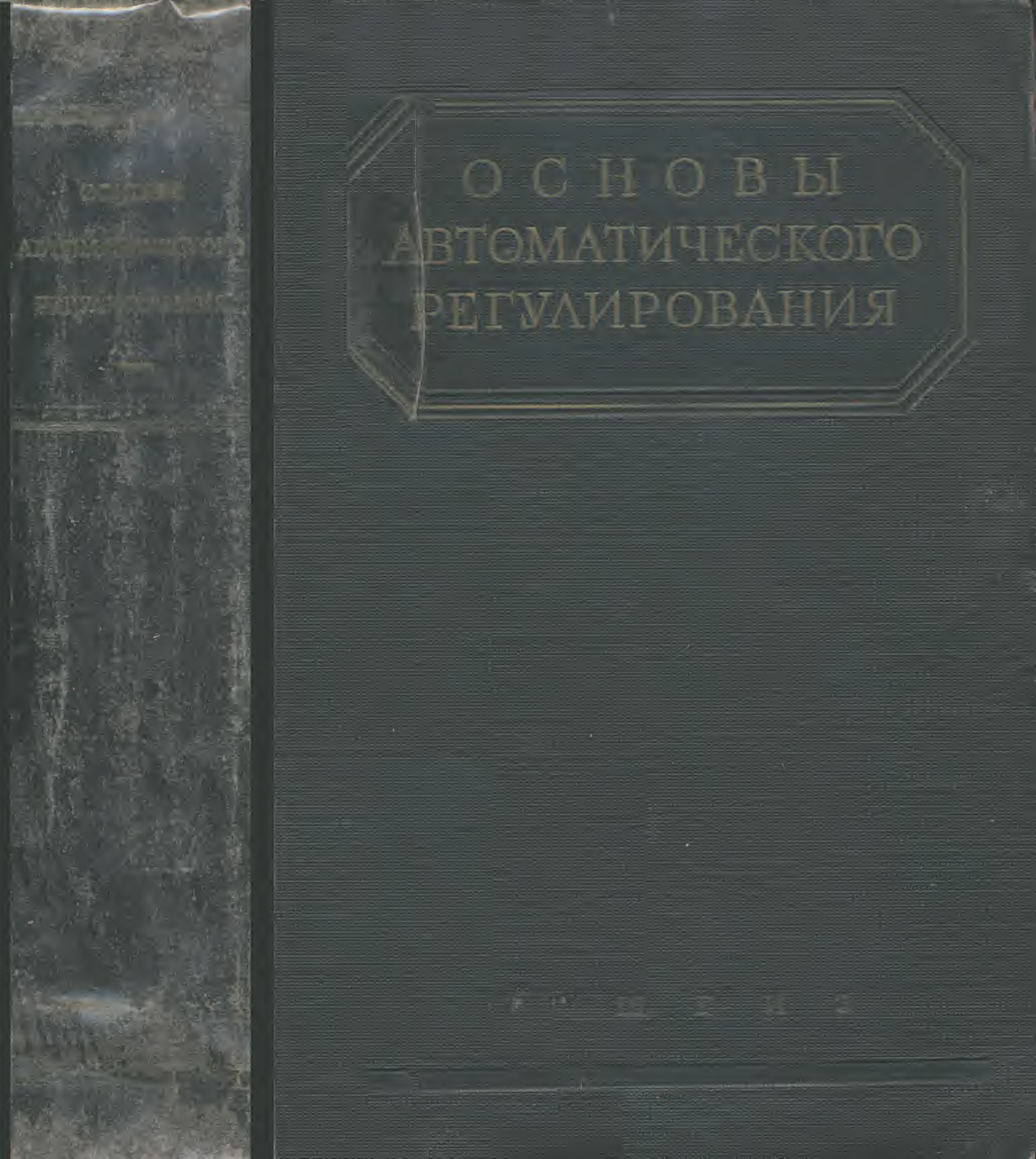

ОСНОВЫ
АВТОМАТИЧЕСКОГО
РЕГУЛИРОВАНИЯ

ОСНОВЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

ТЕОРИЯ

Под редакцией
доктора технических наук
профессора
В. В. СОЛОДОВНИКОВА





ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1954

Книга подводит итоги современному состоянию теории автоматического регулирования. В ней излагаются методы анализа, расчета и синтеза линейных и нелинейных систем автоматического регулирования.

Книга предназначена для инженерно-технических и научных работников, а также преподавателей вузов, занимающихся вопросами автоматического регулирования.

Рецензент д-р техн. наук проф. **В. Л. Лосcневский**

Редакция литературы по машиностроению и приборостроению
Зав. редакцией инж. Н. В. ПОКРОВСКИЙ

АВТОРЫ КНИГИ

М. А. АЙЗЕРМАН, д-р техн. наук (гл. XI, XXXIV), Д. А. БАШКИРОВ, канд. техн. наук (гл. XXXVIII), П. В. БРОМБЕРГ, канд. техн. наук (гл. XXXVI), А. А. ВОРОНОВ, канд. техн. наук, доц. (гл. III), Л. С. ГОЛЬДФАРБ, д-р техн. наук, проф. (гл. XXXIII), В. В. КАЗАКЕВИЧ, д-р техн. наук (гл. XXVII, XXVIII), А. А. КРАСОВСКИЙ, канд. техн. наук, доц. (гл. XX), А. Я. ЛЕРНЕР, канд. техн. наук (гл. VII, XXXI), А. М. ЛЕТОВ, д-р физико-матем. наук, проф. (гл. IX, XXXII, XXXVI), П. С. МАТВЕЕВ, инж. (гл. XXXIX), Ф. А. МИХАЙЛОВ, канд. техн. наук (гл. XXV), Б. Н. ПЕТРОВ, чл.-корр. АН СССР (гл. IV, XIX), В. В. ПЕТРОВ, канд. техн. наук (гл. XXVI, XXIX, XXX), Г. С. ПОСПЕЛОВ, канд. техн. наук, доц. (гл. XXXV), В. В. СОЛОДОВНИКОВ, д-р техн. наук, проф. (гл. II, V, VI, XII, XV, XVI, XVII, XXII, XXIII, Введение и вводные замечания к разделам), Ю. И. ТОПЧЕЕВ, инж. (гл. VIII, XIV, XVIII), Г. М. УЛАНОВ, канд. техн. наук (гл. XIII, XXIV, XXX), А. В. ХРАМОЙ, канд. техн. наук (гл. I), Я. З. ЦЫПКИН, д-р техн. наук, проф. (гл. X, XXI, XXXVII).

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАЗДЕЛ II

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

РАЗДЕЛ III

АНАЛИЗ КАЧЕСТВА И СИНТЕЗ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИМПУЛЬСНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В директивах XIX съезда партии подчеркивается значение механизации и автоматизации производственных процессов как важных средств поднятия нашего народного хозяйства на новый, еще более высокий уровень развития. Для осуществления автоматизации многих процессов необходимо автоматически регулировать и управлять ими. Поэтому теория автоматического регулирования и основанные на ней методы расчета, облегчающие проектирование устойчивых, высококачественных, точных и надежных систем автоматического регулирования, имеют сейчас исключительно большое практическое значение.

Теория автоматического регулирования, начало которой было положено выдающимся русским ученым И. А. Вышнеградским, существенно развита советскими учеными и инженерами в особенности за последние 15 лет. В связи с этим имеется острая необходимость в издании труда, посвященного систематическому изложению основ современной теории автоматического регулирования. В книгах, вышедших за последние годы, эта задача получила частичное разрешение. Однако многое еще остается сделать. Так, например, в имеющихся книгах советских авторов по теории автоматического регулирования частотный метод, получивший в настоящее время наиболее широкое практическое применение, излагается весьма сжато. Ни в одной известной нам книге не рассматриваются сколько-нибудь полно методы анализа нелинейных систем регулирования. Мало еще внимания уделялось также методам анализа и синтеза систем автоматического регулирования при непрерывно изменяющихся воздействиях.

Цель предлагаемой вниманию читателя книги заключается в том, чтобы дать изложение основных методов теории автоматического регулирования, и тем самым подвести итоги ее современному состоянию. С этой точки зрения книгу можно рассматривать как законченное произведение, имеющее самостоятельный интерес. Но в то же время она представляет собой теоретическую базу для подготавливаемых в настоящее время к изданию еще двух книг, также посвященных вопросам автоматического регулирования. Одна из этих книг будет содержать описание типовых схем, принципов действия, конструкции, статических и динамических характеристик, методов расчета и проектирования элементов автоматических регуляторов и следящих систем. В последней третьей книге должны быть рассмотрены типовые схемы систем автоматического регулирования, применяемых в различных отраслях промышленности, и дана методика их расчета и проектирования, базирующаяся

на содержании первой книги. Кроме того, там же будут изложены методы моделирования и экспериментального исследования систем автоматического регулирования.

Исходным материалом для настоящей книги послужил литографированный сборник лекций „Теория автоматического регулирования“, изданный Машгизом. Эти лекции были прочитаны группой специалистов в 1951 г. на семинаре по теории автоматического регулирования. Семинар был организован ВНИТО приборостроения и Институтом автоматики и телемеханики АН СССР. Программа книги составлена на основании опыта проведения семинара и пожеланий читателей сборника. По сравнению со сборником объем излагаемого материала и круг рассматриваемых вопросов значительно увеличены.

Книга написана коллективом авторов, в большинстве своем имеющих оригинальные работы, главным образом, по тем вопросам, которые ими здесь излагаются. Это не могло не наложить своего отпечатка на содержание книги. С одной стороны, такой состав авторов позволил изложить теорию автоматического регулирования более полно, чем если бы книга была написана одним автором. Но, с другой стороны, при таком значительном коллективе авторов, имеющих различный стиль изложения, обычно пользующихся различными обозначениями и терминологией, весьма трудно достигнуть полного единства, стройности и однородности изложения.

Книга предназначена для научных работников, преподавателей втузов, аспирантов, инженеров и студентов старших курсов, работающих или специализирующихся в области автоматического регулирования и имеющих некоторое предварительное знакомство с вопросами теории автоматического регулирования. Для более легкого усвоения излагаемого материала весьма желательно, чтобы читатель обладал известным запасом знаний по ряду разделов математики и в частности по теории преобразований Фурье и Лапласа, хотя краткое изложение некоторых положений этой последней теории в книге имеется.

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность инж. И. М. Русевичу за оказанную им помощь в редактировании книги.

В. В. Солодовников

ВВЕДЕНИЕ

Автоматическое регулирование производственных процессов и машин является одним из тех мощных технических средств, которые, без сомнения, должны сыграть немаловажную роль в переводе народного хозяйства СССР на еще более высокую ступень развития.

Уже сейчас, повидимому, нет ни одной отрасли техники, в которой автоматическое регулирование не находило бы себе применения. Оно используется для регулирования частоты, напряжения, мощности и скорости первичных двигателей в энергосистемах; для управления электроприводами прокатных станов и бумагоделательных машин; для поддержания требуемого режима работы двигателей и необходимого режима полета в авиации; для регулирования теплового режима промышленных печей; для регулирования режима работы котельных установок; для управления приводами копировальных станков в машиностроении; для регулирования температуры, давления, концентрации реагирующих веществ, расхода продукта в химической промышленности; для управления шахтным подъемом и угольными комбайнами; для автоматизации процессов нефтепереработки и нефтедобычи; для управления вычислительными машинами; для управления объектами военной техники и т. д., и т. д.

Чтобы понять значение автоматического регулирования для современного состояния и дальнейшего развития техники, необходимо прежде всего остановиться на принципе действия и назначении автоматических регуляторов.

Режим работы каждой машины, агрегата, производственного процесса характеризуется рядом величин. Обычно на изменение некоторых из этих величин накладываются определенные ограничения. Так, например, у паровых и водяных турбин угловая скорость их вращения должна оставаться постоянной с определенной степенью точности при любых имеющих место колебаниях момента сопротивления на валу; для копировального станка необходимо, чтобы изменения положения резца соответствовали форме, которую должна принять обрабатываемая деталь; у радиолокатора изменения углов, характеризующих положение его

антенны, должны происходить в соответствии с изменениями положения сопровождаемого им объекта и т. д.

Принцип действия всякого автоматического регулятора заключается в том, чтобы обнаруживать отклонения величин, характеризующих работу машины или протекание процесса, от заданных для них законов изменения и при этом воздействовать на машину или процесс так, чтобы устранять эти отклонения от требуемого режима. Такого рода способ поддержания требуемого режима работы машины или протекания процесса ранее обычно осуществлялся не автоматическим регулятором, а человеком. В этих случаях человек следил за показаниями приборов, чувствительных к изменениям величин, характеризующих данный процесс, и вводил поправки, как только замечал отклонение от требуемого режима работы. Однако по мере развития техники выяснилась целесообразность введения автоматического управления многими производственными процессами, не требующего непосредственного участия человека.

Одна из причин этого заключается в том, что автоматическое регулирование облегчает труд человека и позволяет высвободить его усилия для выполнения более сложных и ответственных операций, чем те, которые выполняются автоматическими регуляторами. Например, автопилоты, которыми обычно снабжаются самолеты, существенно облегчают труд летчика, освобождая его от утомительной необходимости непрерывно воздействовать на рули управления самолета для поддержания требуемого режима полета.

Кроме того, автоматическое управление часто оказывается более точным, быстродействующим, надежным, лишенным субъективных ошибок и экономически более выгодным, чем ручное. Это и понятно, поскольку развитие техники привело к применению процессов, происходящих настолько быстро, что человек часто не успевает управлять ими. Так, например, в том случае, когда энергосистемы, служащие для производства и распределения электрической энергии, снабжены устройствами автоматического регулирования, аварии, приводящие к нарушению устойчивости электрических систем и приносящие громадный материальный ущерб народному хозяйству, становятся значительно более редкими, чем при ручном регулировании.

Наконец, автоматическое регулирование незаменимо в тех случаях, когда применение ручного управления оказывается невозможным по условиям производства. Так, например, несомненно, что автоматическое регулирование будет иметь большое значение для управления процессами, связанными с производством атомной энергии для мирных целей, вследствие вредности этих процессов для организма человека.

Разработка и проектирование систем автоматического регулирования обычно являются не простым делом и часто состоят из следующих этапов:

а) изучения объекта регулирования, определения его характеристик и параметров, условий его работы и воздействий, которые он испытывает;

б) формулирования требований к системе регулирования;

в) выбора первоначальной схемы регулирования;

г) выбора элементов схемы регулирования, исходящего из требований к их мощности, надежности, имеющихся источников энергии, эксплуатационных требований и т. д.;

д) уточнения структурной схемы регулирования, выбора и расчета элементов и параметров системы регулирования на основе требований к статическим и динамическим свойствам системы;

е) экспериментального исследования системы регулирования (или отдельных ее частей) в лабораторных условиях и внесения соответствующих коррективов в схему регулирования;

ж) проектирования, изготовления и монтажа системы регулирования;

з) наладки системы регулирования в реальных условиях ее работы;

и) опытной эксплуатации системы регулирования.

Задачи общей теории автоматического регулирования заключаются: 1) в разработке методов синтеза систем автоматического регулирования, позволяющих выбрать схему взаимодействия их элементов, а также параметры и характеристики этих элементов таким образом, чтобы система в целом удовлетворяла заданным требованиям к ее поведению в статике и в динамике; 2) методов анализа систем автоматического регулирования, позволяющих определить, удовлетворяют ли они предъявляемым к ним требованиям, и показывающих пути улучшения их динамических свойств; 3) методов экспериментального исследования и испытания, а также методов коррекции динамических свойств систем автоматического регулирования.

Теория автоматического регулирования представляет собой в настоящее время довольно развитую, но все же не вполне сложившуюся и законченную дисциплину.

Трудности развития общей теории автоматического регулирования заключаются, во-первых, в том, что она по существу должна опираться на состояние почти всей современной техники в целом. Поэтому общая теория автоматического регулирования должна давать методы, пригодные для синтеза, анализа и исследования систем автоматического регулирования с объектами регулирования самой различной физической природы, с автоматическими регуляторами, в которых учтены самые последние достижения техники.

Трудности развития теории автоматического регулирования заключаются, во-вторых, в том, что, будучи прикладной инженерной дисциплиной, она в то же время вынуждена использовать весьма сложный математический аппарат и что современный уровень развития математики часто оказывается недостаточным для того, чтобы решать вопросы, которые ставит сейчас теория регулирования. Действительно, предметом теории автоматического регулирования являются динамика и статика систем автоматического регулирования, представляющие динамические системы со многими степенями свободы, содержащие не только постоянные, но и нелинейные, а порой и распределенные параметры. Математическим аппаратом, необходимым для синтеза и анализа таких систем, является аппарат диференциальных уравнений в полных и в частных производных (или эквивалентных им интегральных уравнений). Но в то же время мы знаем, что в настоящее время регулярные методы решения существуют лишь для линейных и для некоторых классов нелинейных диференциальных уравнений. Кроме того, следует подчеркнуть, что для теории регулирования недостаточно располагать общими методами решения тех или иных классов диференциальных или интегральных уравнений, а необходимо располагать методами, которые могут привести к сравнительно простым расчетам, пригодным в повседневной инженерной практике.

Ввиду указанной трудности большое значение для теории регулирования как мощное вспомогательное средство исследования, облегчающее расчеты, уточняющее их результаты и позволяющее производить в лабораторных условиях предварительное испытание и наладку, имеют методы моделирования систем регулирования. Вследствие той же трудности теория автоматического регулирования в ее современном состоянии часто не дает возможности получить точные результаты, и поэтому для окончательного выбора параметров систем регулирования обычно необходима дополнительная настройка и наладка регуляторов в реальных условиях. Однако это не умаляет значения теории автоматического регулирования, дающей уже сейчас возможность получить приближенное решение задачи, выбрать рациональную схему регулирования и ориентировочные значения ее параметров, указать пути улучшения динамических свойств систем регулирования и, таким образом, постепенно превращающей разработку и проектирование систем автоматического регулирования в стройную инженерную дисциплину, покоющуюся на прочном основании, а не на одном лишь экспериментировании, результаты которого зависят от интуиции экспериментатора, а порой и от счастливой случайности.

Содержание настоящей книги подразделено на две части и заключается в следующем.

Первая часть посвящена изложению некоторых общих вопросов и методам исследования устойчивости, качества и динамической точности линейных систем автоматического регулирования.

Вторая часть содержит описание некоторых известных в настоящее время методов решения ряда нелинейных задач теории автоматического регулирования.

Содержание первой части включает в себя четыре раздела.

В разделе I дается краткий обзор отечественных работ по теории и технике автоматического регулирования, формулируются некоторые основные понятия и определения, рассматривается несколько типовых схем и излагается методика составления диференциальных уравнений систем автоматического регулирования. Большую роль в современной теории автоматического регулирования играют преобразования Фурье и Лапласа, приводящие к такому важнейшему для этой теории понятию, как передаточная функция. Поэтому в разделе I имеется специальная глава, посвященная изложению основных свойств этих преобразований и способа их применения к решению диференциальных уравнений.

Достаточно внимания уделяется рассмотрению передаточных и переходных функций систем автоматического регулирования и их типовых звеньев. В последней главе раздела I дано несколько примеров на составление передаточных функций. В основу этих примеров положены типовые схемы, рассмотренные в главе III того же раздела. При выборе примеров мы руководствовались тем соображением, чтобы они были связаны в основном с такими объектами регулирования, знакомыми большинству лиц, занимающихся вопросами регулирования, как двигатели и электрические машины. Очевидно, что в книге, имеющей своей задачей изложение общей теории автоматического регулирования, было бы нерационально приводить примеры, требующие специальных знаний из более или менее узких областей техники и поэтому мало доступные широкому кругу читателей. Кроме того, автоматическое регулирование находит себе сейчас настолько широкое применение, что это вряд ли было бы возможно сделать в объеме одной книги. Гораздо более полно вопрос о применении общих методов теории к расчету систем автоматического регулирования в различных областях техники, как это уже было указано выше, предполагается осветить в отдельной книге.

Раздел II посвящен вопросам анализа устойчивости систем автоматического регулирования. Он начинается со строгого определения понятия устойчивости движения по Ляпунову и содержит краткую характеристику обоих основных методов анализа устойчивости, разработанных Ляпуновым. Нужно заметить, что излагаемый здесь второй метод Ляпунова в отличие от первого метода, на теоремах которого базируется

все остальное содержание раздела, не связан с предположением о малости начальных возмущений и часто является эффективным средством анализа нелинейных систем. Существенное внимание в этом разделе уделено рассмотрению различных критериев устойчивости, методу выделения областей устойчивости и методу анализа устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам, получившим широкое применение в современной инженерной практике. Применение последнего метода подробно поясняется на нескольких типовых схемах, рассмотренных в предыдущем разделе. Одна из глав раздела вводит читателя в круг вопросов, связанных с анализом устойчивости систем, содержащих распределенные параметры. Нужно, однако, заметить, что вследствие сложности вопроса, требующего от читателя дополнительных математических знаний и нуждающегося для своего полного изложения не в одной главе, а в большом самостоятельном разделе, по существу затрагиваются вопросы анализа устойчивости лишь систем с запаздыванием.

В разделе III излагаются методы анализа качества и некоторые вопросы синтеза систем автоматического регулирования, когда характерным режимом работы последних может служить переходный процесс, вызванный каким-либо типовым воздействием. Как известно, в настоящее время существуют три метода анализа качества систем автоматического регулирования: частотный метод, метод, основанный на изучении распределения полюсов и нулей передаточной функции, и метод интегральных оценок.

Наиболее развитым применительно к решению задач, связанных не только с анализом качества, но и с синтезом, в настоящее время является первый из перечисленных методов. Поэтому ему уделяется наибольшее внимание, причем его применение к синтезу корректирующих устройств иллюстрируется на нескольких конкретных примерах. Нужно, однако, предостеречь читателя от противопоставления перечисленных методов друг другу. Это нецелесообразно, во-первых, потому, что все три метода основаны на одной и той же идее, заключающейся в том, чтобы судить о качестве системы, т. е. о ее поведении в переходном процессе, по тем или иным свойствам передаточной функции, не прибегая к непосредственному решению диференциальных уравнений, и, во-вторых, потому, что развитие теории регулирования показывает, что эти три метода имеют тенденцию развиваться не отдельно друг от друга, а наоборот, в связи друг с другом. Глава XVIII раздела III содержит изложение теории импульсного регулирования, многие из положений которой являются аналогами соответствующих положений теории непрерывного регулирования, данных в предыдущих главах.

Если раздел III посвящен вопросам анализа и синтеза в случае воздействий, вызывающих переход системы из одного установившегося состояния в другое, то последний IV раздел первой части трактует вопросы анализа и синтеза в случае непрерывно изменяющихся воздействий, когда сведения о последних ограничены, и обычное понятие переходного процесса теряет смысл. Здесь излагаются два метода решения указанных задач: метод, основанный на предположении, что воздействия, приложенные к системе, являются стационарными случайными функциями времени и метод, основанный на предположении, что о воздействиях известно лишь то, что они ограничены по модулю. Кроме того, в этом же разделе рассматривается вопрос о том, каким образом можно подойти к вопросу об ориентировочном выборе параметров системы, если сведения о воздействиях являются очень скудными.

В остальных четырех разделах книги, как это уже указывалось, излагаются в основном методы анализа нелинейных систем автоматического регулирования. Эти методы в их современном виде оказались особенно эффективными для решения вопросов, связанных с условиями возникновения, устойчивостью и определением частоты и амплитуды автоколебаний в нелинейных системах регулирования. Указанные вопросы, несомненно, имеют существенное практическое значение, так как умение решать их позволяет устранять автоколебания, когда они вредны, и, наоборот, искусственно вводить автоколебания и управлять их частотой и амплитудой, когда они полезны. Однако, к сожалению, в настоящее время не имеется еще пригодных для практических расчетов общих методов анализа качества и динамической точности систем автоматического регулирования с нелинейными и переменными параметрами, а тем более методов их синтеза. Разработка такого рода методов является, повидимому, одной из актуальных проблем современной теории автоматического регулирования.

В разделе V рассматриваются основные типы нелинейностей, наиболее часто встречающихся в системах регулирования, и вкратце излагается метод анализа нелинейных систем, основанный на понятии фазового пространства и методе точечных преобразований. Этот метод, по крайней мере в его современном состоянии, обычно применяется в тех случаях, когда система описывается диференциальным уравнением второго порядка. Применение метода иллюстрируется на ряде примеров и, в частности, на типовых релейных системах регулирования. В последней главе этого раздела описываются некоторые методы коррекции динамических свойств нелинейных систем.

В разделе VI излагаются в основном приближенные методы анализа автоколебаний в нелинейных системах регулирования, состоящих

из линейной части, которая может описываться уравнением любого порядка, и одного (а иногда и нескольких) нелинейных элементов. Один из этих методов, относящийся к методам малого параметра, предназначен для тех случаев, когда в системе имеется нелинейный элемент, характеристика которого задана в виде экспериментальной кривой. Другой метод, получивший сейчас широкое распространение, представляет сочетание известного принципа гармонического баланса с частотным методом. Кроме того, в этом разделе дается сравнительный анализ основных предпосылок, лежащих в основе различных методов анализа периодических режимов в системах регулирования, Это позволяет выработать общую точку зрения и четко представить себе пределы применимости каждого из них.

Раздел VII посвящен методам анализа релейных систем автоматического регулирования. В первой главе этого раздела даются некоторые общие вопросы теории релейных систем. В следующей главе рассматривается аналитический метод анализа автоколебаний в релейных системах. Наконец, последняя глава раздела содержит изложение теории релейных систем, основанной на частотных представлениях.

Последний VIII раздел книги содержит описание графо-аналитических методов построения переходных процессов в системах автоматического регулирования с нелинейными и переменными параметрами, описываемых обыкновенными диференциальными уравнениями любого порядка, а также системами уравнений.

В конце книги помещена таблица h-функций для построения переходных процессов методом трапецоидальных частотных характеристик и библиография по вопросам теории автоматического регулирования.

Часть I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

РАЗДЕЛ I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПЕРЕДАТОЧНЫЕ И ПЕРЕХОДНЫЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В разделе I излагаются общие сведения, основные понятия, определения и некоторые вспомогательные математические сведения, необходимые для понимания последующих глав книги.

Очерк развития автоматического регулирования в СССР, которому посвящена глава I, содержит освещение досоветского и советского периодов развития теории регулирования.

В главе II даются основные понятия и определения, а в главе III приводится краткая характеристика основных типов элементов, из которых обычно состоят регуляторы и следящие системы, и показывается на нескольких примерах, каким образом из этих элементов образуются системы автоматического регулирования.

Цель главы IV состоит в изложении методики составления диференциальных уравнений систем автоматического регулирования.

В качестве исходных уравнений используются уравнения Лагранжа не только потому, что их применение в ряде случаев оказывается удобным, но и по той причине, что тем самым подчеркивается непосредственная связь теории автоматического регулирования с аналитической динамикой.

Глава V содержит вспомогательные математические сведения, связанные в основном с применением преобразований Фурье и Лапласа к решению линейных диференциальных уравнений. Хотя эти математические сведения в настоящее время получили довольно широкую известность, однако, на наш взгляд, материал этой главы будет все же полезен многим читателям.

Рассмотрению передаточных и переходных функций систем автоматического регулирования посвящена VI глава книги. В ней анализируются особенности передаточных функций статических и астатических систем, вводится понятие о коэфициентах ошибок и излагаются приемы получения передаточных функций многоконтурных систем, основанные на предварительном преобразовании их структурных схем.

В главе VII рассматриваются передаточные, переходные функции и частотные характеристики типовых звеньев.

Наконец, в последней главе раздела на примерах, рассмотренных в III главе, поясняется методика составления диференциальных уравнений, структурных схем и передаточных функций систем автоматического регулирования.

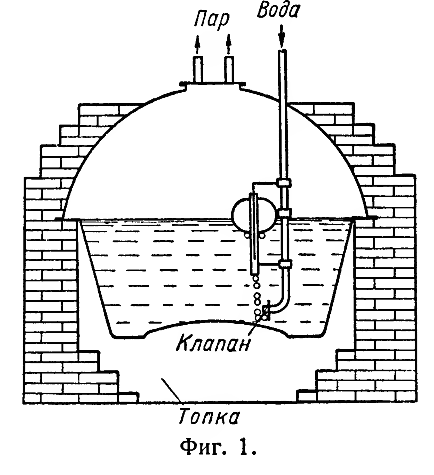
ГЛАВА I

ОЧЕРК РАЗВИТИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ В СССР

ДОСОВЕТСКИЙ ПЕРИОД РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Техника регулирования зародилась в 60-х годах XVIII в. в металлургической промышленности России, когда русская металлургия по своему техническому уровню, мощности и производительности основных агрегатов (печей, воздуходувных устройств, водяных двигателей и т. д.) занимала ведущее место в мире.

Крупнейшим событием в развитии регулирования явилось изобретение И. И. Ползуновым в 1765 г. автоматического регулятора питания котла в его же паровой машине, предназначенной для привода воздуходувного агрегата (фиг. 1).



Фиг. 1.

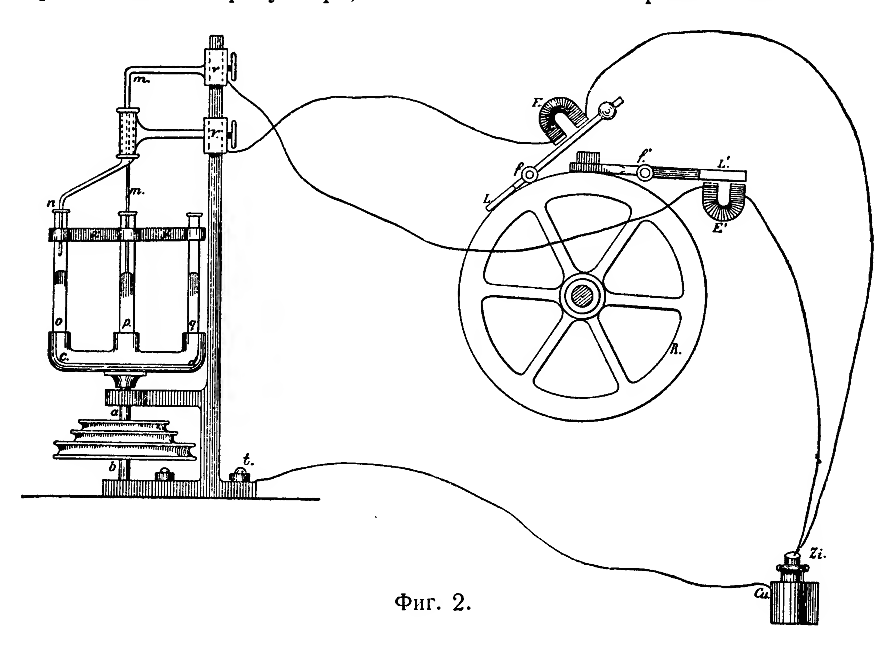
Этим было положено начало современного регуляторостроения. Принцип действия регулятора Ползунова лежит в основе большинства современных регуляторов.

В 1854 г. выдающийся русский механик и электротехник К. И. Константинов предложил вместо конического маятника в паровых машинах „электромагнитный регулятор скорости вращения“ (фиг. 2). „Электромагниты E и E' могли бы быть употреблены для произведения нужного механического действия к уравнению хода паровой машины, т. е. для регулирования впуска пара и даже для увеличения или уменьшения самого расширения пара под поршнем“ [1].

В 1866 г. замечательный русский изобретатель А. И. Шпаковский разработал регулятор для парового котла, отапливающегося посредством форсунок его конструкции. Этот регулятор (фиг. 3) изменяет подачу топлива в топку соответственно изменению давления пара вкотле.

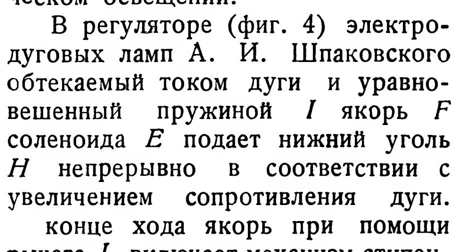
Как видно из схемы, речь идет о регуляторе непосредственного действия, у которого роль чувствительного элемента играет мембрана ab, клапан dd является исполнительным элементом.

Для управления процессом питания котла водой И. Возняковский и К. Воронин осуществили в 1870 г. принцип прерывистого регулирования, используя принудительное размыкание цикла при помощи кранового переключателя и редуктора, связанного с валом паровой машины.



Фиг. 2.

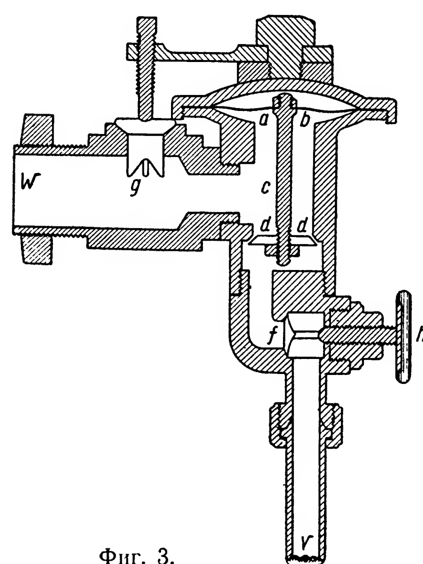
Начиная со второй половины прошлого века, существенную роль в развитии регуляторостроения начинают играть потребности в электрическом освещении.



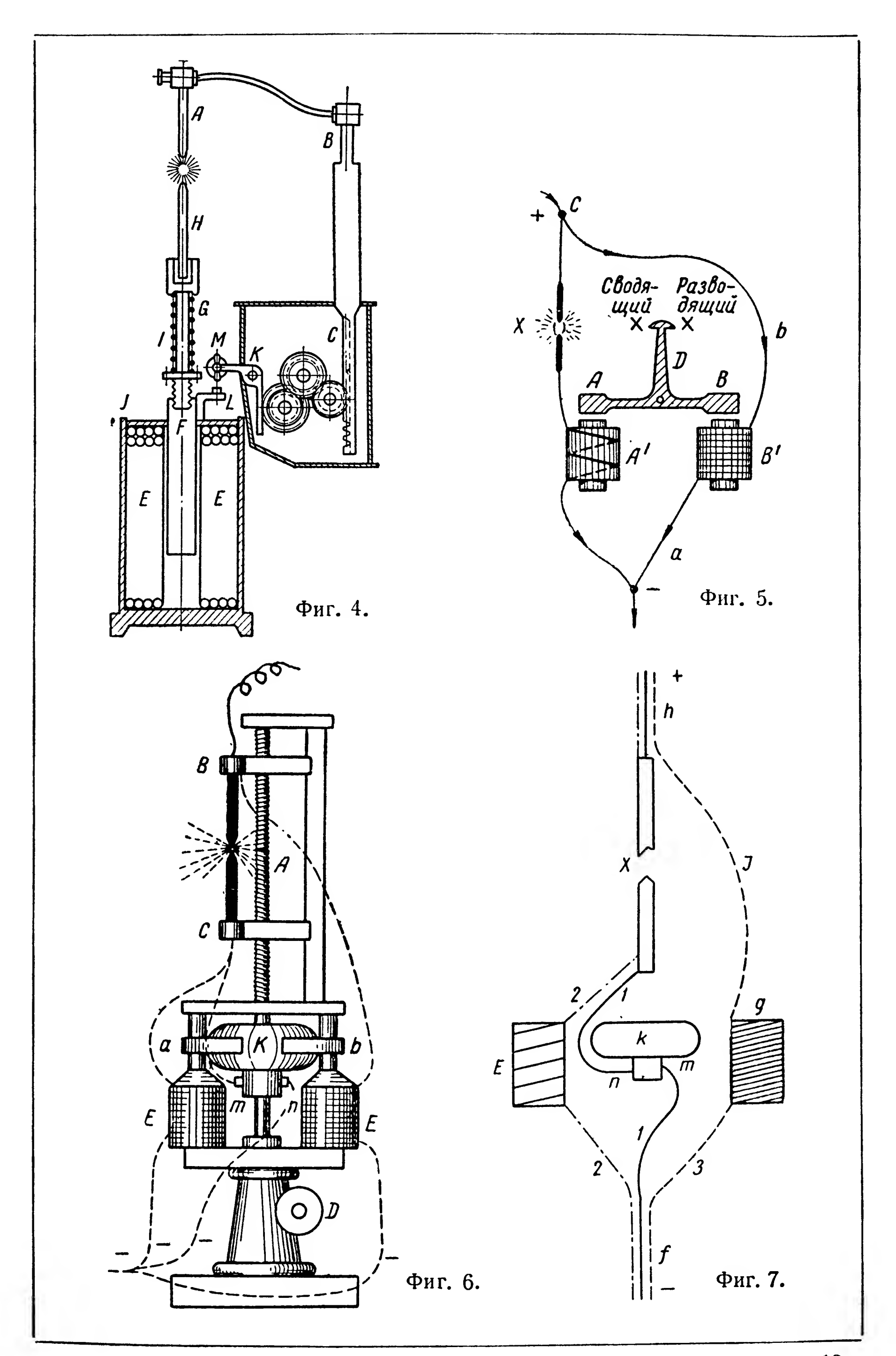
В регуляторе (фиг. 4) электродуговых ламп А. И. Шпаковского обтекаемый током дуги и уравновешенный пружиной *I* якорь *F* соленоида *E* подает нижний уголь *H* непрерывно в соответствии с увеличением сопротивления дуги.

конце хода якорь при помощи рычага *L* включает механизм ступенчатой подачи верхнего угля *A*.

Конец 60-х и начало 70-х годов характеризуются весьма крупными отечественными достижениями в области регулирования. В качестве примера можно указать на регуляторы (фиг. 5—7) В. Н. Чиколева. В одном из них впервые был применен электрический двигатель (фиг. 6—7).



Фиг. 3.



Фиг. 4.
Фиг. 5.
Фиг. 6.
Фиг. 7.

Отличительной особенностью электромашинного регулятора является то, что (как указывает В. Н. Чиколев) „чем более нарушается сопротивление в X, тем более разница в силе E и E', тем быстрее вращение катушки K" [2]. Анализ схем (фиг. 6 и 7) позволяет установить, что в 1874 г. В. Н. Чиколев предложил и осуществил на практике метод регулирования, который составляет основу современной электромашинной автоматики. Вместе с тем эта схема В. Н. Чиколева является также и прототипом современных схем, в которых совмещен принцип регулирования по отклонению регулируемой величины (принцип И. И. Ползунова) с принципом регулирования по возмущающему воздействию.

Отечественные ученые не оставляли в то время без внимания также и вопросы теории регулирования. Начиная с курса профессора механики Петербургского университета Д. С. Чижова, опубликованного в 1823 г., теория регуляторов входит составным элементом в курсы и монографии по механике и паровым машинам.

Среди работ по теории регуляторов, предшествовавших появлению основоположного труда И. А. Вышнеградского, видное место занимает исследование П. Л. Чебышева „О центробежном уравнителе". Эта статья является первым в отечественной литературе научным сочинением, посвященным только вопросам регулирования.

Успехи в деле конструирования и построения регуляторов, равно как и достижения в области теории регуляторов и теории малых колебаний, ставшие к началу 70-х годов прошлого века достоянием отечественной техники и науки, подготовили почву для дальнейшего развития регулирования.

Требования промышленности в отношении устойчивости и точности действия регуляторов приобрели к тому времени вполне конкретное выражение.

Необходимо было обобщить опыт эксплуатации регуляторов, а также результаты полученных к тому времени теоретических исследований и создать научно обоснованную теорию, которая позволила бы сознательно рассчитывать и строить работоспособные регуляторы для быстро развивающейся отечественной промышленности.

Такую задачу можно было решить на основе подробного изучения техники регулирования наиболее распространенной машины того времени — паровой машины — и вместе с тем полного овладения математическим аппаратом теории малых колебаний и теории устойчивости.

Этот огромный труд выполнил И. А. Вышнеградский (1831—1895), крупнейший русский машиностроитель прошлого века, объединивший в себе опыт инженера-механика и знания ученого-математика. Впервые И. А. Вышнеградский сделал сообщение о своей работе по теории регуляторов прямого действия в 1872 г. Первый же мемуар о результатах исследования И. А. Вышнеградского под названием „Об общей теории регуляторов" появился в 1876 г. в докладах французской Академии наук [3]. На основе тех же уравнений, которые составили базу для выводов Максвелла о пригодности астатического регулятора, И. А. Вышнеградский сделал совершенно противоположные выводы. Если Максвелл рассмотрел редкий для того времени случай — машину с суще-

ственным самовыравниванием, то Вышнеградский посвятил свое внимание наиболее интересному и с точки зрения промышленной практики того времени наиболее важному случаю, когда самовыравнивание практически отсутствует.

Исходя из учета условий работы паровой машины с центробежным регулятором, И. А. Вышнеградский значительно упростил задачу путем ее линеаризации (метод малых колебаний). Он описал систему регулируемый объект плюс регулятор линейным диференциальным уравнением и свел задачу к исследованию движения системы, определяемого общим решением однородного уравнения, так как Вышнеградский ввел упрощающее предположение о том, что нагрузка меняется мгновенно и остается затем неизменной все время.

Исследуя полученное уравнение, Вышнеградский показал, что динамика системы регулирования определяется двумя параметрами, вывел условие устойчивости системы и впервые осуществил разбиение плоскости параметров на области устойчивости и неустойчивости (диаграмма Вышнеградского).

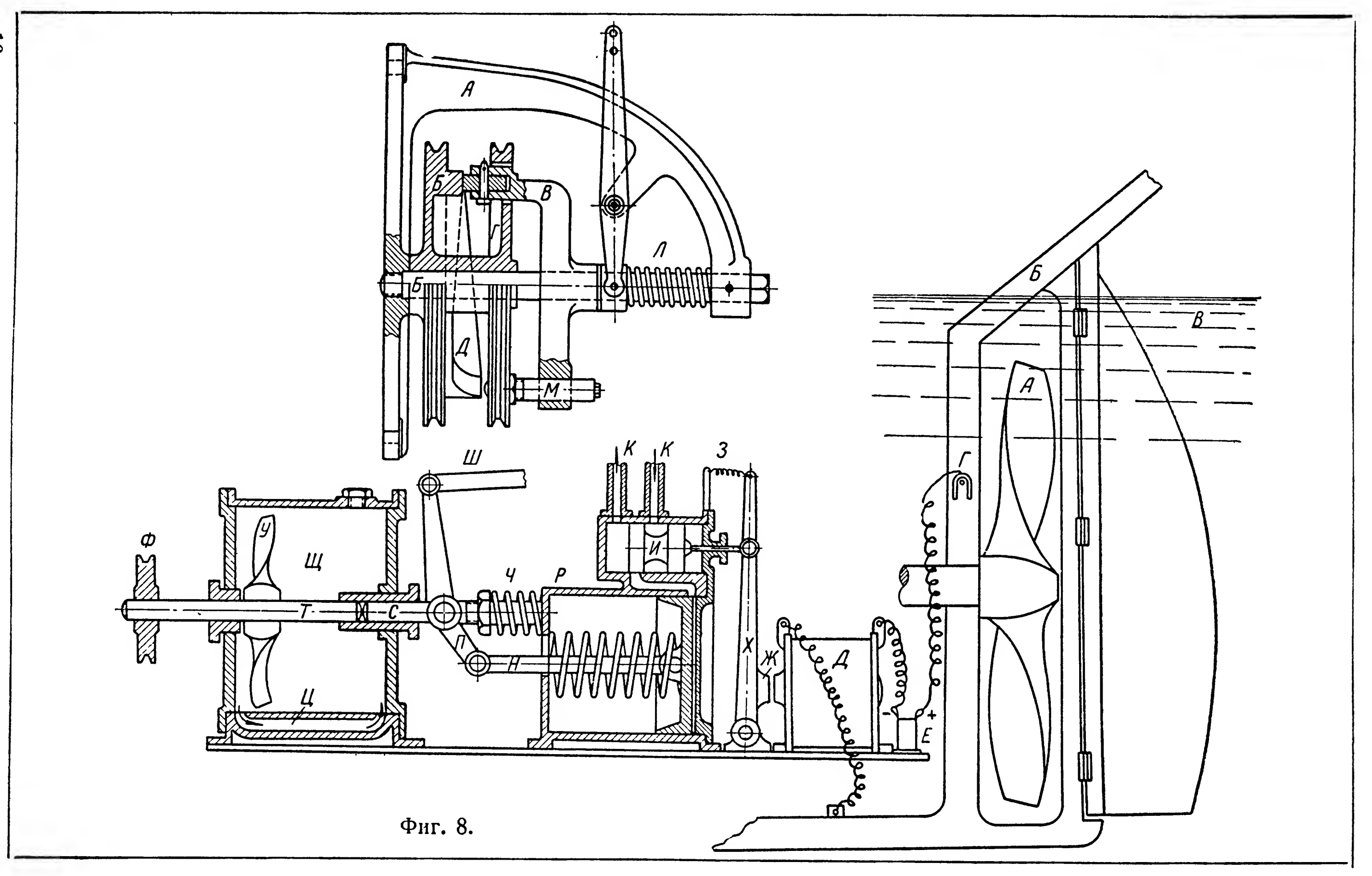
И. А. Вышнеградский впервые рассмотрел один из существенных вопросов, связанных, если пользоваться современной терминологией, с понятием качества регулирования, а именно выяснил условия монотонности переходного процесса в паровой машине с регулятором прямого действия, вызванного мгновенным сбросом нагрузки. Работа Вышнеградского, появившаяся впервые в 1876 г., стала теоретической основой регуляторостроения, ибо ему удалось решить задачу о промышленном статическом регуляторе. До работы Вышнеградского основной проблемой регулирования было построение совершенного (без трения) астатического (изохронного) регулятора. После опубликования исследования И. А. Вышнеградского о регуляторе прямого действия эта проблема была снята.

Надо отметить, что первая в мире работа по нелинейным вопросам теории регулирования принадлежит тоже И. А. Вышнеградскому („О регуляторах непрямого действия“, 1878). В ней рассмотрен регулятор релейного типа.

Достойным продолжателем дела И. А. Вышнеградского был словацкий инженер А. Стодола. Он рассмотрел систему непрямого регулирования с жесткой обратной связью, а также ввел понятие о постоянных времени, применяемое и теперь при составлении уравнений системы регулирования.

На конец XIX в. и начало текущего столетия приходится подъем капитализма в России. Бурный рост промышленности не мог не отразиться на развитии работ в области техники и теории регулирования.

Создаются новые виды электромеханических регулирующих приборов, а именно программные регуляторы, следящие системы и схемы компаундирования. Так, например, в 1877 г. А. П. Давыдов разрабатывает проект первой следящей системы, содержащей электрические элементы. В 1881 г. он показывает действующий макет этой системы, предназначенной для того, чтобы автоматически придавать орудию надлежащий угол возвышения в соответствии с изменением расстояния до цели.

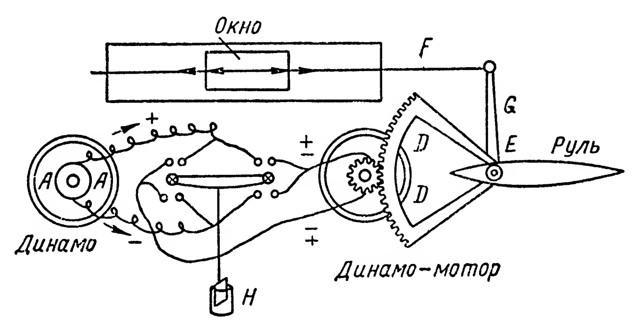


Фиг. 8.

В 1882 г. Н. И. Захаровым был показан на Промышленно-художественной выставке в Москве прототип современного программного регулятора — электромеханическое копировальное устройство.

„Для воспроизведения любого рисунка его необходимо только нарисовать лаком на валике, приводящемся во вращательное движение. По валику ходит другая пластинка с иголкой и там, где иголка входит на изолирующую поверхность, ток проходит через реле в главный электромагнит, который оттягивает резец назад, а когда иголка касается до металлической поверхности, то ток проходит в другой электромагнит и резец режет вещи“ [4].

Предложенная в 1884 г. П. Сунгуровым [5] схема регулирования двух совместно работающих машин (фиг. 8), в которой скорость одной из них следит за скоростью другой, применяется в современной автоматике.



Фиг. 9.

Широко используется в настоящее время при автоматизации различных агрегатов примененный П. Сунгуровым принцип установления допустимых предельных значений регулируемого параметра.

В 1898 г. К. Э. Циолковский предложил „автоматический регулятор горизонтального руля“, который был предназначен для стабилизации продольной оси дирижабля в горизонте. Принцип действия этого регулятора, явившегося основой для создания современных автопилотов, ясен из фиг. 9.

Помимо методов и схем регулирования, основанных на сравнении регулируемой величины с заданной, отечественные ученые и изобретатели создавали также методы и схемы регулирования, основанные на подборе параметров объекта, обеспечивающих необходимый закон изменения регулируемой величины (так называемое параметрическое регулирование), например диференциальный регулятор В. Н. Чиколева, схема компаундирования генераторов М. О. Доливо-Добровольского.

Созданная И. А. Вышнеградским школа регулирования развивалась в ряде высших учебных заведений. Среди курсов, прочитанных по теории регулирования в досоветский период (см. [6] — [15]), особо следует отметить курс Н. Е. Жуковского [14], прочитанный в Московском высшем техническом училище. Этот курс содержал ряд таких оригинальных исследований как например, теория прерывистого регулиро-

вания угловой скорости паровой машины, основанная на применении уравнений в конечных разностях, условия отсутствия перерегулирований для системы регулирования паровой машины на отсечку и т. д.

В 1892 г. вышла в свет работа А. М. Ляпунова [16] „Общая задача об устойчивости движения“, явившаяся важной вехой в развитии теории устойчивости, и теории регулирования. В ней А. М. Ляпунов дал первое в истории науки математически строгое определение понятия устойчивости движения, а также разработал два метода решения задачи об устойчивости.

Особое значение первого метода или метода первого приближения заключается в обосновании и установлении точных границ применимости анализа устойчивости, основанного на линейных диференциальных уравнениях.

Теоремы второго метода позволяют в ряде случаев исследовать устойчивость не только при бесконечно малых отклонениях („устойчивость в малом“), но и при конечных отклонениях („устойчивость в большом“)[1].

СОВЕТСКИЙ ПЕРИОД РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Цель настоящего раздела — охарактеризовать основные вехи довоенного этапа развития регулирования в СССР, уже ставшего достоянием истории, а также дать самое общее представление о современном состоянии вопроса на основе материалов Второго всесоюзного совещания по теории регулирования, состоявшегося в Москве в конце 1953 г.

Во время восстановления народного хозяйства СССР (1917—1927 гг.) исследовательская работа по теории регулирования велась преимущественно на кафедрах и в лабораториях втузов, т. е. в тех центрах, которые сложились еще до 1917 г. в Ленинградском технологическом институте, Ленинградском политехническом институте, Московском техническом училище, Днепропетровском горном институте. За время уже первых пятилеток центр тяжести этой деятельности переместился во вновь организованные крупные научно-исследовательские институты, как, например, Центральный котлотурбинный институт (ЦКТИ), Всесоюзный теплотехнический институт (ВТИ), Всесоюзный электротехнический институт (ВЭИ), лаборатории ряда машиностроительных заводов — Ленинградского металлического завода, завода „Электросила“, Харьковского электромеханического завода и др.

Этот период с 1917 по 1927 г. характеризуется в основном продолжением работ научно-исследовательских центров, сложившихся до 1917 г.

Одну из первых советских работ по теории регулирования выполнил в 1922 г. И. Н. Вознесенский на тему „О регуляторах непрямого действия“ [17].

Несмотря на трудности восстановительного периода, не переставала работать изобретательская мысль в области автоматического регулирования. Можно отметить ряд интересных изобретений того времени, как-то: регулятор для ветряного двигателя в ветроэлектрических уста-

---

[1] В последнее время исследования А. М. Ляпунова стали применяться для решения вопросов, связанных с оценкой качества регулирования.

новках Г. С. Толмачева, „устройство для получения постоянного тока с постоянным напряжением при переменном числе оборотов генератора“ К. И. Шенфера, „устройство автоматического регулирования возбуждения электрического генератора постоянного тока“ Я. М. Гаккеля, „способ повышения чувствительности регулирования числа оборотов двигателя“ В. П. Вологдина и М. С. Снисаренко, „устройство синхронизации работы передатчика и приемника в аппарате для электрической телескопии“ А. А. Чернышева.

Исходя из нужд промышленности, было налажено серийное производство регуляторов. Так, например, в 1925 г. были изготовлены регуляторы для водяных турбин советского производства. В 1927 г. по проекту группы советских инженеров изготовлены термоэлектрические регуляторы, установленные на шлихтовальных машинах.

Индустриализация нашей страны, осуществляемая с 1928 г., стимулировала небывалый творческий подъем среди работников науки и техники.

Разрабатывая новые типы регуляторов для бурно растущей промышленности, советские ученые и инженеры существенно продвинули вперед теорию регулирования и заложили общие физические и математические основы этой теории. Теория регулирования стала серьезным подспорьем для инженера, проектирующего электрические, гидравлические, пневматические и другие регуляторы разнообразных параметров для различных отраслей народного хозяйства.

Именно в годы индустриализации нашей страны советские ученые расширили понятие о регулировании машин и систем машин, выдвинув такие проблемы, как качество регулирования, синтез регуляторов. За сравнительно короткий срок советские ученые подняли на новый, более высокий уровень методы исследования устойчивости регулируемых систем, методы исследования динамики регулируемых объектов, а также положили начало анализу систем регулирования с учетом непрерывного воздействия на них возмущающих сил.

Среди большого числа исследований, выполненных с 1928 г. до начала Великой Отечественной войны, следует отметить работы трех основных научно-исследовательских институтов — ЦКТИ, ВТИ, ВЭИ. В первом из них работал И. Н. Вознесенский с группой учеников.

В 1934 г. И. Н. Вознесенский впервые выдвинул принцип автономного регулирования [18]. Разработке теории автономного регулирования посвящена также его статья „О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров“ [19].

Большой заслугой И. Н. Вознесенского является то, что он разработал общий метод разбиения процесса регулирования системы с несколькими регулируемыми величинами на ряд автономных процессов и обосновал тем самым условия автономности, а также решил конкретную задачу синтеза схемы прямого регулирования при сделанных им ограничивающих и упрощающих предположениях.

Во Всесоюзном теплотехническом институте развернулась большая работа по регулированию турбин, а также по регулированию тепловых процессов.

А. В. Щегляевым был опубликован в 1938 г. первый систематизированный труд по регулированию турбин [20].

Развивающаяся бурными темпами электрификация страны предъявляла все повышающиеся требования к автоматическому регулированию производства и распределения электрической энергии.

Важные работы в этой области были выполнены во Всесоюзном электротехническом институте. Там была впервые осуществлена следящая система с нелинейной обратной связью.

В 1932 г. В. С. Кулебакин опубликовал исследование по теории вибрационных регуляторов [21].

Серьезное значение имели выполненные в ВЭИ С. А. Лебедевым и П. С. Ждановым работы в области устойчивости энергосистем [22].

В 1938 и 1939 гг. были опубликованы выполненные в ВЭИ исследования А. В. Михайлова, ознаменовавшие собой новую веху в теории автоматического регулирования.

А. В. Михайлов впервые применил частотные методы для исследования устойчивости регуляторов. Он же предложил новый критерий устойчивости линейных систем автоматического регулирования, основанный на применении принципа аргумента Коши. А. В. Михайлову принадлежит также постановка вопроса о структурном анализе, основанном на типизации звеньев систем автоматического регулирования по их динамическим свойствам [23], [24].

Следует подчеркнуть, что впервые свои нововведения в теорию регулирования А. В. Михайлов сформулировал в неопубликованном труде, удостоенном премии на конкурсе работ молодых ученых, организованном ЦК ВЛКСМ в 1936 г.

Вклад А. В. Михайлова в теорию регулирования существенно повлиял на дальнейшее развитие теории регулирования не только в СССР, но и за рубежом.

Развитие социалистической техники, которое с особой силой обозначилось к началу третьей пятилетки, выдвинуло в качестве задачи первой очереди наряду с совершенствованием методов анализа устойчивости регуляторов повышение точности, улучшение качества регулирования.

Назрела острая необходимость в научно обоснованных методах определения и исследования качества регулирования, базирующихся на учете непрерывного воздействия возмущающих сил на систему. Этот важный вопрос был поднят в ВЭИ в 1939 г. В. В. Солодовниковым, который сформулировал условия [25], впоследствии объединенные им в понятие качества процесса регулирования, и сделал первые шаги в направлении развития частотного метода анализа качества и синтеза систем автоматического регулирования.

Там же была поставлена задача анализа устойчивости системы с распределенными параметрами, в частности регулирования гидротурбины с учетом трубопровода как распределенного звена, а также систем с запаздыванием и обосновано применение для этой цели частотного критерия [26].

В 1940 г. акад. В. С. Кулебакин поставил задачу определения параметров автоматического регулятора по заданным требованиям к процессу регулирования. Вместе с тем он предложил способ анализа качества регулирования при помощи интегральной оценки переходного процесса

[27]. Акад. Н. Н. Лузин поставил задачу о применении матричных методов в теории регулирования [28].

Исключительно важное значение автоматизации в развитии народного хозяйства побудило Академию наук создать в 1939 г. Институт автоматики и телемеханики, который стал развертывать работу в области общей теории регулирования.

В связи с работами Института автоматики и телемеханики по теории регулирования в 1940—1941 гг. возникла дискуссия, в ходе которой подверглись острой критике выдвинутый Г. В. Щипановым [29] принцип полной компенсации возмущающего воздействия и неосуществимая идея об универсальном регуляторе. Выполненные впоследствии работы Н. Н. Лузина, В. С Кулебакина, П. И. Кузнецова уточнили физический смысл и выявили область применимости названного выше принципа.

В течение рассматриваемого этапа состоялось два всесоюзных совещания по вопросам теории регулирования: в 1935 г. в Ленинграде и в 1940 г. в Москве.

Ленинградское совещание было организовано Научно-техническим советом по теплотехнике и рассмотрело ряд существенных вопросов теории и расчета регуляторов паровых турбин. На этом совещании было, в частности, установлено, что критерий Гурвица явно недостаточен для конструктора, проектирующего регулятор, и что наличие нелинейных элементов в системах регулирования заставляет искать новые пути решения задач регулирования.

Труды совещания, опубликованные в 1936 г. [30], в известной мере повлияли на выбор направлений, по которым развивалась в дальнейшем деятельность в области теории регулирования.

Совещание, происходившее в 1940 г., было созвано Институтом автоматики и телемеханики АН СССР [31]. В отличие от предыдущего совещания, рассмотревшего сравнительно узкий круг задач регулирования, совещание в Москве было посвящено задачам общей теории регулирования.

А. А. Андронов впервые указал на то, что математическим образом автоколебаний являются устойчивые предельные циклы [32]. Впоследствии А. А. Андронов разработал математический аппарат для решения нелинейных задач в различных областях электротехники и радиотехники. Как видно из дальнейшего изложения, этот аппарат дал возможность А. А. Андронову и его школе решить ряд существенно важных нелинейных задач теории регулирования.

В годы первой пятилетки с вводом в действие мощных синхронных генераторов особую актуальность приобрел вопрос об их устойчивости.

В 1932 г. Украинский институт промышленной энергетики издал работу Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, посвященную анализу устойчивости колебаний параллельно работающих генераторов. Отметим, что это была одна из первых попыток решения нелинейной задачи, смежной с теорией регулирования.

С развитием техники, основанной на высокочастотных колебаниях, нелинейные задачи механики, электротехники, радиотехники были выдвинуты практикой социалистического строительства как важнейшие и неотложные.

В 1937 г. вышли в свет фундаментальные исследования А. А. Андронова и С. Э. Хайкина „Теория колебаний“, а также Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова „Введение в нелинейную механику“. Эти работы, быстро завоевавшие себе мировую известность, создали основу для решения ряда важнейших нелинейных задач теории регулирования [33].

Метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова нашел через несколько лет эффективное применение для решения нелинейных задач теории регулирования.

В 1944 и последующих годах был опубликован ряд важных работ акад. А. А. Андронова и его учеников и сотрудников по исследованию нелинейных систем автоматического регулирования, основанных на методе точечных преобразований.

На основе этого метода была решена важная задача определения устойчивости систем регулирования без обычных упрощающих предположений о малости тех или иных величин, входящих в уравнения движения, а также задача о влиянии сил трения в регуляторе прямого действия на процесс регулирования [34], [35].

* * *

Краткую характеристику результатов, полученных в области теории регулирования за время с 1941 г., необходимо начать с указания на то, что внедрение новой техники, предъявляющей особые требования к качеству и точности систем регулирования и управления, обусловило подъем теоретических исследований на новый, более высокий уровень.

За этот период были разработаны методы исследования устойчивости линейных систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, систем с запаздыванием, а также методы построения областей устойчивости.

Существенное развитие получили методы анализа качества линейных систем регулирования: частотный метод, метод интегральных оценок и метод распределения корней. Значительные успехи получены в направлении развития теории прерывистого регулирования. Разработан ряд методов построения переходных процессов в линейных и нелинейных системах регулирования.

Значительное развитие получили методы синтеза линейных систем, т. е. построения линейных систем регулирования по заданным требованиям к их качеству с учетом внешних воздействий и, в частности, при воздействиях, задаваемых статистически или ограниченных по абсолютной величине.

Усовершенствованы методы построения сложных систем с несколькими регулируемыми параметрами.

Резко повысился интерес к нелинейным задачам теории регулирования. Широкое распространение для исследования нелинейных систем получают классические методы А. М. Ляпунова, а также метод малого параметра. Разработаны эффективные способы определения периодических режимов. Следует отметить развитие нового направления в теории регулирования, имеющего в своей основе метод точечных преобразований, разработанный А. А. Андроновым и его школой.

Существенные результаты получены в области разработки экспериментальных методов исследования динамических свойств сложных объектов регулирования.

Последние годы ознаменовались рядом серьезных достижений в области физического и математического моделирования систем автоматического регулирования.

Крупных успехов добились советские ученые в решении актуальных линейных задач теории регулирования.

За эти годы разработан частотный анализ качества и синтеза, основанный на рассмотрении вещественной частотной характеристики, причем была показана органическая связь его с частотным методом анализа устойчивости.

Существенно продвинулась разработка теории регулирования сложных взаимно связанных систем с несколькими параметрами.

Исследован вопрос о накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами.

Разработан весьма общий важный метод построения областей устойчивости линеаризованных систем, как распределенных, так и дискретных по любой паре параметров (*Д*-разбиение).

Значительно была развита теория импульсного (прерывистого) регулирования. Положено начало разработке методов анализа и синтеза систем, находящихся под непрерывным воздействием возмущающих сил, заданных статистически.

* * *

Работы советских ученых содействовали превращению теории автоматического регулирования в самостоятельную научную дисциплину, которая составляет основу современной автоматики.

За время пятилеток выросли мощные научно-исследовательские центры, занимающиеся вопросами теории автоматического регулирования.

Курс теории автоматического регулирования читается в многочисленных высших технических учебных заведениях СССР.

За последние годы опубликован ряд учебников и учебных пособий по теории регулирования в виде отдельных изданий или значительных по объему глав в курсах по другим дисциплинам. Опубликован также ряд монографий по актуальным вопросам теории регулирования.

Ярким показателем достижений социалистической техники в области автоматического регулирования является присуждение Сталинских премий ученым и инженерам за выдающиеся работы по созданию и внедрению регуляторов.

Сделанный обзор позволяет сформулировать некоторые обобщающие положения о развитии автоматического регулирования в СССР.

1. Советский период ознаменовался существенными достижениями в области теории автоматического регулирования. Разработана теория, решающая задачи расчета и проектирования регулируемых сложных систем с несколькими взаимосвязанными регулируемыми величинами.

Большое значение этого направления в теории автоматического регулирования становится ясным теперь, в условиях быстро расширяю-

щегося применения такого рода систем в ведущих отраслях народного хозяйства.

Предложены и разработаны новые частотные методы, обогатившие теорию автоматического регулирования. Установлены новые оригинальные и достаточно простые критерии устойчивости. Положено начало применению частотных методов для анализа качества и синтеза систем регулирования. Введен в практику структурный анализ, имеющий в своей основе типизацию звеньев систем регулирования по их динамическим свойствам.

2. В последние годы наметился новый мощный подъем в разработке важнейших проблем теории автоматического регулирования.

Предложены оригинальные и эффективные методы решения нелинейных задач теории автоматического регулирования.

Эффективно использованы три основные направления, разработанные советскими учеными в этой области, а именно теория точечных преобразований поверхностей, построение функций А. М. Ляпунова, метод малого параметра. Советские ученые получили существенные результаты в применении частотных методов для решения как линейных, так и нелинейных задач теории автоматического регулирования.

Теория прерывистого регулирования, имеющего в условиях бурного развития импульсной техники актуальное значение, приобрела благодаря работам советских ученых необходимую стройность.

Получены первые результаты в области статистической динамики систем регулирования.

Говоря о современных достижениях и успехах в области теории и практики регулирования, нельзя забывать основополагающей роли русских ученых в создании этой важной отрасли техники и в особенности И. А. Вышнеградского, П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова, Н. Е. Жуковского, И. Н. Вознесенского, А. А. Андронова, Б. В. Булгакова.

Следуя лучшим традициям выдающихся деятелей отечественной науки, советские специалисты прилагают все силы к выполнению задач, поставленных XIX съездом КПСС, чтобы дать стране такие средства автоматики, которые содействовали бы великому делу построения коммунистического общества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Константинов К. И., „Артиллерийский журнал“ № 2, 1854.
2. Чиколев Б. Н., „Электричество“ № 3 и 4, 1880.
3. Wischnegradski, Sur la théorie générale des regulateurs, Comptes Rendus des seances de l'Academie des sciences, t. 83. Paris 1876, p. 318—321.
4. „Техник“ № 6, 1882.
5. Сунгуров П., Регулятор для морских машин во время волнения, „Записки РТО“, вып. 34, 1885.
6. Котурницкий П. В., Маховики и регуляторы в курсе „Устройство паровых машин“, чит. в 1885 — 1886 г., СПБ 1886.
7. Тиме И. А., Курс прикладной механики, ч. II, СПБ 1887.
8. Кондратьев А. П., Центробежные регуляторы, СПБ 1901.
9. Левенсон Л. Б., Плоские регуляторы, Пгр. 1915.
10. Кирпичев В. Л., Беседы о механике, СПБ 1907.
11. Есьман И. Г., Регулирование водяных турбин, СПБ 1910.

12. О р л о в Ф. Е., Общая теория машин, М. 1887.
13. С т р а х о в П. С., Прикладная механика, М. 1899.
14. Ж у к о в с к и й Н. Е., Регулирование хода машин, М. 1909.
15. С и д о р о в А. И., Плоские регуляторы быстроходных машин, М. 1895.
16. Л я п у н о в А. М., Общая задача об устойчивости движения, Харьков 1892.
17. В о з н е с е н с к и й И. Н., О регуляторах непрямого действия, Пгр. 1922.
18. В о з н е с е н с к и й И. Н., За советское энергооборудование, М.—Л. 1943.
19. В о з н е с е н с к и й И. Н., „Автоматика и телемеханика" № 4—5, 1938.
20. Щ е г л я е в А. В., Регулирование паровых турбин, М.—Л. 1938.
21. К у л е б а к и н В. С., „Теоретическая и экспериментальная электротехника" № 4, 1932.
22. Л е б е д е в С. А. и Ж д а н о в П. С., Устойчивость параллельной работы электрических систем, М. — Л. 1933.
23. М и х а й л о в А. В. „Автоматика и телемеханика" № 3, 1938.
24. М и х а й л о в А. В., „Журнал технической физики", вып. 1, 1939.
25. С о л о д о в н и к о в В. В., Некоторые методы исследования систем автоматического регулирования, дисс., ВЭИ, М. 1939.
26. С о л о д о в н и к о в В. В., „Автоматика и телемеханика" № 1, 1941.
27. К у л е б а к и н В. С., „Автоматика и телемеханика" № 6, 1940.
28. Л у з и н Н. Н., „Автоматика и телемеханика" № 5, 1940.
29. Щ и п а н о в Г. В., „Автоматика и телемеханика" № 1, 1939.
30. Сборник „Регулирование паровых турбин", М. — Л. 1936.
31. Тезисы и конспекты докладов на научном совещании по теории регулирования, изд. АН СССР, М. — Л. 1940.
32. A n d r o n o v A., Comptes Rendus, t. 189, Paris 1929, p. 559.
33. К р ы л о в Н. М. и Б о г о л ю б о в Н. Н., Введение в нелинейную механику, Киев 1937.
34. А н д р о н о в А. А. и М а й е р А. Г., ДАН, 1945, т. 47, № 5.
35. А н д р о н о в А. А. и Б а у т и н Н. Н., ДАН 1944, т. 43, № 5.
36. А н д р о н о в А. А. и М а й е р А. Г., „Автоматика и телемеханика" № 5, 1947.
37. Б у л г а к о в Б. В., ДАН т. 51, № 5, 1946.

ГЛАВА II

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

1. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Назовем *динамической системой* любую совокупность взаимодействующих друг с другом устройств, описываемую некоторым числом переменных, изменяющихся во времени и в пространстве. Такого рода переменные часто называются обобщенными координатами.

Минимальное число независимых переменных или обобщенных координат, достаточное для полного описания поведения динамической системы, называется *числом ее степеней свободы*[1]. Например, самолет, рассматриваемый как твердое тело, имеет шесть степеней свободы, поскольку его движение полностью определяется шестью переменными: тремя координатами центра тяжести и тремя угловыми координатами, описывающими движение самолета относительно центра тяжести.

Динамические системы подразделяются на *пассивные* и *активные*. Динамическая система называется *активной*, если она содержит источники энергии. Если в системе источников энергии не имеется, то она называется *пассивной*.

Изменение переменных, характеризующих динамическую систему, вызывается приложенными к ней воздействиями. Точка приложения рассматриваемого воздействия часто называется *входом*, а точка, в которой наблюдается эффект, вызванный этим воздействием, — *выходом* динамической системы.

Свойства всякой динамической системы определяются через ее параметры, примерами которых могут служить масса, коэфициент трения, коэфициент упругости, индуктивность, омическое сопротивление, емкость и т. д.

Параметры могут быть *сосредоточенными* и *распределенными*.

В случае динамических систем с сосредоточенными параметрами переменные, описывающие их поведение, зависят только от времени.

В случае динамических систем с распределенными параметрами по крайней мере некоторые из переменных изменяются не только во времени, но и в пространстве (в случае динамических систем, называемых цепями в зависимости от какой-либо одной из пространственных координат).

---

[1] Это определение справедливо лишь для голономных систем.

Примером динамической системы, содержащей распределенные параметры, может служить энергосистема, состоящая из двух станций, соединенных длинной линией электропередачи, если общая индуктивность, сопротивление и емкость последней рассматриваются распределенными вдоль всей ее длины.

Параметры динамической системы могут быть постоянными или переменными.

В том случае, когда все параметры постоянны, система называется линейной системой с постоянными параметрами или просто линейной системой.

Под постоянным параметром, очевидно, подразумевается такой параметр, который во все моменты времени имеет одно и то же значение, не зависимое от времени и процессов, протекающих в системе. Ни в какой реальной системе параметры никогда не являются строго постоянными, но часто их можно считать таковыми с большей или меньшей степенью точности.

Изменяющиеся параметры могут быть функциями различных величин. Если некоторые из параметров представляют собой заданные функции времени, то система называется линейной системой с переменными параметрами. Однако часто параметры системы являются функциями не времени, а самих переменных, описывающих поведение системы.

Так, например, внутреннее сопротивление купроксного выпрямителя является одновременно функцией и направления, и величины протекающего через него тока. Сопротивление электронной лампы представляет собой обычно функцию как сеточного, так и анодного напряжений. Индуктивность катушки с железом является очень сложной функцией тока намагничивания.

Система, в которой хотя бы один из параметров не сохраняет постоянного значения, а изменяется при изменении переменных, характеризующих поведение системы, называется нелинейной.

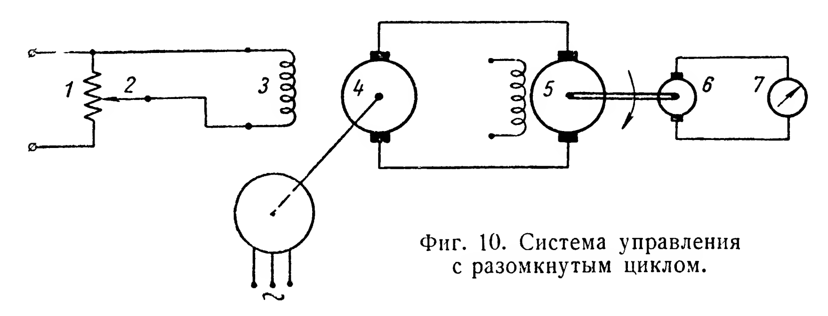
Одно из наиболее существенных свойств всякой линейной системы заключается в том, что если на нее действует одновременно несколько возмущающих воздействий, то их совместный эффект равен сумме эффектов, вызываемых каждым из возмущающих воздействий в отдельности. Этот принцип сложения отдельных эффектов, вызываемых различными возмущающими воздействиями, называется принципом суперпозиции.

2. ОСНОВНОЙ ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В технике весьма часто возникает необходимость управлять изменениями какой-либо физической величины, называемой *регулируемой*, в соответствии с изменениями какой-либо другой физической величины, называемой *управляющей*. Причину изменения последней назовем *управляющим воздействием*. Это управление может осуществляться по принципу разомкнутого или замкнутого цикла.

В первом случае управляющее воздействие прикладывается к устройству, которое вырабатывает сигнал, управляющий обычно при помощи

какого-либо усилителя исполнительным устройством, исполнительное же устройство осуществляет изменения управляемой физической величины в соответствии с изменениями управляющего воздействия на входе. Примером систем разомкнутого цикла может служить система управления числом оборотов двигателя постоянного тока, приведенная на фиг. 10. Передвигая движок *2* потенциометра *1*, мы будем изменять ток в обмотке *3* возбуждения генератора *4*. Это приведет к изменению тока в якоре *5*

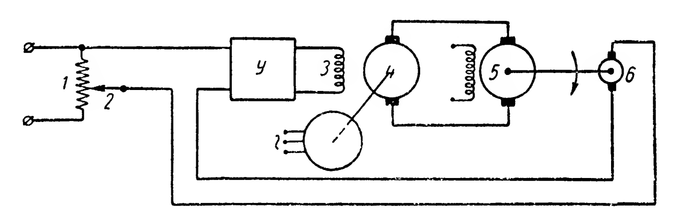


Фиг. 10. Система управления с разомкнутым циклом.

двигателя, что в свою очередь вызовет изменение его угловой скорости. Последняя может измеряться при помощи тахомашины *6* и измерительного прибора *7*.

В этой системе не имеется замкнутого пути обхода, и, таким образом, система является разомкнутой.

Для нормального функционирования систем разомкнутого цикла необходимо соблюдение ряда мер. Прежде всего системы должны быть тщательно отградуированы. Однако ясно, что сохранение градуировки при износе тех или иных частей системы, а также при изменении тем-



Фиг. 11. Система управления с замкнутым циклом — система автоматического регулирования.

пературы, влажности и т. д. представляет собой весьма трудную задачу. В системах разомкнутого цикла не измеряется результат осуществляемого ими процесса управления и не производится никаких действий, если этот результат не соответствует желаемому.

В противоположность этому в системах замкнутого цикла производится измерение разности между требуемым и действительным значением регулируемой переменной, и система функционирует таким образом, чтобы сохранить эту разность в возможно более узких пределах. Примером может служить система для управления числом оборотов двигателя постоянного тока (фиг. 11). Она отличается от схемы на фиг. 10 тем,

что напряжение на зажимах тахомашины *6* сравнивается с напряжением, снимаемым с потенциометра *1*. Если скорость двигателя отличается от заданной, то оба напряжения делаются не равными друг другу, и возникает сигнал ошибки. Последний усиливается, воздействует на возбуждение генератора и изменяет скорость двигателя так, чтобы уменьшить сигнал ошибки и возвратить скорость к заданному значению. Ясно, что схема на фиг. 11 является замкнутой.

Создание систем управления с разомкнутым циклом представляет собой обычно более легкую задачу, чем создание систем с замкнутым циклом. Однако последние обладают часто рядом несомненных преимуществ. Благодаря своему принципу действия, основанному на измерении ошибки вне зависимости от причин, вызвавших ее появление, и на использовании результатов измерения для уменьшения ошибки, системы с замкнутым циклом не требуют точной градуировки и в значительной мере сохраняют свою точность даже в том случае, если параметры элементов испытывают существенные изменения во время их работы.

В настоящее время оба принципа управления — по замкнутому и по разомкнутому циклу — иногда используются в сочетании друг с другом. Однако нас в дальнейшем будет интересовать в основном лишь класс систем с замкнутым циклом, обычно называемых системами автоматического регулирования. Этому классу динамических систем можно дать следующее определение.

Системой автоматического регулирования называется динамическая система, обладающая свойством сохранять требуемую функциональную связь между некоторыми описывающими ее поведение величинами при помощи сравнения функций от этих величин и использования получающихся при этом разностей для управления источниками энергии.

Величинами, о которых идет речь в этом определении, являются, с одной стороны, управляющие переменные, изменения которых обычно зависят не от процессов, происходящих внутри системы регулирования, а лишь от управляющих воздействий, и, с другой стороны, регулируемые величины, которые должны находиться в требуемой функциональной зависимости от управляющих воздействий.

В случае схемы, изображенной на фиг. 11, величинами, между которыми необходимо сохранять требуемую функциональную связь (в данном случае имеющую вид простой линейной зависимости), служат положение движка *2* потенциометра *1* и скорость двигателя, представляющая собой регулируемую величину. Управляющим воздействием является сила, вызывающая перемещение движка потенциометра.

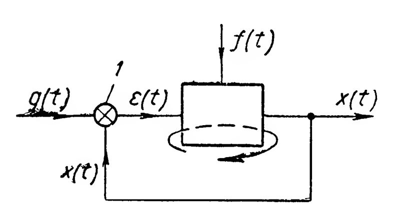
Изменения регулируемых величин вызываются не только управляющими, но и возмущающими воздействиями, приложенными к системе автоматического регулирования.

Возмущающим называется всякое воздействие, которое стремится нарушить требуемую функциональную связь между управляющим воздействием и регулируемой переменной.

В случае схемы, изображенной на фиг. 11, возмущающим воздействием может служить, например, момент нагрузки, приложенный к валу двигателя.

Ясно, что система регулирования должна вести себя по отношению к указанным двум типам воздействий существенно различным образом. В то время как управляющие воздействия должны определять изменения регулируемых переменных, возмущающие воздействия должны, наоборот, возможно менее влиять на изменения регулируемых переменных.

Отметим еще одно различие между управляющими и возмущающими воздействиями, связанное с местом их приложения к системе. Назовем чувствительным элементом системы устройство, служащее для сравнения управляющей и регулируемой переменных. В то время, как управляющее воздействие $g(t)$ может быть приложено к системе только через чувствительный элемент *1* (фиг. 12), возмущающее воздействие $f(t)$ может быть приложено к любой точке системы, включая и чувствительный элемент.



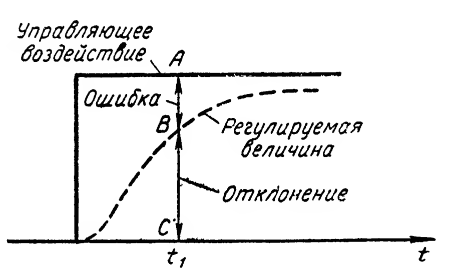
Фиг. 12. Точки приложения управляющего $g(t)$ и возмущающего $f(t)$ воздействий к системе автоматического регулирования с регулируемой величиной $x(t)$.

Вследствие наличия воздействий требуемые и действительные значения регулируемой величины, вообще говоря, отличаются друг от друга.

Разность между требуемым и действительным значением регулируемой величины назовем *ошибкой* системы автоматического регулирования.

Отклонением регулируемой величины условимся называть разность между значением регулируемой величины в данный момент времени и некоторым фиксированным ее значением, принятым за начало отсчета.

Для того чтобы уяснить различие между понятиями „ошибка" и „отклонение", рассмотрим следующий пример. Предположим, что управляющее воздействие, приложенное к системе регулирования, внезапно изменилось на некоторую постоянную величину (фиг. 13). Это изменение управляющего воздействия вызовет соответствующее изменение регулируемой величины. Отклонением $x(t)$ регулируемой величины в момент t_1 называется величина BC, а ошибкой $\varepsilon(t)$ — величина $AC - BC = AB$.



Фиг. 13. К пояснению принятой ошибки и отклонения регулируемой величины.

Заметим, что в то время как отклонение $x(t)$ регулируемой величины при неограниченно возрастающих управляющих воздействиях является также неограниченно возрастающей функцией времени, ошибка $\varepsilon(t)$ во всякой удовлетворительно работающей системе остается всегда ограниченной (фиг. 14).

Воздействие, приложенное к чувствительному элементу системы регулирования, условимся называть *входным сигналом* или величиной

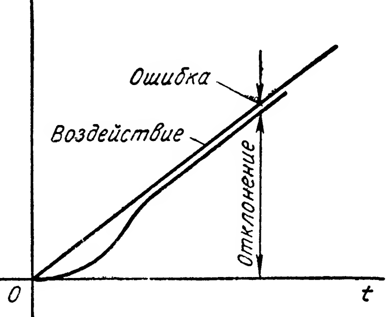
на входе системы автоматического регулирования. *Величиной на выходе* назовем регулируемую величину.

Системы автоматического регулирования часто называют системами с обратной связью. Это объясняется тем, что во всякой системе автоматического регулирования должна иметься не только прямая связь между входом (управляющим воздействием) и выходом (регулируемой величиной), при помощи которой производится управление регулируемой переменной, но и обратная связь между выходом и входом, служащая для сравнения обеих величин.

Сигнал, поступающий с выхода системы на ее вход, назовем *сигналом главной обратной связи*, а разность между входным сигналом и сигналом главной обратной связи — *сигналом ошибки*.

В заключение следует отметить еще одну характерную черту систем автоматического регулирования, заключающуюся в *направленности* их действия.

Эта направленность действия состоит в том, что входной сигнал не может оказать существенного влияния на сигнал главной обратной связи непосредственно через чувствительный элемент, а может это сделать лишь обойдя всю систему в каком-либо определенном направлении (например, по часовой стрелке, как это показано на фиг. 12).



Фиг. 14. Случай неограниченно возрастающего отклонения и ограниченной ошибки.

Итак, *системы автоматического регулирования — это замкнутые активные динамические системы направленного действия.*

3. ТРИ ОСНОВНЫХ КЛАССА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В зависимости от характера управляющего воздействия системы автоматического регулирования с одной регулируемой величиной можно подразделить на три класса:

1) *системы автоматической стабилизации*, в которых управляющее воздействие представляет собой постоянную величину;

2) *системы программного регулирования*, в которых управляющее воздействие является заданной функцией времени;

3) *следящие системы*, в которых характер изменения управляющего воздействия определяется процессами, протекающими вне рассматриваемой системы и заранее не может быть точно определен.

Предположим, например, что движок потенциометра в схеме на фиг. 11 неподвижен. В этом случае управляющее воздействие отсутствует, входной сигнал (напряжение, снимаемое с движка потенциометра) сохраняет постоянное значение, и мы имеем систему автоматической стабилизации скорости двигателя постоянного тока.

Постоянное значение, которое имеет входной сигнал в системах автоматической стабилизации, часто называется настройкой или уставкой регулятора. Оно соответствует требуемому значению регулируемой переменной. Если же движок потенциометра перемещается, скажем, при помощи какого-либо кулачкового механизма и снимаемое с него напряжение является заданной функцией времени, то система на фиг. 11 может рассматриваться как система программного регулирования скорости.

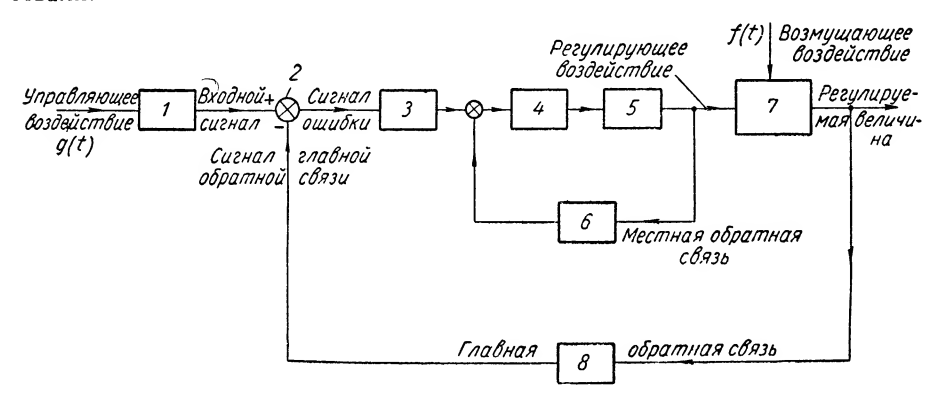
Наконец, если движок потенциометра перемещается вручную или автоматически, например в соответствии с изменяющимися показаниями какого-либо измерительного прибора, и скорость двигателя должна находиться в определенной функциональной зависимости от положения движка, то мы имеем следящую систему.

В современной технике все более широкое применение получают системы автоматического регулирования с несколькими регулируемыми величинами. Такие системы в некоторых случаях можно отнести к классу смешанных систем, представляющих собой соединение систем стабилизации, программного регулирования и следящих систем в виде единой сложной системы.

4. КЛАССИФИКАЦИЯ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПО ИХ НАЗНАЧЕНИЮ

Всякая система автоматического регулирования состоит из объекта регулирования и одного или нескольких присоединенных к нему регуляторов.

Автоматические регуляторы часто являются весьма сложными устройствами.



Фиг. 15. Основные элементы системы автоматического регулирования.

Однако, как бы сложен ни был автоматический регулятор, его всегда можно представить состоящим из следующих основных элементов (фиг. 15):

1) управляющего или задающего элемента *1*, имеющего целью выработать полезный входной сигнал (управляющую величину), с которым регулируемая величина должна находиться в требуемой функциональной

зависимости; иногда на полезный входной сигнал накладывается эффект возмущающего воздействия, приложенного к какой-либо точке управляющего элемента, вследствие чего полный входной сигнал, поступающий на вход системы, может иметь вредную составляющую, создающую дополнительную ошибку;

2) элемента *8* главной обратной связи, вырабатывающего сигнал, который находится в определенной функциональной зависимости от регулируемой переменной;

3) чувствительного элемента или элемента *2* сравнения, дающего на основании сравнения входного сигнала и сигнала главной обратной связи первичный сигнал управления или сигнал ошибки;

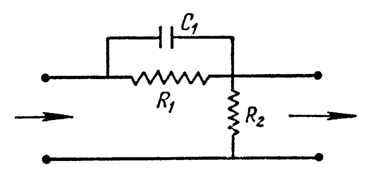
4) последовательного преобразующего или корректирующего элемента *3*, служащего для соответствующего преобразования первичного сигнала управления с целью придать системе требуемые динамические свойства;

5) усилительного элемента *4*, усиливающего сигнал управления, вырабатываемый на выходе последовательного корректирующего устройства;

6) исполнительного элемента *5*, вырабатывающего регулирующее воздействие, прикладываемое к объекту регулирования;

7) параллельного корректирующего элемента *6* (местная обратная связь), предназначенного для придания требуемых динамических свойств системе;

8) объекта регулирования *7*.



Фиг. 16. Корректирующий элемент в виде пассивного электрического контура.

Для пояснения приведенной выше классификации основных элементов системы регулирования рассмотрим систему на фиг. 11. В ней управляющим или задающим элементом является потенциометр *1*, вырабатывающий входной сигнал в виде снимаемого с него напряжения. В этом случае входной сигнал может иметь вредную составляющую, вызываемую, например, колебаниями напряжения источника питания, к которому приключен потенциометр *1*.

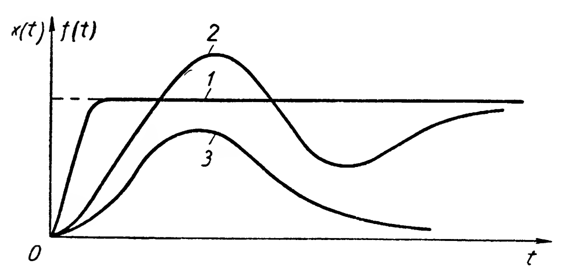
Элементом главной обратной связи служит тахомашина *6*. Напряжение на ее зажимах можно считать пропорциональным регулируемой величине, которой в данном случае является число оборотов двигателя. В рассматриваемой схеме роль чувствительного элемента или элемента сравнения играет первый каскад усиления усилителя. Последовательный преобразующий или корректирующий элемент на схеме не показан. Но им может быть какой-либо пассивный электрический контур (фиг. 16), включенный между первым и вторым каскадом усилителя. Усилительным элементом является (фиг. 11) ламповый усилитель, питающий обмотку *3* возбуждения генератора *4*. В качестве исполнительного элемента можно рассматривать генератор, а в качестве вырабатываемого им регулирующего воздействия — ток в цепи якорей генератора *4* и двигателя *5*. Параллельным корректирующим элементом (местной обратной связью) в схеме на фиг. 11 можно считать обратную связь в усилителе.

В качестве объекта регулирования можно рассматривать двигатель постоянного тока вместе с приключенной к нему нагрузкой.

Следует заметить, что причисление того или иного реального элемента, входящего в состав системы, к одному из указанных выше классов иногда является условным и зависит от удобства рассмотрения. Так, например, генератор постоянного тока на фиг. 11 можно считать, как мы видели, исполнительным элементом, но его же можно рассматривать и как усилительный элемент, считая, что исполнительный элемент как таковой в схеме на фиг. 11 отсутствует.

5. СТАТИЧЕСКИЕ И АСТАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

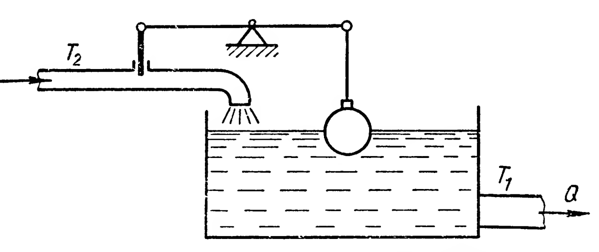
Системы автоматического регулирования принято подразделять на статические и астатические в зависимости от того, имеют они или не имеют отклонение или ошибку в установившемся состоянии при воздействиях, удовлетворяющих определенным условиям.



Фиг. 17. Кривые переходного процесса к статической (кривая 2) и астатической (кривая *3*) системам в случае возмущающего воздействия вида *1*.

Система регулирования называется с т а т и ч е с к о й по отношению к *возмущающему* воздействию, если при воздействии, стремящемся с течением времени к некоторому установившемуся постоянному значению, отклонение регулируемой величины также стремится к постоянному значению, зависящему от величины воздействия.

Система автоматического регулирования называется астатической по отношению к *возмущающему* воздействию, если при воздействии, стремящемся с течением времени к некоторому установившемуся постоянному значению, отклонение регулируемой величины стремится к нулю вне зависимости от величины воздействия.



Фиг. 18. Статическая система автоматического регулирования.

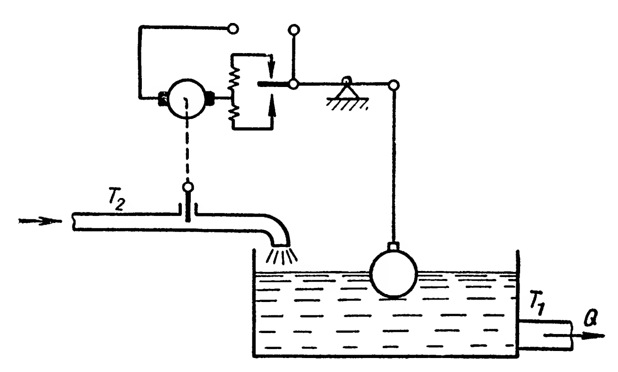
На фиг. 17 кривыми *2* и *3* показано примерное изменение отклонения регулируемой величины в переходном процессе соответственно в статической и в астатической системе в случае возмущающего воздействия, изображенного кривой *1*.

На фиг. 18 приведен пример простейшей статической системы регулирования уровня жидкости. Объектом регулирования здесь служит

резервуар с находящейся в нем жидкостью. Регулятором является регулятор прямого действия [1], состоящий из поплавка, связанного кинематической рычажной передачей с задвижкой. В качестве возмущающего и регулирующего воздействий можно рассматривать соответственно расход и приход жидкости в резервуар.

При увеличении расхода воды по трубе T_1 уровень жидкости понижается, поплавок опускается и переставляет задвижку, увеличивая ее открытие. Количество воды, поступающее в резервуар через трубу T_2, увеличится, и уровень воды начнет повышаться. Установившееся состояние наступит тогда, когда приход воды будет равен ее расходу. Чем больше расход, тем больше открыта задвижка и, следовательно, тем ниже в установившемся состоянии будет находиться уровень жидкости.

Таким образом, в схеме на фиг. 18 установившееся состояние может наступать при различных значениях регулируемой величины.



Фиг. 19 Астатическая система автоматического регулирования.

На фиг. 19 изображена схема астатической системы регулирования уровня жидкости. При увеличении (уменьшении) расхода поплавок опускается (поднимается) и замыкает верхний (нижний) контакт. При этом двигатель начинает вращаться в таком направлении, чтобы поднять (опустить) задвижку и увеличить (уменьшить) приход.

Очевидно, что в этой схеме установившееся состояние при любом расходе может иметь место только при одном определенном значении регулируемой величины, соответствующем нейтральному положению среднего контакта реле.

Из сказанного ясно, что в статической системе зависимость установившегося значения регулируемой величины от установившегося значения воздействия изображается некоторой кривой, которая приближенно может быть заменена, по крайней мере для некоторого интервала установившихся значений воздействия, наклонной прямой линией (фиг. 20, *а*).

В случае астатических систем соответствующая зависимость изображается прямой, параллельной оси абсцисс (фиг. 20, *б*).

Согласно фиг. 20, *а* при изменении величины воздействия от нуля до некоторого f_{max} регулируемая величина может изменяться от x_{max}

---

[1] Регулятором прямого действия в отличие от регуляторов непрямого действия называется регулятор, не содержащий собственных источников энергии. Он изменяет величину регулирующего воздействия за счет энергии, передаваемой от объекта регулирования к чувствительному элементу (в данном случае поплавку), измеряющему отклонение регулируемой величины.

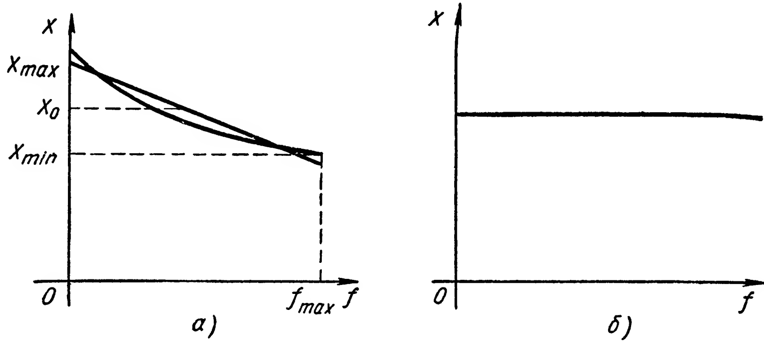
до x_{min}. Одно из значений x в этом интервале, равное, например, среднему арифметическому

$$x_0 = \frac{x_{max} + x_{min}}{2}, \tag{1}$$

принимают за номинальное значение регулируемой величины, а статизмом или коэфициентом неравномерности называют величину

$$\frac{x_{max} - x_{min}}{x_0}. \tag{2}$$

Система автоматического регулирования называется *статической* по отношению к *управляющему* воздействию, если при воздействии, стремящемся с течением времени к некоторому установившемуся постоянному значению, ошибка также стремится к постоянному значению, зависящему от величины воздействия.



Фиг. 20. Зависимость установившегося значения регулируемой величины от установившегося значения воздействия для статической (*а*) и астатической (*б*) систем регулирования.

Система автоматического регулирования называется *астатической* по отношению к *управляющему* воздействию, если при воздействии, стремящемся с течением времени к некоторому установившемуся постоянному значению, ошибка стремится к нулю вне зависимости от величины воздействия.

Следует подчеркнуть, что одна и та же система может быть статической по отношению, скажем, к какому-либо возмущающему воздействию и астатической по отношению к управляющему воздействию и наоборот. Таким образом, если это может вызвать недоразумения, то следует указывать, в какой точке системы приложено воздействие, по отношению к которому последняя является статической или астатической.

Так, в случае систем автоматической стабилизации управляющее воздействие сохраняет постоянное значение (оно может изменяться лишь при перенастройке регулятора), и возникает вопрос о том, является ли система статической или астатической по отношению к возмущающему воздействию.

В случае следящих систем, наоборот, интересуются обычно тем, является ли система статической или астатической по отношению к управляющему воздействию.

6. СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО, ИМПУЛЬСНОГО И РЕЛЕЙНОГО ДЕЙСТВИЯ

Системы автоматического регулирования подразделяются на системы непрерывного, импульсного и релейного действия.

Система автоматического регулирования называется системой непрерывного действия, если между величинами на входе и на выходе всех элементов регулятора существует непрерывная функциональная связь.

Примером системы непрерывного действия может служить схема на фиг. 11, в которой ток в цепи якорей является непрерывной функцией от напряжений на входе усилителя.

Система автоматического регулирования называется *системой импульсного действия*, если величина на выходе какого-либо из ее элементов представляет собой последовательность импульсов, амплитуда, длительность или частота повторения которых зависит от величины на входе этого элемента в отдельные (дискретные) моменты времени.

Примеры систем импульсного регулирования приведены в главе XXI.

Система автоматического регулирования называется *системой релейного действия*, если величина на выходе одного из ее элементов остается одной и той же вне зависимости от значения величины на входе, а ее знак зависит от знака величины на входе.

Пример системы автоматического регулирования релейного действия приведен на фиг. 19.

7. ОДНОКОНТУРНЫЕ И МНОГОКОНТУРНЫЕ, НЕСВЯЗАННЫЕ И СВЯЗАННЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Выше нами указывалось, что всякая система автоматического регулирования согласно самому принципу ее действия всегда имеет по крайней мере одну обратную связь, служащую для сравнения действительного и требуемого значения регулируемой величины. Такого рода обратную связь мы условились называть главной.

Нужно, однако, заметить, что современные системы автоматического регулирования помимо главных обратных связей, число которых равно числу регулируемых величин, часто имеют еще несколько вспомогательных или местных обратных связей.

Системы автоматического регулирования с одной регулируемой величиной, имеющие только одну главную обратную связь и не имеющие местных обратных связей, называются одноконтурными.

Таким образом, одноконтурные системы характеризуются тем, что в них воздействие, приложенное к какой-либо точке, может обойти систему и вернуться в первоначальную точку, следуя по одному только пути обхода (см. фиг. 12).

Системы автоматического регулирования, имеющие помимо одной главной обратной связи еще одну или несколько главных или местных обратных связей, называются многоконтурными.

Таким образом, многоконтурные системы характеризуются тем, что в них воздействие, приложенное к какой-либо точке, может обойти систему и вернуться в первоначальную точку, следуя по нескольким различным путям обхода.

В качестве примера многоконтурной (двухконтурной) системы автоматического регулирования с одной регулируемой величиной можно привести следящую систему, в которой помимо главной обратной связи, служащей для образования сигнала ошибки и осуществляемой при помощи сельсина-датчика и сельсина-приемника, имеется еще местная обратная связь, осуществляемая при помощи тахомашины и приключенного к ней RC-контура, напряжение с выхода которого вычитается из сигнала ошибки.

Примером многоконтурной системы автоматического регулирования с несколькими регулируемыми величинами является система регулирования авиационного двигателя, в которой регулируемыми величинами могут быть число оборотов двигателя, давление наддува, угол опережения зажигания, температура масла, температура охлаждающей жидкости и другие величины.

Причины введения местных обратных связей в систему автоматического регулирования бывают самые различные. Так, например, они могут применяться в корректирующих элементах для преобразования сигнала в соответствии с требуемым законом регулирования, в усилительных элементах — для их линеаризации, понижения уровня шумов, понижения выходного сопротивления, в исполнительных элементах — для повышения их мощности.

Обратные связи, охватывающие несколько последовательно соединенных элементов системы, могут вводиться для придания им требуемых динамических свойств.

Системы автоматического регулирования с несколькими регулируемыми величинами подразделяются на *системы несвязанного* и *связанного регулирования*.

Системами *несвязанного* регулирования называются такие, в которых регуляторы, предназначенные для регулирования различных величин, не связаны друг с другом и могут взаимодействовать лишь через общий для них объект регулирования.

Системы несвязанного регулирования в свою очередь можно подразделить на *зависимые* и *независимые*.

Зависимые системы несвязанного регулирования характеризуются тем, что в них изменение одной из регулируемых величин зависит от изменения остальных. Вследствие этого в таких системах процессы регулирования различных регулируемых величин нельзя рассматривать независимо, изолированно друг от друга.

Примером зависимой системы несвязанного регулирования может служить самолет с автопилотом, имеющий самостоятельные каналы управления рулями. Предположим, например, что самолет отклонился от заданного курса. Это вызовет благодаря наличию автопилота отклонение руля поворота. При возвращении к заданному курсу угловые скорости обеих несущих поверхностей самолета, а следовательно и действующие на них подъемные силы, сделаются неодинаковыми, что

вызовет крен самолета. При этом автопилот отклонит элероны. В результате отклонений руля поворота и элеронов лобовое сопротивление самолета возрастет. Поэтому он начнет терять высоту, и его продольная ось отклонится от горизонтали. При этом автопилот отклонит руль высоты.

Таким образом, в рассмотренном примере процессы регулирования трех регулируемых величин — курса, поперечного крена и продольного крена, строго говоря, нельзя считать независимыми друг от друга, несмотря на наличие самостоятельных каналов управления.

Независимая система несвязанного регулирования характеризуется тем, что в ней изменение каждой из регулируемых величин не зависит от изменения остальных, благодаря чему процессы регулирования различных регулируемых величин можно рассматривать независимо, изолированно друг от друга. В качестве примера независимых систем несвязанного регулирования часто можно рассматривать систему регулирования числа оборотов гидротурбины и систему регулирования напряжения вращаемого ею синхронного генератора. Вследствие того что процесс регулирования напряжения обычно протекает во много раз быстрее, чем процесс регулирования числа оборотов, оба процесса можно рассматривать независимыми друг от друга.

Системами связанного регулирования называются такие системы, в которых регуляторы различных регулируемых величин имеют друг с другом взаимные связи, осуществляющие взаимодействие между ними вне объекта регулирования.

Система связанного регулирования называется *автономной*, если связи между входящими в ее состав регуляторами таковы, что изменение одной из регулируемых величин в процессе регулирования не вызывает изменения остальных регулируемых величин.

8. ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К ДИНАМИЧЕСКИМ СВОЙСТВАМ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Выше мы видели, что системы автоматического регулирования должны обладать свойством сохранять требуемую функциональную зависимость между управляющими и регулируемыми переменными.

В большом числе применений требуемая функциональная связь сводится к простой пропорциональности между управляющим воздействием и значением регулируемой величины.

На практике осуществление идеальных систем регулирования, совершенно точно сохраняющих требуемые функциональные связи, согласно самому принципу их действия невозможно. Поэтому речь может идти лишь о большей или меньшей степени приближения к идеальным условиям. При этом чем выше эта степень приближения, т. е. чем меньше отклонения регулируемых переменных и чем, следовательно, выше качество, тем сложнее оказывается система регулирования. В связи с этим задача проектирования систем автоматического регулирования, так же как и решение почти любой инженерной задачи, сводится к нахождению разумного компромисса между стремлением получить

возможно более высокое качество работы и стремлением достигнуть решения этой задачи возможно более простыми техническими средствами.

Из сказанного ясно, насколько важен вопрос о правильной формулировке требований к динамическим свойствам систем регулирования, определяющих допустимое отклонение реальных условий их работы от идеальных.

Так как требования, предъявляемые к поведению систем регулирования в динамике, зависят от их назначения, характера воздействия, конкретных условий работы и т. д., то они могут быть самыми различными. Все же обычно эти требования можно подразделить на следующие четыре категории:

а) требования к запасу устойчивости системы;

б) требования к величине ошибок в установившемся состоянии или к статической точности;

в) требования к поведению системы в переходном процессе (эти требования обычно называются условиями качества);

г) требования к динамической точности системы, т. е. к величине ошибок при наличии непрерывно изменяющихся воздействий.

Поясним вкратце смысл каждой из указанных выше категорий требований.

Системы регулирования вследствие самого принципа их действия, благодаря которому часть энергии с их выхода может возвращаться обратно на вход, являются системами, склонными к колебаниям.

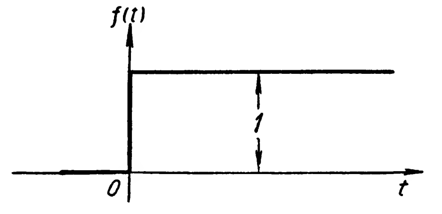
Рассмотрим, например, самолет, снабженный автоматом курса, реагирующим на отклонения самолета от требуемого направления. Предположим, что в начальный момент времени благодаря действию тех или иных возмущающих причин продольная ось самолета не совпадает с требуемым направлением движения. Тогда чувствительный элемент автомата курса выработает сигнал, который заставит отклониться руль направления.

В результате отклонения руля от нейтрали возникнет вращающий момент, который будет стремиться возвратить самолет на заданный курс. Однако в момент, когда продольная ось самолета совпадет с требуемым направлением движения, его вращательное движение не прекратится. Это произойдет, во-первых, потому, что самолет, имеющий значительный момент инерции, будет обладать при подходе к заданному курсу определенным запасом кинетической энергии, и, во-вторых, потому, что автомат курса, обладающий некоторым запаздыванием, возвратит руль в нейтральное положение лишь через некоторый промежуток времени после того, как продольная ось самолета совпадет с заданным курсом.

Вследствие указанных причин самолет будет отклоняться от заданного курса в направлении, противоположном первоначальному отклонению, до тех пор, пока автомат курса не произведет перекладку руля и пока в результате этого не разовьется вращающий момент, достаточный для того, чтобы заставить самолет опять стремиться к заданному курсу. Теперь самолет подойдет к нему уже с другой стороны, и по тем же причинам, которые были приведены выше, опять возникнет отклонение

от заданного курса, имеющее тот же знак, что и первоначальное отклонение. Затем тот же процесс повторится снова и т. д. При этом если демпфирование самолета невелико, а его инерция и запаздывание автомата курса значительны, то амплитуда колебаний самолета относительно курса будет постепенно возрастать, и, таким образом, сохранение требуемого курса не сможет быть достигнуто.

Приведенный пример показывает, что принцип обратной связи, принцип получения сигнала ошибки, лежащий в основе действия систем регулирования, может превратиться из средства подавления колебаний и уменьшения ошибки в средство генерации колебаний и увеличения ошибки. Из этого же примера ясно, что всякая система регулирования, для того чтобы удовлетворительно работать, прежде всего должна быть устойчива, т. е. должна обладать свойством, при котором начальные отклонения регулируемой величины от требуемого закона изменения должны стремиться к нулю с течением времени. Поэтому требование устойчивости является первым и важнейшим условием нормальной работы систем регулирования. При этом необходимо подчеркнуть, что требование устойчивости должно удовлетворяться с некоторым запасом, предусматривающим возможные изменения параметров системы во время ее работы.



Фиг. 21. Единичное ступенчатое воздействие.

Однако понятие устойчивости, связанное, как мы видели, с рассмотрением поведения системы в отсутствии воздействий, является лишь необходимым, но далеко не достаточным для характеристики динамических свойств систем регулирования в реальных условиях их работы, связанных с наличием воздействий.

Для того чтобы охарактеризовать эти динамические свойства, необходимо прежде всего уточнить вопрос о том, какие воздействия следует иметь в виду, так как поведение системы регулирования, конечно, существенно зависит от величины и характера изменения воздействий.

Решение этого вопроса часто связано с затруднениями, так как обычно воздействия, приложенные к системам регулирования, представляют собой непрерывно изменяющиеся функции времени, точный закон изменения которых невозможно предугадать. Однако при внимательном рассмотрении конкретных условий работы системы часто все же оказывается возможным выбрать среди всего многообразия возможных воздействий такое, которое являлось бы либо наиболее типичным, либо наиболее неблагоприятным. Выбрав такое типичное воздействие и изучив вызываемый им переходный процесс, можно составить себе довольно полное представление о динамических свойствах системы.

В виде типового воздействия при анализе динамики систем автоматического регулирования весьма часто выбирают так называемое ступенчатое воздействие, или единичный скачок (фиг. 21). Такого рода воздействию соответствуют, например, сбросы или набросы нагрузки в системах регулирования скорости двигателей, отказ мотора в системе

двухмоторный самолет — автомат курса, внезапное изменение положения задающей оси в следящих системах и т. д.

Иногда типовым воздействием служит воздействие в форме дельта-функции, т. е. импульса произвольной формы, имеющего определенную площадь и весьма малую продолжительность по сравнению с ожидаемой продолжительностью переходного процесса. В реальных условиях такого рода воздействие может иметь место, например, в случае внезапного вхождения самолета в струю воздуха, движущегося перпендикулярно траектории движения самолета. Другим примером может служить импульсная нагрузка, которая возникает на валу двигателя в следящем приводе, служащем для управления летучими ножницами в стане горячей прокатки при разрезании полосы на листы и т. д.

В случае следящих систем весьма часто пользуются типовым управляющим воздействием вида

$$g(t) = g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \ldots + g_r t^r; \; t > 0;$$
$$g(t) = 0; \; t < 0, \tag{3}$$

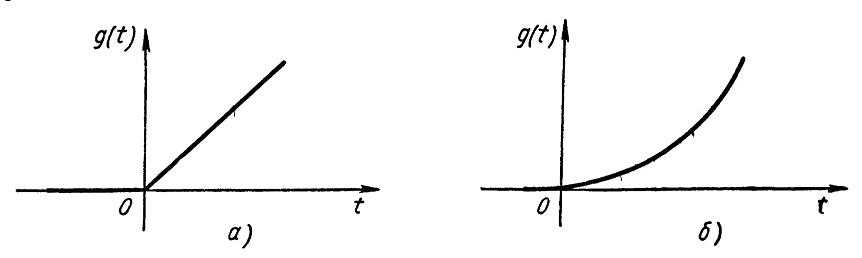
частными случаями которого, например, являются

$$g(t) = \begin{cases} g_1 t; & t > 0; \\ 0 & t < 0, \end{cases} \tag{4}$$

или

$$g(t) = \begin{cases} g_2 t^2; & t > 0; \\ 0\;; & t < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Случаю (4) соответствует изменение управляющей оси с постоянной скоростью, а случаю (5) — его изменение с постоянным ускорением (фиг. 22).



Фиг. 22. Управляющее воздействие, изменяющееся с постоянной скоростью (кривая *а*) и с постоянным ускорением (кривая *б*).

При анализе некоторых следящих систем, например применяемых для управления антенной радиолокатора, в качестве типового управляющего воздействия пользуются выражением

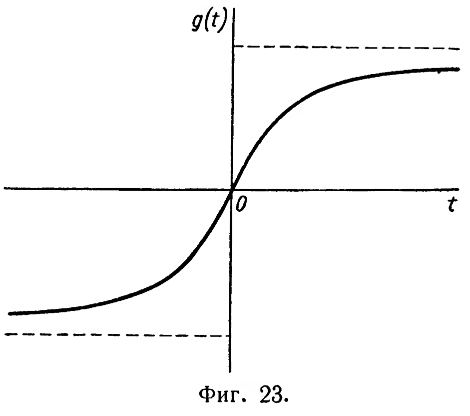
$$g(t) = \operatorname{arctg} bt, \tag{6}$$

представляющим собой (фиг. 23) закон изменения азимутального угла между направлением на цель и некоторым фиксированным направлением в случае прямолинейного и равномерного движения цели.

Наконец, в отдельных случаях типовые воздействия могут иметь весьма сложную форму, определяемую непосредственно из эксперимента.

Каким бы ни было выбранное типовое воздействие, оно всегда вызовет в системе некоторый переходный процесс, после затухания которого (а такое затухание обязательно произойдет, поскольку предполагается, что условие устойчивости удовлетворяется) система придет в некоторое установившееся состояние.

В соответствии с указанными двумя стадиями реакции системы регулирования на типовые воздействия естественно подразделить и требования, которые следует предъявлять к динамическим свойствам системы (их обычно называют условиями качества[1]), на требования к ее поведению в установившемся состоянии и в переходном процессе.



Фиг. 23.

Первая группа требований определяет так называемую статическую точность системы регулирования, т. е. отклонение регулируемой величины от требуемого закона изменения или величину ошибки через достаточно большой промежуток времени после приложения того или иного воздействия.

Поясним на примере, каким образом можно подойти к формулировке технических условий на статическую точность системы.

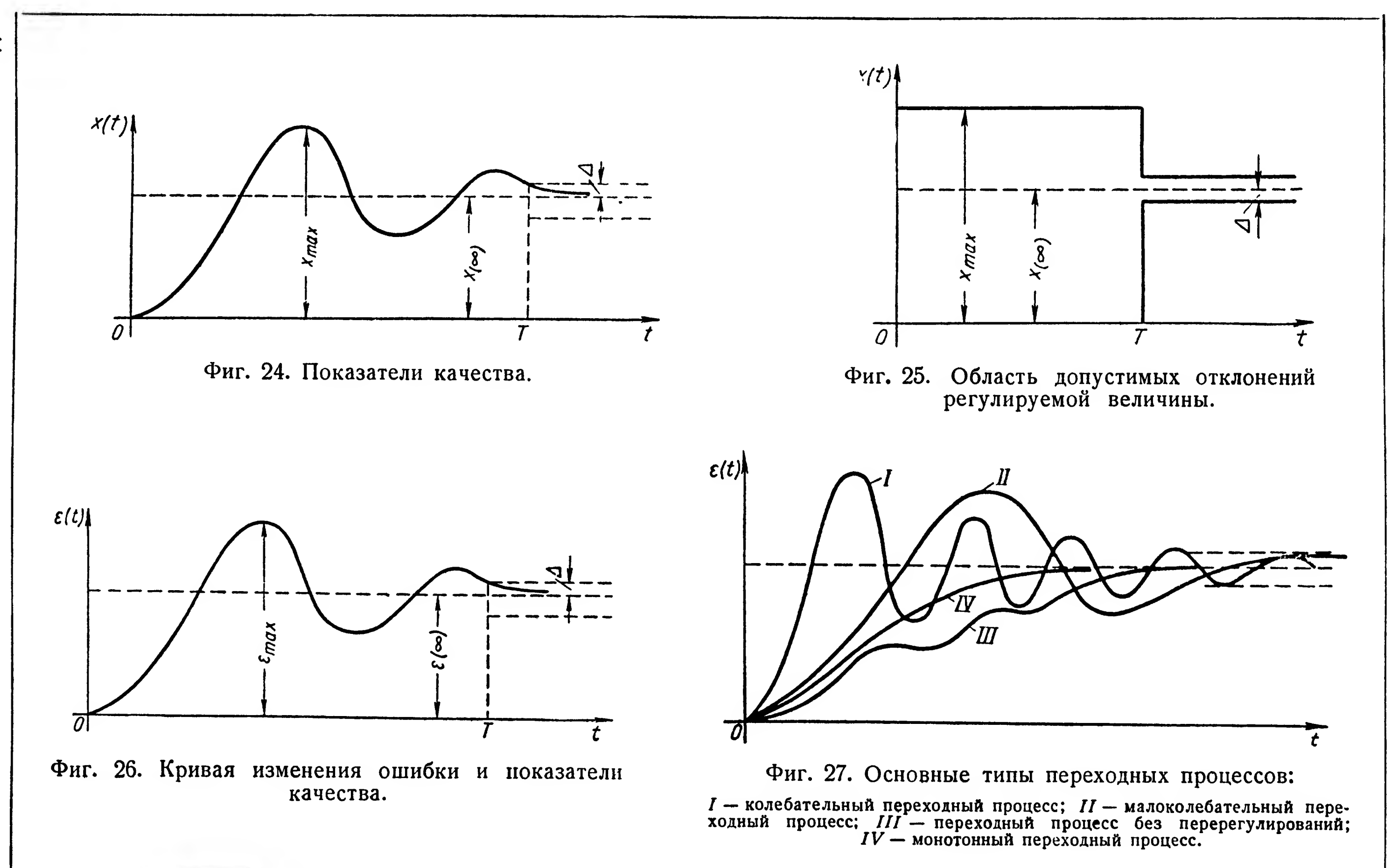
Предположим, например, что мы рассматриваем следящую систему, осуществляющую синхронную передачу углового перемещения вала, который может вращаться с угловой скоростью или ускорением, сохраняющим постоянное значение в течение длительных промежутков времени. Выбрав максимально возможное из значений угловой скорости и ускорения и потребовав, чтобы установившаяся ошибка слежения при этом равнялась некоторому допустимому значению, мы тем самым достигнем того, что установившаяся ошибка будет лежать в допустимых пределах при всех возможных значениях угловой скорости и ускорения и, следовательно, система будет обладать требуемой статической точностью.

Если только что рассмотренная первая группа требований определяет поведение системы в установившемся состоянии, т. е. через достаточно большой промежуток времени после приложения воздействия, то следующая группа требований характеризует поведение системы в переходном процессе, т. е. ее поведение в промежуток времени, непосредственно следующий за моментом приложения выбранного типового воздействия.

Поведение системы в переходном процессе, вызванном типовым воздействием, стремящимся с течением времени к постоянному устано-

---

[1] В. В. Солодовников, „Бюллетень ВЭИ", вып. 4, 1941.



Фиг. 24. Показатели качества.

Фиг. 25. Область допустимых отклонений регулируемой величины.

Фиг. 26. Кривая изменения ошибки и показатели качества.

Фиг. 27. Основные типы переходных процессов:

I — колебательный переходный процесс; *II* — малоколебательный переходный процесс; *III* — переходный процесс без перерегулирований; *IV* — монотонный переходный процесс.

вившемуся значению, или, как обычно говорят, качество системы, принято часто характеризовать при помощи следующих величин, называемых показателями качества (фиг. 18):

1) максимального отклонения регулируемой величины x_{max}, если отклонение регулируемой величины $x(t)$ с течением времени стремится к нулю (фиг. 24), или величины перерегулирования, равной

$$\sigma\% = \frac{x_{max} - x(\infty)}{x(\infty)} 100\%,$$

где $x(\infty)$ — статическое отклонение, если $\lim_{t \to \infty} x(t) = x(\infty)$;

2) статического отклонения $x(\infty)$;

3) времени переходного процесса или времени регулирования T, т. е. наименьшего из значений времени, отсчитываемого от момента приложения воздействия, после которого имеет место неравенство

$$|x(t) - x(\infty)| \leqslant \Delta,$$

где Δ — заданная малая постоянная величина [величина $x(\infty)$ в частном случае может равняться нулю];

4) числа колебаний $\varkappa$ регулируемой величины $x(t)$ в течение времени переходного процесса T.

При этом обычно считается, что система обладает требуемым качеством, если она удовлетворяет заданным условиям качества, т. е. если показатели качества: 1) статическое отклонение $x(\infty)$; 2) максимальное отклонение x_m (или перерегулирование σ); 3) время переходного процесса T; 4) число колебаний $\varkappa$ не превышает некоторых заранее заданных значений.

Графически условия качества обычно сводятся к тому, чтобы отклонение регулируемой величины $x(t)$ не выходило ни при каких значениях t из некоторой области, изображенной на фиг. 25. Эта область называется допустимой областью отклонений регулируемой величины в переходном процессе[1].

В случае следящих систем условиям качества обычно должна удовлетворять ошибка $\varepsilon(t)$. Понятие о показателях качества применительно к ошибке пояснено на фиг. 26.

Обычно условия качества допускают не более одного-двух колебаний в течение переходного процесса, а иногда они требуют, чтобы колебания вообще отсутствовали.

В соответствии со сказанным переходные процессы при не равном нулю статическом отклонении удобно подразделить на следующие основные типы (фиг. 27):

1) колебательные процессы (кривая *I*), характеризуемые наличием двух или большего числа перерегулирований;

---

[1] Приведенное выше понятие качества систем автоматического регулирования, а также понятие о допустимой области отклонений регулируемой величины было предложено в кандидатской диссертации [25], см. литературу в конце главы I.

2) малоколебательные процессы (кривая *II*), характеризуемые наличием только одного перерегулирования;

3) процессы без перерегулирования (кривая *III*), характеризуемые тем, что отклонение регулируемой величины остается в переходном процессе меньше ее установившегося значения, т. е. условием $x(t) \leqslant \leqslant x(\infty)$ при всех t (с точностью до Δ);

4) монотонные процессы (кривая *IV*), характеризуемые тем, что скорость изменения регулируемой величины не меняет знака в течение всего переходного процесса, т. е. условием $\frac{dx}{dt} \geqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ и условием $|x(t) - x(\infty)| \leqslant \Delta$ при $t > T$.

Заметим, что в случае воздействий, неограниченно возрастающих с течением времени, отклонение регулируемой величины также неограниченно возрастает. Поэтому тогда говорят не об установившемся и максимальном отклонении, а об установившейся и максимальной ошибке, причем условия качества предъявляются не к отклонению регулируемой величины, а к ошибке.

Приведенные выше показатели качества часто оказываются вполне достаточными для характеристики динамических свойств системы регулирования в переходном процессе, вызванном тем или иным типовым воздействием.

Однако иногда реальные условия работы системы регулирования могут быть такими, что само понятие „переходный процесс" теряет смысл. В особенности это относится к тем случаям, когда воздействия представляют собой такие непрерывно и быстро изменяющиеся функции времени, какими являются, например, различного рода помехи и шумы.

Характерным примером может служить следящая система для управления антенной радиолокатора. В ней на входной сигнал, воспроизводящий действительный закон движения цели, за которой следит радиолокатор, накладываются помехи или флюктуации, представляющие собой быстро изменяющиеся случайные функции времени. Флюктуации входного сигнала создаются непрерывным изменением коэфициента отражения самолета в процессе его облучения радиолокатором вследствие рыскания и качки самолета, неоднородности отражающей поверхности, вращения винта и других причин.

Такого рода воздействия при анализе не могут быть заменены типовым воздействием в виде заданной функции времени, и в то же время ими нельзя пренебречь, так как от них существенным образом зависит общая величина ошибки системы.

При этом такие показатели качества, как время переходного процесса, статическое отклонение, число колебаний, а также перерегулирование, теряют смысл и сохраняет значение лишь максимальное отклонение x_{max}, характеризующее в отличие от $x(\infty)$ не статическую точность системы в установившемся состоянии, а ее динамическую точность в неустановившемся состоянии.

Следует, однако, заметить, что как вследствие трудности оценки мгновенных максимальных значений $x(t)$, так и вследствие того, что последние часто недостаточны для характеристики работы системы при непрерывно изменяющихся случайных воздействиях, в этих случаях

обычно вводят в рассмотрение некоторые средние значения от $x(t)$, определяющие динамическую точность системы для некоторых промежутков времени (подробнее об этом см. в гл. XXII).

Примером такого рода показателей качества могут служить средние квадратические или срединные значения отклонений регулируемой величины или ошибки (см. гл. XXII).

Обычно системы регулирования наряду с требованиями к динамическим свойствам должны удовлетворять ряду требований, связанных с условиями их эксплуатации.

Эти требования часто имеют решающее значение при выборе элементов систем регулирования. При этом, поскольку каждое конкретное устройство обладает своими динамическими характеристиками, ясно, что эксплуатационные требования имеют существенное влияние на динамические свойства системы и что, следовательно, к анализу динамики нужно переходить лишь тогда, когда имеется уверенность в том, что элементы системы регулирования выбраны с учетом этих требований.

Ввиду многообразия условий эксплуатации, в которых приходится работать различным системам регулирования, мы не имеем возможности останавливаться на этом вопросе сколько-нибудь подробно, но считаем необходимым подчеркнуть, что анализ условий эксплуатации и вытекающих из них требований должен предшествовать проектированию любой системы регулирования.

ГЛАВА III

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ТИПОВЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Многочисленные устройства, осуществляющие автоматическое регулирование в разнообразных промышленных, транспортных и других технических установках, имеют сравнительно небольшое число типовых узлов, обладающих некоторыми общими свойствами.

Разделение элементов систем автоматического регулирования на группы и выделение типовых элементов и узлов производят, основываясь на целевом признаке, характеризующем назначение того или иного элемента в схеме, или на динамическом признаке, характеризующем динамические качества элемента.

В данной главе в основу подразделения элементов на типовые группы будет положен целевой, функциональный признак.

Классификация элементов системы автоматического регулирования по этому признаку была дана в главе II. Задача настоящей главы состоит в том, чтобы, во-первых, дать несколько более подробную характеристику каждой типовой группы элементов и, во-вторых, показать на нескольких примерах, каким образом эти элементы в соединении и во взаимодействии друг с другом образуют системы автоматического регулирования.

1. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Задающие элементы. В системах автоматической стабилизации задающий элемент является некоторым эталоном, позволяющим производить сравнение требуемого и действительного значения регулируемой величины. Таким эталоном могут быть пружины, эталонное сопротивление, эталонное напряжение, груз, уровень и т. п.

В следящих системах задающее или управляющее воздействие вырабатывается различными способами: рукой человека, двигателем, приводящим в движение программный датчик, либо каким-либо преобразовательным устройством (датчиком), воспринимающим изменения того внешнего процесса, за которым должна следить система.

Чувствительные элементы регуляторов предназначаются для измерения отклонения регулируемой величины от заданного значения и преобразования этого отклонения в сигнал управления, воздействующий на систему регулирования. Конструктивно они отличаются

от чувствительных органов точных измерительных приборов тем, что, во-первых, диапазон их измерения значительно ýже, и во-вторых, тем, что мощность их обычно больше, чем мощность измерительных приборов. Особенно мощными должны быть чувствительные органы регуляторов прямого действия.

В табл. 1 и 2 приведены схематические изображения некоторых видов чувствительных элементов непрерывного действия (табл. 1) и прерывистого или релейного действия (табл. 2).

Таблица 1

Чувствительные элементы непрерывного действия

Род измеряемой величины	Схематический вид и наименование прибора	Входное воздействие	Выходная координата
Электрическая	Электромагнит втяжного типа	Напряжение, ток	Перемещение сердечника
	Электромагнит поворотного типа	Напряжение, ток	Угол поворота якоря
	Магнитоэлектрический	Напряжение, ток	Угол поворота рамки

4 Коллектив авторов 1309

Род измеряемой величины	Схематический вид и наименование прибора	Входное воздействие	Выходная координата
Электрическая	Электронный	Напряжение, ток	Анодный ток
Скорость вращения	Центробежный маятник	Угловая скорость вращения шпинделя	Перемещение муфты
	Индукционный тахометр	Угловая скорость вращения оси магнита	Угол поворота диска
	Тахогенератор	Угловая скорость вращения вала	Напряжение на щетках
	Прецизионный гироскоп	Вращение установки вокруг оси	Угол поворота внутреннего кольца вокруг оси

Род измеряемой величины	Схематический вид и наименование прибора	Входное воздействие	Выходная координата
Температура	η φ Контактный термометр	Температура	Сопротивление внешней цепи
	φ η Биметалл	Температура	Прогиб биметаллической пластинки
	η φ Термопара	Температура спая	Электродвижущая сила на холодных концах термопары
	η Термометр сопротивления	Температура в колбе	Напряжение на диагонали моста
Давление	η φ η φ Мембрана	Давление на мембрану	Прогиб мембраны

Продолжение табл. 1

Вид измеряемой величины	Схематический вид и наименование прибора	Входное воздействие	Выходная координата
Давление	Пружинная трубка	Давление в трубке	Угол поворота свободного сечения трубки
	Дифманометр для измерения скорости жидкости или газа	Скорость течения жидкости или газа	Прогиб мембраны

Таблица 2

Чувствительные элементы релейного (прерывистого) действия

Схематический вид и наименование прибора	Входное воздействие	Выходное воздействие
Контактный гальванометр с падающей дужкой для прерывистого регулирования	Напряжение, ток рамки	Длительность периодического замыкания ртутных контактов

Схематический вид и наименование прибора	Входное воздействие	Выходное воздействие
Поляризованное реле	Напряжение, ток обмотки реле	Замыкание контакта реле
Контактный термометр	Температура	Замыкание контакта со ртутью
Вибрационный двухпозиционный орган (реле)	Изменение питающего напряжения	Замыкание контактов

Элементы для выявления разности двух величин. В следящих системах задающий элемент часто не входит в конструкцию следящей системы и находится вне ее. В этих случаях имеется специальное устройство для измерения разности (ошибки) между двумя величинами, одна из которых задается задающим элементом, а другая — исполнительным двигателем следящей системы. Эти устройства связывают следящую систему с внешним датчиком. В табл. 3 приведены некоторые типы элементов для измерения ошибки. Эти элементы также можно разделить на элементы непрерывного и прерывистого действия.

Усилительные элементы предназначаются для усиления мощности сигнала, выработанного чувствительным элементом. В табл. 4 показаны некоторые типы усилителей мощности.

Исполнительные элементы предназначаются для создания регулирующего воздействия на объект.

В тех случаях, когда исполнительный элемент производит механическое перемещение регулирующего органа, его называют исполнительным двигателем (сервомотором). По существу исполнительный элемент является тоже усилителем мощности. Выделение исполнительных элементов с подвижным выходом в специальную группу сервомоторов

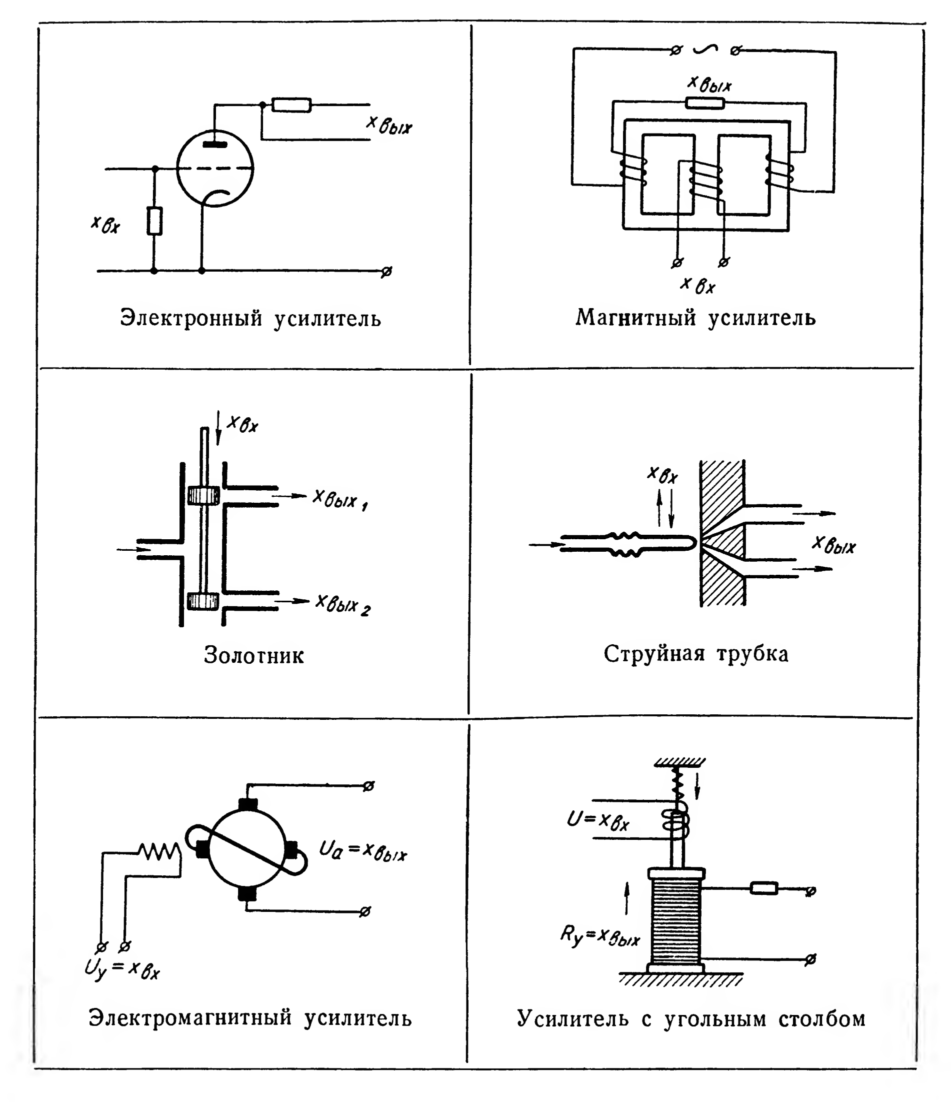
Таблица 3

Элементы для измерения ошибок

Вид элемента	Сравниваемые величины	Разность
Механический диференциал	Углы поворота валов g и x	Угол поворота оси водила ε
Сельсины в трансформаторном режиме	Углы поворота роторов сельсинов A и B	Напряжение на однофазной обмотке сельсина B
Разностный мост	Перемещение ползунков A и B	Напряжение между ползунками A и B
Прерывистый элемент — контактные кольца	Углы поворота колец и щетки	Замыкание щетки с одним из колец

Таблица 4

Усилительные элементы с неподвижным выходом



Электронный усилитель; Магнитный усилитель; Золотник; Струйная трубка; Электромагнитный усилитель; Усилитель с угольным столбом

оправдывается тем, что конструкция и динамические свойства сервомоторов обычно существенно отличаются от конструкции и динамических свойств усилителей с неподвижным выходом. В табл. 5 схематически показаны некоторые типы сервомоторов.

Корректирующие устройства. Корректирующие последовательные и параллельные устройства, применяемые для изменения в необходимом направлении динамических качеств системы регулирования, требуют для понимания принципов их действия знакомства с осно-

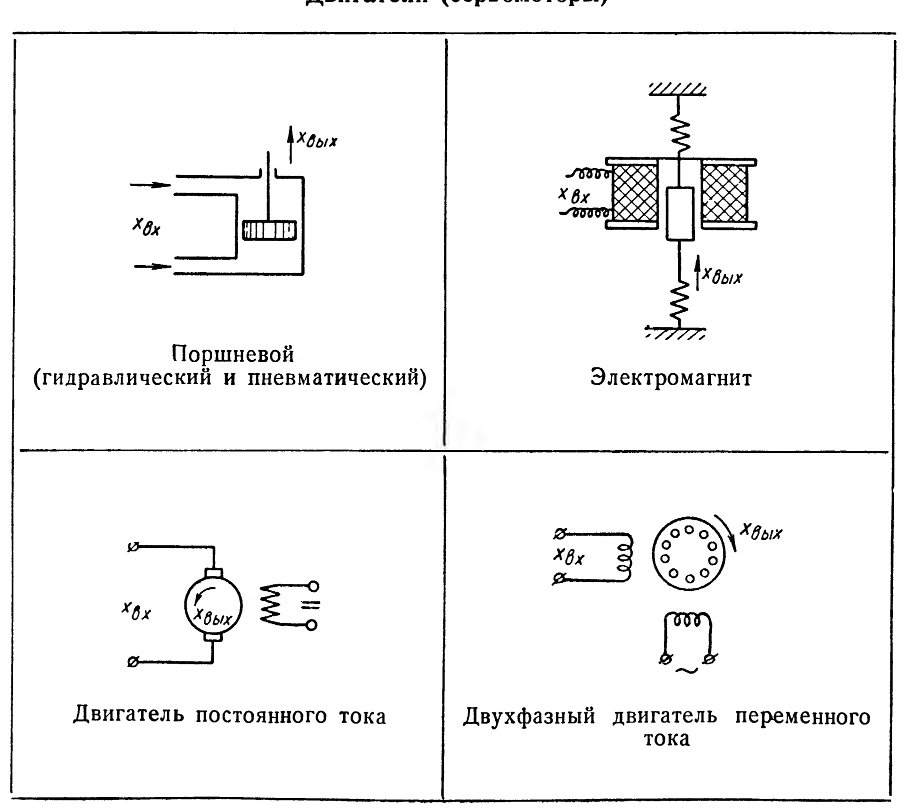
вами теории автоматического регулирования. Описание основных типов корректирующих устройств поэтому будет дано в последующих главах. В этой главе при рассмотрении примеров конкретных схем автоматического регулирования будут показаны примеры выполнения отдельных корректирующих устройств без подробного описания их действия.

Преобразовательные элементы. Помимо указанных выше основных элементов системы регулирования в отдельные ее точки часто включают специальные элементы, преобразующие одну величину в другую, либо отличающуюся от нее количественно, либо имеющую другую размерность. К таким преобразованиям прибегают в тех случаях, когда выработанная в предшествующем элементе величина неудобна по каким-либо причинам для ее дальнейшего использования. В табл. 6 приведены схемы некоторых преобразовательных элементов.

Ознакомившись в общих чертах с основными видами элементов, входящих в систему автоматического регулирования, рассмотрим на нескольких конкретных примерах, каким образом эти элементы в соединении и во взаимодействии друг с другом образуют системы автоматического регулирования.

Таблица 5

Двигатели (сервомоторы)



Поршневой (гидравлический и пневматический)

Электромагнит

Двигатель постоянного тока

Двухфазный двигатель переменного тока

Таблица 6

Преобразовательные элементы

Вид элемента	Преобразуемая величина	Преобразованная величина
ε, $C\varepsilon$ Зубчатая передача и червячная передача	Угол	Угол
ε, $C\varepsilon$ Трансформатор	Переменное напряжение одной величины	Переменное напряжение другой величины
ε, $C\varepsilon$ Реостатный преобразователь	Перемещение	Сопротивление
ε, $C\varepsilon$ Угольный столб	Перемещение	Сопротивление

Вид элемента	Преобразуемая величина	Преобразованная величина
-U +Ir Индуктивный преобразователь	Угол поворота сердечника	Индуктивное сопротивление
Cε Емкостный преобразователь	Угол поворота пластины	Емкость между пластинами
Cε Фотоэлектронный преобразователь	Перемещение экрана (или изменение светового потока)	Сопротивление фотоэлемента

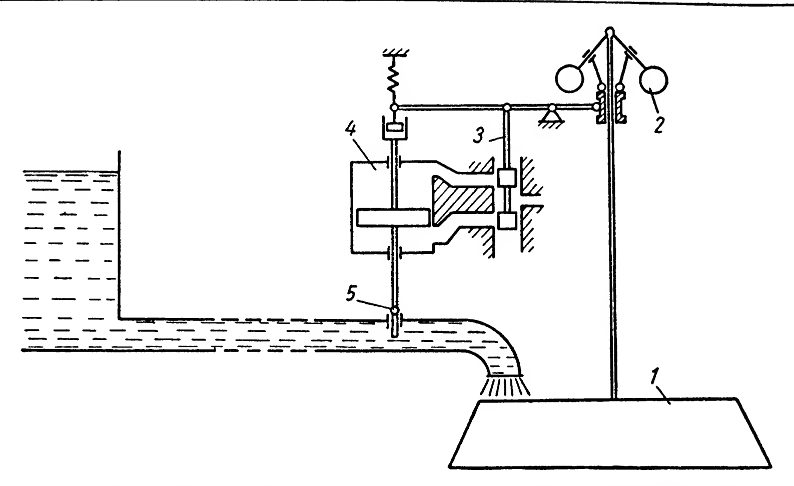
2. АВТОМАТИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ГИДРОТУРБИН

Принцип действия системы регулирования скорости гидротурбины поясняется с помощью упрощенной схемы, показанной на фиг. 28.

Чувствительный элемент регулятора — центробежный маятник *2* — связан с валом турбины *1*. С изменением скорости вращения вала турбины грузы маятника изменяют свое положение. Их перемещение вызывает перемещение золотника *3*, управляющего сервомотором *4*. Сервомотор перемещает орган *5*, изменяющий количество воды, поступающей в турбину в единицу времени.

На фиг. 29 показана упрощенная кинематическая схема регулятора УК-150 (универсальный котельный регулятор Ленинградского металлического завода имени Сталина [1]).

Регулятор предназначен для регулирования скорости мощных турбин на электростанциях. Подобного рода регуляторы установлены на гидротурбинах Днепровской ГЭС.



Фиг. 28. Упрощенная схема автоматического регулирования скорости гидротурбин.

Фиг. 29. Упрощенная кинематическая схема регулятора скорости гидротурбины УК-150

Чувствительным (измерительным) элементом регулятора служит центробежный маятник, приводимый во вращение небольшим синхронным двигателем *1*. Последний приключен к зажимам генератора, который приводится во вращение турбиной.

Синхронный двигатель заменяет ременную передачу от вала турбины к шпинделю центробежного маятника. Скорость вращения синхронного двигателя пропорциональна частоте переменного тока, т. е. скорости вращения вала турбины. Хотя изменение скорости синхронного двигателя происходит с некоторым замедлением по отношению к изменению частоты, однако эти замедления ничтожны.

Вместе с диском маятника *2* вращаются два цилиндрических груза *3*, охваченных гибкой стальной лентой *4*. К лапам грузов *5* прикреплены две пружины *6*, которые стремятся сблизить грузы друг с другом. Сближению грузов препятствует центробежная сила. При изменениях центробежной силы грузы перекатываются по диску и ленте, и давление ленты передается на пяту и штифт *7* маятника.

При возрастании скорости грузы расходятся, и растянувшаяся лента перемещает штифт *7* вниз. При уменьшении скорости грузы сходятся, и пружина, не показанная на фигуре, поднимает штифт вверх. Трение скольжения при такой конструкции регулятора почти отсутствует, и его чувствительность весьма велика.

Усилия, передаваемые штифтом *7*, весьма малы, и для перестановки громоздкого направляющего аппарата турбины необходимо между чувствительным элементом регулятора и направляющим аппаратом включить несколько усилителей.

Таким образом, рассматриваемая схема является примером системы непрямого регулирования.

Первым усилителем является вспомогательный гидравлический сервомотор, который на схеме фиг. 29 показан в упрощенном виде.

Давление штифта *7* маятника передается на золотниковый рычаг *8* и перемещает золотник *9* вспомогательного сервомотора.

По трубопроводам *10* в корпус сервомотора под большим давлением поступает от насоса масло. В среднем положении золотника отверстия в стакане, соединяющие пространство вокруг поршня *11* с внутренностью стакана, перекрыты, и обе поверхности поршня находятся под одинаковым давлением. Как только золотник сместится вверх или вниз, одно из отверстий открывается. Например, при перемещении вниз пространство под поршнем соединяется с внутренностью стакана и через отверстия в центре стакана и в середине поршня — со сливной трубой.

Давление под поршнем сразу падает, и поршень перемещается вслед за золотником вниз. При этом поршень перемещает и скрепленный с ним стакан. Когда поршень догонит золотник и последний снова окажется в центре, сливное отверстие отсоединяется от рабочей камеры, и поршень останавливается. Весь этот процесс протекает весьма быстро.

Через систему рычагов движение поршня вспомогательного сервомотора передается на следующий усилительный каскад — на главный распределительный золотник *12*, который управляет поступлением масла

по трубе *13* или по трубе *14* в сервомотор *15* направляющего аппарата турбины. Сервомотор *15* является исполнительным двигателем. Его поршень производит перестановку направляющего аппарата турбины, осуществляющего поворот рабочих лопаток турбины. Изменение поворота лопаток приводит к изменению движущего момента турбины и к изменению ее скорости вращения. Направляющий аппарат является исполнительным элементом или регулирующим органом системы.

Если бы система регулирования состояла только из описанных элементов, процесс регулирования был бы или неустойчивым, или неудовлетворительным по качеству. Для обеспечения устойчивости в регуляторе имеется обратная связь между поршнем сервомотора и золотником.

Одновременно с воздействием на направляющий аппарат поршень сервомотора поворачивает вал *16* обратной связи (так называемый вал выключателя). Обратная связь через устройство *17—18* перемещает другой конец золотникового рычага *8*. Эта обратная связь отрицательна: она действует навстречу центробежному маятнику. Если под действием маятника золотник *9*, например, опускался, то обратная связь заставит его подняться.

Если бы обратная связь жестко связывала поршень сервомотора с золотником *9*, она называлась бы жесткой. В данном случае обратная связь является гибкой — ее действие существует лишь при движении вала *16*, сила воздействия пропорциональна скорости движения вала, и в установившемся режиме, когда эта скорость равна нулю, действие обратной связи прекращается.

Такое свойство обратная связь получает благодаря наличию устройства *17—18*, которое называется изодромом.

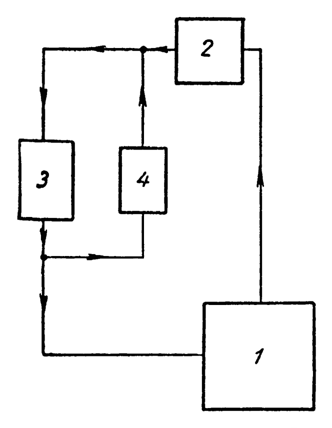
Поворот вала *16* вызывает передвижение стакана *17* изодрома. Через масло, заполняющее изодром, стакан *17* приводит в движение поршень *18* изодрома, который в свою очередь воздействует на золотниковый рычаг *8*. В процессе движения масло в изодроме под давлением пружины *19* перегоняется через узкие отверстия из одной половины стакана в другую, вследствие чего поршень не следует точно за стаканом. В конечном итоге пружина приведет поршень в первоначальное положение.

Благодаря этому установившееся положение регулятора в состоянии равновесия всей системы не будет зависеть от положения направляющего аппарата, и равновесие будет иметь место лишь при определенном, единственном положении шаров, т. е. при строго определенном значении скорости. Наличие изодрома позволяет получить постоянное, установившееся значение скорости при любых значениях нагрузки. Таким образом, рассматриваемая система является астатической системой.

Поддержание строгого постоянства скорости турбины при любых нагрузках не всегда целесообразно. При параллельной работе нескольких электрических турбогенераторов устойчивость их работы, а также требуемое распределение нагрузок между генераторами могут быть обеспечены лишь в том случае, если системы регулирования скорости

являются статическими[1], т. е. при наличии зависимости скорости от нагрузки. Обычно добиваются, чтобы при повышении нагрузки скорость несколько уменьшалась, т. е. чтобы система регулирования обладала положительным коэфициентом неравномерности.

Для получения неравномерности в системе регулирования применено устройство *20*. Вал выключателя тягой *21* связан с диском *22*. При повороте этого диска изменяется положение эксцентрика *23*, и при этом опускается втулка *24*, служащая опорой системе рычагов регулятора. Допустим, что втулка опустилась. Так как в положении равновесия золотник *9* вспомогательного сервомотора занимает вполне определенное положение (при котором главный золотник *12* находится в среднем положении), то штифт регулятора в равновесном положении должен несколько опуститься. что соответствует некоторому уменьшению скорости.



Фиг. 30. Схема взаимодействия элементов системы регулирования скорости гидротурбины.

Степень неравномерности может быть по желанию изменена путем поворота вспомогательным моторчиком или от руки шестерен *25*. При этом происходит дополнительное перемещение втулки *24* вверх или вниз по винтовой нарезке на валу шестерни *25*.

Полная схема автоматического управления турбиной имеет ряд вспомогательных устройств, из которых на фиг. 29 показана лишь небольшая часть, имеющая непосредственное отношение к регулированию. Из этих устройств можно отметить вибратор *26*, сообщающий игле золотника *9* вращательно-колебательное движение, с помощью которого уменьшается влияние сухого трения; гидроклапаны *27—29*, отключающие сервомотор от насоса при переходе на ручное регулирование или при аварии; винт *30* для изменения времени изодрома, с помощью которого осуществляется перемещение иглы катаракта и изменение площади открытия отверстий, через которые происходит перетекание масла в изодроме.

На фиг. 30 показана схема взаимодействия элементов системы.

Рассмотренная система является системой непрерывного регулирования. Она включает звено с распределенными параметрами (длинный трубопровод *1*), неустановившийся процесс в котором описывается уравнениями в частных производных, объект регулирования (турбина) *2*, регуляторы *3* и *4*.

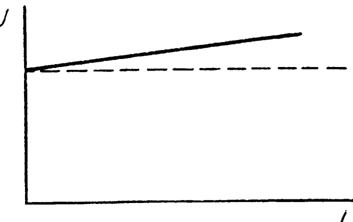
Система регулирования может быть статической или астатической в зависимости от настройки изодрома.

---

[1] См. например, И. И. Соловьев, Автоматизация энергетических систем, Госэнергоиздат, 1950, стр. 307—316.

3. ЭЛЕКТРОННЫЙ РЕГУЛЯТОР НАПРЯЖЕНИЯ

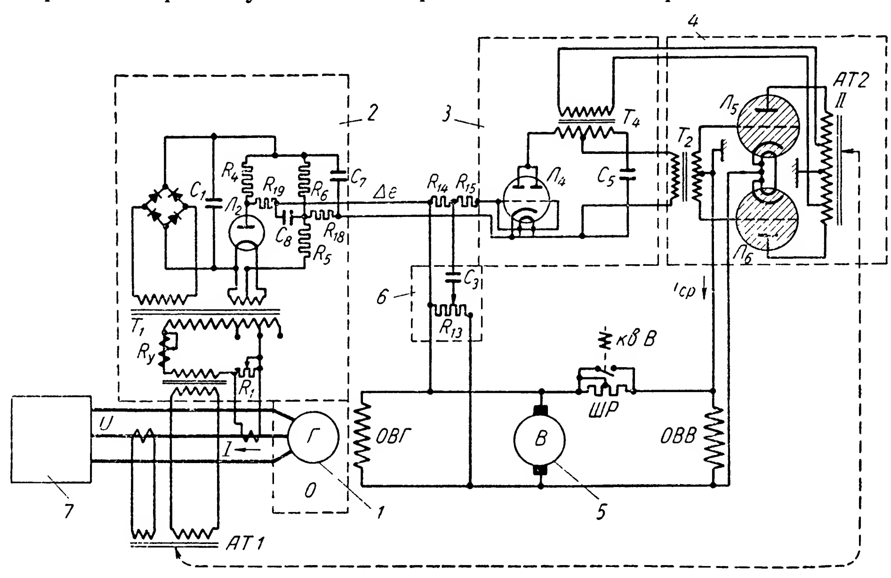
Электронный регулятор напряжения предназначен для того, чтобы устанавливать определенную зависимость между напряжением U на шинах генератора и током нагрузки I.



Фиг. 31. Характеристика компаундированного генератора.

Эта зависимость показана на фиг. 31. С возрастанием тока нагрузки напряжение немного повышается. Такая возрастающая кривая получается компаундированием генератора[1].

На фиг. 32 приведена упрощенная принципиальная схема электронного регулятора напряжения типа РНЭМ для регулирования напряжения синхронного генератора переменного тока [2]. С возрастанием тока нагрузки увеличивается падение напряжения в линии, соединяющей генератор *1* с потребителем *7*. Избыток напряжения расходуется на покрытие падения напряжения в линии.



Фиг. 32. Принципиальная упрощенная схема электронного регулятора напряжения ВЭИ.

При правильно подобранном компаундировании можно добиться постоянства напряжения в конце линии у потребителя.

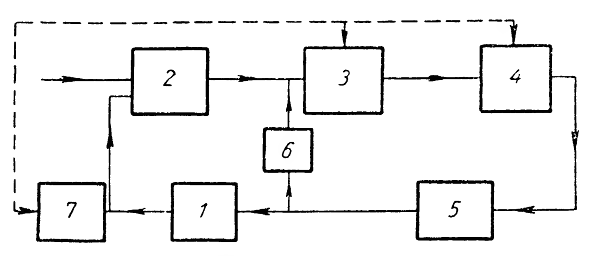
Чувствительный элемент *2* регулятора включен по схеме, суммирующей ампервитки обмоток трансформаторов напряжения и тока, в которой поддерживается постоянство разности

$$k_1U - k_2I = \text{const}.$$

[1] Компаундированием называют дополнительное воздействие на цепь возбуждения генератора, зависящее от тока нагрузки.

При этом имеем возрастание U при увеличении I. Кроме того, анодный трансформатор AT также имеет две первичные обмотки $AT1$, из которых одна приключена к трансформатору напряжения, а другая к трансформатору тока.

Напряжение вторичных обмоток $AT2$ определяется суммой $k_3U + k_4I$. Таким образом, анодное напряжение на лампах преобразовательного 3 (фиг. 32) и усилительного 4 элементов также несколько возрастает с возрастанием тока нагрузки. Этим обеспечивается питание регулятора при коротких замыканиях, когда напряжение резко уменьшается, а ток нагрузки увеличивается.



Фиг. 33. Схема взаимодействия элементов системы регулирования напряжения генератора.

На схеме элементов (фиг. 33) компаундирующие связи как вспомогательные показаны пунктиром с выхода нагрузки 7. Как мы видим, они посылают дополнительные сигналы, воздействующие на преобразовательный 3 и усилительный 4 элементы.

Чувствительный элемент 2 представляет собой уравновешенный мост, одно из плеч которого — диод $Л2$ — нелинейно. Ток накала диода зависит от величины $k_1U - k_2I$. При отклонении напряжения генератора I от величины U_0 сопротивление диода изменяется и условие равновесия моста нарушается. В диагонали моста появляется напряжение Δe, приблизительно пропорциональное отклонению напряжения и изменяющее свою полярность при изменении знака отклонения регулируемой величины.

Напряжение Δe с диагонали моста чувствительного элемента 2 подводится к сетке лампы $Л_4$ преобразовательного элемента 3.

Так как усилительным элементом 4 в данной схеме являются тиратроны с фазовым управлением, необходимо преобразовать напряжение ошибки Δe в соответствующий сдвиг фаз сеточного напряжения тиратронов.

Преобразовательный элемент 3 представляет собой так называемый фазовый мост; в одном плече моста включена постоянная емкость C_5, в другом — переменное сопротивление лампы $Л_4$. Как известно[1], при питании такого моста переменным током в диагонали моста можно получить переменное напряжение, амплитуда которого при изменении сопротивления будет оставаться неизменной, а фаза будет изменяться в пределах $\pm \frac{\pi}{2}$. Это напряжение с фазой, зависящей от величины и знака Δe, подводится к трансформатору T_2, питающему сетки тиратронов $Л_5$ и $Л_6$.

---

[1] См. например, А. А. Булгаков, Электронные устройства автоматического управления, Госэнергоиздат, 1951.

Усилительный элемент *4* состоит из двух тиратронов $Л_5$ и $Л_6$, включенных по двухтактной схеме. При изменении фазы сеточного напряжения будет изменяться средний анодный ток тиратронов i_{cp}.

Исполнительным элементом *5* в данной схеме является возбудитель *В*. Возбудитель представляет собой генератор постоянного тока с самовозбуждением. Обмотка возбуждения возбудителя *ОВВ* питается двояким способом. Основное питание получается от якоря возбудителя *В*. Дополнительный ток i_{cp} дается тиратронами усилительных элементов $Л_5$ и $Л_6$. Таким образом, тиратроны доставляют не всю мощность, необходимую для возбуждения возбудителя, а только ту ее часть, которая нужна для управления возбудителем, т. е. для изменения его потока возбуждения.

При случайном увеличении напряжения генератора в диагонали чувствительного элемента появляется напряжение ошибки Δe, которое условимся считать положительным; оно вызовет положительный сдвиг фазы сеточного напряжения тиратронов, что приведет к изменению анодного тока тиратронов, к уменьшению тока возбуждения возбудителя, уменьшению его напряжения и, следовательно, к уменьшению тока возбуждения генератора в его обмотке возбуждения *ОВГ* и в конечном итоге к снижению напряжения на шинах генератора.

При случайном уменьшении напряжения генератора мы получим отрицательное напряжение ошибки — Δe, отрицательный сдвиг фазы сеточного напряжения, увеличение тока тиратронов и т. д. и в конечном итоге увеличение напряжения генератора.

Элемент обратной связи *6* (фиг. 33) (параллельное корректирующее устройство), состоящий из сопротивления R_{13} и емкости C_3, включен между выходом возбудителя и выходом преобразовательного элемента.

Здесь мы имеем пример так называемой гибкой обратной связи, которая действует только во время переходного процесса. Емкость C_3 не пропускает постоянного тока, и в установившемся режиме обратная связь никакого воздействия на усилительный элемент не оказывает.

Рассмотренная схема является системой статического регулирования. В самом деле, при изменении нагрузки на генератор необходимо устанавливать для поддержания напряжения на прежнем уровне различные значения токов возбуждения; это означает, что при различных нагрузках в установившемся режиме нужно иметь различные значения фазы напряжения, управляющего тиратронами, а следовательно и различные значения Δe на выходе моста чувствительного элемента. Итак, при изменении нагрузки в системе неизбежно возникает статическая ошибка.

4. СЛЕДЯЩАЯ СИСТЕМА КОПИРОВАЛЬНО-ФРЕЗЕРНОГО ПОЛУАВТОМАТА МОДЕЛИ 6441А [3]

Копировально-фрезерный полуавтомат предназначен для обработки металлических изделий, имеющих пространственно сложную форму, не поддающуюся или трудно поддающуюся обработке на обычных универсально-фрезерных станках. На полуавтомате 6441А процесс обработки происходит по копирам, изготовленным в масштабе 1 : 1.

На одной из стоек станка закрепляется обрабатываемое изделие, на другой — копир (модель, шаблон). По копиру перемещается копировальный палец, по изделию — фреза, воспроизводящая движение копировального пальца.

В процессе обработки по копиру обрабатываемое изделие вместе с копиром и режущий инструмент перемещаются в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Движение изделия и копира происходит непрерывно в одном и том же направлении (в горизонтальном) и носит название задающей подачи.

Движение фрезы, воспроизводящей движение копировального пальца, называется следящей подачей.

Следящая подача происходит по вертикали и может в зависимости от изменения контура профиля или от рассогласования между фрезой и пальцем изменять направление (вверх или вниз).

На фиг. 34 поясняется схема движения изделия и фрезы.

Фиг. 34. Схема движения изделия и фрезы в копировально-фрезерном автомате:

1 — шаблон (копир); *2* — копировальный палец; *3* — обрабатываемое изделие; *4* — фреза; *5* — чувствительный элемент; *6* — усилитель; *7* — двигатель задающей (горизонтальной) подачи; *8* — двигатель следящей (вертикальной) подачи.

При обработке поверхностей с плавными изменениями профиля скорость задающей подачи может быть постоянной. Универсальные станки, рассчитанные на обработку разнообразных изделий, имеют взаимно связанное регулирование обеих подач.

Скорость следящей подачи зависит от величины рассогласования между положениями фрезы и копира и от кривизны профиля. Скорость задающей подачи должна автоматически уменьшаться с увеличением скорости следящей подачи. Для сохранения постоянной результирующей скорости перемещения копирующего органа по заданному профилю необходимо соблюдение соотношений

$$v_з = v_p \sin \alpha;$$

$$v_c = v_p \cos \alpha,$$

где $v_з$ — скорость задающей подачи;

v_c — скорость следящей подачи;

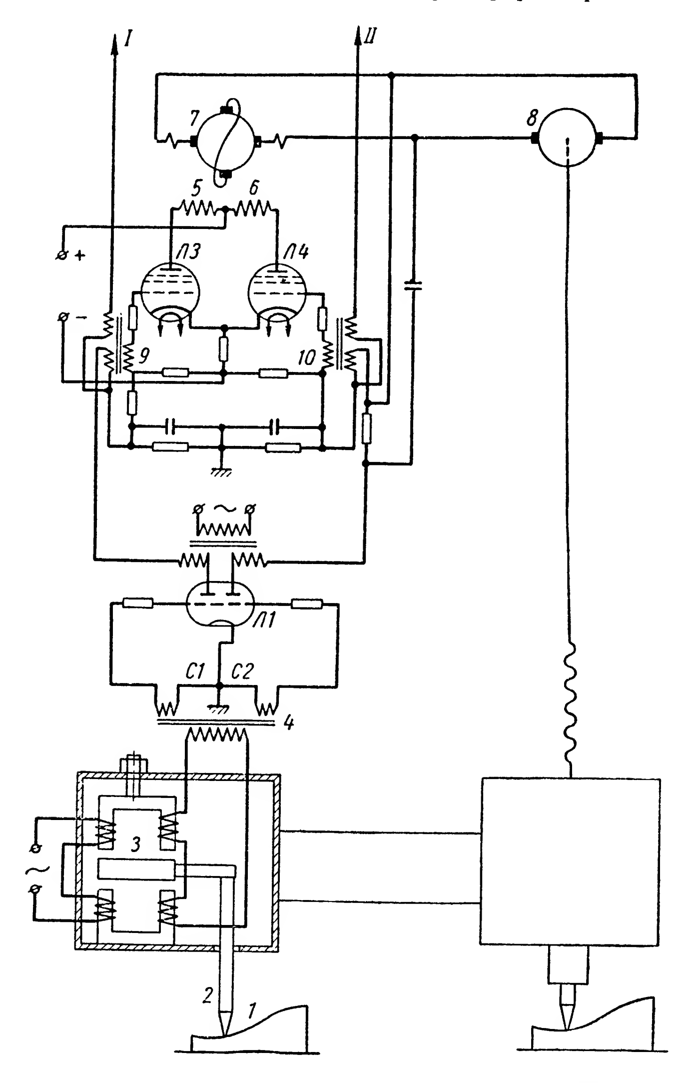
v_p — результирующая скорость (задается режимом резания);

α — угол наклона касательной к профилю.

Рассмотрим более детально схему следящей системы полуавтомата и в общих чертах рассмотрим связь этой системы с системой задающей подачи.

Упрощенная схема следящей подачи показана на фиг. 35.

По кривой поверхности шаблона *1* скользит копировальный палец *2*, связанный с якорем диференциального трансформатора *3*. В среднем



Фиг. 35. Упрощенная принципиальная схема следящей подачи копировально-фрезерного полуавтомата 6441А.

положении якоря между двумя сердечниками, которое имеет место при точно согласованном положении фрезы и копировального пальца, напряжения во вторичных обмотках диференциального трансформатора равны и противоположны по фазе, и суммарное напряжение трансформатора *4*, питающего входной каскад системы, равно нулю. При этом по

обмоткам *5* и *6* управления электромашинного усилителя (ЭМУ) *7* протекают равные и противоположные по знаку токи; напряжение, развиваемое на щетках ЭМУ, равно нулю, и двигатель *8* неподвижен.

Пусть теперь, скользя по профилю модели, копировальный палец поднялся на величину ε. Это означает, что между положениями фрезы и пальца появилось рассогласование, равное ε. Вместе с пальцем поднимется и якорь, зазор между якорем и верхним сердечником уменьшится, а между якорем и нижним сердечником увеличится; э. д. с. верхней обмотки диференциального трансформатора увеличится, а нижнего — уменьшится. Абсолютная величина разности этих двух э. д. с., питающая трансформатор *4*, будет приблизительно пропорциональна отклонению ε, а ее фаза будет зависеть от того, к которому из сердечников — верхнему или нижнему — приблизится якорь, т. е. от знака ε.

При этом в цепи анода одной из половинок двойного триода *Л1* (именно в той половине, для которой напряжение рассогласования будет совпадать по фазе с анодным напряжением) анодный ток увеличится, а в другой половине уменьшится.

Если бы схема не содержала корректирующих устройств, разность между анодными токами была бы пропорциональной отклонению ε. Благодаря наличию корректирующих устройств эта разность будет некоторой функцией как самого отклонения ε, так и его производной $\frac{d\varepsilon}{dt}$. Не имея возможности в настоящей главе подробно исследовать зависимость разности анодных токов от ε, ограничимся общим указанием на то, что введение производных от ε осуществляется диференцирующими трансформаторами *9* и *10*.

Эти мероприятия позволяют повысить устойчивость системы и ее точность.

К сеткам ламп *Л3* и *Л4* подводится напряжение, пропорциональное разности анодных токов лампы *Л1*, т. е. зависящее от ε и его производной. В анодную цепь ламп *Л3* и *Л4* включены управляющие обмотки ЭМУ. Обмотки включены встречно, и создаваемое ЭМУ напряжение пропорционально разности анодных токов ламп *Л3* и *Л4*. Таким образом, напряжение, подводимое к двигателю *8* от ЭМУ, будет функцией ε и его производной. Двигатель придет во вращение и осуществит перемещение фрезы вслед за копировальным пальцем. Одновременно с фрезой перемещается корпус, на котором помещены сердечники диференциального трансформатора *3*. В результате этого перемещения сердечники будут стремиться занять положение, симметричное относительно якоря. Когда симметрия восстановится, движение системы прекратится.

При больших скоростях движения пальца по профилю (т. е. при резких изменениях профиля) необходимо, как это уже отмечалось выше, уменьшить скорость задающей подачи.

Для этой цели сеточная цепь входного каскада системы задающей подачи проводами *I* и *II* связана с анодными цепями лампы *Л1*. Напряжение между проводами *I* и *II* будет возрастать с возрастанием рассогласования ε и его производной.

Дополнительное воздействие по производной достигается тем, что в цепь проводов *I* и *II* последовательно введены вторичные обмотки диференцирующих трансформаторов *9* и *10*.

Напряжение между проводами *I* и *II* подведено к системе задающей подачи так, что оно запирает входную лампу этой системы.

Таким образом, скорость задающей подачи будет наибольшей при отсутствии рассогласования и будет уменьшаться как при увеличении абсолютной величины рассогласования, так и при увеличении скорости увеличения рассогласования.

Более детальное исследование данной системы будет выполнено в главе VIII.

5. СЛЕДЯЩАЯ СИСТЕМА РАДИОЛОКАЦИОННОЙ СТАНЦИИ СЦР-584

Наземная передвижная радиолокационная станция СЦР-584 работает в сантиметровом диапазоне (более подробное описание станции см., например, [4]).

Когда обнаруженная цель попадает в определенную зону, станция переключается с режима поиска на режим автоматического сопровождения цели. При этом следящая система обеспечивает непрерывное совмещение оси антенны с направлением на цель, определяя, таким образом, угловые координаты цели с точностью около 0,06°.

Излучающий вибратор станции, помещенный внутри параболического отражателя, непрерывно вращается, причем при вращении ось излучения отклоняется от оси параболоида на 1,25°, и луч описывает круговой конус.

На фиг. 36 показано сечение конуса и луча. Если цель находится в центре конуса *A* (на оси параболоида), то при вращении луча она облучается равномерно, и отраженный сигнал имеет постоянную амплитуду (кривая *A*). При смещении цели от центра интенсивность облучения начинает периодически изменяться. Так, например, если цель находится в точке *B*, а центр луча в точке *1*, то облучение будет минимальным; когда луч перемещается в точку *2*, облучение максимально.

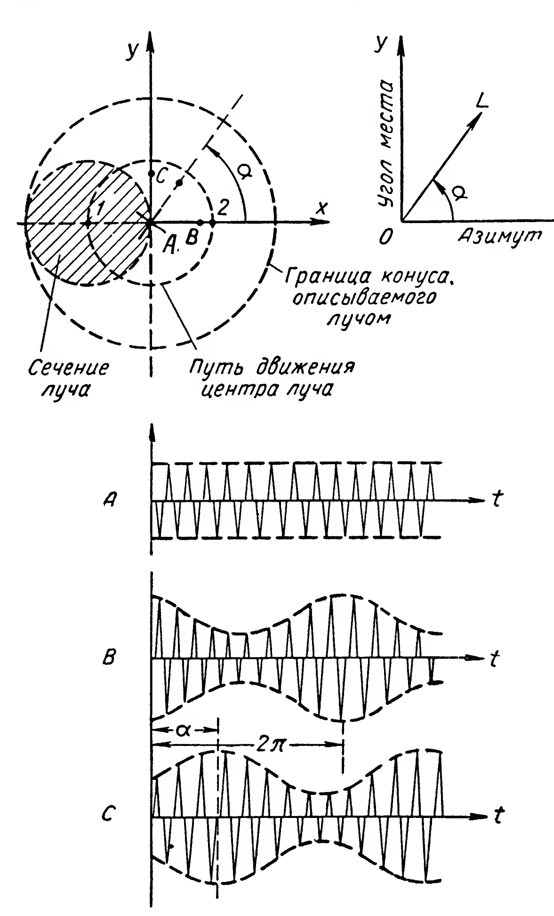
Таким образом, при смещении цели от оси параболоида амплитуда отраженного импульса будет изменяться приблизительно по синусоидальному закону с частотой вращения луча; амплитуда огибающей при этом будет пропорциональна отклонению цели от оси параболоида (кривая *B*). При смещении цели в точку *C* на угол α от точки *B* произойдет сдвиг огибающей по фазе тоже на угол α (кривая *C*).

Положение цели относительно некоторых неподвижных осей x, y, связанных с параболоидом, может быть изображено вектором OL; модуль этого вектора OL пропорционален амплитуде огибающей сигнала, а его аргумент α равен фазе этой огибающей относительно некоторого фиксированного положения.

Следящая система должна корректировать отклонение оси параболоида по двум координатам: азимуту (ось x) и углу места (ось y). Для этой цели сигнал ошибки (вектор огибающей) разлагается на две

проекции по этим осям и вырабатываются два напряжения, пропорциональные этим проекциям. Каждое из этих напряжений подается на вход своей следящей системы, и поворот антенны осуществляется двумя двигателями.

Разложение вектора OL на составляющие по осям Ox и Oy осуществляется с помощью так называемого генератора опорных напряжений. Этот генератор, имеющий две взаимно перпендикулярные обмотки, приводится во вращение синхронно с вибратором и вырабатывает два переменных напряжения той же частоты, что и частота сигнала, сдвинутые на 90° по фазе.



Фиг. 36. Образование сигнала ошибки станции СЦР-584.

Эти напряжения преобразуются в прямоугольные импульсы, каждый из которых подводится ко входу своей следящей системы одновременно с сигналом ошибки.

Взаимодействие этих импульсов с сигналом ошибки таково, что в первом каскаде одной следящей системы (коммутаторе азимута) вырабатывается напряжение, пропорциональное $OL \cos \alpha$, а в другом каскаде (коммутатора угла места) $OL \sin \alpha$, где OL — амплитуда, а α — фаза сигнала ошибки. Первое из этих напряжений пропорционально отклонению азимута, а второе — отклонению угла места цели от азимута и угла места оси антенны.

Блок-схема управления антенной показана на фиг. 37.

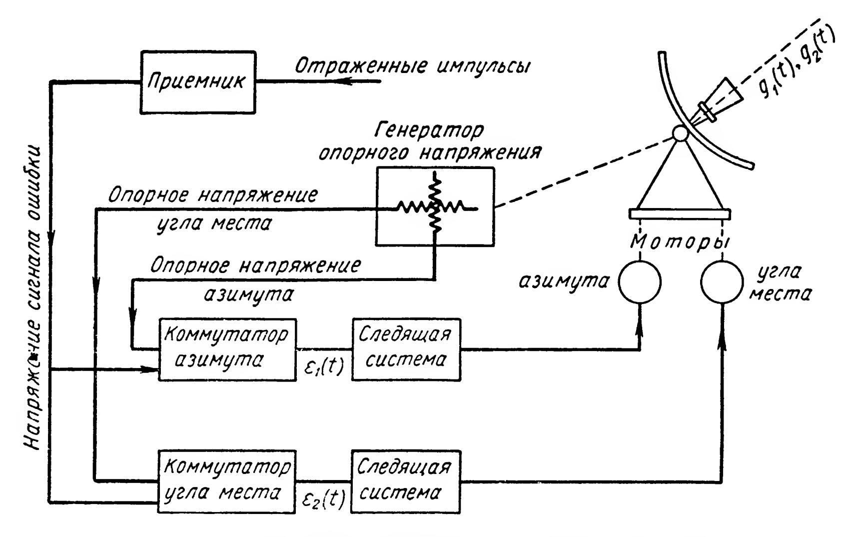
Рассмотрим несколько подробнее схему одной из этих следящих систем — следящей системы угла места.

Управляющим воздействием $g(t)$ в этой следящей системе является угол места, управляемым объектом — антенна; координата объекта $x(t)$ — угол места антенны; эта координата преобразована в эталонное напряжение по углу места, созданное генератором опорных напряжений.

Сигнал ошибки по углу места $\varepsilon(t) = g(t) - x(t)$ — напряжение, выработанное на выходе коммутатора угла места.

Упрощенная электрическая и структурная схемы следящей системы показаны на фиг. 38.

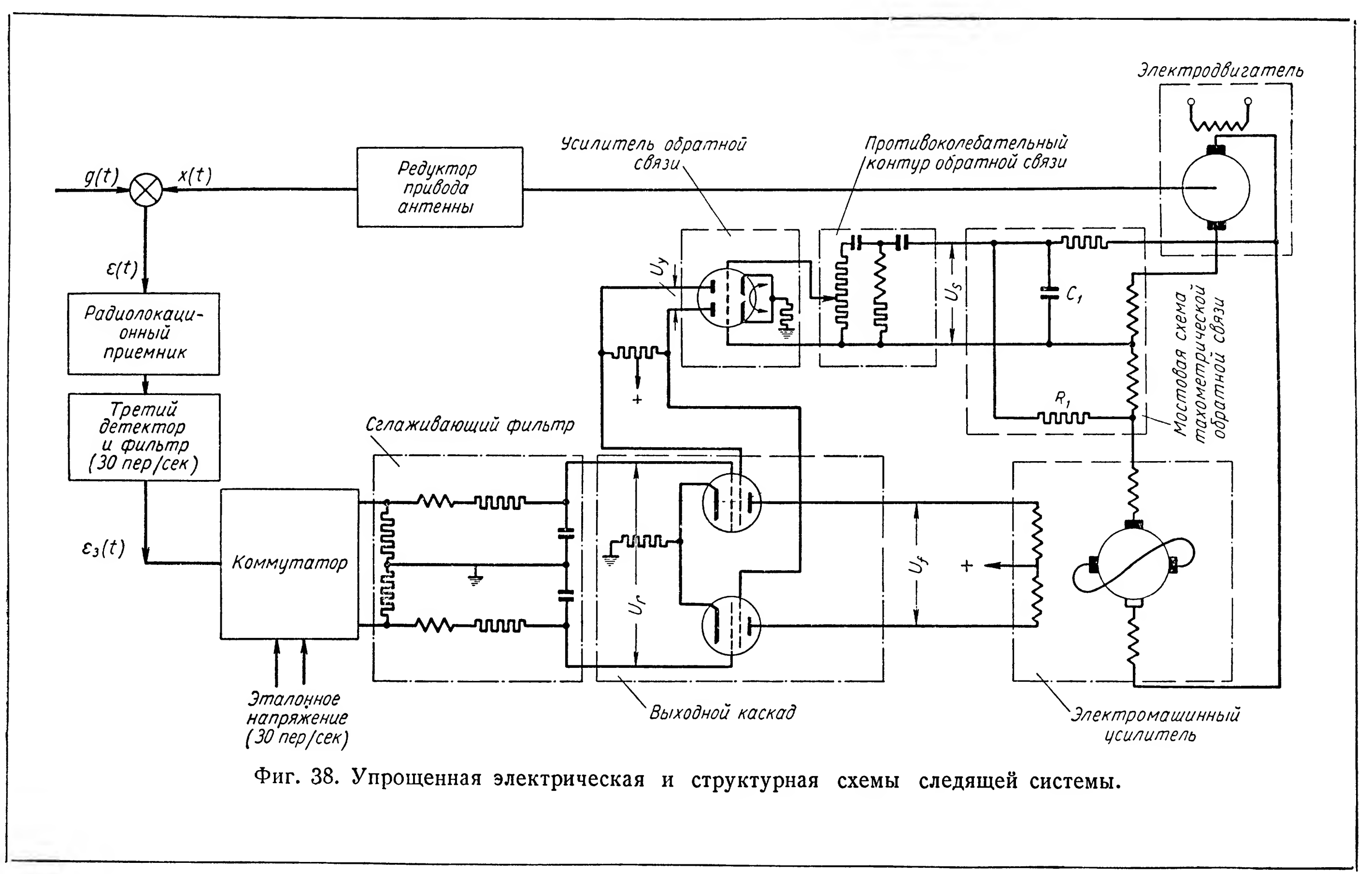
Выпрямленное напряжение от выхода коммутатора угла места поступает в сглаживающий фильтр. Напряжение на выходе этого фильтра $u_r(t)$ — сглаженное напряжение постоянного тока — пропорционально рассогласованию между осью параболического отражателя и направлением на цель по углу места. Это напряжение поступает на двухтактный каскад, питающий обмотки управления электромашинного усилителя



Фиг. 37. Блок-схема управления антенной СЦР-584.

(ЭМУ). Разность намагничивающих ампервитков этих двух обмоток, пропорциональная $\varepsilon(t)$, вызывает на щетках ЭМУ напряжение $U_{ЭМУ}$, которое подводится к щеткам двигателя постоянного тока. Когда ось отражателя совпадает с направлением на цель, сигнал ошибки и $\varepsilon(t)$ равны нулю, $U_{ЭМУ} = 0$, и двигатель неподвижен. При появлении $\varepsilon(t)$ двигатель начинает вращаться со скоростью, пропорциональной $U_{ЭМУ}$, и через редуктор поворачивает антенну так, чтобы $\varepsilon(t)$ уменьшалась (т. е. так, чтобы направить ее на цель).

Описанная схема обладает большой чувствительностью и приходит в действие при расхождении углов порядка долей угловой минуты. Если бы при такой высокой чувствительности система не имела корректирующих устройств, она была бы неустойчивой. Для устойчивости системы в схему, кроме упомянутых последовательных корректирующих устройств, введена обратная связь по скорости. Мостовая схема тахометрической обратной связи вырабатывает напряжение U_s, пропорциональное угловой скорости вращения двигателя. Пройдя через специальный контур, это напряжение преобразуется в напряжение обратной связи. Делитель напряжения на выходе контура позволит получить необходимую



Фиг. 38. Упрощенная электрическая и структурная схемы следящей системы.

долю от этого напряжения $U_у$, т. е. установить требуемый коэфициент обратной связи.

Напряжение обратной связи подводится к сеткам двухтактного усилителя, питающего ЭМУ, и включено навстречу напряжению ошибки $\varepsilon(t)$.

При быстрых изменениях скорости двигателя обратная связь ослабляет действие напряжения $\varepsilon(t)$, при медленных изменениях ее действие прекращается.

Благодаря включению обратной связи систему при надлежащем подборе параметров можно сделать устойчивой и придать процессу регулирования нужные качества.

6. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ АВТОПИЛОТ

На фиг. 39 показана упрощенная принципиальная схема электрического автопилота фирмы Миннеаполис[1], а схема взаимодействия основных элементов — автопилота и рулей управления — показана на фиг. 40. Схема является примером системы связанного автоматического регулирования.

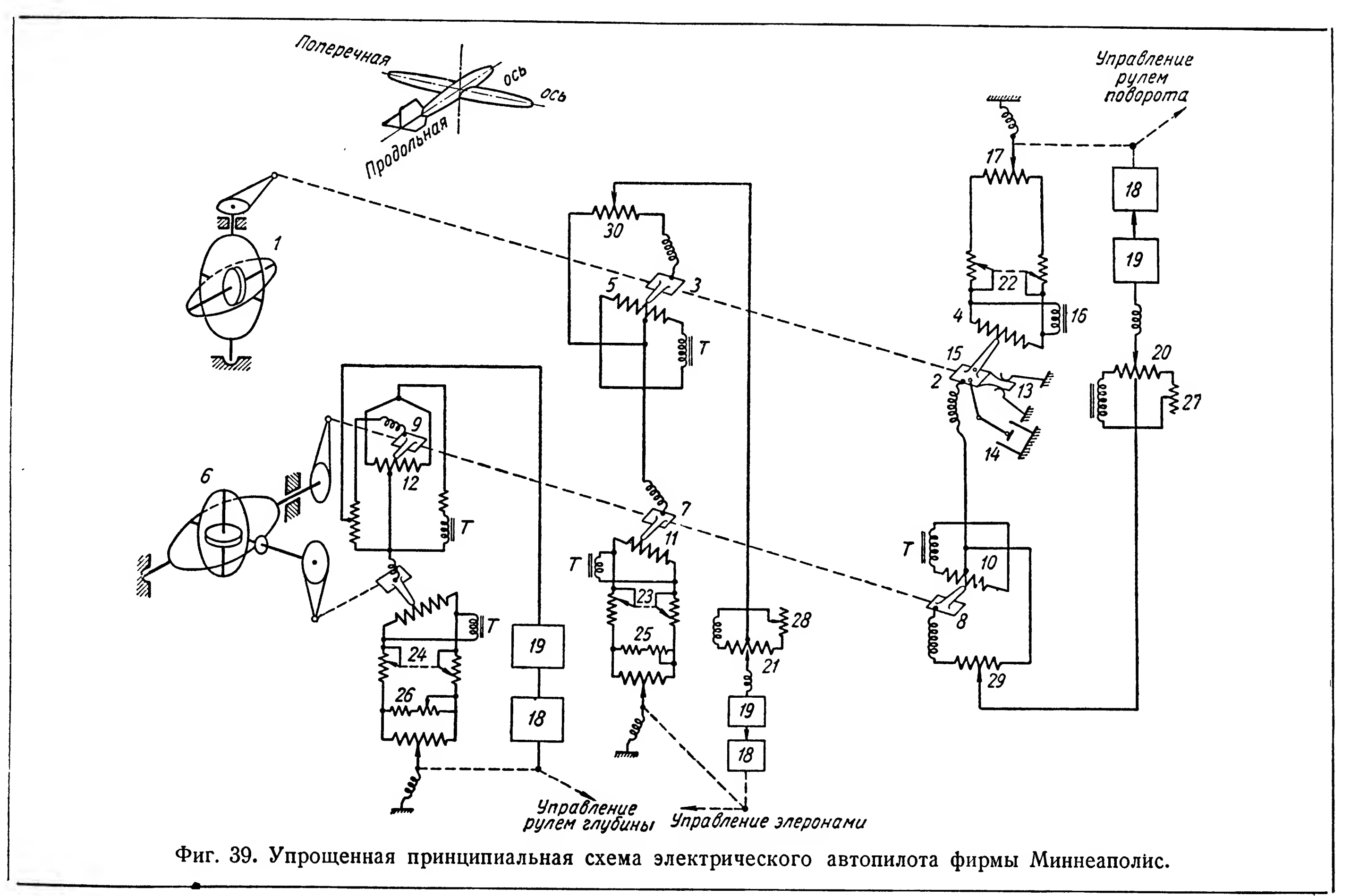
Автопилот предназначен для автоматического поддержания заданного курса самолета, крена и положения продольной оси самолета по отношению к горизонту.

Чувствительным элементом, воспринимающим отклонения от установленного курса самолета, является гироскопический агрегат *1* (фиг. 39) курсовой стабилизации. Главная часть этого элемента — свободный гироскоп, ось которого направлена вдоль заданного направления. При отклонении самолета от курса ось гироскопа и связанные с ней ползунки *2* и *3* реостатных датчиков в силу известного свойства гироскопа сохраняют свое положение в пространстве, а корпус самолета вместе с проволочными сопротивлениями *4* и *5* смещается, в результате чего происходит смещение ползунков относительно средних точек сопротивлений, пропорциональное величине углового отклонения самолета от заданного курса.

Чувствительным элементом, воспринимающим отклонения от горизонтали (или другого заданного направления) поперечной оси самолета (крена) и продольной оси самолета, служит гироскопический агрегат *6* продольно-поперечной стабилизации. Основной частью этого агрегата является свободный гироскоп, ось которого перпендикулярна горизонтальной плоскости (или той плоскости, параллельно которой должны быть направлены продольная и поперечная оси самолета). При отклонении поперечной оси самолета гироскоп и связанные с ним ползунки *7*, *8* и *9* реостатных датчиков крена и высоты сохраняют в пространстве заданные им направления, а поперечная ось самолета поворачивается, вследствие чего происходит перемещение ползунков *7* и *8* относительно средних точек проволочных сопротивлений *10* и *11*, пропорциональное углу отклонения поперечной оси. При отклонении продольной оси происходит смещение ползунка *9* относительно средней точки сопротивления *12*.

---

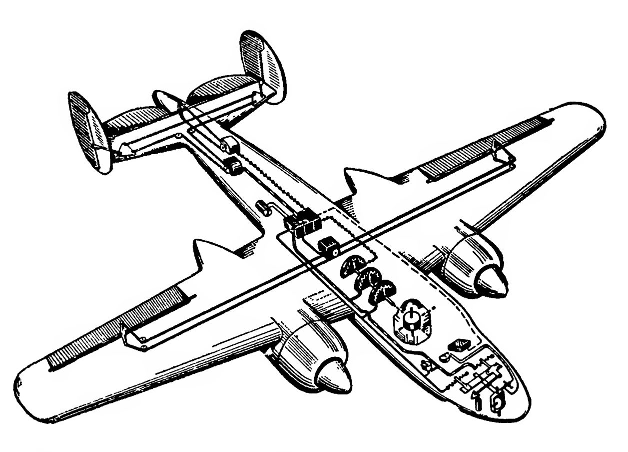
[1] Более подробное описание автопилота см., например, в [5].



Фиг. 39. Упрощенная принципиальная схема электрического автопилота фирмы Миннеаполис.

Так как принципы действия всех трех каналов управления — курса, крена и высоты — сходны между собой, рассмотрим действие курсовой стабилизации.

Пусть возникло некоторое отклонение самолета от заданного курса и ползунок *2* сместился относительно середины сопротивления *4*. Если бы не было дополнительного диференцирующего устройства — пружин *13* и демпфера *14*, то перемещение ползунка было бы пропорционально отклонению. Наличие диференцирующего устройства приводит к тому, что пропорциональным отклонению от курса остается перемещение оси *15* ползунка, само же диференцирующее устройство заставляет ползунок повернуться вокруг оси *15* и, следовательно, сообщает концу ползунка, скользящему по сопротивлению *4*, дополнительное перемещение. Величина этого дополнительного перемещения оказывается пропорциональной скорости изменения отклонения от курса, результирующее же перемещение оказывается пропорциональным сумме самого отклонения и его первой производной. Такое введение в закон регулирования первой производной позволяет ускорить процесс возвращения самолета к заданному курсу и обеспечить его устойчивость.



Фиг. 40. Схема взаимодействия основных элементов автопилота.

В отличие от курсового канала все остальные каналы не имеют диференцирующих устройств, и перемещения соответствующих ползунков оказываются просто пропорциональными отклонениям осей самолета от заданных направлений.

Сопротивление *4*, по которому скользит ползунок *2*, включено в уравновешенный мост. К одной диагонали этого моста подводится питание от трансформатора *16*, к точкам другой диагонали подключены ползунки *2* агрегата курсовой стабилизации и обратной связи *17*. Ползунок обратной связи, соединенный с валом рулевой машины *18*, в первый момент отклонения не изменяет своего положения, поэтому между ползунками *2* и *17* появляется напряжение ошибки, пропорциональное величине нарушения баланса моста, т. е. пропорциональное смещению ползунка *2*. Это напряжение подводится к усилителю *19*, выходная цепь которого воздействует на рулевую машину *18*. Рулевая машина приходит в движение, осуществляет перемещение руля поворота и одновременно воздействует на ползунок *17* обратной связи. Ползунок *17* при этом перемещается вслед за ползунком *2*, после чего разбалансировка моста начинает уменьшаться.

Вследствие этого движение руля прекратится до того как самолет вернется на заданный курс. Такая предварительная остановка руля прежде всего позволяет повысить устойчивость процесса регулирования и уменьшить размах колебаний самолета вокруг заданного положения, так как если бы руль остановился только при достижении заданного курса, то самолет, продолжая поворачиваться далее как в силу его инерционности, так и в силу того, что руль в момент его остановки был повернут, перешел бы через заданное направление слишком далеко.

Обратная связь выполняет еще одну функцию: она при правильной ее наладке обеспечивает не только остановку руля, но и обратный поворот его в исходное положение, в котором продольная ось самолета будет лежать в плоскости руля к тому моменту, когда самолет вернется на заданный курс. В самом деле, представим себе, что баланс моста восстановился и руль прекратил движение. Самолет после этого продолжает возвращаться на курс, угол рассогласования уменьшается, и ползунок *2* вследствие этого движется обратно к средней точке сопротивления *4*. При этом между ползунками *2* и *17* напряжение меняет знак, и рулевая машина начинает вращаться в обратном направлении.

Из схемы видно, что последовательно с ползунком *2* включен также ползунок *8* агрегата поперечной стабилизации.

Таким образом, управление рулем поворота осуществляется не только в зависимости от отклонения самолета от заданного курса, но и от крена самолета. Общая величина напряжения, воздействующего на рулевую машину, оказывается пропорциональной сумме отклонения от курса, производной этого отклонения и отклонения поперечной оси самолета.

Необходимость связывания автоматов курсовой и поперечной стабилизации вызвана тем, что при движении самолета его крен приводит одновременно к повороту и, наоборот, поворот приводит одновременно к появлению крена.

Связывание осуществляется и в других каналах управления. Так, например, курсовой агрегат воздействует, как это видно из схемы, на руль поворота и на поперечные рули (элероны); изменение крена, т. е. положения поперечной оси, приводит к повороту всех трех рулей: поперечных рулей—вследствие перемещения ползунка *7*, руля поворота—вследствие перемещения ползунка *8* и руля высоты — вследствие перемещения ползунка *9*.

Схема автопилота имеет целый ряд вспомогательных деталей. Из них на фиг. 39 показана лишь небольшая часть. К ним относятся реостаты *20* и *21* задатчика разворотов, с помощью которых при виражах летчик может задать вручную необходимый крен и поворот; реостаты центровки *22—24*, с помощью которых перед включением агрегатов стабилизации летчик добивается баланса моста и тем самым задает автопилоту необходимые направления; реостаты передаточного отношения *25* и *26*, с помощью которых изменяется величина падения напряжения на потенциометрах обратной связи и, следовательно, изменяется угол отклонения элеронов или угла для одного и того же бокового отклонения самолета. Переменные сопротивления *27* и *28* служат для регулирования величины перекладки руля поворота и элеронов на единицу угла поворота ручки виража. Переменные сопротивления *29* и *30* предназначаются для регулирования величины перекладки рулей на одно и то же боковое отклонение самолета на курсе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барков Н. К., Автоматические регуляторы скорости гидротурбин, Госэнергоиздат, Л — М. 1947.

2. Автоматика в энергосистемах, Материалы научно-технической сессии ленинградского отделения ВНИТОЭ 1949 г. под ред. В. В. Сидельникова, Госэнергоиздат, Л. — М. 1950.

3. Соколов Т. Н., Дружинский И. А., Верин И. И., Разыграев А. М., Назаров А. Г., Электрокопировально-фрезерный полуавтомат, модель 6441А системы Т. Н. Соколова, Машгиз, М. — Л. 1951.

4. Наземные американские и английские радиолокационные станции, Военнздат, М. 1947.

5. Ольман Е. В., Соловьев Я. И., Токарев В. П., Автопилоты, Оборонгиз, 1946.

ГЛАВА IV

МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Для решения любой задачи, связанной с анализом динамики систем автоматического регулирования, необходимо прежде всего составить диференциальные уравнения исследуемой системы.

Основная цель настоящей главы состоит в изложении общей методики составления диференциальных уравнений и в иллюстрации ее применения на простых примерах.

Различают два рода уравнений систем автоматического регулирования — уравнения установившихся режимов, или *уравнения статики*, и уравнения переходных процессов, или *уравнения динамики* процесса регулирования.

Уравнения установившихся режимов, при которых возмущающие воздействия и величина нагрузки принимаются постоянными, обычно являются алгебраическими уравнениями, чаще всего линейными. Они связывают обобщенные координаты, которые определяют систему, и позволяют найти положение любого элемента системы или величину, характеризующую его состояние (например, температуру регулируемой печи, положение регулирующего органа, количество подаваемого топлива и т. д.).

Уравнения динамики процесса регулирования обычно являются диференциальными или интегро-диференциальными. Для систем с распределенными параметрами уравнения динамики получаются уравнениями в частных производных. Они определяют поведение системы автоматического регулирования в переходном процессе при действии возмущающих сил или после прекращения их действия.

Для составления уравнений динамики система регулирования разбивается на элементы (звенья), и для каждого из них составляется соответствующее уравнение на основании того физического закона, который определяет процесс, протекающий в данном элементе. Совокупность уравнений динамики, составленных для всех элементов системы, определит процесс автоматического регулирования.

В ряде случаев задачу составления диференциальных уравнений процесса регулирования облегчает применение уравнений Лагранжа второго рода, составленных для обобщенных координат системы. Этот метод целесообразно использовать тогда, когда составление выражений кинетической и потенциальной энергии системы и диссипативной функции не представляет затруднений.

1. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Выше было определено понятие динамической системы. Рассмотрим динамическую систему с конечным числом степеней свободы, имеющую k обобщенных координат $x_1, x_2, \ldots, x_k$, и предположим, что все связи этой системы не зависят от времени и что среди них нет не интегрируемых диференциальных связей.

Вообще говоря, обобщенные координаты могут иметь размерность, не обязательно совпадающую с размерностью длины, протяженности. Точно так же и размерность обобщенных сил, действующих на обобщенные координаты, может отличаться от размерности силы. Обобщенные силы могут иметь размерность момента, давления, напряжения и т. п.

Если динамическая система обладает запасом кинетической энергии T, то ее движение может быть описано системой диференциальных уравнений Лагранжа.

Уравнения Лагранжа второго рода имеют вид (см., например, [1])

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}-\frac{\partial T}{\partial x_1}=Q_1;$$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}-\frac{\partial T}{\partial x_2}=Q_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}-\frac{\partial T}{\partial x_k}=Q_k, \tag{7}$$

где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ — обобщенные силы, приложенные к системе; $\dot{x}_i=\frac{dx_i}{dt}$ — обобщенная скорость i-й координаты.

Если силы, приложенные к системе, имеют потенциал V, т. е. зависят только от обобщенных координат системы, то уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}-\frac{\partial T}{\partial x_1}=-\frac{\partial V}{\partial x_1};$$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}-\frac{\partial T}{\partial x_2}=-\frac{\partial V}{\partial x_2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}-\frac{\partial T}{\partial x_k}=-\frac{\partial V}{\partial x_k}. \tag{8}$$

Система уравнений (8) описывает поведение консервативной динамической системы, в которой рассеяние энергии отсутствует.

Однако во всех системах автоматического регулирования действуют силы трения и имеет место рассеяние энергии. Диссипативные силы или силы вязкого трения Q_R, пропорциональные скорости, могут быть определены через функцию рассеяния энергии R:

$$Q_{Ri}=-\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i}.$$

В общем случае, когда в системе действуют обобщенные силы Q_V, имеющие потенциал V, обобщенные диссипативные силы Q_R и внешние силы, изменяющиеся по тому или иному закону во времени $f_i(t)$, уравнения движения принимают вид

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}-\frac{\partial T}{\partial x_1}=-\frac{\partial V}{\partial x_1}-\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1}+f_1(t);$$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}-\frac{\partial T}{\partial x_2}=-\frac{\partial V}{\partial x_2}-\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2}+f_2(t);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}-\frac{\partial T}{\partial x_k}=-\frac{\partial V}{\partial x_k}-\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_k}+f_k(t). \tag{9}$$

Кинетическая энергия T представляет однородную квадратичную положительно определенную форму от обобщенных скоростей, в которой коэфициенты в общем случае являются функциями координат. Таким образом, можно записать выражение кинетической энергии в следующем виде:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j,$$

где $m_{ij}=m_{ji}$.

Коэфициенты m_{ij} носят название коэфициентов инерции.

Потенциальная энергия V в первом приближении представляет положительно определенную квадратичную форму относительно обобщенных координат:

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}k_{ij}x_ix_j,$$

где

$$k_{ij}=\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Здесь все производные вычисляются в положении равновесия при $x_i=x_j=0$ и, таким образом, являются постоянными.

Функция рассеяния, или диссипативная функция R, является положительно определенной квадратической формой от обобщенных скоростей системы и имеет выражение

$$R=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\xi_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j.$$

При $\xi_{ij}=\xi_{ji}$ производные функции рассеяния по скорости, взятые с обратным знаком, равны обобщенным диссипативным силам.

Функция рассеяния R характеризует собой скорость рассеяния энергии в системе. Работа сил сопротивления, пропорциональных скорости, в единицу времени численно равна функции рассеяния R, взятой с обратным знаком.

Если $\xi_{ij} = -\xi_{ji}$, то получается $\xi_{ii} = 0$. При этом $R = 0$, несмотря на то, что в системе действуют силы, пропорциональные обобщенным скоростям. Такие силы называются гироскопическими силами. Эти силы не производят работы, так как они действуют перпендикулярно направлению движения точки, на которую они действуют. Примером таких сил являются гироскопические силы, возникающие при вращении тел, силы Кориолиса, а также электромагнитные силы, действующие на заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле.

Уравнения Лагранжа (9) в общем случае переходят в систему k нелинейных уравнений второго порядка вида

$$
\begin{aligned}
&P_1(t, x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \ldots, x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k) = 0;\\
&P_2(t, x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \ldots, x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k) = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_k(t, x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \ldots, x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k) = 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Заменой $\frac{dx_i}{dt} = y_i \, (i = 1, 2, \ldots, k)$ систему k уравнений второго порядка (10) можно привести к системе $2k$ уравнений первого порядка:

$$
\begin{aligned}
&P_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_k, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ldots, \dot{y}_k) = 0;\\
&P_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_k, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ldots, \dot{y}_k) = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_k, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ldots, \dot{y}_k) = 0;\\
&\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= y_1;\\
\dot{x}_2 &= y_2;\\
&\cdots\\
\dot{x}_k &= y_k.
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Во многих случаях, например, когда в системе отсутствуют динамические связи, т. е. когда в выражении кинетической энергии T отсутствуют члены вида $m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$, $i \neq j$, систему уравнений (11) нетрудно привести к нормальной форме, весьма удобной для дальнейшего анализа и, в частности, для исследования устойчивости:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t);\\
\frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dx_n}{dt} &= X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),
\end{aligned}\right\}
\tag{12}
$$

где принято $y_1 = x_{k+1}$; $y_2 = x_{k+2}, \ldots$; $y_k = x_n$; $n = 2k$.

Не ограничивая общности, мы можем предположить, что в положении динамического равновесия или при установившемся движении системы все обобщенные координаты обращаются в ноль, т. е. считать $x_1, x_2, \ldots, x_n$ отклонениями координат от их значения в положении равновесия или при установившемся движении.

2. ОБЩИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Рассматривая малые отклонения координат системы от положения равновесия или от их значения при установившемся движении, можно пренебречь высшими степенями координат и их производных по времени и считать кинетическую энергию системы положительно определенной квадратической формой относительно $\dot{x}_i$ с постоянными коэфициентами $m_{ij} = \text{const}$.

При этом $\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$, и уравнения малых колебаний около положения равновесия при отсутствии возмущающих воздействий получают вид

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = 0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} + \frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_k} = 0. \qquad (13)$$

При наличии ограниченных по модулю внешних воздействий $f_i(t)$, не приводящих к значительным отклонениям обобщенных координат системы, при которых нельзя уже пользоваться приближенными выражениями кинетической и потенциальной энергии, уравнения Лагранжа (9) переходят в систему линейных диференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэфициентами следующего вида:

$$\begin{aligned} a_{11}(p)\,x_1 + a_{12}(p)\,x_2 + \ldots + a_{1k}(p)\,x_k &= f_1(t); \\ a_{21}(p)\,x_1 + a_{22}(p)\,x_2 + \ldots + a^{2k}(p)\,x_k &= f_2(t); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}(p)\,x_1 + a_{k2}(p)\,x_2 + \ldots + a_{kk}(p)\,x_k &= f_k(t), \end{aligned} \qquad (14)$$

где

$$a_{ij}(p) = A_{ij}p^2 + B_{ij}p + C_{ij};$$

$p = \frac{d}{dt}$ — символ диференцирования;

A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} — постоянные коэфициенты, часть из которых может быть равна нулю;

$f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_k(t)$ — функции времени, некоторые из которых могут быть тождественно равны нулю.

Если эта система упорядочена, т. е. если номер уравнения и номер возмущающей силы $f_i(t)$ соответствуют номеру той координаты, для которой это уравнение составлено, то в каждом уравнении член с операторным коэфициентом a_{ij}, имеющим равные индексы $i = j$, является собственным членом, определяющим свободные движения (свободные колебания) данной координаты.

Все остальные члены уравнений с коэфициентами a_{ij}, имеющими разные индексы $i \neq j$, выражают воздействия других обобщенных координат на данную.

Система автоматического регулирования представляет собой совокупность объекта регулирования и регулятора[1]. В соответствии с этим диференциальные уравнения, определяющие поведение системы регулирования, могут быть разделены на две группы: уравнения объекта регулирования и уравнения регулятора [3], [4].

Допустим, что первые r уравнений системы (14) относятся к объекту регулирования, а последние $k-r$ уравнений — к регулятору. Предположим, далее, что уравнения регулятора не содержат возмущающих воздействий. Тогда система уравнений (14) примет вид

$$\begin{aligned}
&a_{11}(p)x_1 + a_{12}(p)x_2 + \ldots + a_{1k}(p)x_k = f_1(t);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{r1}(p)x_1 + a_{r2}(p)x_2 + \ldots + a_{rk}(p)x_k = f_r(t);\\
&a_{r+1,1}(p)x_1 + a_{r+1,2}(p)x_2 + \ldots + a_{r+1,k}(p)x_k = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{k1}(p)x_1 + a_{k2}(p)x_2 + \ldots + a_{kk}(p)x_k = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Допустим, что x_1 — регулируемая величина, x_k — координата регулирующего органа, жестко связанного с исполнительным элементом регулятора.

Пользуясь элементарными операциями, исключим из системы (15) все промежуточные обобщенные координаты, кроме x_1 и x_k. В результате получим систему двух диференциальных уравнений — уравнения объекта регулирования и уравнения регулятора, эквивалентную исходной системе (15):

$$\begin{aligned}
D_0(p)x_1 + C_0(p)x_k = M_1(p)f_1(t) + M_2(p)f_2(t) + \ldots + M_r(p)f_r(t);\\
N(p)x_1 + B(p)x_k = 0,
\end{aligned} \tag{16}$$

где $D_0(p)$ — полином от оператора $p = \frac{d}{dt}$ степени не выше $2r$, характеризующий свободные колебания объекта;

$B(p)$ — полином от p степени не выше $2(k-r)$, определяющий свободные колебания регулятора;

$C_0(p)$ характеризует воздействие регулятора на объект регулирования;

$N(p)$ определяет воздействие регулируемой величины на регулятор (закон регулирования).

Во многих случаях, как это было указано в главе II, задачей регулятора является не поддержание постоянства регулируемой величины или сведение к нулю, точнее к минимально допустимому значению, отклонения регулируемой величины x_1 от заданного значения, но изменение этой величины в соответствии с наперед заданным или произвольным законом $g(t)$. К таким случаям относится программное регулирование, если $g(t)$ — известная функция времени, и следящие системы, если $g(t)$ — неизвестная функция времени, и т. д.

---

[1] В более общем случае можно рассматривать совокупность нескольких объектов регулирования и нескольких регуляторов, представляющих собой систему взаимосвязанного регулирования нескольких величин.

При этом автоматический регулятор реагирует на величину разности $\varepsilon(t)$ между заданным значением $g(t)$ и действительным значением $x(t)$ регулируемой величины. Эту величину часто называют рассогласованием или ошибкой (применительно к следящей системе) и соответственно называют уравнением ошибки уравнение

$$\varepsilon(t) = g(t) - x(t).$$

Для этого более общего случая, введя обозначения $x_1 = x$, $x_k = -z$ и допустив, что $f_1(t) = f(t)$, $f_2(t) = f_3(t) = \ldots = f_r(t) = 0$, вместо системы уравнений (15) получим

$$\begin{aligned} D_0(p)x &= M_1(p)f(t) + C_0(p)z; \\ B(p)z &= N(p)x(t); \\ \varepsilon(t) &= g(t) - x(t). \end{aligned} \tag{17}$$

Исключая из уравнения (17) переменные z и x, получаем уравнение процесса регулирования, написанное относительно ошибки $\varepsilon(t)$:

$$D(p)\varepsilon(t) = -M(p)f(t) + G_1(p)g(t). \tag{18}$$

Исключая из уравнения (17) переменные z и ε, получим уравнение процесса регулирования, написанное относительно регулируемой величины x:

$$D(p)x(t) = M(p)f(t) + G_2(p)g(t), \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned} &D(p) = D_0(p)B(p) + N(p)C_0(p); \\ &M(p) = M_1(p)B(p);\ G_1(p) = D_0(p)B(p); \\ &G_2(p) = C_0(p)N(p). \end{aligned}$$

Для случая, когда требуется поддерживать постоянное значение регулируемой величины x_1, т. е. когда $g(t) = 0$, получаем диференциальное уравнение процесса регулирования в виде

$$D(p)x(t) = M(p)f(t), \tag{20}$$

или в развернутой форме

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f. \tag{21}$$

Это уравнение может быть получено [2] и непосредственно из исходной системы линейных уравнений (14). При этом целесообразно пользоваться известным способом разрешения системы линейных уравнений относительно одной из переменных, в данном случае x_1. Убедившись в совместности системы уравнений (14), составим главный определи-

тель системы Δ и определитель Δ_1, полученный из главного заменой его первого столбца колонкой правых частей уравнений (14):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_{k1} a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} f_1(t)\, a_{12} & \dots & a_{1k} \\ f_2(t)\, a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ f_k(t)\, a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Тогда диференциальное уравнение переходного процесса получим в виде

$$\Delta \cdot x_1(t) = \Delta_1. \tag{22}$$

Нетрудно видеть, что

$$\Delta = D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0$$

и

$$\Delta_1 = M_1(p) f_1(t) + M_2(p) f_2(t) + \dots + M_k(p) f_k(t),$$

где $M_1(p)$, $M_2(p)$, ..., $M_k(p)$ — адъюнкты определителя Δ_1, соответствующие $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_k(t)$.

Здесь

$$M_1(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0,$$

причем $n > m$; a_n, a_{n-1}, ..., a_0 и b_m, b_{m-1}, ..., b_0 — постоянные коэфициенты, зависящие от коэфициентов исходных уравнений A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}.

Таким образом, в общем случае мы приходим к уравнению переходного процесса

$$D(p)\, x_1(t) = M_1(p) f_1(t) + M_2(p) f_2(t) + \dots + M_k(p) f_k(t), \tag{23}$$

которое при $f_2(t) = f_3(t) = \dots = f_k(t) = 0$ переходит в уравнение (20).

* * *

Мы рассмотрели методику составления диференциальных уравнений системы автоматического регулирования, основанную на применении уравнений Лагранжа второго рода.

В некоторых случаях, когда, например, система регулирования представляет собой сочетание механических, электрических, гидравлических и других элементов, составление функций T, V и R вызывает затруднения. Тогда удобнее составлять диференциальные уравнения каждого из элементов системы в отдельности. Рассмотрим методику составления диференциальных уравнений элементов системы регулирования.

3. МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ. ПРИМЕР СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ОБЪЕКТА АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В большинстве случаев уравнения элементов систем автоматического регулирования оказываются нелинейными. Однако в одних случаях нелинейности являются несущественными, не вносящими ничего качественно нового в процесс регулирования, в других они носят определяющий характер, и пренебрежение ими в корне меняет картину переходного процесса. При составлении диференциальных уравнений необходимо проанализировать возможность и допустимость их упрощения и, в частности, линеаризации.

Рассмотрим методику составления диференциальных уравнений элементов, допускающих линеаризацию [5]. К числу таких элементов относится большинство объектов автоматического регулирования.

Первым шагом в составлении уравнения динамики выделенного элемента системы автоматического регулирования является выявление физического закона, определяющего его поведение. Обычно таким законом является закон сохранения вещества (объекты регулирования уровня, давления), закон сохранения энергии (объекты регулирования температуры), второй закон Ньютона (объекты регулирования скорости, центробежный маятник и др.) или какой-либо из других основных законов физики.

Математическое выражение соответствующего физического закона, который определяет процесс, протекающий в данном элементе системы регулирования, и является исходным диференциальным уравнением этого элемента.

Например, для системы регулирования числа оборотов двигателя исходным уравнением объекта будет

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_D - M_C, \tag{24}$$

где ω — угловая скорость вала двигателя;

J — момент инерции движущихся частей, приведенный к валу двигателя;

M_D — движущий момент, приложенный к валу;

M_C — момент сопротивления на валу двигателя;

t — время.

Следующим шагом должно быть определение факторов, от которых зависят переменные, входящие в исходное уравнение, и установление выражений, характеризующих эту зависимость. Последние могут быть аналитическими функциями или могут быть заданы графически. В большинстве случаев они являются нелинейными зависимостями. Подставив найденные выражения в исходное уравнение, получаем нелинейное уравнение элемента (в частности, объекта регулирования).

Для нашего примера необходимо установить, от каких величин зависят и какими выражениями определяются движущий момент M_D, момент сопротивления M_C и является ли постоянной величиной приведенный момент инерции J.

Для случая регулирования числа оборотов авиационного двигателя при помощи винта изменяемого шага движущий момент зависит от угловой скорости двигателя и величины наддува, которая задается летчиком и не может быть заранее определена (является неизвестной функцией времени). Поэтому можем написать

$$M_D = M_D(\omega, t).$$

Момент сопротивления зависит от угловой скорости двигателя, угла установки лопасти винта $\varphi_л$ и ряда других факторов (плотности воздуха, скорости полета и др.), изменение которых учесть затруднительно. Следовательно, выражение момента сопротивления будет иметь вид

$$M_C = M_C(\omega, \varphi_л, t).$$

На основании теории двигателей можно получить аналитические выражения полученных функций или представить их в виде графиков.

Приведенный к валу двигателя момент инерции вращающихся частей будем считать постоянным.

С целью упрощения исследования процесса регулирования линеаризируем полученное уравнение, убедившись в допустимости линеаризации. Отсутствие разрывных, неоднозначных или резко изгибающихся характеристик и справедливость уравнения в течение всего интервала времени регулирования обычно являются достаточными признаками возможности проводить линеаризацию.

Линеаризацию уравнений производят при помощи формулы Тейлора, которая позволяет разложить нелинейную функцию нескольких переменных по степеням малых приращений этих переменных, взятых в окрестности их значений, соответствующих установившемуся режиму. Формула содержит остаточный член, исследование которого позволяет оценить величину ошибки, получающейся в том случае, когда ограничиваются первыми членами разложения. Формула Тейлора, например, для трех переменных x, y и z имеет вид

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) &= F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) = F(x_0, y_0, z_0) + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\Delta z + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\Delta z\right)^{(2)} + \\ &+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\Delta z\right)^{(n)} + R_{n+1}. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Здесь

$$x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y \text{ и } z = z_0 + \Delta z;$$

R_{n+1} — остаточный член;

$$x_0 = \text{const};\ y_0 = \text{const};\ z_0 = \text{const}.$$

Показатели степени, в которую возводятся выражения, стоящие в скобках, имеют символический смысл. Они указывают на необходи-

мость выполнения при раскрытии скобок операций, ясных из следующего примера для второй степени:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\Delta z\right)^{(2)}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Delta x^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Delta y^2+$$

$$+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\Delta z^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\Delta y\Delta z.$$

Частные производные вычисляются в точке с координатами x_0, y_0, z_0 и поэтому являются постоянными.

При линеаризации нелинейных уравнений обычно ограничиваются лишь членами первого порядка малости, пренебрегая остаточным членом R_2:

$$F(x, y, z)\approx F(x_0, y_0, z_0)+\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\Delta z. \tag{26}$$

Для исследования устойчивости процесса регулирования такого приближения в большинстве случаев вполне достаточно. Однако иногда линеаризованные уравнения используются для исследования качества процесса регулирования, и в этом случае приращения переменных могут быть не всегда малыми. Тогда для строгой оценки допускаемой погрешности проводится анализ остаточного члена R_2, который удобнее всего брать в форме Лагранжа:

$$R_2=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_\xi\Delta x+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_\eta\Delta y+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_\xi\Delta z\right]^{(2)}.$$

Здесь $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_\xi$; $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_\eta$ и $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_\xi$ — частные производные, вычисленные в точке с координатами ξ, η и ξ, где

$$x_0<\xi<x_0+\Delta x;\quad y_0<\eta<y_0+\Delta y\quad \text{и}\quad z_0<\xi<z_0+\Delta z.$$

Найдем выражение приращения функции $F(x, y, z)$, которое определим как разность между текущим значением этой функции и ее значением в некоторой фиксированной точке, заданной координатами x_0, y_0, z_0:

$$\Delta F(x, y, z)=F(x, y, z)-F(x_0, y_0, z_0).$$

Подставляя в это выражение значение $F(x, y, z)$, найденное по формуле Тейлора, получим приближенное (с точностью до R_2) выражение

$$\Delta F(x, y, z)\approx\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\Delta z. \tag{27}$$

Полученным выражением удобнее всего пользоваться при линеаризации нелинейных диференциальных уравнений.

Для того чтобы непосредственно применить найденное из формулы Тейлора выражение для приращения нелинейной функции к линеаризации диференциального уравнения, необходимо несколько преобразовать последнее.

Составим уравнение установившегося режима для данного элемента (объекта регулирования) и вычтем его из уравнения динамики элемента. Тогда в правой части уравнения будут только приращения нелинейных

функций относительно их значений в установившемся режиме, для определения которых мы получили выражение из формулы Тейлора.

В качестве установившегося режима может выбираться либо режим, существовавший до действия возмущения и начала переходного процесса, либо режим, который установится после затухания переходного процесса. При установившемся режиме до начала переходного процесса или после его окончания приращения переменных должны соответственно отсчитываться от их постоянных значений. Заметим, что если отсчет приращений переменных (обобщенных координат) производить от их значений при новом установившемся режиме, наступающем после окончания переходного процесса, то с течением времени приращения всех переменных стремятся к нулю (для устойчивых систем).

Для взятого примера уравнение установившегося режима будет

$$M_{DO} = M_{CO}. \tag{28}$$

Примем

$$M_D = M_{DO} + \Delta M_D \text{ и } M_C = M_{CO} + \Delta M_C.$$

Вычитая из исходного уравнения динамики (24) уравнение статики (уравнение установившегося режима) (28), получим уравнение в приращениях или в вариациях:

$$J\frac{d\omega}{dt} = \Delta M_D - \Delta M_C. \tag{29}$$

Приведя уравнение динамики к такому виду при его линеаризации, мы можем пользоваться не выражением (26), а уже более простым выражением (27) для приращения функций ΔM_D и ΔM_C.

Найдем отдельно каждое из этих приращений, обозначив через $\Delta M_D(t)$ и $\Delta M_C(t)$ составляющие приращений M_D и M_C, изменяющиеся во времени по неизвестному или заданному закону:

$$\Delta M_D = \frac{\partial M_D}{\partial\omega}\Delta\omega + \Delta M_D(t);$$

$$\Delta M_C = \frac{\partial M_C}{\partial\omega}\Delta\omega + \frac{\partial M_C}{\partial\varphi_л}\Delta\varphi_л + M_C(t).$$

Угол установки лопасти винта $\varphi_л$ изменяется при помощи исполнительного механизма регулятора, координату которого обозначим через m, тогда

$$\Delta\varphi_л = \frac{\partial\varphi_л}{\partial m}\Delta m.$$

Функция $\varphi_л = f(m)$ обычно задается графически, и частная производная $\frac{\partial\varphi_л}{\partial m}$ определяется, как тангенс угла наклона касательной к кривой $\varphi_л = f(m)$ в точке, соответствующей установившемуся режиму. Тогда

$$\Delta M_C = \frac{\partial M_C}{\partial\omega}\Delta\omega + \frac{\partial M_C}{\partial\varphi_л}\cdot\frac{\partial\varphi_л}{\partial m}\Delta m + \Delta M_C(t).$$

Подставим полученные выражения в уравнение (28):

$$J\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial M_D}{\partial\omega}\Delta\omega + \Delta M_D(t) - \frac{\partial M_C}{\partial\omega}\Delta\omega - \frac{\partial M_C}{\partial\varphi_л}\cdot\frac{\partial\varphi_л}{\partial m}\Delta m - \Delta M_C(t).$$

Перенеся в левую часть члены, содержащие $\Delta\omega$, и обозначив

$$\Delta M_D'(t) - \Delta M_C(t) = \Delta M(t),$$

получим

$$J\frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{\partial M_C}{\partial\omega} - \frac{\partial M_D}{\partial\omega}\right)\Delta\omega = \Delta M\ (t) - \frac{\partial M_C}{\partial\varphi_л}\cdot\frac{\partial\varphi_л}{\partial m}\Delta m. \tag{30}$$

Таким образом, мы получили линеаризованное уравнение в отклонениях (или в приращениях, в вариациях), выраженных в абсолютных единицах.

4. ПЕРЕХОД К УРАВНЕНИЯМ В ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ЕДИНИЦАХ С БЕЗРАЗМЕРНЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ

До сих пор при выводе уравнений мы имели дело с абсолютными величинами, с именованными единицами. Размерность каждого члена уравнения — вполне определенная. В нашем примере каждый член уравнения имеет размерность момента. Однако при исследовании систем регулирования, особенно при сравнении таких систем и их элементов между собой, большие удобства представляют уравнения в относительных единицах с безразмерными коэфициентами или с коэфициентами, имеющими размерность времени в степени, равной порядку производной, при которой стоит данный коэфициент.

Для приведения диференциального уравнения в абсолютных отклонениях к уравнению в относительных единицах с безразмерными коэфициентами произведем следующие элементарные операции.

а) Разделим все члены уравнения на некоторую постоянную величину, имеющую размерность членов этого уравнения (в нашем примере — размерность момента). Такой величиной обычно выбирается номинальное значение, максимальное значение или некоторое начальное значение данной переменной.

В примере возьмем номинальное значение момента и разделим на него почленно уравнение (30):

$$\frac{J}{M_н}\cdot\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{M_н}\left(\frac{\partial M_C}{\partial\omega} - \frac{\partial M_D}{\partial\omega}\right)\Delta\omega = \frac{\Delta M(t)}{M_н} - \frac{1}{M_н}\cdot\frac{\partial M_C}{\partial\varphi_л}\cdot\frac{\partial\varphi_л}{\partial m}\Delta m.$$

Каждый член уравнения стал безразмерным.

б) Перейдем к относительным единицам.

Выбираем некоторые постоянные значения для каждой координаты, для каждого приращения, входящего в полученное уравнение, и относим к нему его приращение. Так, для угловой скорости примем ее номинальное значение $\omega_н$, для координаты сервомотора — его максимальный ход m_{max}. Умножаем и делим каждый член уравнения, в который входит та или иная переменная, на соответствующую ей нами выбранную постоянную величину.

После этого уравнение в рассматриваемом примере получит вид

$$\frac{J\omega_н}{M_н\omega_н}\cdot\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega_н}{M_н}\left(\frac{\partial M_C}{\partial\omega} - \frac{\partial M_D}{\partial\omega}\right)\frac{\Delta\omega}{\omega_н} = \frac{\Delta M(t)}{M_н} -$$

$$- \frac{m_{max}}{M_н}\cdot\frac{\partial M_C}{\partial\varphi_л}\cdot\frac{\partial\varphi_л}{\partial m}\cdot\frac{\Delta m}{m_{max}}.$$

Учитывая, что

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{d(\Delta\omega)}{dt};\ \frac{\partial M}{\partial\omega}=\frac{\partial\Delta M}{\partial(\Delta\omega)}$$

и т. д., можно написать:

$$\frac{J\omega_н}{M_н}\cdot\frac{d\frac{\Delta\omega}{\omega_н}}{dt}+\left(\frac{\partial\frac{\Delta M_C}{M_н}}{\partial\frac{\Delta\omega}{\omega_н}}-\frac{\partial\frac{\Delta M_D}{M_н}}{\partial\frac{\Delta\omega}{\omega_н}}\right)\frac{\Delta\omega}{\omega_н}=\frac{\Delta M(t)}{M_н}-\frac{\partial\frac{\Delta M_C}{M_н}}{\partial\varphi_л}\cdot\frac{\partial\varphi_л}{\partial\frac{\Delta m}{m_{\max}}}\cdot\frac{\Delta m}{m_{\max}}.$$

в) Введем обозначения относительных единиц и коэфициентов уравнения. Подставляя эти обозначения, упрощаем полученное уравнение.

В нашем примере обозначим $\frac{\Delta\omega}{\omega_н}=\varphi$; $\frac{\Delta m}{m_{\max}}=\mu$; $\frac{\Delta M_C}{M_н}=\chi_C$; $\frac{\Delta M_D}{M_н}=\chi_D$; $\frac{\Delta M(t)}{M_н}=f_м(t)$; $\frac{J\omega_н}{M_н}=T_\varphi$; $\frac{\partial\chi_C}{\partial\varphi_л}\cdot\frac{\partial\varphi_л}{\partial\mu}=k_\mu$.

Подставим эти обозначения в полученное уравнение

$$T_\varphi\frac{d\varphi}{dt}+\left(\frac{\partial\chi_C}{\partial\varphi}-\frac{\partial\chi_D}{\partial\varphi}\right)\varphi=f_м(t)-k_\mu\mu. \tag{31}$$

Обозначим

$$\frac{\partial\chi_C}{\partial\varphi}-\frac{\partial\chi_D}{\partial\varphi}=k_C$$

и получим окончательно

$$T_\varphi\frac{d\varphi}{dt}+k_C\varphi=f_м(t)-k_\mu\mu. \tag{32}$$

Все величины, входящие в уравнение (32), за исключением времени t и постоянной T_φ приведены к безразмерному виду.

Вообще пользуются двумя формами уравнений в относительных единицах.

В первой форме, полученной нами выше, время не приводится к безразмерному виду, и тогда при каждой производной, входящей в диференциальное уравнение, стоит коэфициент, имеющий размерность времени в степени, равной порядку производной: при первой производной коэфициент имеет размерность секунды, при второй производной — сек^2, при третьей — сек^3 и т. д.

Во второй форме время, как и все другие переменные, приводят к безразмерному виду, для чего его относят к некоторой постоянной времени, чаще всего к времени T_φ, или так называемой постоянной времени звена $\tau_\varphi=\frac{T_\varphi}{k_C}$.

Рассмотрим переход к уравнению с безразмерным временем. Первый член диференциального уравнения (32) можно представить в следующем виде:

$$T_\varphi\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d\varphi}{d\frac{t}{T_\varphi}}=\frac{d\varphi}{d\tau},$$

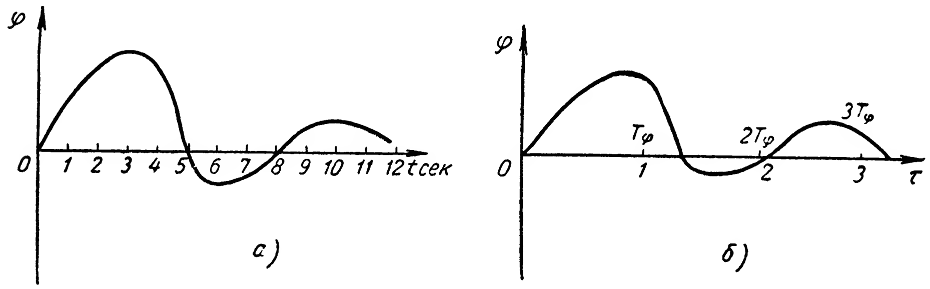
где $\tau=\frac{t}{T_\varphi}$.

Таким преобразованием мы получили безразмерный коэфициент при первом члене диференциального уравнения, в данном случае единицу, и перешли к безразмерному времени τ. После этого рассматриваем процесс регулирования протекающим не во времени t (фиг. 41, *а*), измеренном в единицах t, а во времени τ, измеренном в другом масштабе, в единицах T_{φ} (фиг. 41, *б*).

Диференциальное уравнение (32) после этого примет вид

$$\frac{d\varphi}{d\tau}+k_C\varphi=f_M(\tau)-k_{\mu}\mu. \qquad (33)$$

Систему относительных единиц с безразмерным временем обычно удобно применять при моделировании, когда необходимо изменить



Фиг. 41. Кривая процесса регулирования

масштаб времени процесса, приспособляя его к возможностям моделирующей установки.

В классической теории регулирования обычно используется первая форма относительных единиц, в которой время не приводится к безразмерному виду.

5. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ КОЭФИЦИЕНТОВ, ВХОДЯЩИХ В УРАВНЕНИЕ ОБЪЕКТА РЕГУЛИРОВАНИЯ

Вернемся к уравнению объекта регулирования в форме (32). В это уравнение входят коэфициенты T_{φ}, k_C и k_{μ}. Выясним их значение и физический смысл.

Для выявления физического смысла T_{φ} возьмем уравнение (29) и приведем к уравнению в относительных единицах, разделив его почленно на $M_н$ и разделив и умножив левую часть его на $\omega_н$:

$$\frac{J\omega_н}{M_н}\cdot\frac{d\frac{\Delta\omega}{\omega_н}}{dt}=\frac{\Delta M_D}{M_н}-\frac{\Delta M_C}{M_н}.$$

При принятых обозначениях получим

$$T_{\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\chi_D-\chi_C. \qquad (34)$$

Нетрудно видеть, что T_{φ} оказывается равным времени t_k, в течение которого скорость двигателя изменится на 1, если разность моментов на валу двигателя поддерживать постоянной и равной 1.

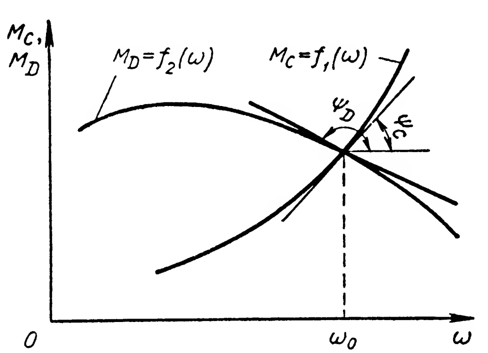
Действительно, положив $\varphi_0 = 0$; $\varphi_k = 1$; $\chi_D - \chi_C = 1$ и проинтегрировав уравнение (34), получим

$$\int_0^{\varphi_k} d\varphi = \int_0^{t_k} \frac{1}{T_\varphi} dt; \quad \varphi_k = \frac{t_k}{T_\varphi};$$

при $\varphi_k = 1$ имеем $t_k = T_\varphi$.

Таким образом, T_φ представляет собой время, за которое двигатель разогнался бы из состояния покоя до номинальной скорости при действии на его валу постоянной разности моментов, равной номинальному моменту. Поэтому T_φ иногда называют временем разгона двигателя.

Можно дать несколько более общее определение этой величины: T_φ — это время, за которое скорость двигателя изменится на такую же долю номинальной скорости, какую составляет результирующий момент на валу двигателя от номинального момента, если этот момент поддерживать неизменным.



Фиг. 42. Определение коэфициента самовыравнивания k_c по характеристикам объекта регулирования.

Коэфициент k_C носит название коэфициента самовыравнивания (или саморегулирования) объекта регулирования.

Как видно из выражения коэфициента самовыравнивания

$$k_C = \frac{\partial \chi_C}{\partial \varphi} - \frac{\partial \chi_D}{\partial \varphi},$$

он представляет собой разность частных производных момента сопротивления и движущего момента по скорости двигателя, взятых в относительных единицах. В зависимости от характеристик двигателя он может быть положительным, отрицательным или равным нулю. В большинстве случаев $M_C = f_1(\omega)$ — возрастающая функция, а $M_D = f_2(\omega)$ — убывающая (фиг. 42). При этом всегда $k_C > 0$.

К объектам такого рода относятся паровые турбины, большинство электродвигателей и т. д.

Существуют двигатели и другие обьекты регулирования, у которых моменты, приложенные к валу, не зависят от скорости вращения последнего. У таких объектов коэфициент самовыравнивания равен нулю.

Встречаются случаи, когда крутизна характеристик машины $M_C = f_1(\omega)$ меньше крутизны характеристики $M_D = f_2(\omega)$, т. е.

$$\frac{\partial \chi_C}{\partial \varphi} < \frac{\partial \chi_D}{\partial \varphi},$$

тогда $k_C < 0$.

Примером такого объекта может служить воздуходувная машина, работающая вблизи помпажного режима, или асинхронный двигатель при больших скольжениях. Объекты, у которых $k_C = 0$ или $k_C < 0$,

не могут работать без регуляторов, как это будет видно из дальнейшего.

Рассмотрим поведение объекта автоматического регулирования, характеризуемого уравнением (32), при отключенном регуляторе, т. е. при $\mu = 0$. Уравнение объекта примет вид

$$T_\varphi \frac{d\varphi}{dt} + k_C \varphi = f_м(t). \tag{35}$$

Допустим, что возмущающее воздействие $f_м(t)$ (например, нагрузка) изменяется по закону ступенчатой или скачкообразной функции, т. е. $f_м(t) = 0$ при $t < 0$ и $f_м(t) \equiv F_0 = \text{const}$ при $t > 0$.

Проинтегрировав уравнение (35) для этого случая, получим

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\frac{k_C}{T_\varphi} t} + \frac{F_0}{k_C}\left(1 - e^{-\frac{k_C}{T_\varphi} t}\right), \tag{36}$$

где φ_0 — начальное отклонение регулируемой величины при $t = 0$.

Нетрудно видеть, что при новом установившемся режиме в конце переходного процесса (теоретически спустя неограниченное время) отклонение регулируемой величины будет $\varphi_k = \frac{F_0}{k_C}$ и, таким образом, будет пропорционально изменению нагрузки F_0 и обратно пропорционально величине коэфициента самовыравнивания.

Обозначим $\frac{T_\varphi}{k_C} = \tau_\varphi$ и перепишем выражение (36):

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\frac{t}{\tau_\varphi}} + \varphi_k\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\varphi}}\right). \tag{37}$$

При $\varphi_0 = 0$ получим

$$\varphi = \varphi_k\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\varphi}}\right). \tag{38}$$

Мы видим, что в рассмотренном случае получается экспоненциальный процесс изменения регулируемой величины, τ_φ — постоянная времени экспоненты.

Напомним геометрический смысл постоянной времени экспоненциального процесса: постоянная времени экспоненты τ_φ численно равна длине отрезка асимптоты, который отсекает касательная, проведенная к экспоненте в начальной точке при $t = 0$ (фиг. 43).

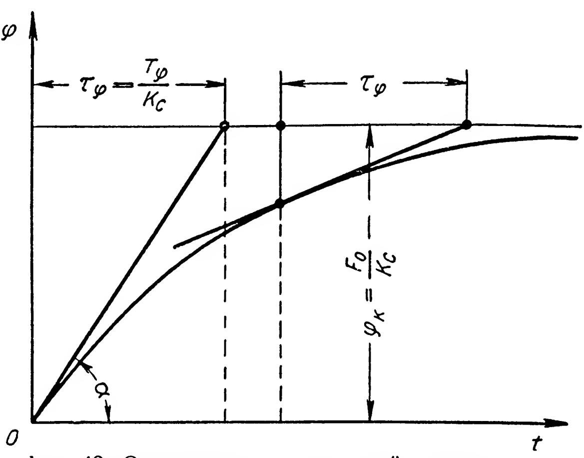
Полезно иметь в виду и следующую известную особенность экспоненты: в какой бы точке мы ни провели касательную к этой кривой, отрезок ее асимптоты, который заключен между ординатой, проведенной через точку касания, и точкой пересечения асимптоты с касательной, имеет одинаковую длину и численно равен постоянной времени экспоненты τ_φ.

Отсюда вытекает и более общее определение постоянной времени экспоненциального процесса: *постоянная времени экспоненциального процесса τ_φ численно равна длине отрезка асимптоты экспоненты, заключенного между ординатой, проходящей через любую точку этой*

кривой и точкой пересечения асимптоты с касательной, проведенной в той же точке экспоненты.

Физическое истолкование постоянной времени τ_φ может быть таким: *постоянная времени экспоненциального процесса изменения величины φ представляет собой то время, через которое эта величина достигла бы своего конечного значения φ_k, являющегося ее пределом в бесконечности, если бы она изменялась с постоянной скоростью, равной скорости ее изменения в начальный момент*, т. е. если бы кривая изменения φ, начиная с этого момента, совпадала бы с касательной к экспоненте, проведенной в начальной точке.

Рассмотрим влияние величины коэфициента времени объекта регулирования T_φ коэфициента самовыравнивания k_c на характер переходного процесса при скачкообразных изменениях нагрузки без регулятора.



Фиг. 43. Определение постоянной времени τ_φ.

Выражения (37) и (38) показывают, что конечное отклонение регулируемой величины φ_k, соответствующее новому установившемуся режиму, зависит только от величины изменения нагрузки F_0 и коэфициента самовыравнивания k_C (обратно пропорционально последнему) и не зависит от коэфициента времени объекта T_φ.

На фиг. 44 приведены кривые переходных процессов при $F = \text{const}$; $k_C = \text{const}$ для нескольких значений T_φ.

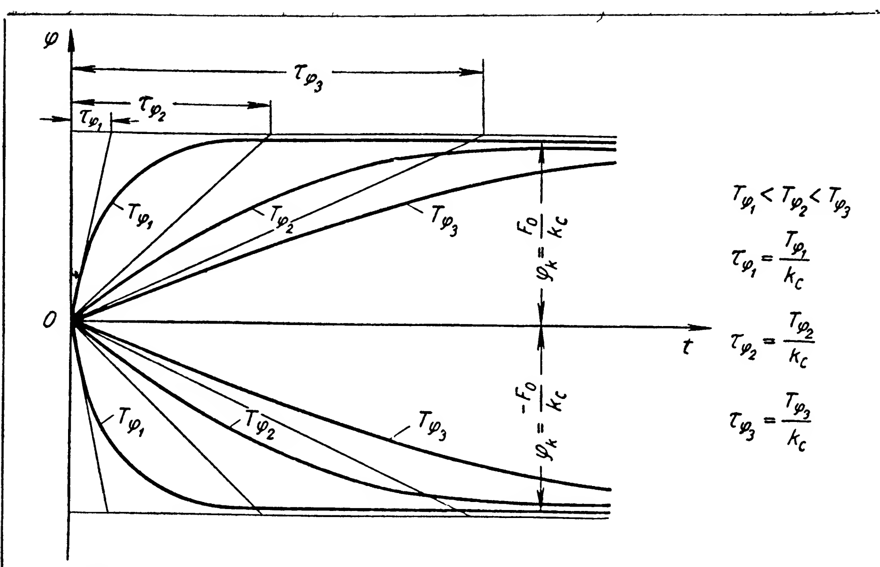
Скорость изменения регулируемой величины в начальный момент $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$ зависит только от величины изменения нагрузки F_0 и коэфициента времени объекта T_φ и не зависит от коэфициента самовыравнивания. Действительно,

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = \frac{\varphi_k}{\tau_\varphi} = \frac{F_0}{T_\varphi}.$$

На фиг. 45 приведены кривые переходных процессов при $F_0 = \text{const}$; $T_\varphi = \text{const}$ для нескольких значений k_C.

При $k_C = 0$ без регулятора новый установившийся режим не наступает, и происходит изменение φ по линейному закону (практически до тех пор, пока справедливы исходные уравнения):

$$\varphi = \frac{F_0}{T_\varphi} t.$$



Фиг. 44. Кривые переходных процессов объекта регулирования для нескольких значений T_φ при $F_0 = \text{const}$; $k_c = \text{const}$.

Фиг. 45. Кривые переходных процессов объекта регулирования для нескольких значений k_c при $F_0 = \text{const}$; $T_\varphi = \text{const}$.

При $k_C < 0$ происходит более резкое изменение φ по экспоненциальному закону с положительным показателем экспоненты:

$$\varphi = \frac{F_0}{k_C}\left(e^{\frac{k_C}{T_\varphi}t} - 1\right).$$

Таким образом, мы видим, что объекты регулирования, уравнения которых имеют положительные коэфициенты самовыравнивания, способны и без регуляторов приходить при изменении возмущающего воздействия к новому установившемуся режиму. При этом чем больше коэфициент самовыравнивания, тем меньше отклонение φ_k, которое получается при новом установившемся режиме в случае действия одного и того же возмущения.

Теперь можно дать определение понятию „самовыравнивание".

Самовыравниванием называется способность объекта регулирования самопроизвольно приходить к новому установившемуся режиму при ограниченном изменении величины возмущающего воздействия (например, нагрузки) *без помощи регулятора.* Протекающий при этом переходный процесс называется процессом самовыравнивания.

Каждому значению нагрузки для объекта, обладающего самовыравниванием, соответствует в установившемся режиме свое вполне определенное значение регулируемой величины. Зная величину изменения возмущения (нагрузки) F_0 и установившееся при этом отклонение φ_k при отключенном регуляторе, легко определить коэфициент самовыравнивания объекта регулирования, который представляет собой отношение этих величин:

$$k_C = \frac{F_0}{\varphi_k}.$$

Коэфициент k_μ, стоящий при координате регулирующего органа или исполнительного элемента регулятора μ, может быть назван коэфициентом регулирующего воздействия. Этот коэфициент характеризует собой эффективность воздействия исполнительного механизма регулятора на объект регулирования, которое осуществляется через регулирующий орган.

Для рассмотренного примера

$$k_\mu = \frac{\partial \chi_C}{\partial \varphi_л} \cdot \frac{\partial \varphi_л}{\partial \mu} = \frac{\partial \chi_C}{\partial \mu}.$$

Этот коэфициент может быть определен как предел отношения приращения момента к вызвавшему его перемещению исполнительного механизма регулятора при неизменной нагрузке. В том случае, если характеристика $M_C = f_3(m)$ линейная и максимальному перемещению (полному ходу) исполнительного механизма соответствует приращение момента, равное номинальному моменту, $k_\mu = 1$.

Изменяя характеристику регулирующего органа или характеристику передачи от исполнительного механизма регулятора к регулирующему органу, можно изменять значение k_μ, обеспечить его постоянство или изменение по заданному закону.

Знак перед членом $k_\mu \mu$ уравнения (32) зависит как от выбора направления отсчета координаты исполнительного механизма μ, так и от того, воздействует ли регулирующий орган на M_C или M_D. Если направление отсчета μ выбрано таким, что при увеличении μ возрастает и момент, то при воздействии регулирующего органа на движущий момент должен быть знак плюс, а при воздействии на момент сопротивления — минус.

Часто уравнение объекта регулирования (32) приводят к виду

$$T'_\varphi \frac{d\varphi}{dt} + k'_C \varphi = f_1(t) - \mu, \tag{39}$$

где

$$T'_\varphi = \frac{T_\varphi}{k_\mu}; \quad k'_C = \frac{k_C}{k_\mu}^*;$$

и

$$f_1(t) = \frac{1}{k_\mu} f_м(t).$$

Более распространена следующая форма уравнения объекта регулирования:

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = f(t) + kx_1 \tag{40}$$

или

$$(Tp + 1)\, x_2 = f(t) + kx_1, \tag{41}$$

где $x_2 = \varphi$; $x_1 = \mu$; $T = \tau_\varphi$ — постоянные времени объекта регулирования; $f(t) = \frac{1}{k_C} f_м(t)$; $p \equiv \frac{d}{dt}$ — символ диференцирования; $k = \frac{k_\mu}{k_C}$ — передаточный коэфициент объекта регулирования.

Нетрудно видеть, что для установившегося режима, когда $\frac{dx_2}{dt} = 0$, и для $f(t) = 0$ $k = \frac{x_{2уст}}{x_{1уст}}$.

Таким образом, передаточный коэфициент объекта регулирования равен отношению изменения регулируемой величины в установившемся режиме к вызвавшему его перемещению исполнительного механизма регулятора, взятым в относительных единицах, при $f(t) = 0$, т. е. при неизменной нагрузке.

6. ТИПОВЫЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБЪЕКТОВ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

На примере уравнения регулирования числа оборотов авиационного двигателя мы проиллюстрировали методику составления диференциального уравнения типичного объекта регулирования, его линеаризацию, переход к уравнению в относительных единицах с безразмерными коэфициентами и проанализировали физический смысл коэфициентов получен-

---

* Иногда k'_C называют коэфициентом самовыравнивания, что не вполне точно.

ного уравнения. К такому же виду, к которому мы привели уравнение изменения числа оборотов двигателя, приводятся уравнения многих объектов регулирования — ряда объектов регулирования уровня, давления, температуры и других величин. Однако в практике часто встречаются и более сложные объекты регулирования, которые имеют несколько степеней свободы, несколько взаимосвязанных обобщенных координат. К числу таких объектов регулирования относятся самолет, паровой котел, турбогенератор, электропривод и др. Поведение этих объектов описывается системой нескольких уравнений первого порядка или одним уравнением второго и более высокого порядка.

Приведем несколько типовых линеаризованных уравнений различных объектов регулирования, не останавливаясь на их выводе и взяв их в форме, аналогичной форме уравнения (41):

$$(T_1p + 1)\,x_2 = f(t) - kx_1; \tag{42}$$

$$T_1px_2 = f(t) - x_1; \tag{43}$$

$$\left(T_2^2p^2 + T_1p\right)x_2 = f(t) - x_1; \tag{44}$$

$$\left(T_2^2p^2 + T_1p + 1\right)x_2 = f(t) - kx_1. \tag{45}$$

Следует подчеркнуть, что в большинстве случаев коэфициенты линеаризованных уравнений объектов регулирования можно считать постоянными лишь при малых отклонениях от установившегося режима, и для различных установившихся режимов в общем случае значения коэфициентов будут неодинаковыми.

Методика составления уравнений элементов регуляторов по существу ничем не отличается от рассмотренного способа составления диференциального уравнения объекта регулирования. Ряд примеров на составление уравнений систем регулирования приведен в главе VIII.

ЛИТЕРАТУРА

1. Суслов Г. К., Теоретическая механика, ГИТТЛ, 1946.

2. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, Гостехтеоретиздат, 1948.

3. Солодовников В. В., Об уравнении регулирования и об основной задаче теории регулирования, „Бюллетень ВЭИ“ № 4, 1941.

4. Солодовников В. В., Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, ГИТТЛ, 1952.

5. Сборник „За советское энергооборудование“ ВИТГЭО, 1934.

6. Гарднер М. и Бэрнс Дж., Переходные процессы в линейных системах, Гостехиздат, 1949.

7. Круг К. А., Переходные процессы в электрических цепях, Госэнергоиздат, 1948.

ГЛАВА V

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ЛАПЛАСА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К АНАЛИЗУ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

В предыдущей главе была изложена методика составления диференциальных уравнений систем автоматического регулирования.

Задача этой главы состоит в том, чтобы изложить некоторые вспомогательные математические сведения, связанные главным образом с применением преобразований Фурье и Лапласа к решению диференциальных уравнений. Кроме того, в настоящей главе вводятся такие основные для современной теории регулирования понятия, как частотные характеристики и передаточные функции. Для понимания содержания последующих глав знакомство с этими понятиями является совершенно необходимым.

1. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Как это было показано в предыдущей главе [см. формулу (21)], диференциальное уравнение, определяющее изменение какой-либо из обобщенных координат динамической системы, а следовательно и регулируемой величины в системе автоматического регулирования, имеет вид

$$a_n\frac{d^nx}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=b_m\frac{d^mf}{dt^m}+\ldots+b_1\frac{df}{dt}+b_0f. \quad (46)$$

Решение или общий интеграл уравнения (46) состоит из двух частей: из общего интеграла уравнения (46) без правой части, т. е. из решения однородного диференциального уравнения

$$a_n\frac{d^nx}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=0, \quad (47)$$

и из частного решения уравнения (46), которое, будучи подставлено в его левую часть, дает правую, т. е. превращает уравнение в тождество.

Для того чтобы найти решение уравнения (47), будем его искать в виде

$$x(t)=e^{\lambda t}. \quad (48)$$

Подставляя уравнение (48) в уравнение (47) получим

$$(a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ .\ .\ .+a_1\lambda+a_0)\,e^{\lambda t}=0, \quad (49)$$

и, следовательно, выражение (48) есть решение уравнения (47) при условии, что величина λ является корнем уравнения

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ . \ . \ . \ + a_1\lambda + a_0 = 0. \qquad (50)$$

Так как уравнение (50) имеет n корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то общий интеграл уравнения (47) в предположении, что все корни различны, может быть представлен в виде

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t}, \qquad (51)$$

где значения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ зависят от начальных условий.

Если среди корней имеются кратные корни, то корню λ_i, имеющему кратность $\varkappa$, соответствует частное решение уравнения (47) вида

$$(C_{i1} + C_{i2}t + \ \ldots \ + C_{i\varkappa}t^{\varkappa-1})\, e^{\lambda_i t}. \qquad (52)$$

Из уравнения (51), а также (52) очевидно, что решение уравнения (47) удовлетворяет условию

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0, \qquad (53)$$

т. е. свободные колебания системы затухают с течением времени в том, и только в том случае, если все корни λ_i характеристического уравнения (50) имеют отрицательные вещественные части.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Перейдем теперь к нахождению частного решения уравнения (46) для того случая, когда воздействие $f(t)$ представляет собой гармоническую функцию времени, т. е. может быть представлено в виде линейной комбинации функций $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ или в виде

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t + \psi) \qquad (54)$$

(где ω — угловая частота; f_0 — амплитуда; ψ — фаза), или в виде

$$f(t) = f_0 \cos \omega t, \qquad (55)$$

если предположить, что $\psi = 0$.

Имеем

$$f(t) = f_0 \cos \omega t = \frac{f_0}{2} e^{j\omega t} + \frac{f_0}{2} e^{-j\omega t}. \qquad (56)$$

Из уравнения (56) ясно, что гармоническое воздействие (55) может рассматриваться как сумма двух экспоненциальных воздействий. Заметим, что рассмотрение таких воздействий весьма удобно с математической точки зрения в силу того, что как производная, так и интеграл от экспоненциальной функции попрежнему являются экспонентой.

Найдем эффект, создаваемый каждым из экспоненциальных воздействий в правой части выражения (56) в отдельности.

Положив в уравнении (46)

$$f(t)=\frac{f_0}{2}e^{j\omega t}, \tag{57}$$

будем искать частное решение этого уравнения в виде

$$x_{1b}(t)=\frac{f_0}{2}Y(j\omega)e^{j\omega t}. \tag{58}$$

Подставляя уравнения (57) и (58) в (46), получим

$$\frac{f_0}{2}[a_n(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_1 j\omega+a_0]Y(j\omega)e^{j\omega t}=$$

$$=\frac{f_0}{2}[b_m(j\omega)^m+\ldots+b_1 j\omega+b_0]e^{j\omega t}, \tag{59}$$

и, следовательно,

$$Y(i\omega)=\frac{b_m(j\omega)^m+b_{m-1}(j\omega)^{m-1}+\ldots+b_1 j\omega+b_0}{a_n(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_1 j\omega+a_0}. \tag{60}$$

Функция $Y(j\omega)$, определяемая формулой (60), называется **передаточной функцией** динамической системы.

Отделяя в числителе и знаменателе выражения (60) вещественную часть от мнимой, мы можем написать:

$$Y(j\omega)=\frac{a(\omega)+jb(\omega)}{c(\omega)+jd(\omega)}, \tag{61}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
a(\omega)&=b_0-b_2\omega^2+b_4\omega^4-\ldots;\\
b(\omega)&=b_1\omega-b_3\omega^3+b_5\omega^5-\ldots;\\
c(\omega)&=a_0-a_2\omega^2+a_4\omega^4-\ldots;\\
d(\omega)&=a_1\omega-a_3\omega^3+a_5\omega^5-\ldots,
\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

или

$$Y(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \tag{63}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
P(\omega)&=\frac{a(\omega)c(\omega)+b(\omega)d(\omega)}{c^2(\omega)+d^2(\omega)};\\
Q(\omega)&=\frac{b(\omega)c(\omega)-a(\omega)d(\omega)}{c^2(\omega)+d^2(\omega)};\\
A(\omega)&=+\sqrt{\frac{a^2(\omega)+b^2(\omega)}{c^2(\omega)+d^2(\omega)}};\\
\varphi(\omega)&=\operatorname{arctg}\frac{b(\omega)c(\omega)-a(\omega)d(\omega)}{a(\omega)c(\omega)+b(\omega)d(\omega)}.
\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Подставляя формулу (63) в (58), получим

$$x_{1b}(t)=\frac{f_0}{2}A(\omega)e^{j[\omega t+\varphi(\omega)]}. \tag{65}$$

Точно так же, если положить в уравнении (56)

$$f(t)=\frac{f_0}{2}e^{-j\omega t}, \tag{66}$$

то для вынужденных колебаний $x_{2b}(t)$ найдем

$$x_{2b}(t)=\frac{f_0}{2}Y(-j\omega)\,e^{-j\omega t}, \tag{67}$$

или

$$x_{2b}(t)=\frac{f_0}{2}A(\omega)\,e^{-j[\omega t+\varphi(\omega)]}. \tag{68}$$

Итак, для вынужденных колебаний, вызываемых воздействием (55), получим

$$x_b(t)=x_{1b}(t)+x_{2b}(t)=\frac{f_0}{2}A(\omega)\left[e^{j\omega t}e^{j\varphi(\omega)}+e^{-j\omega t}e^{-j\varphi(\omega)}\right]=$$

$$=f_0A(\omega)\cos[\omega t+\varphi(\omega)]. \tag{69}$$

Выражение (69) показывает, что вынужденные колебания, вызываемые в линейной динамической системе гармоническим воздействием, являются также гармонической функцией времени, отличающейся от воздействия по амплитуде и по фазе, но имеющей ту же угловую частоту ω, что и воздействие.

Функции $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, определяющие относительную амплитуду и фазу вынужденных колебаний в зависимости от частоты ω, называются соответственно амплитудной и фазовой частотными характеристиками системы. Функции $P(\omega)$ и $Q(\omega)$, связанные с функциями $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, как это ясно из формулы (63), соотношениями

$$P(\omega)=A(\omega)\cos\varphi(\omega); \tag{70}$$

$$Q(\omega)=A(\omega)\sin\varphi(\omega) \tag{71}$$

и

$$A(\omega)=+\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)}; \tag{72}$$

$$\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}, \tag{73}$$

называются соответственно вещественной и мнимой частотными характеристиками.

Как мы видим, частотные характеристики системы могут быть определены при помощи формул (64), если известна передаточная функция $Y(j\omega)$, функция же $Y(j\omega)$, как это показывает выражение (60), весьма просто может быть найдена из диференциальных уравнений системы.

Важно отметить, что частотные характеристики системы могут быть определены не только из ее диференциальных уравнений, но и экспериментально. Способ определения амплитудной $A(\omega)$ и фазовой $\varphi(\omega)$ частотных характеристик ясен из формулы (69) и заключается в следующем. Приложим к системе гармоническое воздействие, имеющее частоту ω. В результате в системе возникнут переходный процесс и вынужденные колебания с частотой ω.

Через некоторое время, достаточное для затухания переходного процесса (а такое затухание всегда произойдет, если только система устойчива), останутся лишь вынужденные колебания с частотой ω, равной частоте воздействия.

Предположим, что мы располагаем измерительной аппаратурой, позволяющей измерить все указанные выше величины, а именно частоту ω приложенного воздействия, его амплитуду f_0, амплитуду колебаний интересующей нас переменной x и сдвиг фазы φ между обеими амплитудами. Произведем ряд таких измерений, постепенно повышая частоту воздействия от $\omega = 0$ до такого значения $\omega = \omega_0$, при котором амплитуда колебаний переменной x сделается настолько малой, что окажется уже вне пределов точности нашей измерительной аппаратуры. Кривые зависимости отношения амплитуды воздействия к амплитуде переменной x и сдвига фазы между ними в зависимости от частоты, найденные изложенным способом, и будут представлять собой соответственно амплитудную и фазовую частотные характеристики системы.

3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ЛЮБОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ. РЯДЫ ФУРЬЕ И ЛИНЕЙНЫЕ СПЕКТРЫ

Перейдем к вычислению вынужденных колебаний в более общем случае, когда воздействие $f(t)$ представляет собой не простую гармоническую, а любую периодическую функцию времени с периодом T, т. е.

$$f(t) = f(t + T). \tag{74}$$

Предварительно напомним некоторые элементарные сведения о рядах Фурье.

Как известно, если периодическая функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т. е. является ограниченной и имеет конечное число максимумов и минимумов на протяжении периода T, то она может быть представлена в виде бесконечного ряда Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(a_\nu \cos \frac{2\pi\nu t}{T} + b_\nu \sin \frac{2\pi\nu t}{T} \right), \tag{75}$$

который приближенно можно заменить рядом Фурье

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \left(a_\nu \cos \frac{2\pi\nu t}{T} + b_\nu \sin \frac{2\pi\nu t}{T} \right), \tag{76}$$

содержащим конечное число членов.

Коэфициенты a_ν, b_ν ряда (75) определяются при помощи формул

$$a_\nu = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2\pi\nu t}{T} \, dt; \tag{77}$$

$$b_\nu = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \frac{2\pi\nu t}{T} dt. \qquad (78)$$

В том случае, когда функция $f(t)$ является четной, т. е. обладает свойством

$$f(t) = f(-t),$$

ряд Фурье (75) сводится к виду

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \frac{2\pi\nu t}{T}, \qquad (79)$$

так как коэфициенты b_ν, определяемые формулой (78), в этом случае обращаются в нуль.

В том случае, когда функция $f(t)$ является нечетной, т. е. обладает свойством

$$f(t) = -f(-t),$$

ряд Фурье (75) сводится к виду

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin \frac{2\pi\nu t}{T}. \qquad (80)$$

Ряд Фурье весьма часто записывают в комплексной форме, которую можно получить следующим образом. Имеем

$$\frac{1}{2}(a_\nu - jb_\nu) e^{j\frac{2\pi\nu t}{T}} + \frac{1}{2}(a_\nu + jb_\nu) e^{-j\frac{2\pi\nu t}{T}} = a_\nu \cos \frac{2\pi\nu t}{T} + b_\nu \sin \frac{2\pi\nu t}{T}.$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} c_\nu &= \frac{a_\nu - jb_\nu}{2}; \\ c_{-\nu} &= \frac{a_\nu + jb_\nu}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

Из уравнения (81) легко видеть, что

$$c_{-\nu} = c_\nu^*,$$

где звездочкой обозначено комплексно сопряженное значение величины c_ν. Итак,

$$a_\nu \cos \frac{2\pi\nu t}{T} + b_\nu \sin \frac{2\pi\nu t}{T} = c_\nu e^{j\frac{2\pi\nu t}{T}} + c_{-\nu} e^{-j\frac{2\pi\nu t}{T}}. \qquad (82)$$

Подставляя уравнение (82) в уравнение (75), получим

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{\frac{2\pi\nu t}{T}}, \qquad (83)$$

где положено, что

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

и

$$c_\nu = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-j\frac{2\pi\nu t}{T}}\, dt. \qquad (84)$$

Согласно уравнению (81)

$$c_\nu = p_\nu + jq_\nu,$$

где

$$p_\nu = \frac{a_\nu}{2}; \qquad q_\nu = -\frac{b_\nu}{2}. \qquad (85)$$

Мы можем также написать

$$c_\nu = \alpha_\nu e^{j\beta_\nu}, \qquad (86)$$

где

$$\alpha_\nu = \sqrt{p_\nu^2 + q_\nu^2}$$

и

$$\beta_\nu = \operatorname{arctg}\left(\frac{q_\nu}{p_\nu}\right). \qquad (87)$$

Величины p_ν, q_ν, α_ν, β_ν, рассматриваемые как функции переменной $\frac{2\pi\nu}{T}$, где ν принимает лишь целочисленные значения, могут быть названы линейными частотными спектрами функции $f(t)$, а совокупность величин c_ν — ее комплексным линейным частотным спектром.

Графики этих функций состоят из отдельных линий, имеющих длину p_ν, q_ν, α_ν, β_ν и расположенных на одном и том же расстоянии друг от друга, равном $\frac{2\pi}{T}$.

Таким образом, формула (84) позволяет найти для всякой периодической функции $f(t)$ соответствующий ей линейный спектр, являющийся совокупностью коэфициентов разложения этой функции в ряд Фурье. В общем случае функция $f(t)$ имеет два линейных спектра: вещественный p_ν и мнимый q_ν или амплитудный α_ν и фазовый β_ν. Четные функции имеют лишь один линейный спектр p_ν, симметричный относительно начала координат. Нечетные функции имеют также лишь один линейный спектр q_ν, но кососимметричной относительно начала координат.

Пример. В виде примера рассмотрим функцию на фиг. 46, *а*. Она состоит из одинаковых прямоугольных импульсов, имеющих амплитуду A_0 и длительность τ_0.

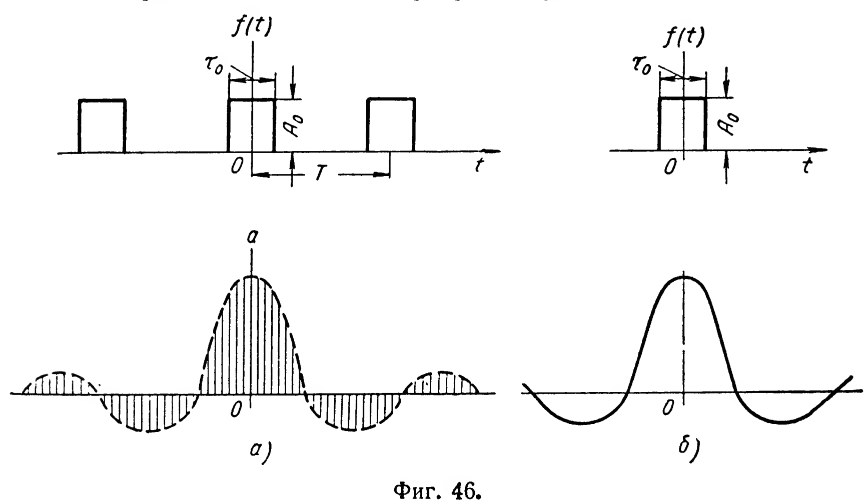
Имеем:

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= A_0 & -\frac{\tau_0}{2} < t < \frac{\tau_0}{2}; \\ f(t) &= 0 & \frac{\tau_0}{2} < t < T - \frac{\tau_0}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

Так как функция четна, то она будет иметь ряд Фурье вида (79), причем

$$a_\nu = \frac{2A_0}{T} \int\limits_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} \cos \frac{2\pi\nu t}{T}\, dt = \frac{A_0\tau_0}{T}\left(\frac{\sin \frac{\pi\nu\tau_0}{T}}{\frac{\pi\nu\tau_0}{T}}\right). \qquad (89)$$

Таким образом, в данном случае вещественный линейный частотный спектр p_ν совпадает с амплитудным спектром α_ν и определяется формулой (89), а мнимый и фазовый линейные спектры равны нулю.



Фиг. 46.

Линейный спектр, определяемый формулой (89), изображен на фиг. 46, *а*. Как мы видим, высота линий спектра ограничивается огибающей, которую можно построить на основании формулы (89), рассматривая величину $\frac{\pi\nu\tau_0}{T}$ как непрерывную переменную.

Ознакомившись с понятием линейных частотных спектров, вернемся к вопросу, который был поставлен в самом начале этой главы, а именно к вычислению вынужденных колебаний, вызываемых в линейной динамической системе любым периодическим воздействием.

Теперь получить ответ на этот вопрос нетрудно. Для вычисления вынужденных колебаний, очевидно, необходимо разложить периодическое воздействие в ряд Фурье; найти соответствующий амплитудный и фазовый линейные спектры воздействия; найти передаточную функцию системы и соответствующие ей амплитудную и фазовую частотные характеристики; найти вынужденные гармонические колебания, вызываемые в системе каждой из гармонических составляющих воздействия; и, наконец, пользуясь принципом суперпозиции, сложить вынужденные колебания, вызванные каждой из гармонических составляющих воздействия.

4. ИНТЕГРАЛ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Выше мы рассмотрели общий способ вычисления вынужденных колебаний. Однако при анализе систем автоматического регулирования существенный интерес представляют не только и не столько вынужденные колебания, сколько переходные процессы, вызываемые теми или иными непериодическими воздействиями.

Общий метод анализа переходных процессов удобно обосновать, пользуясь понятием интеграла Фурье, который можно рассматривать как обобщение понятия о ряде Фурье на случай, когда период T функции $f(t)$ стремится к бесконечности.

Предположим, например, что воздействие $f(t)$ имеет вид прямоугольного импульса (фиг. 46, *б*), имеющего такую же амплитуду A_0 и длительность τ_0, как и каждый из периодически повторяющихся импульсов на фиг. 46, *а*. Такого рода воздействие в виде однократного импульса можно считать периодической функцией, но с периодом $T = \infty$.

Рассмотрим, что будет происходить с линейными частотными спектрами функции $f(t)$ при бесконечном возрастании T.

Из выражения (89) легко понять, что вид огибающей частотного спектра не зависит от значения T, если не считать того, что высота линий спектра обратно пропорциональна T. Отсюда следует, что если, например, удвоить T и одновременно увеличить в 2 раза масштаб для ординат a_ν, то вид огибающей на фиг. 46 останется неизменным, однако расстояние между линиями спектра в 2 раза уменьшится. Если продолжать удваивать T, изменяя каждый раз соответствующим образом масштаб ординат, то вид спектра будет оставаться попрежнему неизменным, но его линии будут все время сближаться.

В пределе при $T \to \infty$ амплитуды линий спектра сделаются бесконечно малыми, хотя они сохраняют ту же зависимость от переменной $\frac{\pi\nu\tau_0}{T}$; расстояние между соседними линиями спектра также сделается бесконечно малым. В результате линейный разрывной спектр превратится в сплошной непрерывный спектр.

Посмотрим, каким образом переход к пределу может быть осуществлен математически.

Подставляя уравнения (78) и (77) в (75), получим

$$f(t) = \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt + \frac{2}{T} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cos \frac{2\pi\nu(t-\tau)}{T}\,d\tau. \qquad (90)$$

Предположим, что в уравнении (90) $T \to \infty$.
Имеем

$$\lim_{T\to\infty} \left| \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt \right| \leqslant \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|\,dt,$$

и, следовательно, если предположить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty, \tag{91}$$

т. е. что функция $f(t)$ является абсолютно интегрируемой, то при $T \to \infty$ первый интеграл в правой части уравнения (90) стремится к нулю.

Вводя теперь новую переменную ω, принимающую равноотстоящие значения $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$; $\omega_2 = 2\frac{2\pi}{T}$; . . . ; $\omega_\nu = \nu\frac{2\pi}{T}$; . . . , получая каждый раз приращение $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$, мы можем переписать уравнение (90) следующим образом:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{T \to \infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta\omega \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cos \omega_\nu (t - \tau)\, d\tau. \tag{92}$$

В пределе при $\Delta\omega \to 0$ и $T \to \infty$ можно предположить, что сумма (92) стремится к пределу:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega (t - \tau)\, d\tau. \tag{93}$$

Эта формула, полученная из ряда Фурье путем перехода к пределу при $T \to \infty$, носит название интеграла Фурье [1].

Интеграл (93) можно представить в несколько другой форме, если учесть, что

$$e^{j\omega(t-\tau)} = \cos \omega (t - \tau) + j \sin \omega (t - \tau), \tag{94}$$

и принять во внимание, что в силу четности относительно ω подинтегрального выражения в равенстве (93) мы можем написать

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega (t - \tau)\, d\tau$$

и что в силу нечетности относительно ω подинтегрального выражения

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega (t - \tau)\, d\tau = 0.$$

На основании только что приведенных соотношений мы можем написать вместо уравнения (93)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) [\cos \omega (t - \tau) + j \sin \omega (t - \tau)]\, d\tau;$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau. \tag{95}$$

---

[1] Более строгий вывод формулы (92) см., например, в [5].

Выражение (95) называется экспоненциальной формой интеграла Фурье.

Вместо уравнения (95) можно также написать:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega, \tag{96}$$

где

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \tag{97}$$

Функция $F(j\omega)$ называется преобразованием Фурье или комплексным спектром функции $f(t)$.

Заметим, что формально выражения (96) и (97) весьма просто могут быть получены из уравнений (83) и (84) следующим образом. Положим, что

$$\omega=\frac{2\pi\nu}{T};\ d\omega=\frac{2\pi}{T};\ Tc_\nu=F(j\omega),$$

тогда, заменяя в уравнении (83) знак суммы интегралом и полагая, что $T\to\infty$, мы вместо уравнений (83) и (84) получим уравнения (96) и (97).

5. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Представив непериодическое воздействие $f(t)$, приложенное к системе в виде интеграла Фурье (96), можно найти выражение для переходного процесса при помощи следующих простых рассуждений.

Так как воздействие $f(t)=e^{j\omega t}$ вызывает в динамической системе реакцию вида $Y(j\omega)\,e^{j\omega t}$, то воздействие вида (96), которое можно рассматривать как бесконечную сумму воздействий

$$d\omega\, F(j\omega)\, e^{j\omega t}$$

вследствие линейности системы и применимости к ней принципа суперпозиции, вызовет изменение переменной x, определяемое следующим выражением:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\, Y(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{98}$$

Формула (98) представляет собой искомое выражение для переходного процесса в виде интеграла Фурье.

Вместо уравнения (98) можно также написать:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega, \tag{99}$$

где

$$X(j\omega)=Y(j\omega)\,F(j\omega), \tag{100}$$

т. е. *преобразование Фурье $X(j\omega)$ для функции $x(t)$, характеризующей переходный процесс, вызванный воздействием $f(t)$, равно произведению передаточной функции системы $Y(j\omega)$ на преобразование Фурье $F(j\omega)$ для воздействия $f(t)$.*

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Как мы видели, преобразование Фурье (97) применимо лишь для таких функций $f(t)$, которые удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости (91).

Следует, однако, заметить, что условию (91) не удовлетворяют многие функции, вводимые в рассмотрение при анализе переходных процессов в системах автоматического регулирования. Так, например, ему не удовлетворяют функции единичная, синусоидальная, косинусоидальная, возрастающие как некоторая степень от t, а также показательные вида $e^{\alpha t}$, где $\alpha > 0$. Поэтому для наших целей весьма полезным является преобразование Лапласа, не связанное с указанным выше ограничением.

Преобразование Лапласа можно рассматривать как обобщенную форму преобразования Фурье, применимую для функций $f(t)$, удовлетворяющих условию

$$f(t) = 0; \quad t < 0 \tag{101}$$

не только в тех случаях, когда функция $f(t)$ является абсолютно интегрируемой, но и тогда, когда можно выбрать такое положительное число c, чтобы

$$\int_0^\infty |f(t)|\, e^{-ct} dt < \infty. \tag{102}$$

Предположим, что интеграл (102) существует для всех $c > c_0$ и не существует при $c \leqslant c_0$. Число c_0 называется абсциссой абсолютной сходимости функции $f(t)$. Так, например, для единичной и для синусоидальной функций абсцисса абсолютной сходимости $c_0 = 0$, так как при всех $c > 0$

$$\int_0^\infty e^{-ct} dt < \infty,$$

а также

$$\int_0^\infty |\sin \omega t|\, e^{-ct} dt < \infty.$$

Для функции $e^{-\alpha t}$ абсцисса абсолютной сходимости $c_0 = -\alpha$, а для функции $e^{\alpha t}$ она равна $c_0 = \alpha$. Функция e^{t^2} не имеет абсциссы абсолютной сходимости, так как для нее нельзя выбрать такого значения c, чтобы интеграл (102) существовал, поэтому к ней нельзя применить преобразование Лапласа.

Заметим, что ограничение (101) необходимо по следующим причинам. Как это мы сейчас увидим, преобразование Лапласа для функции $f(t)$, могущей не удовлетворять условию (91), получается как естественное обобщение преобразования Фурье для функции

$$q(t) = f(t)\, e^{-ct}, \tag{103}$$

в которой число c должно быть выбрано таким, чтобы функция $q(t)$ была абсолютно интегрируемой. Очевидно, такое число найти было бы нельзя, если бы функция $f(t)$ не удовлетворяла условию (101).

Действительно, в этом последнем случае множитель e^{-ct} при $c > 0$, обеспечивающий сходимость интеграла (102) при $t > 0$, привел бы к тому, что этот интеграл перестал бы существовать при $t < 0$.

Эта математическая трудность обходится благодаря тому, что нижний предел интегрирования смещается в неравенстве (91) из $-\infty$ в нуль.

При рассмотрении переходных процессов такое „сужение" пределов интегрирования обычно вполне допустимо. Действительно, нас интересует лишь то, что происходит с системой не до, а после момента приложения воздействия, который всегда можно принять за начало отсчета t, поскольку в реальных физических системах эффект не может предшествовать причине, его вызвавшей.

Сделав эти вводные замечания, перейдем к вопросу о том, каким образом от преобразования Фурье для функции $q(t)$ вида (103) можно перейти к преобразованию Лапласа для функции $f(t)$.

Представим функцию $q(t)$ в виде интеграла Фурье. Согласно уравнению (95) имеем

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

или, принимая во внимание уравнения (101) и (103),

$$q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{j\omega t} \int_{0}^{\infty} e^{-(j\omega+c)\tau} f(\tau)\, d\tau. \qquad (104)$$

Произведем в уравнении (104) замену переменной, положив

$$s = c + j\omega.$$

Мы получим

$$q(t) = e^{-ct} f(t) = \frac{1}{2\pi j} e^{-ct} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} ds e^{st} \int_{0}^{\infty} f(\tau)\, e^{-s\tau} d\tau,$$

или

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} ds e^{st} \int_{0}^{\infty} f(\tau)\, e^{-s\tau} d\tau. \qquad (105)$$

Вместо уравнения (105) мы можем также написать:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\, e^{st} ds, \qquad (106)$$

где

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt. \qquad (107)$$

Функция $F(s)$ комплексного переменного s называется преобразованием Лапласа для функции $f(t)$. Формула (106) обычно на-

зывается **формулой обращения** для функции $F(s)$. Формулы (106) и (107) сокращенно часто записываются в следующем виде:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]; \tag{108}$$

$$F(s) = L[f(t)], \tag{109}$$

причем $F(s)$ называется изображением функции $f(t)$, называемой оригиналом.

Очевидно, что если в уравнении (106) можно положить $c=0$, то формулы (106) и (107) сводятся к преобразованию Фурье (96) и (97).

7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ ФУНКЦИЙ

Найдем преобразования Лапласа для нескольких простых функций, которые понадобятся нам в дальнейшем. Мы будем везде предполагать, что условие (101) удовлетворяется.

1) Единичная ступенчатая функция

Пусть

$$f(t) = [1],$$

где [1] обозначена функция, удовлетворяющая условиям

$$[1] = 1; \quad t > 0; \tag{110}$$
$$[1] = 0; \quad t < 0.$$

Условимся называть функцию [1] единичной ступенчатой функцией. Воспользовавшись формулой (107), получим

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}[1]\,dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}.$$

Итак,

$$L\{[1]\} = \frac{1}{s} \tag{111}$$

и

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = [1].$$

Заметим, что на основании уравнений (111) и (106) ступенчатая единичная функция [1] может быть представлена в виде интеграла

$$[1] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{st}}{s}\,ds; \; c > 0. \tag{112}$$

2) Показательная функция

Пусть

$$f(t) = e^{-\alpha t}; \quad \alpha > 0. \tag{113}$$

Имеем

$$L[e^{-\alpha t}] = \int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-st}\,dt = \frac{1}{s+\alpha}. \tag{114}$$

Точно так же

$$L[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha}. \tag{115}$$

3) Синусоида, $f(t) = \sin\beta t$

Имеем

$$L[\sin\beta t] = \int_0^\infty \sin\beta t e^{-st} dt = \frac{1}{2j}\int_0^\infty [e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}]\, e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\beta} - \frac{1}{s+j\beta}\right] = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}; \quad c > 0. \tag{116}$$

4) Косинусоида, $f(t) = \cos\beta t$

Имеем

$$L[\cos\beta t] = \int_0^\infty \cos\beta t e^{-st} dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{j\beta t} + e^{-j\beta t})\, e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\beta} + \frac{1}{s+j\beta}\right) = \frac{s}{s^2+\beta^2}; \quad c > 0. \tag{117}$$

5) Положительные степени от t

Имеем

$$L[t] = \int_0^\infty t e^{-st} dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$L[t] = \left(-\frac{te^{-st}}{s}\right)_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}. \tag{118}$$

Повторным интегрированием по частям легко также показать, что

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}. \tag{119}$$

6) Затухающие синусоидальные колебания

Рассмотрим, наконец, функцию

$$f(t) = e^{-\alpha t}\sin\beta t, \tag{120}$$

где α и β — положительные вещественные числа.

Имеем

$$L[e^{-\alpha t}\sin\beta t] = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\sin\beta t e^{-st} dt = \frac{1}{2j}\int_0^\infty (e^{j\beta t} - e^{-j\beta t})\, e^{-(s+\alpha)t} dt =$$

$$= \frac{1}{2j}\int_0^\infty [e^{-(s+\alpha-j\beta)t} - e^{-(s+\alpha+j\beta)t}]\, dt = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s+\alpha-j\beta} - \frac{1}{s+\alpha+j\beta}\right).$$

Итак,

$$L\left[e^{-\alpha t}\sin\beta t\right] = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \tag{121}$$

и

$$L^{-1}\left[\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}\right] = e^{-\alpha t}\sin\beta t. \tag{122}$$

Точно так же можно показать, что

$$L\left[e^{-\alpha t}\cos\beta t\right] = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}. \tag{123}$$

8. НУЛИ И ПОЛЮСЫ ФУНКЦИИ $F(s)$

Сведем теперь полученные нами выше результаты в табл. 7. В первой графе этой таблицы приведены преобразования Лапласа, или изображения $F(s)$ для рассмотренных функций $f(t)$ или оригиналов, помещенных во второй графе таблицы. В третьей графе функция $f(t)$ представлена графически. Четвертая графа содержит графическую интерпретацию функции $F(s)$ на плоскости комплексного переменного.

Ввиду важности последнего вопроса остановимся на нем несколько подробнее. Для этого напомним определение нулей и полюсов функции комплексного переменного. Если функция $F(s)$ может быть представлена в виде

$$F(s) = (s-\gamma_1)^m F_1(s), \tag{124}$$

где m — целое положительное число, а $|F_1(\gamma_1)|$ — конечное число, отличное от нуля, то говорят, что функция $F(s)$ имеет нуль порядка m в точке $s=\gamma_1$ плоскости комплексного переменного s.

Если функция $F(s)$ может быть представлена в виде

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{(s-\lambda_1)^n}, \tag{125}$$

где n — целое положительное число, а λ_1 — комплексное число, отличное от нуля, то говорят, что функция $F(s)$ имеет полюс порядка n в точке $s=\lambda_1$.

Рассмотрим теперь преобразование Лапласа или изображение, например, показательной функции $e^{-\alpha t}$. В этом случае согласно уравнению (114)

$$F(s) = \frac{1}{s+\alpha},$$

и, следовательно, функция $F(s)$ имеет полюс первого порядка в точке $s=-\alpha$. Это можно изобразить графически, если на плоскости комплексного переменного отметить точку на вещественной оси, расположенную на расстоянии α влево от начала координат (см. табл. 7).

Рассмотрим теперь изображение $F(s)$ для синусоиды. На основании уравнения (116) мы можем написать:

$$F(s) = \frac{\beta}{(s+j\beta)(s-j\beta)}, \tag{126}$$

Расположения нулей и полюсов, соответствующих преобразованиям Лапласа некоторых функций

$F(s)=L[f(t)]$	$f(t)=L^{-1}[F(s)]$	График функции $f(t)$	Расположение нулей и полюсов функции $F(s)$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	0, t	j, пл.5, -a, 0
$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$\sin \beta t$	0, t	j, +jβ, 0, -jβ
$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$\cos \beta t$	0, t	+jβ, S=0, -jβ
$\frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2}$	$e^{-at}\sin \beta t$	0, t	-a+jβ, j, -a-jβ, 0
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2}$	$e^{-at}\cos \beta t$	0, t	-a+jβ, j, -a, -a-jβ, 0
$\frac{1}{s}$	1	0, t	j, 0
$\frac{1}{s^2}$	t	0, t	j, 0
$\frac{2}{s^3}$	t^2	0, t	j, 0

откуда следует, что функция $F(s)$ имеет два полюса первого порядка в точках $s=j\beta$ и $s=-j\beta$.

Отметив эти точки на мнимой оси плоскости s, мы получим картину распределения полюсов этой функции на плоскости s.

Легко видеть, что изображение $F(s)$ для косинусоиды

$$F(s)=\frac{s}{(s+j\beta)(s-j\beta)} \tag{127}$$

отличается от изображения $F(s)$ для синусоиды лишь тем, что, кроме полюсов, оно имеет еще и нуль первого порядка в точке $s=0$.

Распределение нулей и полюсов этой функции представлено в табл. 7.

В случае затухающей синусоиды изображение $F(s)$ имеет вид

$$F(s)=\frac{\beta}{(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}, \tag{128}$$

и, следовательно, полюсы расположены в точках $s=-\alpha+j\beta$ и $s=-\alpha-j\beta$.

Наконец, изображение единичной функции характеризуется полюсом первого порядка в начале координат, изображение функции $f(t)=t$ — полюсом второго порядка в начале координат, изображение функции $f(t)=t^2$ — полюсом третьего порядка в начале координат и т. д.

Приведенные примеры показывают, что преобразование Лапласа позволяет привести в соответствие с функцией $f(t)$ вещественной переменной t некоторое распределение нулей и полюсов на плоскости комплексного переменного s, полностью (с точностью до постоянной) характеризующее вид этого преобразования.

Заметим, что в настоящее время имеются довольно полные таблицы функций $f(t)$ (оригиналов) и соответствующих им изображений $F(s)$ (см. [2]).

Пользуясь этими таблицами, можно найти оригинал $f(t)$, соответствующий заданному изображению $F(s)$ (если оно имеется в таблице) и, обратно, изображение $F(s)$, соответствующее заданному оригиналу $f(t)$, без всяких вычислений.

9. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Рассмотрим некоторые свойства преобразования Лапласа, которые понадобятся в дальнейшем.

1) Свойство линейности

Из формулы, определяющей преобразование Лапласа (107), легко видеть, что если a есть постоянная или переменная, не зависящая от t и s, то

$$L[af(t)]=aF(s). \tag{129}$$

Из формулы (105) легко также видеть, что если

$$L[f_1(t)]=F_1(s)$$

и

$$L\,[f_2(t)] = F_2(s),$$

то

$$L\,[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s). \qquad (130)$$

2) Теорема подобия или изменения масштаба

Эта теорема указывает, каким образом изменяется изображение, если независимая переменная в оригинале умножается на вещественную постоянную a:

$$L\,[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right). \qquad (131)$$

Действительно,

$$L\,[f(at)] = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\,dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}t} f(t)\,dt = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

3) Правило диференцирования

Это правило показывает, что если начальные значения оригинала и его производных равны нулю, то диференцирование оригинала k раз по t соответствует умножению изображения на s^k, т. е.

$$L\left[\frac{d^k f}{dt^k}\right] = s^k F(s) \qquad (132)$$

при условии, что

$$[f(t)]_{t=0} = \left(\frac{df}{dt}\right)_{t=0} = \cdots = \left(\frac{d^{k-1}f}{dt^{k-1}}\right) = 0 \qquad (133)$$

и, в частности,

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s). \qquad (134)$$

Действительно, согласно определению

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_0^\infty e^{-st}\frac{df}{dt}\,dt. \qquad (135)$$

Производя в уравнении (135) интегрирование по частям, получим

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = \left[f(t)\,e^{-st}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt,$$

и, следовательно, формула (133) доказана.

Точно так же повторным диференцированием по частям можно доказать и формулу (132).

Правило диференцирования легко обобщить также и на тот случай, когда начальные значения оригинала и его производных отличаются от нуля.

Пусть

$$[f(t)]_{t=0} = f_0; \quad \left(\frac{df}{dt}\right)_{t=0} = f_1; \cdots; \left(\frac{d^{k-1}f}{dt^{k-1}}\right)_{t=0} = f_{k=1}. \qquad (136)$$

Производя в уравнении (135) интегрирование по частям и учитывая уравнение (136), получим

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f_0. \qquad (137)$$

Точно так же повторным интегрированием по частям найдем

$$L\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2F(s) - (sf_0 + f_1);$$

$$L\left[\frac{d^3f}{dt^3}\right] = s^3F(s) - (s^2f_0 + sf_1 + f_2);$$

. . . .

$$L\left[\frac{d^kf}{dt^k}\right] = s^kF(s) - (s^{k-1}f_0 + s^{k-2}f_1 + \cdots + f_{k-1}). \qquad (138)$$

4) Правило интегрирования

Согласно этому правилу если начальные значения интегралов от оригинала равны нулю, то интегрирование оригинала k раз по t соответствует делению изображения на s^k, т. е.

$$L\left[\underbrace{\int \ldots \int}_{k\ \text{раз}} f(t)(dt)^k\right] = \frac{F(s)}{s^k} \qquad (139)$$

и, в частности,

$$L\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} \qquad (140)$$

при условии, что

$$\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=0} = 0; \quad \left[\int\int f(t)(dt)^2\right]_{t=0} = 0. \qquad (141)$$

Действительно, согласно определению

$$L\left[\int f(t)\,dt\right] = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int f(t)\,dt\right]dt. \qquad (142)$$

Производя в уравнении (107) интегрирование по частям, найдем

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \left|e^{-st}\int f(t)\,dt\right|_0^\infty + s\int_0^\infty\left[\int f(t)\,dt\right]e^{-st}dt$$

или, принимая во внимание уравнение (141),

$$L[f(t)] = sL\left[\int f(t)\,dt\right],$$

откуда следует уравнение (140).

Точно так же повторным интегрированием по частям может быть доказана и формула (139).

Если начальные значения интегралов уравнения (141) от оригинала $f(t)$ отличны от нуля, т. е.

$$\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=0}=f_{-1};\quad \left[\int\int f(t)\,(dt)^2\right]_{t=0}=f_{-2},\cdots,$$

то

$$\left.\begin{aligned} L\left[\int f(t)\,dt\right]&=\frac{F(s)}{s}+\frac{f_{-1}}{s};\\ L\left[\int\int f(t)\,(dt)^2\right]&=\frac{F(s)}{s^2}+\frac{f_{-1}}{s^2}+\frac{f_{-2}}{s};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ L\left[\underbrace{\int\ldots\int}_{k\text{ раз}} f(t)\,(dt)^k\right]&=\frac{F(s)}{s^k}+\frac{f_{-1}}{s^k}+\frac{f_{-2}}{s^{k-1}}+\cdots+\frac{f_{-k}}{s}. \end{aligned}\right\} \quad (143)$$

5) Теорема о конечном значении

Согласно этой теореме поведение оригинала на бесконечности определяется поведением выражения $F(s)$ в нуле, т. е.

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s). \quad (144)$$

Действительно, согласно уравнению (137) мы можем написать:

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt=\lim_{s\to 0}\,[sF(s)-f_0], \quad (145)$$

но

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}\,dt=\int_0^\infty \frac{df}{dt}dt=\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{df}{d\tau}d\tau=\lim_{t\to\infty} f(t)-f_0. \quad (146)$$

Сравнивая уравнение (145) со (146), получим уравнение (144).

6) Теорема о начальном значении

Согласно этой теореме поведение оригинала в нуле определяется поведением выражения $F(s)$ на бесконечности, т. е.

$$\lim_{t\to 0+} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s). \quad (147)$$

Действительно, согласно уравнению (137) мы можем написать:

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}\frac{df}{dt}dt=\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f_0], \quad (148)$$

но

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}\frac{df}{dt}dt=0$$

и

$$f_0 = \lim_{t \to 0+} f(t),$$

поэтому на основании уравнения (148) мы можем написать уравнение (147).

7) Теорема смещения в вещественной области, или теорема запаздывания

Эта теорема указывает, каким образом изменяется изображение при смещении оригинала вдоль оси t на постоянную величину τ_0.

Согласно этой теореме

$$L[f(t-\tau_0)] = e^{-\tau_0 s} F(s). \tag{149}$$

Имеем

$$L[f(t-\tau_0)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t-\tau_0)\,dt = \int_{-\tau_0}^\infty e^{-s(t+\tau_0)} f(t)\,dt =$$

$$= e^{-\tau_0 s} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = e^{-\tau_0 s} F(s).$$

8) Теорема смещения в комплексной области

Если предыдущая теорема позволяет судить о том, каким образом изменяется изображение при изменении аргумента оригинала на постоянную величину τ_0, то рассматриваемая сейчас теорема указывает, каким образом изменяется оригинал при изменении величины аргумента изображения на постоянную величину λ.

Согласно этой теореме

$$L\left[e^{\mp\lambda t} f(t)\right] = F(s \pm \lambda). \tag{150}$$

Действительно,

$$L\left[e^{\mp\lambda t} f(t)\right] = \int_0^\infty e^{-st} e^{\mp\lambda t} f(t)\,dt = F(s \pm \lambda).$$

Применим формулу (150) к определению преобразования Лапласа для функции

$$f(t) = t^n e^{\lambda t}.$$

Полагая в уравнении (150) $f(t) = t^n$ и учитывая, что $L[t^n]$ определяется формулой (119), на основании уравнения (150) получим

$$L[t^n e^{\lambda t}] = \frac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}}. \tag{151}$$

9) Теорема умножения изображений, или теорема свертки в вещественной области

Рассмотрим способ определения оригинала, соответствующего произведению двух изображений, оригиналы каждого из которых известны.

Пусть

$$F_1(s) = L[f_1(t)];$$

$$F_2(s) = L[f_2(t)].$$

Тогда можно доказать, что

$$F_1(s) F_2(s) = L\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau\right]. \qquad (152)$$

Действие, выражаемое интегралом в правой части уравнения (152), называется свертыванием функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Таким образом, из формулы (152) следует, что свертывание в вещественной области соответствует умножению в комплексной области.

10) Теорема умножения оригиналов, или теорема свертки в комплексной области

Эта теорема дает способ определения изображения, соответствующего произведению двух оригиналов, изображения каждого из которых известны.

Согласно этой теореме (см., например, [3]) если

$$L[f_1(t)] = F_1(s)$$

и

$$L[f_2(t)] = F_2(s),$$

то

$$L[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(s-\lambda) F_2(\lambda)\, d\lambda, \qquad (153)$$

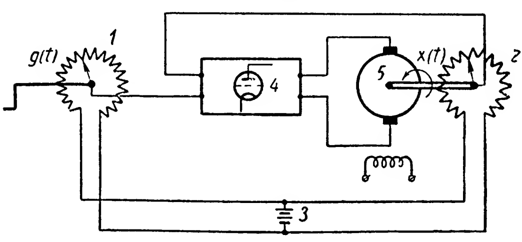
где c — вещественная постоянная, причем вещественная часть σ комплексной переменной s и постоянная c должны удовлетворять неравенствам

$$\max(c_1, c_2, c_1 + c_2) < \sigma; \quad c_2 < c < \sigma - c_1.$$

В этих неравенствах через c_1, c_2 и c обозначены абсциссы абсолютной сходимости функций $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $[f_1(t) f_2(t)]$.

10. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНОГО ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Познакомившись с основными свойствами преобразования Лапласа, поясним способ его применения к решению диференциальных уравнений сначала на простом примере.



Фиг. 47. Следящая система.

Рассмотрим следящую систему на фиг. 47. Она состоит из двух потенциометров *1* и *2* и источника напряжения *3*, служащих для получения сигнала ошибки между положением выходной и входной оси, усилителя *4* и двигателя *5* постоянного тока. Если угол поворота $g(t)$ входной оси равен углу поворота $x(t)$ вала двигателя, то сигнал ошибки на входе усилителя равен нулю и двигатель неподвижен.

При появлении угла рассогласования

$$\varepsilon(t)=g(t)-x(t) \tag{154}$$

на входе усилителя появляется напряжение $e(t)$, пропорциональное ошибке:

$$e(t)=k_1\varepsilon(t). \tag{155}$$

Предполагая, что движущий момент двигателя пропорционален току в якоре, а последний — напряжению на входе усилителя, диференциальное уравнение двигателя можно представить в виде

$$J\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}=k_2e(t)-M_c(t), \tag{156}$$

где J — момент инерции двигателя;
b — коэфициент вязкого трения;
$M_c(t)$ — момент нагрузки на валу двигателя;
k_2 — коэфициент пропорциональности.

Подставляя уравнение (155) в (156) и учитывая уравнение (154), получим уравнение движения выходной оси:

$$J\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=kg(t)-M_c(t), \tag{157}$$

где

$$k=k_1k_2,$$

и уравнение для ошибки $\varepsilon(t)$

$$J\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}+b\frac{d\varepsilon}{dt}+k\varepsilon=J\frac{d^2g}{dt^2}+b\frac{dg}{dt}+M_c(t) \tag{158}$$

или, предположив для простоты, что $M_c(t)=0$,

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}+2\zeta\omega_a\frac{d\varepsilon}{dt}+\omega_a^2\varepsilon=\frac{d^2g}{dt^2}+2\zeta\omega_a\frac{dg}{dt}, \tag{159}$$

где

$$\omega_a=\sqrt{\frac{k}{J}};\quad \zeta=\frac{b}{2\sqrt{kJ}}.$$

Покажем теперь путь решения уравнения (159), основанный на применении преобразования Лапласа.

Первый этап решения состоит в том, что каждый из членов диференциального уравнения заменяется соответствующим ему изображением при помощи теорем, изложенных выше.

Введем обозначения:

$$E(s)=L[\varepsilon(t)]=\int_0^\infty e^{-st}\varepsilon(t)\,dt; \tag{160}$$

$$G(s)=L[g(t)]=\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,dt. \tag{161}$$

Пользуясь формулами (138), мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} L\left[\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}\right] &= s^2E(s) - s\varepsilon_0 - \varepsilon_1; \\ L\left[2\zeta\omega_a\frac{d\varepsilon}{dt}\right] &= 2\zeta\omega_a[sE(s) - \varepsilon_0]; \\ L\left[\omega_a^2\varepsilon\right] &= \omega_a^2 E(s), \end{aligned}\right\} \quad (162)$$

где

$$\varepsilon_0 = [\varepsilon(t)]_{t=0+};$$
$$\varepsilon_1 = \left[\frac{d\varepsilon}{dt}\right]_{t=0+},$$

и точно так же

$$\left.\begin{aligned} L\left[\frac{d^2g}{dt^2}\right] &= s^2G(s) - sg_0 - g_1; \\ L\left[2\zeta\omega_a\frac{dg}{dt}\right] &= sG(s) - g_0, \end{aligned}\right\} \quad (163)$$

где

$$g_0 = [g(t)]_{t=0+}; \quad g_1 = \left[\frac{dg}{dt}\right]_{t=0+}.$$

Сложив изображения (162) всех членов в левой части уравнения (159) и приравняв результат сумме изображений (163) всех членов правой части уравнения (159), получим

$$\begin{aligned} &\left[s^2 + 2\zeta\omega_a s + \omega_a^2\right]E(s) - (\varepsilon_1 + 2\zeta\omega_a\varepsilon_0 + s\varepsilon_0) = \\ &= (s^2 + 2\zeta\omega_a s)\,G(s) - (sg_0 + \varepsilon_1 + 2\zeta\omega_a g_0). \end{aligned} \quad (164)$$

Таким образом, мы видим, что в результате применения преобразования Лапласа первоначальное диференциальное уравнение (159) свелось к алгебраическому уравнению (164) относительно неизвестной функции $E(s)$. Функция $G(s)$, представляющая собой изображение закона движения $g(t)$ входной оси, а также начальные условия предполагаются заданными.

Решая это уравнение относительно $E(s)$, получим

$$E(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_a s}{s^2 + 2\zeta\omega_a s + \omega_a^2}\,G(s) + \frac{(s + 2\zeta\omega_a)(g_0 - \varepsilon_0) + (\varepsilon_1 - g_1)}{s^2 + 2\zeta\omega_a s + \omega_a^2}. \quad (165)$$

Предположим теперь, что входная ось движется с некоторой постоянной угловой скоростью ω_I, начиная с некоторого момента $t = 0$, причем до этого момента времени система находилась в покое, т. е.

$$g(t) = \omega_I t, \quad (166)$$

где ω_I — постоянная скорость и начальные условия

$$\left.\begin{aligned} g_0 &= x_0 = 0; \\ \left(\frac{dg}{dt}\right)_{t=0} &= g_1 = \omega_I; \\ \varepsilon_0 &= g_0 - x_0 = 0; \\ \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{t=0} &= \varepsilon_1 = g_1 - x_1 = \omega_I, \end{aligned}\right\} \quad (167)$$

Принимая во внимание, что согласно формуле (119) изображение для функции $g(t)$, определяемой по формуле (166), имеет вид

$$G(s)=\frac{\omega_I}{s^2}, \tag{168}$$

и пользуясь формулой (167) вместо уравнения (165), получим

$$E(s)=\frac{s^2+2\zeta\omega_a s}{s^2+2\zeta\omega_a s+\omega_a^2}\cdot\frac{\omega_I}{s^2},$$

или

$$E(s)=\frac{(s+2\zeta\omega_a)\,\omega_I}{s(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}, \tag{169}$$

где через λ_1 и λ_2 обозначены корни уравнения:

$$\lambda^2+2\zeta\omega_a\lambda+\omega_a^2=0.$$

Таким образом, нами найдено изображение $E(s)$ искомой функции времени $\varepsilon(t)$. Последний шаг решения заключается в том, чтобы перейти от изображения $E(s)$ решения к самому решению $\varepsilon(t)$. Для того чтобы его выполнить, представим выражение для $E(s)$ в виде суммы простых дробей, т. е. в виде

$$E(s)=\frac{C_0}{s}+\frac{C_1}{s-\lambda_1}+\frac{C_2}{s-\lambda_2}, \tag{170}$$

где C_0, C_1, C_2 — неизвестные коэфициенты, подлежащие определению.

Допустив, что нам удалось их определить, можно найти оригиналы, соответствующие каждому из членов в правой части равенства (170). Имеем

$$\left.\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{C_0}{s}\right]&=C_0;\\ L^{-1}\left[\frac{C}{s-\lambda_1}\right]&=C_1e^{\lambda_1 t};\\ L^{-1}\left[\frac{C_2}{s-\lambda_2}\right]&=C_2e^{\lambda_2 t}, \end{aligned}\right\} \tag{171}$$

и, следовательно,

$$\varepsilon(t)=L^{-1}[E(s)]=C_0+C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}. \tag{172}$$

Выражение (172) представляет собой искомый оригинал или решение уравнения (159) при начальных условиях (167). Остается указать способ определения коэфициентов C_0, C_1 и C_2.

Для того чтобы определить C_0, умножим обе части выражения (170) на s и положим затем s равным нулю. В результате получим

$$C_0=[sE(s)]_{s=0}.$$

Но согласно уравнению (169)

$$[sE(s)]_{s=0}=\left[\frac{(s+2\zeta\omega_a)\,\omega_I}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)_{s=0}}\right],$$

и, следовательно,

$$C_0 = \frac{2\zeta\omega_a\omega_I}{\lambda_1\lambda_2}.$$

Точно так же, умножив обе части выражения (169) на $(s-\lambda_1)$ и положив $s=\lambda_1$, а затем на $(s-\lambda_2)$ и положив $s=\lambda_2$, найдем

$$C_2 = [(s-\lambda_1)E(s)]_{s=\lambda_1} = \frac{(\lambda_1+2\zeta\omega_a)\omega_I}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}$$

и

$$C_3 = \frac{(\lambda_2+2\zeta\omega_a)\omega_I}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}.$$

Если теперь предположить, что $\zeta < 1$, то

$$\lambda_1 = -\omega_a\left[\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2}\right];$$

$$\lambda_2 = -\omega_a\left[\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2}\right],$$

и, следовательно,

$$C_0 = \frac{2\zeta\omega_I}{\omega_a};$$

$$C_1 = \frac{\omega_I(\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})}{2j\omega_a(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})};$$

$$C_3 = \frac{\omega_I(\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})}{-2j\omega_a(-\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})}.$$

Подставляя найденные значения для коэфициентов C_0, C_1, C_2 в формулу (172) и произведя некоторые преобразования, получим

$$\varepsilon(t) = \frac{2\zeta\omega_I}{\omega_a}\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_a t}}{2\zeta(1-\zeta^2)}\sin\left[\omega_a t\sqrt{1-\zeta^2}+\varphi\right]\right\}, \qquad (173)$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{1-2\zeta^2}.$$

Выражение (173) является искомым решением в его окончательной форме.

11. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ НУЛЕВЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Поясним теперь, как преобразование Лапласа применяется в общем случае для решения диференциального уравнения n-го порядка:

$$a_n\frac{d^nx}{dt^n} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = b_m\frac{d^mf}{dt^m} + \ldots + b_1\frac{df}{dt} + b_0f. \qquad (174)$$

Первый этап решения всегда состоит в том, что для каждого из членов уравнения (174) находится соответствующее ему изображение.

Выполним это, предположив вначале для простоты случай нулевых начальных условий, т. е. случай, когда система в момент приложения воздействия $t=0$ находилась в покое. При этом

$$\left(\frac{d^k x}{dt^k}\right)_{t=0-}=0; \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \tag{175}$$

Кроме того, предположим, что

$$f(t)=0, \qquad t<0. \tag{176}$$

Умножая все члены уравнения (174) на e^{-st}, интегрируя от 0 до ∞ и принимая во внимание уравнения (175) и (176), найдем

$$(a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0)\,X(s)=(b_m s^m+\ldots+b_1 s+b_0)\,F(s), \tag{177}$$

где, как обычно,

$$X(s)=\int_0^\infty e^{-st}x(t)\,dt;$$

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt.$$

Решая получившееся алгебраическое уравнение (177) относительно неизвестной функции $X(s)$, получим изображение решения диференциального уравнения (174) в следующем виде:

$$X(s)=\frac{b_m s^m+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0}\,F(s), \tag{178}$$

или

$$X(s)=Y(s)\,F(s), \tag{179}$$

где

$$Y(s)=\frac{b_m s^m+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0}. \tag{180}$$

Сравнивая уравнения (180) и (60), легко видеть, что функция $Y(s)$ в уравнении (179) является не чем иным, как передаточной функцией динамической системы, но рассматриваемой уже не при чисто мнимых, как в уравнении (60), а при комплексных значениях аргумента.

При решении конкретной задачи остается подставить в уравнение (178) вместо $F(s)$ преобразование Лапласа функции $f(t)$, входящей в уравнение (174). Так, например, если $f(t)=[1]$, то

$$F(s)=\frac{1}{s}$$

и

$$X(s)=\frac{Y(s)}{s}. \tag{179a}$$

Выражение (179a) — это преобразование Лапласа для функции $x(t)$, характеризующей переходный процесс, вызванный единичным ступенчатым воздействием.

Найдем $F(s)$ для довольно общего вида функций $f(t)$, к которому можно свести большинство типовых воздействий, применяемых в практике расчетов, а именно предположим, что

$$f(t) = \sum_{i=1}^{x} (c_{0i} + c_{1i}t + \ldots + c_{ri}t^r)\, e^{\gamma_i t}, \qquad (181)$$

где γ_i — комплексные или вещественные числа.

Принимая во внимание, что

$$L\left[t^r e^{\gamma_i t}\right] \frac{r!}{(s-\gamma_i)^{r+1}},$$

получим изображение $F(s)$ для формулы (181) в виде дробно-рациональной функции от s:

$$F(s) = \sum_{i=1}^{x} \left(\frac{c_{01}}{s-\gamma_i} + \frac{c_{1i}}{(s-\gamma_i)^2} + \ldots + \frac{r!c_{ri}}{(s-\gamma_i)^{r+1}}\right). \qquad (182)$$

Таким образом, мы видим, что *преобразование Лапласа $X(s)$ для искомого решения $x(t)$ в случае нулевых начальных условий и широкого класса воздействий $f(t)$ вида (181), являясь произведением двух дробно-рациональных функций $Y(s)$ и $F(s)$, также является дробно-рациональной функцией от s.*

12. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА ПРИ НЕНУЛЕВЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

Учтем теперь начальные условия, предположив, что

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{d^k x}{dt^k}\right) = x^{\kappa}(0) \ \ (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1), \\ &\left(\frac{d^i f}{dt^i}\right) = f^k(0) \ \ (i=0,1,\ \ldots,\ m-1). \end{aligned}\right\} \qquad (183)$$

Преобразования Лапласа для членов левой части уравнения (174), согласно формулам (137) и (138), теперь будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &L\,[a_0 x(t)] = a_0 X(s); \\ &L\left[a_1 \frac{dx}{dt}\right] = a_1 X(s) - a_1 x(0); \\ &L\left[a_2 \frac{d^2x}{dt^2}\right] = a_2 s^2 X(s) - a_2 (sx(0) + x^{(1)}(0)); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &L\left[a_n \frac{d^n x}{dt^n}\right] = a_n s^n X(s) - a_n (s^{n-1}x(0) + s^{n-2}x^{(1)}(0) + \ldots + x^{(n-1)}(0)). \end{aligned}\right\} (184)$$

Складывая правые части равенств (184), получим преобразование Лапласа для левой части уравнения (174) в виде

$$L\left[a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x\right] = (a_n s^n + \ldots + a_1 s +$$

$$+ a_0) X(s) - [a_n x(0) s^{n-1} + (a_n x^{(1)}(0) + a_{n-1}x(0))\, s^{n-2} + \ldots +$$

$$+ (a_n x^{(n-1)}(0) + a_{n-1} x^{(n-2)}(0) + \ldots + a_2 x^{(1)}(0) + a_1 x(0))], \qquad (185)$$

или сокращенно

$$L\left[a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x\right] =$$

$$= D(s) X(s) - M_{нx}(s), \qquad (186)$$

где

$$D(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0;$$

$$M_{нx}(s) = a_n x(0) s^{n-1} + [a_n x^{(1)}(0) + a_{n-1} x(0)] s^{n-2} + \ldots +$$
$$+ [a_n x^{(n-1)}(0) + a_{n-1} x^{(n-2)}(0) + \ldots + a_2 x^{(1)}(0) + a_1 x(0)]. \qquad (187)$$

Функция $M_{нx}(s)$ целиком зависит от начальных условий и при нулевых начальных условиях обращается в нуль.

Преобразование Лапласа для правой части уравнения (174) будет иметь вид

$$M(s) F(s) - M_{нf}(s)$$

где

$$M_{нf}(s) = b_m f(0) s^{m-1} + [b_m f'(0) + b_{m-1} f(0)] s^{m-2} + \ldots + b_1 f(0)$$

и

$$M(s) = b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0.$$

Итак, применив преобразование Лапласа к уравнению (174) в случае начальных условий вида (183), мы получим

$$D(s) X(s) - M_н(s) = M(s) F(s). \qquad (188)$$

Решая это уравнение относительно $X(s)$, найдем

$$X(s) = \frac{M(s)}{D(s)} F(s) + \frac{M_н(s)}{D(s)} = Y(s) F(s) + Y_н(s), \qquad (189)$$

где попрежнему

$$Y(s) = \frac{M(s)}{D(s)}$$

и

$$Y_н(s) = \frac{M_{нx}(s) - M_{нf}(s)}{D(s)}.$$

Формула (189) показывает, что *преобразование Лапласа для решения диференциального уравнения с учетом начальных условий представляет сумму двух членов, один из которых $Y(s) F(s)$ определяет эффект воздействия $f(t)$ и не зависит от начальных условий, а другой $Y_н(s)$ определяет эффект начальных условий и не зависит от воздействия.*

Так как функция $M_н(s)$, зависящая от начальных условий, является полиномом от s, то мы приходим к выводу, что преобразование Лапласа $X(s)$ является дробно-рациональной функцией от s для широкого класса воздействий $f(t)$ вида (181) как при нулевых, так и при ненулевых начальных условиях и, следовательно, может быть представлено в виде

$$X(s) = \frac{I(s)}{H(s)}, \qquad (190)$$

где $I(s)$ и $H(s)$ — полиномы от s.

Следующий этап решения состоит в том, чтобы по найденному преобразованию Лапласа $X(s)$ для искомого решения $x(t)$ найти само решение. Решение сводится к вычислению обратного преобразования Лапласа для дробно-рациональной функции $\frac{I(s)}{H(s)}$, т. е.

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{I(s)}{H(s)}\right]. \tag{191}$$

Покажем, каким образом это может быть выполнено.

Предположим вначале для простоты, что все корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ уравнения

$$H(\lambda) = 0,$$

или, другими словами, полюсы функции $X(s)$ являются простыми. Разлагая выражение (190) на простые дроби, можем написать:

$$X(s) = \frac{C_1}{s-\lambda_1} + \frac{C_2}{s-\lambda_2} + \ldots + \frac{C_1}{s-\lambda_i} + \ldots + \frac{C_q}{s-\lambda_q}. \tag{192}$$

Коэфициенты $C_1, C_2, \ldots, C_q$ в разложении (192) могут быть найдены следующим образом.

Умножая обе части равенства (192) на $(s-\lambda_i)$ и затем полагая $s=\lambda_i$, найдем

$$C_i = [(s-\lambda_i)X(s)]_{s=\lambda_i}, \tag{193}$$

или

$$C_i = \frac{I(\lambda_i)}{(\lambda_1-\lambda_i)(\lambda_2-\lambda_i)\ldots(\lambda_{i-1}-\lambda_i)(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\ldots(\lambda_q-\lambda_i)}, \tag{194}$$

или, наконец,

$$C_i = \frac{I(\lambda_i)}{H'(\lambda_i)}, \tag{195}$$

где

$$H'(\lambda_i) = \left[\frac{d}{ds}H(s)\right]_{s=\lambda_i}.$$

Разложив $X(s)$ на простые дроби, легко найти обратное преобразование Лапласа для каждой из этих простых дробей, а затем и для их суммы (192).

Действительно, мы видели, что

$$L^{-1}\left[\frac{C_i}{s-\lambda_i}\right] = C_i e^{\lambda_i t},$$

и, следовательно, искомое решение имеет вид

$$x(t) = \sum_{i=1}^{q} C_i e^{\lambda_i t}, \tag{196}$$

где постоянные C_i определяются формулой (193) или (195).

Учитывая формулу (195), мы можем также написать:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{q} \frac{I(\lambda_i)}{H'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}. \tag{196a}$$

Заметим, что решение (196) учитывает как эффект начальных условий, так и воздействия, т. е. в нем содержатся как собственные, так и вынужденные колебания системы.

В частном случае, когда один из полюсов, скажем λ_1, функции $X(s)$ расположен в начале координат [в этом случае переходный процесс $x(t)$, если все остальные полюсы расположены в левой полуплоскости, стремится при $t \to \infty$ к постоянной величине], т. е. $\lambda_1 = 0$, мы можем написать:

$$X(s) = \frac{I(s)}{s H_1(s)} = \frac{I(s)}{s(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)\dots(s-\lambda_q)}. \tag{197}$$

В этом случае первый член выражения (196) согласно уравнению (193) сводится к виду

$$C_1 = \frac{I(0)}{H_1(0)},$$

остальные коэфициенты C_i могут быть определены по формуле

$$C_i = \frac{I(\lambda_i)}{\lambda_i H_1'(\lambda_i)},$$

и выражение для $x(t)$ принимает вид

$$x(t) = \frac{I(0)}{H_1(0)} + \sum_{i=2}^{q} \frac{I(\lambda_i)}{\lambda_i H_1'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}. \tag{198}$$

В частном случае, когда возмущающее воздействие $f(t)$ представляет собой единичную ступенчатую функцию и начальные условия—нулевые, выражение (198) сводится к виду

$$x(t) = \frac{M(0)}{D(0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{M(\lambda_i)}{\lambda_i D'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}. \tag{198a}$$

Покажем теперь, каким образом может быть найдена функция $x(t)$, если ее преобразование Лапласа $X(s)$ содержит не только простые, но и кратные полюсы.

Пусть, например,

$$X(s) = \frac{I(s)}{(s-\lambda_1)^{\varkappa_1}(s-\lambda_2)\dots(s-\lambda_{q-\varkappa_1})}. \tag{199}$$

Разложим правую часть выражения (199) на простые дроби:

$$X(s) = \frac{C_{11}}{(s-\lambda_1)^{\varkappa_1}} + \frac{C_{12}}{(s-\lambda_1)^{\varkappa_1-1}} + \dots + \frac{C_{1\varkappa_1}}{(s-\lambda)} +$$

$$+ \frac{C_{\varkappa_1+1}}{s-\lambda_2} + \dots + \frac{C_q}{s-\lambda_q}. \tag{200}$$

Коэфициенты $C_{\varkappa_1+1}, \dots, C_q$ разложения (200) можно найти тем же способом, что и ранее, т. е. по формуле (193). Коэфициенты $C_{11}, \dots, C_{1\varkappa_1}$ могут быть определены следующим образом.

Умножая обе части выражения (200) на $(s-\lambda_1)^{\varkappa_1}$ и полагая затем $s=\lambda_1$, найдем

$$C_{11}=[(s-\lambda_1)^{\varkappa_1}X(s)]_{s=\lambda_1}. \tag{201}$$

Для того чтобы найти C_{12}, умножим обе части уравнения (200) на $(s-\lambda_1)^{\varkappa_1}$, а затем возьмем производную по s. В результате получим

$$\frac{d}{ds}\left[(s-\lambda_1)^{\varkappa_1}\frac{I(s)}{H(s)}\right]=C_{12}+2C_{13}(s-\lambda_1)+\ldots+$$

$$+(\varkappa_1-1)C_{1\varkappa_1}(s-\lambda_1)^{\varkappa_1-2}+$$

$$+\frac{d}{ds}(s-\lambda_1)^{\varkappa_1}\left[\frac{C_{\varkappa_1+1}}{s-\lambda_2}+\ldots+\frac{C_q}{s-\lambda_q}\right].$$

При $s=\lambda_1$ все члены в правой части последнего уравнения за исключением первого обратятся в нуль, и мы получим следующую формулу для вычисления коэфициента C_{12}:

$$C_{12}=\left[\frac{d}{ds}(s-\lambda_1)^{\varkappa_1}\frac{I(s)}{H(s)}\right]_{s=\lambda_1}.$$

При помощи аналогичных рассуждений можно показать, что

$$C_{13}=\left[\frac{d^2}{ds^2}(s-\lambda_1)^{\varkappa_1}\frac{I(s)}{H(s)}\right]_{s=\lambda_1}$$

и т. д.

Таким образом, общая формула для определения коэфициентов $C_{1\rho}$ имеет вид

$$C_{1\rho}=\frac{1}{(\rho-1)!}\left[\frac{d^{\rho-1}}{ds^{\rho-1}}(s-\lambda_1)^{\varkappa_1}\frac{I(s)}{H(s)}\right]_{s=\lambda_1}. \tag{202}$$

Разложив выражение для $X(s)$ на простые дроби, нетрудно найти обратное преобразование Лапласа для $X(s)$.

Пользуясь соотношением, вытекающим из уравнения (151)

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s-\lambda_1)^\rho}\right]=\frac{t^{\rho-1}}{(\rho-1)!}e^{\lambda_1 t},$$

на основании уравнения (200) получим

$$x(t)=\frac{C_{11}}{(\varkappa_1-1)!}t^{\varkappa_1-1}e^{\lambda_1 t}+\frac{C_{12}}{(\varkappa_1-2)}t^{\varkappa_1-2}e^{\lambda_1 t}+\ldots+C_{1\varkappa_1}e^{\lambda_1 t}+$$

$$+\ldots+C_{\varkappa_1+1}e^{\lambda_2 t}+\ldots+C_q e^{\lambda_{q-\varkappa_1}t}.$$

Пример. Для пояснения изложенного выше хода вычислений рассмотрим следующий пример. Пусть

$$X(s)=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{(s+\alpha)^3s^2}.$$

Разложение $X(s)$ на простые дроби имеет вид

$$X(s)=\frac{C_{11}}{(s+\alpha)^3}+\frac{C_{12}}{(s+\alpha)^2}+\frac{C_{13}}{s+\alpha}+\frac{C_{21}}{s^2}+\frac{C_{22}}{s}.$$

Коэфициенты C, входящие в это разложение, могут быть вычислены при помощи формул

$$C_{11} = \left[\frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2}\right]_{s=-\alpha};$$

$$C_{12} = \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2}\right)\right]_{s=-\alpha};$$

$$C_{13} = \left[\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2}\right)\right]_{s=-\alpha};$$

$$C_{21} = \left[\frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{(s+\alpha)^3}\right]_{s=0} = \frac{b_0}{\alpha^3};$$

$$C_{22} = \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{(s+\alpha)^3}\right)\right]_{s=0} = \frac{b_1\alpha - 3b_0}{\alpha^4}.$$

Обратное преобразование Лапласа для $X(s)$ имеет вид

$$x(t) = \left(\frac{C_{11}}{2!}t^2 + C_{12}t + C_{13}\right)e^{-\alpha t} + C_{21}t + C_{22}; \; t > 0.$$

13. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РЕШЕНИЮ СИСТЕМЫ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Покажем, как преобразование Лапласа может быть применено к решению общей исходной системы диференциальных уравнений (14) (см. гл. IV) линейной динамической системы.

Для случая, когда имеет место одно возмущающее воздействие $f_1(t)$, исходная система диференциальных уравнений будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}(p)x_1 + a_{12}(p)x_2 + \ldots + a_{1k}(p)x_k = f_1(t);\\
&a_{21}(p)x_1 + a_{22}(p)x_2 + \ldots + a_{2k}(p)x_k = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{k1}(p)x_1 + a_{k2}(p)x_2 + \ldots + a_{kk}(p)x_k = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (203)$$

где каждое уравнение порядка не выше второго и

$$a_{ij}(p) = A_{ij}p^2 + B_{ij}p + C_{ij}, \quad p \equiv \frac{d}{dt}.$$

Величины A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} представляют собой параметры системы. Они предполагаются постоянными, причем часть из них может быть равна нулю.

Производя преобразование Лапласа каждого из уравнений системы (203), получим

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}(s)X_1(s) + a_{12}(s)X_2(s) + \ldots +\\
&\quad + a_{1k}(s)X_k(s) = F_1(s) + M_{1н}(s);\\
&a_{21}(s)X_1(s) + a_{22}(s)X_2(s) + \ldots +\\
&\quad + a_{2k}(s)X_k(s) = M_{2н}(s);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{k1}(s)X_1(s) + a_{k2}(s)X_2(s) + \ldots +\\
&\quad + a_{kk}(s)X_k(s) = M_{kн}(s).
\end{aligned}\right\} \quad (204)$$

$M_{i\,н}(s)$ — функция s и начальных условий $x'(0)$, $x(0)$ тех обобщенных координат, производные которых входят в данное i-е уравнение; так, например, если второе уравнение имеет вид

$$-(B_{21}p + C_{21})\,x_1 + (A_{22}p^2 + B_{22}p + C_{22})\,x_2 + C_{23}x_3 = 0,$$

то

$$M_{2н}(s) = A_{22}x_2(0)\,s + A_{22}x_2'(0) + B_{22}x_2(0) - B_{21}x_1(0).$$

Определить начальные условия $x(0)$ и $x'(0)$ для каждой из обобщенных координат [а в тех случаях, когда уравнения некоторых обобщенных координат имеют первый порядок, — только начальные условия $x(0)$] для любой конкретной задачи затруднений не представляет. Поэтому нетрудно найти и все $M_{i\,н}(s)$. Затем следует найти преобразование Лапласа для изменения регулируемой величины $X_1(s)$ или любой другой обобщенной координаты.

Так, например, преобразование Лапласа $X_1(s)$ для $x_1(t)$ будет иметь вид

$$D(s)\,X_1(s) = M_{11}(s)\,F_1(s) + M_н(s), \tag{205}$$

где $D(s)$ — главный определитель системы уравнений (204):

$$D(s) = \begin{vmatrix} a_{11}(s), & a_{12}(s) & \ldots & a_{1k}(s) \\ a_{21}(s), & a_{22}(s) & \ldots & a_{2k}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1}(s), & a_{k2}(s) & \ldots & a_{kk}(s) \end{vmatrix} \tag{206}$$

$M_{11}(s)$ — минор главного определителя $D(s)$, получающийся из него вычеркиванием первой строки и первого столбца:

$$M_{11}(s) = \begin{vmatrix} a_{12}(s) & \ldots & a_{1k}(s) \\ a_{22}(s) & \ldots & a_{2k}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k2}(s) & \ldots & a_{kk}(s) \end{vmatrix} \tag{207}$$

и

$$M_н(s) = \begin{vmatrix} M_{1н}(s), & a_{12}(s) & \ldots & a_{1k}(s) \\ M_{2н}(s), & a_{22}(s) & \ldots & a_{2k}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{kн}(s), & a_{k2}(s) & \ldots & a_{kk}(s) \end{vmatrix} \tag{208}$$

При нулевых начальных условиях, т. е. при нулевых начальных отклонениях всех обобщенных координат $x_i(0) = 0$ и нулевых начальных значениях первых производных тех обобщенных координат, уравнения которых имеют второй порядок, все функции $M_{i\,н}(s)$ в уравнении (208) равны нулю, а следовательно и $M_н(s) = 0$.

Таким образом, ясно, что случаю нулевых начальных условий для системы уравнений (203) соответствует преобразование Лапласа вида (178), которое можно получить из уравнений (204) путем исключения всех функций, кроме интересующей нас функции $x = x_1$.

14. СВЕДЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ К ОДНОРОДНОМУ В СЛУЧАЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ В ВИДЕ СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим диференциальное уравнение (174), предположив, что воздействие $f(t)$ представляет собой единичную ступенчатую функцию, т. е.

$$f(t) = [1],$$

и покажем, каким образом в этом случае решение неоднородного уравнения (174) при нулевых начальных условиях вида (175) может быть сведено к решению однородного диференциального уравнения при ненулевых начальных условиях[1].

Пусть

$$y(t) = y(0^+) + x(t),$$

где $x(t)$ — решение уравнения (174) при нулевых начальных условиях. Тогда ясно, что

$$y(0^+) = -x(\infty) \text{ и } \left(\frac{d^k y}{dt^k}\right)_{t=0^+} = \left(\frac{d^k x}{dt^k}\right)_{t=0^+}.$$

Здесь знак 0^+ означает, что мы рассматриваем значения функций $x(t)$ и $y(t)$ при приближении к точке $t = 0$ справа. При приближении к этой же точке слева, т. е. при $t = 0^-$, начальные условия для функции $x(t)$ и ее производных, очевидно, равны нулю, так как предполагается, что система находилась в покое при $t < 0$.

Покажем, каким образом вычислить значения производных $\left(\frac{d^k y}{dt^k}\right)$ при $t = 0^+$, зная преобразование Лапласа для $x(t)$ в случае единичного ступенчатого воздействия. Имеем согласно формуле (179a)

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{Y(s)}{s}.$$

Воспользовавшись теперь соотношениями (137) и (138) и теоремой о начальном значении, получим следующие формулы для определения начальных значений функции $y(t)$ и ее производных при $t = 0^+$:

$$[y(t)]_{t=0^+} = -x(\infty);$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0^+} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0^+} = x^{(1)}(0^+) = \lim_{s\to\infty} sY(s); \\ &\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_{t=0^+} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0^+} = \lim_{s\to\infty} s[sY(s) - x^{(1)}(0^+)]; \\ &\left(\frac{d^3y}{a^3t}\right)_{t=0^+} = \lim_{s\to\infty} s\,[s^2Y(s) - sx^{(1)}(0^+) - x^{(2)}(0^+). \end{aligned}\right\} \quad (209)$$

---

[1] Мы останавливаемся здесь на этом приеме потому, что он используется при анализе качества систем автоматического регулирования по методу распределения корней характеристического уравнения (см. главу XIX).

Из сказанного ясно, что решение неоднородного уравнения (174) при нулевых начальных условиях (175) может быть сведено к решению однородного диференциального уравнения

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

при ненулевых начальных условиях, определяемых формулами (209).

Следует подчеркнуть во избежание путаницы, что значения для производных $\frac{d^k x}{dt^k}$ при $t = 0+$, полученные по формулам (209), не имеют ничего общего с начальными условиями, определяющими вид функции $M_н(s)$ [см. формулу (208)] и зависящими от реальных начальных условий для обобщенных координат, входящих в систему уравнений (203). Поэтому в дальнейшем мы всегда будем считать, что если функция $M_н(s)$, определяемая формулой (208), тождественно равна нулю, т. е. что преобразование Лапласа $X(s)$ для $x(t)$ имеет вид (179), то мы имеем случай нулевых начальных условий вне зависимости от начальных значений для $\frac{d^k x}{dt^k}$ при $t = 0+$, получаемых согласно формулам (209).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. Н., Операционное исчисление и его приложения к задачам механики, ГИТТЛ, М, 1950.
2. Диткин В. А., Кузнецов П. И., Справочник по операционному исчислению, ГИТТЛ, М. 1951.
3. Гарднер М. Ф., Бэрнс Дж. Л., Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными, ГИТТЛ, М. 1939.
4. Солодовников В. В., Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, ГИТТЛ, М. 1952.
5. Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, ГИТТЛ, М. 1948.

ГЛАВА VI

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ И ПЕРЕХОДНЫЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ КАК ИХ ОСНОВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Настоящая глава посвящена рассмотрению передаточных функций, применяемых при анализе систем автоматического регулирования. Значительное внимание уделено свойствам передаточных функций статических и астатических систем регулирования. На ряде примеров показано, каким образом следует подходить к вопросу об определении передаточных функций сложных многоконтурных систем.

Кроме того, в главе вводится понятие импульсной переходной (или, как ее иногда называют, весовой) функции, нашедшее наряду с понятием передаточной функции широкое применение в теории регулирования. Импульсная переходная функция, как это мы увидим, так же как и передаточная функция, полностью определяет свойства линейной динамической системы.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Мы уже встречались с понятием передаточной функции в предыдущей главе при вычислении вынужденных колебаний и при применении преобразования Лапласа к решению диференциальных уравнений. Однако строгого определения этого понятия нами еще не было дано. Это определение можно дать, переписав уравнение (179) в следующем виде:

$$Y(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}. \qquad (210)$$

Из уравнения (210) ясно, что ***передаточная функция $Y(s)$ динамической системы представляет собой отношение преобразования Лапласа для величины на выходе к преобразованию Лапласа для воздействия на ее входе при нулевых начальных условиях.***

Таким образом, если диференциальное уравнение системы имеет вид (174), то ее передаточная функция определяется выражением (210).

Передаточная функция полностью определяет динамические свойства системы. Это следует из того, что, зная передаточную функцию, мы можем найти (см. предыдущую главу) переходный процесс при любом заданном воздействии и начальных условиях.

Передаточные функции линейных динамических систем с сосредоточенными параметрами обладают следующими основными свойствами.

1. Передаточная функция $Y(s)$ является дробно-рациональной функцией от s вида (203), причем порядок m числителя не превышает порядка n знаменателя. Последнее следует не только из формально математических, но и из физических соображений. Действительно амплитуда вынужденных гармонических колебаний, определяемая модулем передаточной функции, должна иметь ограниченное или равное нулю значение при беспредельном возрастании частоты, т. е. должно удовлетворяться неравенство

$$\lim_{\omega \to \infty} |Y(j\omega)| < \infty.$$

2. Все коэфициенты b_0, b_1, ... b_m, a_0, a_1, ... a_n передаточной функции вещественны.

Это объясняется тем, что они являются функциями от параметров системы, которые могут быть только вещественными.

3. Невещественные нули и полюсы передаточной функции могут быть лишь комплексно сопряженными.

Действительно, предположим, что λ_1 есть один из комплексных полюсов передаточной функции. Это означает, что при $s = \lambda_1$ знаменатель передаточной функции обращается в нуль, т. е.

$$(a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0)_{s=\lambda_1} = 0.$$

Очевидно, что это равенство не нарушится, если в нем все комплексные числа заменить сопряженными, но все коэфициенты a_n, ... a_1, a_0, будучи действительными, останутся при этом без изменения, и мы приходим к равенству

$$(a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0)_{s=\lambda_1^*} = 0,$$

где через λ_1^* обозначено число, комплексно сопряженное с λ_1.

Таким образом, мы доказали, что невещественные полюсы передаточной функции могут быть лишь комплексно сопряженными. Очевидно, что такой же вывод при помощи аналогичных рассуждений можно сделать в отношении нулей передаточной функции.

4. Все полюсы передаточной функции $Y(s)$ расположены в левой полуплоскости (условие устойчивости), или, другими словами, функция $Y(s)$ является аналитической и ограниченной в правой полуплоскости и непрерывной на мнимой оси.

Это следует из положения о том, что для устойчивости динамической системы необходимо и достаточно (см. далее), чтобы все корни характеристического уравнения системы находились в левой полуплоскости.

2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Диференциальные уравнения всякой линейной системы регулирования (см. главу IV) могут быть представлены в следующем виде.

Уравнение объекта регулирования

$$D_0(p)\,x(t) = M_0(p)\,f(t) + C_0(p)\,z(t). \tag{211}$$

Уравнение регулятора

$$B(p)\, z(t) = N(p)\, \varepsilon(t). \tag{212}$$

Уравнение отклонения или ошибки

$$\varepsilon(t) = g(t) - x(t). \tag{213}$$

Применяя к уравнениям (211) — (213) преобразование Лапласа и вводя обозначения

$$X(s) = L\,[x(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\, x(t)\, dt;$$
$$E(s) = L\,[\varepsilon(t)]; \quad G(s) = L\,[g(t)] \tag{214}$$

и т. д. и учитывая начальные условия, получим

$$D_0(s)\, X(s) = M_0(s)\, F(s) + C_0(s)\, Z(s) + M_{1н}(s);$$
$$B(s)\, Z(s) = N(s)\, E(s) + M_{2н}(s); \tag{215}$$
$$E(s) = G(s) - X(s).$$

Исключая из уравнений (215) функции $Z(s)$ и $E(s)$, найдем

$$X(s) = \frac{N(s)\, C_0(s)\, G(s) + M_0(s)\, B(s)\, F(s) + M_н(s)}{D_0(s)\, B(s) + C(s) N(s)}, \tag{216}$$

где

$$M_н(s) = B(s)\, M_{1н}(s) + C_0(s)\, M_{2н}(s).$$

Исключая из уравнений (215) функции $Z(s)$ и $X(s)$, будем иметь

$$E(s) = \frac{D_0(s)\, B(s)\, G(s) - M_0(s)\, B(s)\, F(s) - M_н(s)}{D_0(s)\, B(s) + C_0(s)\, N(s)}. \tag{217}$$

Разделив все члены выражений (216) и (217) на $D_0(s)\, B(s)$ и введя обозначения

$$KW(s) = \frac{C_0(s)\, N(s)}{D_0(s)\, B(s)}, \tag{218}$$

$$V(s) = \frac{M_0(s)}{D_0(s)},$$

$$V_н(s) = \frac{M_н(s)}{D_0(s)\, B(s)}, \tag{219}$$

получим

$$X(s) = \frac{KW(s)}{1 + KW(s)}\, G(s) + \frac{V(s)}{1 + KW(s)}\, F(s) + \frac{V_н(s)}{1 + KW(s)} \tag{220}$$

и

$$E(s) = \frac{1}{1 + KW(s)}\, G(s) - \frac{V(s)}{1 + KW(s)}\, F(s) - \frac{V_н(s)}{1 + KW(s)}. \tag{221}$$

Очевидно, что первое слагаемое в правой части уравнений (220), а также (221) характеризует эффект управляющего воздействия $g(t)$, второе слагаемое в правых частях этих уравнений — эффект возмущающего воздействия $f(t)$, а третье слагаемое — эффект начальных условий.

Уравнения (220) и (221), предположив случай нулевых начальных условий, можно также переписать в следующем виде:

$$X(s) = \Phi(s)\, G(s) + Y(s)\, F(s) \tag{222}$$

и

$$E(s) = \Phi_\varepsilon(s) G(s) - Y(s) F(s), \tag{223}$$

где

$$\Phi(s) = \frac{KW(s)}{1 + KW(s)}; \tag{224}$$

$$Y(s) = \frac{V(s)}{1 + KW(s)}; \tag{225}$$

$$\Phi_\varepsilon(s) = 1 - \Phi(s) = \frac{1}{1 + KW(s)}. \tag{226}$$

Остановимся теперь на интерпретации смысла функций $KW(s)$, $V(s)$, $\Phi(s)$, $Y(s)$, $\Phi_\varepsilon(s)$.

Положив возмущающее воздействие $f(t)$ равным нулю, получим согласно уравнению (222)

$$X(s) = \Phi(s) G(s), \tag{227}$$

откуда

$$\frac{X(s)}{G(s)} = \frac{L[x(t)]}{L[g(t)]} = \Phi(s). \tag{228}$$

Таким образом, как это следует из приведенного в начале главы определения, *функция $\Phi(s)$ является передаточной функцией системы автоматического регулирования по отношению к управляющему воздействию $g(t)$.*

Точно так же, положив управляющее воздействие $g(t)$ равным нулю, найдем

$$X(s) = Y(s) F(s), \tag{229}$$

откуда

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{L[x(t)]}{L[f(t)]} = Y(s). \tag{230}$$

Следовательно, *функция $Y(s)$ представляет собой передаточную функцию системы автоматического регулирования по отношению к возмущающему воздействию $f(t)$.*

Функцию $\Phi_\varepsilon(s)$, которая при $f(t) = 0$ определяется, как это ясно из уравнения (223), отношением

$$\frac{E(s)}{G(s)} = \Phi_\varepsilon(s), \tag{231}$$

мы условимся называть *передаточной функцией ошибки.*

Перейдем теперь к рассмотрению функции $KW(s)$. Как уже указывалось, всякая система автоматического регулирования является замкнутой динамической системой, так как в ней всегда существует взаимодействие, или, как обычно говорят, обратная связь, между величиной $x(t)$ на ее выходе и величиной $g(t)$ на ее входе, благодаря которой сигнал, пропорциональный ошибке $\varepsilon(t)$, может обойти всю систему и вернуться к месту своего возникновения (т. е. к элементу, измеряющему ошибку).

Математически на наличие этой связи указывает уравнение ошибки (213). Предположим, что эта обратная связь между выходом и входом нарушена. Физически это означает, что чувствительный элемент, измеряющий разность между входом и выходом, отключен от выхода, или, другими словами, от регулируемой переменной (фиг. 48). Систему

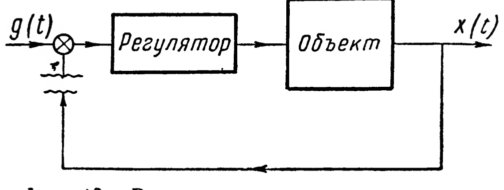
автоматического регулирования, в которой нарушена обратная связь между выходом и входом через чувствительный элемент, измеряющий ошибку, принято называть *разомкнутой*.

Посмотрим, что произойдет с уравнениями (211) — (213), если не производить измерения ошибки $\varepsilon(t)$ и приложить ко входу измерительного элемента воздействие $g(t)$. При этом, очевидно, уравнение ошибки (213) вообще перестанет существовать, а уравнение регулятора сведется к виду

$$B(p)\,z(t) = N(p)\,g(t), \qquad (232)$$

или, переходя к изображениям,

$$B(s)\,Z(s) = N(s)\,G(s). \qquad (233)$$



Фиг. 48. Разомкнутая система автоматического регулирования.

Решая уравнение (233) относительно $Z(s)$ и подставив результат в первое из уравнений (215) для случая разомкнутой системы, получим

$$X_p(s) = \frac{M_0(s)}{D_0(s)} F(s) + \frac{N(s)\,C_0(s)}{B(s)\,D_0(s)} G(s). \qquad (234)$$

Положив в уравнении (234) $F(s) = 0$, получим, учитывая уравнение (218),

$$\frac{X_p(s)}{G(s)} = \frac{N(s)\,C_0(s)}{B(s)\,D_0(s)} = KW(s), \qquad (235)$$

откуда следует, что *функция $KW(s)$ представляет собой передаточную функцию разомкнутой системы автоматического регулирования по отношению к управляющему действию $g(t)$.*

Точно так же, положив в уравнении (234) $G(s) = 0$, получим, учитывая уравнение (229),

$$\frac{X_p(s)}{F(s)} = \frac{M_0(s)}{D_0(s)} = V(s), \qquad (236)$$

откуда следует, что *функция $V(s)$ представляет собой передаточную функцию разомкнутой системы автоматического регулирования по отношению к возмущающему воздействию $f(t)$.*

3. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ СТАТИЧЕСКИХ И АСТАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Найдем, какими свойствами должны обладать передаточные функции статических и астатических систем (определение этого понятия см. в главе II).

В случае следящих систем обычно интересуются, является ли система статической или астатической по отношению к управляющим воздействиям, а в случае систем стабилизации — по отношению к возмущающим воздействиям.

Имея вначале в виду управляющие воздействия, рассмотрим первый член в правой части выражения (223), т. е. положим, что

$$E(s) = \Phi_\varepsilon(s)\,G(s). \qquad (237)$$

Согласно определению и теореме о конечном значении система является статической по отношению к управляющему воздействию, если

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} s\Phi_\varepsilon(s)\,G(s) = \text{const} \neq 0, \tag{238}$$

и астатической, если

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} s\,\Phi_\varepsilon(s)\,G(s) = 0, \tag{239}$$

при условии, что

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{s\to 0} sG(s) = \text{const} \neq 0. \tag{240}$$

Очевидно, что условие (240) удовлетворяется, если функция $G(s)$ может быть представлена в виде

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{s}, \tag{241}$$

где

$$\lim_{s\to 0} G_0(s) = \text{const} \neq 0,$$

т. е. если функция $G(s)$ имеет полюс первого порядка в начале координат.

Простейшим примером может служить функция

$$G(s) = \frac{1}{s},$$

представляющая собой, как мы видели, преобразование Лапласа для единичной ступенчатой функции.

Подставляя уравнение (241) в (237) и пользуясь теоремой о конечном значении, получим

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} \Phi_\varepsilon(s)\,G_0(s). \tag{242}$$

Легко видеть, что выражение (242) стремится к постоянной величине, отличной от нуля, и *система является статической, т. е. имеет ошибку в установившемся состоянии, если числитель и знаменатель функции $\Phi_\varepsilon(s)$ имеют свободные члены, не зависящие от s. Если же функция $\Phi_\varepsilon(s)$ имеет нуль какого-либо порядка при $s = 0$, то система является астатической*, т. е. не имеет ошибки в установившемся состоянии.

Итак, *для того чтобы система автоматического регулирования являлась статической по отношению к управляющему воздействию, передаточная функция ошибки $\Phi_\varepsilon(s)$ должна обращаться в постоянную величину при $s \to 0$, и для того чтобы система автоматического регулирования являлась астатической по отношению к управляющему воздействию, передаточная функция ошибки $\Phi_\varepsilon(s)$ должна иметь нуль какого-либо порядка при $s = 0$.*

Условимся говорить, что система имеет *астатизм ν-го порядка*, если передаточная функция ошибки $\Phi_\varepsilon(s)$ *имеет нуль ν-го порядка* при $s = 0$.

Покажем теперь, что в случае управляющих воздействий в виде полинома от t система с астатизмом k-го порядка либо не имеет ста-

тической ошибки, либо имеет статическую ошибку, либо имеет безгранично возрастающую ошибку в зависимости от того, является ли степень полинома более низкой, равной или более высокой, чем порядок астатизма системы.

Действительно, пусть

$$g(t) = g_0 + g_1 t + \ldots + g_r t^r \tag{243}$$

и, следовательно,

$$g(s) = \frac{g_0}{s} + \frac{g_1}{s^2} + \ldots + \frac{r!\, g_r}{s^{r+1}}. \tag{244}$$

Так как система обладает астатизмом ν-го порядка, то по определению

$$\Phi_\varepsilon(s) = s^\nu \Phi_{0\varepsilon}(s), \tag{245}$$

где

$$\lim_{s\to 0} \Phi_{0\varepsilon}(s) = \text{const} \neq 0.$$

Найдем ошибку в установившемся состоянии. Принимая во внимание уравнения (242) — (245), можем записать:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} s\,\Phi_\varepsilon(s)\, G(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} s^{\nu+1} \Phi_{0\varepsilon}(s) \left[\frac{g_0}{s} + \frac{g_1}{s^2} + \ldots + \frac{r!\, g_r}{s^{r+1}}\right]. \tag{246}$$

Из уравнения (246) ясно, что при $r < \nu$ статическая ошибка $\varepsilon(\infty)$ равна нулю, при $r = \nu$

$$\varepsilon(\infty) = \nu!\, g_\nu \Phi_{0\varepsilon}(0) \tag{247}$$

и при $r > \nu$

$$\varepsilon(\infty) = \infty.$$

На практике широкое применение получили системы регулирования с астатизмом нулевого порядка (статические), с астатизмом первого порядка (позиционные) и с астатизмом второго порядка (скоростные) по отношению к управляющим воздействиям, принадлежащие к классу следящих систем.

Согласно только что доказанному утверждению, следящие системы с астатизмом первого порядка не имеют ошибки в установившемся состоянии при единичном ступенчатом управляющем воздействии, но если управляющее воздействие изменяется с постоянной скоростью, т. е.

$$g(t) = g_1 t; \; t > 0,$$

то они дают статическую ошибку, равную

$$\varepsilon(\infty) = g_1 \Phi_{0\varepsilon}(0).$$

Точно так же следящие системы с астатизмом второго порядка не имеют ошибки в установившемся состоянии как при единичном ступенчатом управляющем воздействии, так и при воздействии, изменяющемся

с постоянной скоростью, но если управляющее воздействие изменяется с постоянным ускорением, т. е.

$$g(t) = g_2 t^2; \; t > 0,$$

то они дают статическую ошибку, равную

$$\varepsilon(\infty) = 2g_2 \Phi_{0\varepsilon}(0).$$

Установим теперь, пользуясь формулой (226), каким свойством должна обладать передаточная функция разомкнутой системы $KW(s)$ для того, чтобы замкнутая система имела астатизм требуемого порядка.

Легко видеть, что кратность нуля функции $\Phi_\varepsilon(s)$ при $s = 0$ равна кратности полюса функции $KW(s)$ при $s = 0$.

Действительно, положим, что функция $KW(s)$ имеет полюс кратности ν при $s = 0$, т. е. что

$$KW(s) = \frac{KW_0(s)}{s^\nu}, \tag{248}$$

где

$$W_0(0) = \text{const} \neq 0.$$

Подставляя уравнение (248) в (226), получим для $\Phi_\varepsilon(s)$ выражение

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{s^\nu}{s^\nu + KW_0(s)}, \tag{249}$$

имеющее нуль кратности ν при $s = 0$.

Имея теперь в виду, что порядок астатизма системы определяется кратностью нуля функции $\Phi_\varepsilon(s)$ при $s = 0$, мы можем высказать следующее утверждение.

Для того чтобы система обладала астатизмом ν-го порядка по отношению к управляющему воздействию, ее передаточная функция в разомкнутом состоянии $KW(s)$ должна иметь полюс ν-й кратности при $s = 0$.

Таким образом, в случае статических систем функция $KW(s)$ не имеет полюса в начале координат, в случае астатических систем первого порядка функция $KW(s)$ имеет простой полюс в начале координат, т. е. может быть представлена в виде

$$KW(s) = \frac{KW_0(s)}{s}, \tag{250}$$

в случае астатических систем второго порядка функция $KW(s)$ имеет двукратный полюс в начале координат, т. е. может быть представлена в виде

$$KW(s) = \frac{KW_0(s)}{s^2} \tag{251}$$

и т. д.

Перейдем теперь к рассмотрению условий, при которых система регулирования является статической или астатической по отношению к возмущающему воздействию.

Преобразование Лапласа $X(s)$ для отклонения регулируемой величины, вызываемого возмущающим воздействием, согласно уравнению (229) определяется формулой

$$X(s) = Y(s) F(s). \tag{252}$$

Применяя к уравнению (252) те же рассуждения, которые выше были применены к формуле (237), и замечая, что в уравнении (252) вместо передаточной функции ошибки $\Phi_\varepsilon(s)$ входит передаточная функция замкнутой системы $Y(s)$, мы легко придем к следующему выводу.

Для того чтобы система автоматического регулирования являлась астатической системой ν-го порядка по отношению к возмущающему воздействию, ее передаточная функция $Y(s)$ по отношению к этому воздействию должна иметь нуль кратности ν при $s=0$.

В заключение установим, пользуясь формулой

$$Y(s) = \frac{V(s)}{1+KW(s)}, \tag{253}$$

каким свойством должна обладать передаточная функция разомкнутой системы $KW(s)$ для того, чтобы замкнутая система имела астатизм требуемого порядка по отношению к возмущающему воздействию.

Отличие от ранее рассмотренного случая, когда мы имели дело с передаточной функцией ошибки $\Phi_\varepsilon(s)$, заключается в наличии функции $V(s)$ в числителе выражения для $Y(s)$.

Отсюда ясно, что поведение $Y(s)$ в нуле определяется в отличие от $\Phi_\varepsilon(s)$ поведением не только функции $KW(s)$, но и $V(s)$, и мы можем сформулировать следующее правило.

Если передаточная функция объекта $V(s)$ имеет полюс (или нуль) кратности $\varkappa$ при $s=0$, то для того чтобы замкнутая система обладала астатизмом ν-го порядка по отношению к возмущающему воздействию, передаточная функция разомкнутой системы $KW(s)$ должна иметь полюс кратности $\nu+\varkappa$ (или $\nu-\varkappa$) в начале координат.

Действительно, предположим, что

$$V(s) = \frac{V_0(s)}{s^\varkappa} \tag{254}$$

и

$$KW(s) = \frac{KW_0(s)}{s^{\nu+\varkappa}}, \tag{255}$$

где $V_0(0) = \text{const} \neq 0$ и $W_0(0) = \text{const} \neq 0$.

Подставляя уравнения (254) и (255) в (253), получим для $Y(s)$ выражение

$$Y(s) = \frac{s^\nu V_0(s)}{s^{\nu+\varkappa} + KW_0(s)}, \tag{256}$$

имеющее нуль ν-й кратности при $s=0$, что, как мы видели, является достаточным условием для того, чтобы система имела астатизм ν-го порядка.

В частном случае, когда передаточная функция объекта $V(s)$ не имеет ни полюса, ни нуля в начале координат, порядок астатизма системы по отношению к возмущающему воздействию определяется, так же как и в случае управляющего воздействия, порядком полюса функции $KW(s)$ в начале координат.

4. ИМПУЛЬСНАЯ ПЕРЕХОДНАЯ (ИЛИ ВЕСОВАЯ) ФУНКЦИЯ И ЕДИНИЧНАЯ ПЕРЕХОДНАЯ ФУНКЦИЯ

Выше было указано, что основной характеристикой линейной динамической системы является передаточная функция, если при анализе ее свойств мы пользуемся плоскостью комплексного переменного s. Однако в некоторых случаях может оказаться более удобным производить исследование не в комплексной области, а в области вещественной переменной t.

В связи с этим интересно определить временную характеристику $k_y(t)$, соответствующую передаточной функции $Y(s)$.

Это соответствие, очевидно, может быть установлено при помощи формул

$$k_y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} Y(s) e^{st} ds; \tag{257}$$

$$Y(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} k_y(t) dt \tag{258}$$

или, заменяя в уравнениях (257) и (258) s через $j\omega$,

$$k_y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega; \tag{259}$$

$$Y(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} k_y(t) dt. \tag{260}$$

Функция $k_y(t)$, которая подобно функции $Y(s)$ зависит только от собственных динамических свойств системы и не зависит от характеристик воздействия, называется (по причинам, которые излагаются в дальнейшем) импульсной (или весовой) переходной функцией системы.

Как это ясно из сравнения формул (257) и (258), функция $k_y(t)$ может рассматриваться как переходной процесс, вызываемый воздействием $f(t)$, для которого преобразование Фурье $F(j\omega)$ имеет вид

$$F(j\omega) = 1.$$

Такого рода воздействием является так называемая *единичная импульсная функция, или дельта-функция*.

К понятию дельта-функции удобно перейти, введя вначале в рассмотрение единичную ступенчатую функцию [1], которой мы уже пользовались в предыдущей главе.

Единичная ступенчатая функция [1] определяется следующим образом:

$$[1] = \begin{cases} 1; & t > 0; \\ {}^1/_2; & t = 0; \\ 0; & t < 0 \end{cases} \tag{261}$$

и может быть получена как предел надлежащим образом выбранной непрерывной функции.

Примером непрерывной функции, превращающейся в результате предельного перехода в единичную ступенчатую функцию, может служить

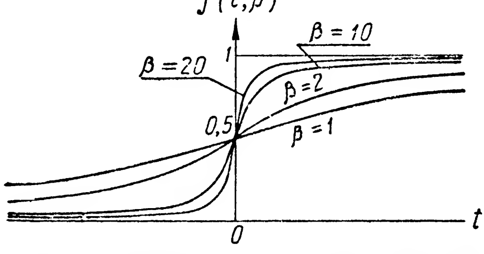
$$f(t, \beta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \beta t. \tag{262}$$

Действительно, если ограничиться рассмотрением главных значений многозначной функции (262) в интервале $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \beta t < \frac{\pi}{2}$, то (фиг. 49)

$$\lim_{\beta \to \infty} f(t, \beta) = \lim_{\beta \to \infty} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \beta t \right\} = [1]. \tag{263}$$

Определим дельта-функцию $\delta(t)$ как производную от единичной ступенчатой функции. За исключением точки $t = 0$ производная от [1] всюду существует и равна нулю. Однако если вместо единичной ступенчатой функции рассматривать соответствующую непрерывную функцию (262), то производная будет существовать при всех t, включая и $t = 0$. Взяв производную от уравнения (263), получим

$$\delta(t, \beta) = \frac{df(t, \beta)}{dt} = \frac{\beta}{\pi(\beta^2 t^2 + 1)}. \tag{264}$$



Фиг. 49. Единичная ступенчатая функция как предел функции

$f(t, \beta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \beta t.$

Таким образом, подобно тому как единичную ступенчатую функцию [1] можно рассматривать как предел непрерывной функции $f(t, \beta)$ при $\beta \to \infty$, так и дельта-функцию $\delta(t)$ можно считать пределом непрерывной функции $\delta(t, \beta)$ при $\beta \to \infty$.

Итак,

$$\delta(t) = \lim_{\beta \to \infty} \delta(t, \beta) = \lim_{\beta \to \infty} \frac{df(t, \beta)}{dt}. \tag{265}$$

Функция (265) равна нулю при $t \neq 0$ и равна ∞ при $t = 0$, так как $\delta(0, \beta) = \frac{\beta}{\pi}$.

При возрастании β в уравнении (264) величина пика возрастает (фиг. 50), но площадь, ограничиваемая кривой $\delta(t, \beta)$, остается равной единице, независимо от β:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, \beta)\, dt = 1. \tag{266}$$

Так как дельта-функция $\delta(t)$ рассматривается как предел $\lim_{\beta \to \infty} \delta(t, \beta)$, то естественно приписать ей это же свойство.

Выше мы имели дело с дельта-функцией $\delta(t)$, обращающейся в нуль при всех t за исключением $t = 0$. Дельта-функцию, обращающуюся

в нуль при всех t за исключением $t = t_0$, мы будем обозначать, естественно, через $\delta(t - t_0)$.

Итак, можно дать следующее определение: *дельта-функцией* $\delta(t - t_0)$ *называется функция, равная нулю при всех значениях* t, *кроме значения* $t = t_0$, *при котором она обращается в бесконечность, причем*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\,dt = 1. \qquad (267)$$

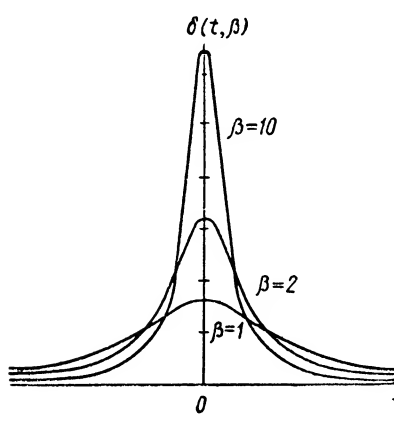
Одно из основных свойств дельта-функции выражается равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t - t_0)\,dt = x(t_0), \qquad (268)$$

которое можно доказать следующим образом.

Обозначая через Δ очень малую величину, мы получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t - t_0)\,dt = \int_{t_0-\Delta}^{t_0+\Delta} x(t)\,\delta(t - t_0)\,dt = x(t_0)\int_{t_0-\Delta}^{t_0+\Delta} \delta(t - t_0)\,dt = x(t_0).$$



Фиг. 50. Дельта-функция как предел функции $\delta(t, \beta) = \dfrac{\beta}{\pi(\beta^2 t^2 + 1)}$ при $\beta \to \infty$.

Найдем, воспользовавшись уравнением (268), преобразование Фурье $F_\delta(j\omega)$ для дельта-функции $\delta(t)$:

$$F_\delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,e^{-j\omega t}\,dt,$$

откуда, принимая во внимание уравнение (268), получаем

$$F_\delta(j\omega) = e^{-j0} = 1, \qquad (269)$$

т. е. спектром дельта-функции является постоянная величина.

Подставляя уравнение (269) в интеграл Фурье (259), получим следующее выражение для дельта-функции:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\,d\omega, \qquad (270)$$

или

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t\,d\omega \qquad (271)$$

и

$$F_\delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = 1. \qquad (272)$$

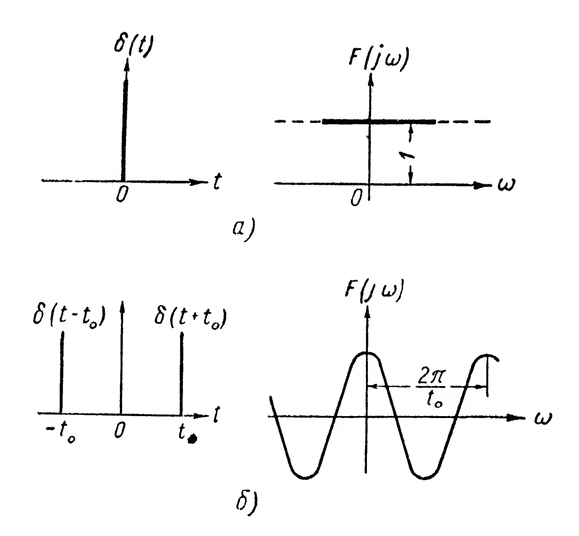
Формулы (270) и (272), как это было пояснено выше, следует рассматривать как сокращенную запись выражений

$$\delta(t) = \lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega, \beta) e^{j\omega t} d\omega \tag{273}$$

и

$$F(j\omega) = \lim_{\beta \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, \beta) e^{-j\omega t} dt, \tag{274}$$

не содержащую явного указания на предельные переходы, имеющиеся в уравнениях (273) и (274).



Фиг. 51. Дельта-функция и ее частотные спектры.

Если спектром для дельта-функции $\delta(t)$, расположенной в нуле, является постоянная величина (фиг. 51, *а*), то спектром $F_{\delta\delta}(j\omega)$ для двух дельта-функций $\delta(t - t_0)$ и $\delta(t + t_0)$, симметрично расположенных относительно начала координат (фиг. 51, *б*), является косинусоида. Действительно,

$$F_{\delta\delta}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)] e^{-j\omega t} dt =$$

$$= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt + e^{j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= e^{-j\omega t_0} + e^{j\omega t} = 2 \cos t_0 \omega \tag{275}$$

и

$$\delta(t - t_0) + \delta(t + t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos t_0 \omega \cos t\omega d\omega. \tag{276}$$

Вернемся к выражению (259). Мы только что показали, что спектром $F_\delta(j\omega)$ воздействия в виде дельта-функции $\delta(t)$ является единица. Поэтому, принимая во внимание формулу (98), легко видеть, что переходный процесс $k_y(t)$, вызванный в системе возмущающим воздействием в виде дельта-функции или в виде единичной импульсной функции, может быть представлен интегралом (259). Это и служит причиной, по которой функция $k_y(t)$ определяемая формулой (259), называется импульсной переходной функцией системы.

Следует заметить, что импульсная переходная функция $k_y(t)$ любой устойчивой динамической системы должна удовлетворять условиям

$$\int_0^\infty |k_y(t)|\,dt < \infty; \tag{277}$$

$$k_y(t) = 0 \tag{278}$$

при $t < 0$, из которых первое представляет по существу условие устойчивости системы, а второе — то очевидное обстоятельство, что в любой реальной динамической системе эффект [т. е. переходный процесс $k_y(t)$] не может возникнуть раньше причины, его вызвавшей [импульсного возмущающего воздействия $\delta(t)$, приложенного в момент времени $t = 0$]. В дальнейшем условие (278) мы будем называть *условием физической осуществимости системы.*

При анализе переходных процессов в линейных динамических системах наряду с импульсной переходной функцией $k(t)$ часто пользуются функцией $h(t)$, характеризующей переходный процесс, вызванный единичным ступенчатым воздействием. Функция $h(t)$, которую мы условимся называть в дальнейшем единичной переходной функцией или просто **переходной функцией** (иногда эту функцию называют переходной проводимостью), представляет решение уравнения (174) при нулевых начальных условиях и при воздействии $f(t)$, имеющем вид единичной ступенчатой функции. Очевидно, что преобразование Лапласа для переходной функции $h(t)$ определяется формулой (179а), т. е.

$$L[h(t)] = \frac{Y(s)}{s}$$

и

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{Y(s)}{s} e^{st}\,ds. \tag{279}$$

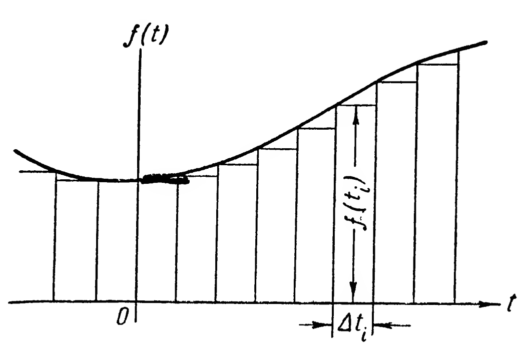
Легко видеть, что импульсная переходная функция является производной от переходной функции $h(t)$. Действительно, диференцируя уравнение (279) по s и учитывая (257), получим

$$k_y(t) = \frac{dh_y(t)}{dt}. \tag{280}$$

5. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПЕРЕХОДНЫМ ПРОЦЕССОМ ПРИ ЛЮБОМ ВОЗДЕЙСТВИИ И ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИЕЙ

Зная передаточную функцию $Y(j\omega)$ и преобразование Фурье $F(j\omega)$ для воздействия $f(t)$, переходный процесс $x(t)$, вызываемый воздействием $f(t)$, можно определить при помощи формулы (98).

Рассмотрим вопрос о том, каким образом можно определить переходный процесс $x(t)$, вызываемый произвольным воздействием $f(t)$, если известна импульсная переходная функция $k_y(t)$ системы, оставаясь в области вещественного переменного t.



Фиг. 52. Разложение произвольной функции $f(t)$ на дельта-функцию.

Очевидно (фиг. 52), что воздействие $f(t)$ можно представить в виде суммы достаточно большого числа импульсов, каждый из которых имеет ширину Δt_i и высоту $f(t_i)$. Каждый такой импульс можно представить в виде

$$f(t_i)\Delta t_i\delta(t-t_i), \tag{281}$$

и, следовательно, приближенно можно написать:

$$f(t)=\sum_{i=-n}^{n} f(t_i)\Delta t_i\delta(t-t_i). \tag{281a}$$

Переходный процесс $x(t)$, вызванный в линейной системе последовательностью импульсов, равен сумме переходных процессов, вызванных каждым из этих импульсов в отдельности.

Но переходный процесс, вызванный единичным импульсом $\delta(t-t_i)$, определяется импульсной переходной функцией $k_y(t-t_i)$. Поэтому переходный процесс от каждого из импульсов выражения (279) может быть представлен в виде

$$f(t_i)\Delta t_i k_y(t-t_i),$$

а переходный процесс $x(t)$, вызванный всей последовательностью импульсов уравнения (281 а), будет определяться выражением

$$x(t)=\sum_{i=-n}^{n} f(t_i)k_y(t-t_i)\Delta t_i. \tag{282}$$

В пределе при $\Delta t_i\to 0$ вместо уравнения (282) можно написать.

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} k_y(t-\tau)f(\tau)d(\tau), \tag{283}$$

или, так как согласно уравнению (278)

$$k_y(t-\tau)=0$$

при $t < \tau$, то вместо уравнения (282) получим

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} k_y(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

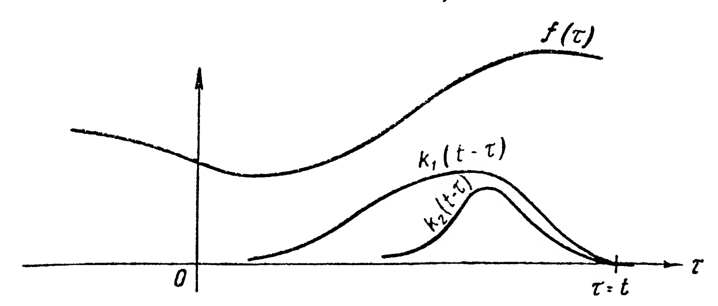
Вводя в это уравнение новую переменную интегрирования

$$\lambda = t - \tau,$$

будем иметь

$$x(t) = -\int_{\infty}^{0} k_y(\lambda) f(t-\lambda)\, d\lambda = \int_{0}^{\infty} f(t-\tau) k_y(\tau)\, d\tau. \qquad (284)$$

Вид импульсной переходной функции $k_y(t)$ позволяет судить о том, насколько сильно значения воздействия $f(t)$ в моменты, предшествующие моменту t, влияют на переходный процесс в рассматриваемый момент времени t. Чем шире импульсная функция $k_y(t)$, т. е. чем больше интервал времени, на котором функция k_y еще заметно отличается от



Фиг. 53. Ширина импульсной переходной функции.

нуля, тем более отдаленные значения функции $f(t)$ от рассматриваемого момента времени t должны приниматься во внимание (фиг. 51) при вычислении интеграла (283). Так, например, на фиг. 53 $k_1(t-\tau)$ шире, чем $k_2(t-\tau)$.

Ширина импульсной переходной функции определяет искажения величины $x(t)$ на выходе по сравнению с величиной $f(t)$ на входе. Очевидно, что динамическая система будет хорошо воспроизводить лишь такое воздействие, которое мало изменяется в пределах ширины импульсной переходной функции, и, наоборот, она будет сильно искажать и сглаживать изменения в воздействии $f(t)$, которые происходят в течение промежутков времени, незначительных по сравнению с шириной импульсной переходной функции.

6. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ОШИБКИ И ДЛЯ ОТКЛОНЕНИЯ РЕГУЛИРУЕМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В этой главе, производя анализ в области комплексного переменного s, мы нашли формулы (220) и (221), определяющие преобразование Лапласа для отклонения регулируемой величины и для ошибки через передаточные функции замкнутой системы и преобразования Лапласа для воздействий,

Приводимые ниже интегральные соотношения можно считать аналогами этих выражений в области вещественного переменного t.

Введем помимо импульсной переходной функции $k_y(t)$, соответствующей возмущающему воздействию $f(t)$ в виде единичного импульса, импульсную переходную функцию $k(t)$, соответствующую управляющему воздействию $g(t)$ в виде единичного импульса. Мы можем написать:

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{285}$$

Если функции $\Phi(s)$, $Y(s)$ заданы аналитически, то импульсные переходные функции $k(t)$, $k_y(t)$ могут быть вычислены по формулам (259) и (285) методом, изложенным в главе V. Если же аналитические выражения для $\Phi(s)$, $Y(s)$ неизвестны, то $k(t)$ и $k_y(t)$ можно определить экспериментально, приложив, к системе автоматического регулирования соответственно управляющее или возмущающее воздействие в виде дельта-функции и регистрируя получающиеся при этом кривые изменения регулируемой величины.

Воспользовавшись теоремой умножения изображений (152), переходный процесс $x(t)$, вызванный в системе автоматического регулирования воздействиями $g(t)$ и $f(t)$, на основании формулы (222) можно представить в следующем виде:

$$x(t) = \int_0^{\infty} g(t-\tau) k(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} f(t-\tau) k_y(\tau) d\tau. \tag{286}$$

Так как ошибка $\varepsilon(t)$ регулируемой переменной $x(t)$ определяется равенством

$$\varepsilon(t) = g(t) - x(t),$$

то, принимая во внимание уравнение (286), мы можем написать:

$$\varepsilon(t) = g(t) - \int_0^{\infty} g(t-\tau) k(\tau) d\tau - \int_0^{\infty} f(t-\tau) k_y(\tau) d\tau. \tag{287}$$

Применяя к уравнению (223) формулу (152), мы можем также написать:

$$\varepsilon(t) = \int_0^{\infty} g(t-\tau) k_\varepsilon(\tau) d\tau - \int_0^{\infty} f(t-\tau) k_y(\tau) d\tau, \tag{288}$$

где

$$k_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\varepsilon(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{289}$$

В том частном случае, когда точки приложения управляющего $g(t)$ и возмущающего $f(t)$ воздействий совпадают мы можем написать:

$$k_y(t) = k(t)$$

и

$$KW(s) = V(s).$$

Выражение (280) при этом сводится к виду

$$\varepsilon(t) = g(t) - \int_0^\infty \{g(t-\tau) + f(t-\tau)\} k(\tau)\, d\tau. \qquad (290)$$

7. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Выше были даны выражения, определяющие преобразования Лапласа для отклонения регулируемой величины $x(t)$ и для ошибки $\varepsilon(t)$ через передаточную функцию разомкнутой системы и преобразования Лапласа для воздействий.

Аналогами этих выражений в области вещественного переменного t являются интегральные уравнения систем автоматического регулирования, .которые могут быть получены следующим образом.

Введем в рассмотрение импульсные переходные функции разомкнутой системы $k_w(t)$ и объекта $k_v(t)$, соответствующие передаточным функциям разомкнутой системы $KW(s)$ и объекта $V(s)$:

$$k_w(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c_1 - j\infty}^{c_1 + j\infty} KW(s) e^{st}\, ds; \qquad (291)$$

$$k_v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c_2 - j\infty}^{c_2 + j\infty} V(s) e^{st}\, ds, \qquad (292)$$

где c_1 и c_2 — соответствующие абсциссы абсолютной сходимости.

Если функции $KW(s)$ и $V(s)$ заданы аналитически, то импульсные переходные функции $k_w(t)$ и $k_v(t)$ могут быть вычислены по формулам (291) и (292) методом, изложенным в главе V. Если же аналитические выражения для функций $KW(s)$ и $V(s)$ неизвестны, то $k_w(t)$ и $k_v(t)$ можно иногда определить экспериментально, приложив к разомкнутой системе автоматического регулирования соответственно управляющее воздействие или возмущающее воздействие в виде дельта-функции и регистрируя получающиеся при этом кривые изменения регулируемой величины.

Выражения (220) и (221), очевидно, могут быть переписаны следующим образом:

$$X(s) + KW(s)X(s) = KW(s)\, G(s) + V(s)\, F(s) \qquad (293)$$

и

$$E(s) + KW(s)E(s) = G(s) - V(s)\, F(s). \qquad (294)$$

Применив теорему умножения изображений (152) к формулам (293) и (294), мы можем написать:

$$x(t) + \int_0^t k_w(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = \int_0^t k_w(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau + \int_0^t k_v(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau \qquad (295)$$

и

$$\varepsilon(t)+\int_0^t k_w(t-\tau)\,\varepsilon(\tau)\,d\tau=g(t)-\int_0 k_v(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau. \qquad (296)$$

Выражения (295) и (296) представляют собой искомые интегральные уравнения систем автоматического регулирования[1], определяющие в явном виде отклонение регулируемой величины $x(t)$ и ошибку $\varepsilon(t)$ через воздействия $g(t)$, $f(t)$ и импульсные переходные функции $k_w(t)$, $k_v(t)$.

Заметим, что уравнения (295) и (296) относятся к интегральным уравнениям второго рода типа Вольтерра, ядром которых являются импульсные переходные функции $k_w(t-\tau)$, $k_v(t-\tau)$.

8. КОЭФИЦИЕНТЫ ОШИБОК

Как это было показано выше, связь между величиной $x(t)$ на выходе и управляющим воздействием $g(t)$ на входе может быть представлена в виде

$$x(t)=\int_0^\infty g(t-\tau)\,k(\tau)\,d\tau, \qquad (297)$$

где $k(\tau)$ — импульсная переходная функция.

Введем в рассмотрение понятие о коэфициентах ошибки, позволяющих в ряде случаев при воздействиях, медленно изменяющихся по сравнению с изменениями импульсной переходной функции $k(t)$, избежать необходимости непосредственного вычисления интеграла (297).

Предположим, что воздействие $g(t)$ является функцией, имеющей m первых производных в интервале $0<t<T_0$, тогда можно написать:

$$g(t-\tau)=g(t)-\tau\dot{g}(t)+\frac{1}{2}\tau^2\ddot{g}(t)-\cdots+\frac{(-\tau)^{m-1}}{(m-1)!}g^{(m-1)}(t)+R_m;$$

$$0<t<T_0, \qquad (298)$$

где

$$R_m=\frac{(-\tau)^m}{m!}g^{(m)}(t-\Delta\tau), \qquad 0<\Delta<1; \quad 0<\tau<T_0.$$

Подставляя уравнение (298) в (297), получим

$$x(t)=C_0^*g(t)+C_1^*\dot{g}(t)+\frac{C_2^*}{2!}\ddot{g}(t)+\cdots+\frac{C_{m-1}^*}{(m-1)!}g^{(m-1)}(t)+$$

$$+\frac{K_R}{m!}+K_d, \qquad (299)$$

где

$$\left.\begin{aligned} C_0^*&=\int_0^{T_0}k(\tau)\,d\tau;\\ C_1^*&=(-1)\int_0^{T_0}\tau k(\tau)\,d\tau; \end{aligned}\right\} \qquad (300)$$

[1] Они называются интегральными потому, что неизвестные функции $x(t)$ и $\varepsilon(t)$ входят в них под знак интеграла.

$$\left.\begin{aligned} C_2^* &= (-1)^2 \int_0^{T_0} \tau^2 k(\tau)\, d\tau; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ C_k^* &= (-1)^k \int_0^{T_0} \tau^k k(\tau)\, d\tau; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ K_R &= (-1)^m \int_0^{T_0} \tau^m k^{(m)} (t-\Delta\tau)\, k(\tau)\, d\tau; \\ K_d &= \int_{T_0}^{\infty} g(t-\tau)\, k(\tau)\, d\tau. \end{aligned}\right\} \qquad (301)$$

Если воздействие $g(t)$ изменяется медленно, то последними двумя членами в уравнении (299) можно пренебречь и ограничиться малым значением m.

В этом случае вместо уравнения (299) можно написать:

$$x(t) \approx C_0^* g(t) + C_1^* \dot{g}(t) + \frac{C_2^*}{2!} \ddot{g}(t) + \cdots + \frac{C_{m-1}^*}{(m-1)!} g^{(m-1)}(t). \qquad (302)$$

Коэфициенты ряда (302) могут быть вычислены не только при помощи выражений (301), но и по заданной передаточной функции $\Phi(s)$.

Действительно,

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} k(\tau) e^{-s\tau} d\tau. \qquad (303)$$

Диференцируя уравнение (303) i раз по s, получим

$$\left[\frac{d^i \Phi(s)}{ds^i}\right]_{s=0} = (-1)^i \int_0^{\infty} \tau^i k(\tau)\, d\tau. \qquad (304)$$

Сравнение формул (304) и (301) дает

$$C_i^* = \left[\frac{d^i \Phi(s)}{ds^i}\right]_{s=0} \qquad (305)$$

при условии, что в уравнении (301) верхний предел интегрирования можно положить равным бесконечности.

Введем теперь в рассмотрение ошибку

$$\varepsilon(t) = g(t) - x(t). \qquad (306)$$

Имеем

$$\varepsilon(t) = g(t) - \int_0^{\infty} g(t-\tau)\, k(\tau)\, d\tau. \qquad (307)$$

Представим ошибку $\varepsilon(t)$ в виде ряда

$$\varepsilon(t) = C_0 g(t) + C_1 \dot{g}(t) + \frac{C_2}{2!} \ddot{g}(t) + \cdots + \frac{C_{m-1}}{(m-1)!} g^{(m-1)}(t). \qquad (308)$$

Коэфициенты $C_0, C_1, \cdots, C_{m-1}$ ряда (308) называются *коэфициентами ошибок.*

Найдем связь между коэфициентами C_i^* ряда (302) и коэфициентами C_i ряда (308).

Подставляя уравнение (302) в (306), получим

$$\varepsilon(t) = g(t) - C_0^* g(t) - C_1^* \dot{g}(t) - \frac{C_2^*}{2!} \ddot{g}(t) - \cdots -$$

$$- \frac{C_{m-1}^*}{(m-1)!} g^{(m-1)}(t). \tag{309}$$

Сравнивая уравнение (309) с (308), найдем

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= 1 - C_0^*; \\ C_i &= - C_1^*. \end{aligned} \right\} \tag{310}$$

Коэфициенты ошибок могут быть найдены, если известна передаточная функция ошибки $\Phi_\varepsilon(s)$.

Действительно, представим $\varepsilon(t)$ в виде

$$\varepsilon(t) = \int_0^\infty g(t-\tau) k_\varepsilon(\tau) d\tau, \tag{311}$$

где $k_\varepsilon(\tau)$ — импульсная переходная функция ошибки, т. е. изменение ошибки при воздействии в виде дельта-функции.

Подставляя уравнение (298) в (311), получим уравнение (309), причем для коэфициентов ошибок $C_0, C_1, C_2, \cdots$ найдем

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \int_0^\infty k_\varepsilon(\tau) d\tau; \\ C_1 &= (-1) \int_0^\infty \tau k_\varepsilon(\tau) d\tau; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_i &= (-1)^i \int_0^\infty \tau^i k_\varepsilon(\tau) d\tau, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \right\} \tag{312}$$

но

$$\Phi_\varepsilon(s) = \int_0^\infty k_\varepsilon(\tau) e^{-\tau s} d\tau. \tag{313}$$

Диференцируя уравнение (313) i раз по s, найдем

$$\left[\frac{d^i \Phi_\varepsilon(s)}{ds^i} \right]_{s=0} = (-1)^i \int_0^\infty \tau^i k_\varepsilon(\tau) d\tau, \tag{314}$$

и, следовательно,

$$C_i = \left[\frac{d^i \Phi_\varepsilon(s)}{ds^i}\right]_{s=0}. \qquad (315)$$

Из уравнения (315) следует, что в случае системы с астатизмом первого порядка

$$C_0 = 0, \qquad (316)$$

в случае системы с астатизмом второго порядка

$$C_0 = C_1 = 0 \qquad (317)$$

и т. д.

Покажем, каким образом коэфициенты ошибок C могут быть выражены через коэфициенты передаточной функции разомкнутой системы $KW(s)$. Пусть

$$KW(s) = \frac{K}{s^\nu} \cdot \frac{1 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \cdots + \beta_m s^m}{1 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \cdots + \alpha_n s^n},$$

тогда

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + KW(s)} = \frac{D(s)}{D(s) + M_\varepsilon(s)}, \qquad (318)$$

где

$$D(s) = s^\nu (1 + \alpha_1 s + \cdots + \alpha_n s^n);$$

$$M_\varepsilon(s) = K(1 + \beta_1 s + \cdots + \beta_m s^m). \qquad (319)$$

Предположим, что функцию $\Phi_\varepsilon(s)$ можно разложить в ряд по возрастающим степеням s вида

$$\Phi_\varepsilon(s) = C_0 + C_1 s + \frac{C_2}{2!} s^2 + \frac{C_3}{3!} s^3 + \ldots, \qquad (320)$$

сходящийся по крайней мере при малых значениях (s). Покажем, что коэфициенты ряда (320) представляют собой не что иное как коэфициенты ошибок (312). Действительно, подставляя уравнение (320) в (237), получим при $|s| \to 0$

$$E(s) = \left(C_0 + C_1 s + \frac{C_2}{2!} s^2 + \frac{C_3}{3!} s^3 + \ldots\right) G(s). \qquad (320a)$$

Применяя к каждому члену этого равенства обратное преобразование Лапласа, получим выражение (308), справедливое для достаточно больших t.

Из сказанного вытекает [2], что коэфициенты ошибок C_i можно получить простым делением $D(s)$ на $D(s) + M_\varepsilon(s)$ и сравнением коэфициентов получающегося таким образом ряда с коэфициентами ряда (320) при одинаковых степенях s.

В табл. 8 приведено несколько первых коэфициентов ошибки, вычисленных при помощи формул (320), для статических и для астатических систем первого и второго порядка.

Таблица 8

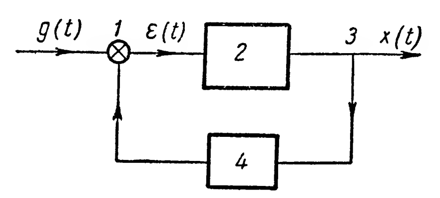
Коэфициенты ошибок

Тип системы	Коэфициенты	Формулы
Статическая	C	$\frac{1}{1+K}$
	C_1	$\frac{(\alpha_1-\beta_1)K}{(1+K)^2}$
	C_2	$2\frac{(\alpha_2-\beta_2)K}{(1+K)^2}+2\frac{\alpha_1(\beta_1-\alpha_1)K}{(1+K)^3}+2\frac{\beta_1(\beta_1-\alpha_1)K^2}{(1+K)^3}$
	C_3	$\frac{6K(\alpha_3-\beta_3)}{(1+K)^2}-\frac{6K[2d_1\alpha_2-2K\beta_1\beta_2+(K-1)(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)]}{(1+K)^3}+$ $+\frac{6K(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1+K\beta_1)^2}{(1+K)^4}$
Астатическая первого порядка	C	0
	C_1	$\frac{1}{K}$
	C_2	$2\frac{\alpha_1-\beta_1}{K}-\frac{2}{K^2}$
	C_3	$\frac{6}{K^3}+12\frac{\beta_1-\alpha_1}{K^2}+6\frac{\alpha_2-\beta_2}{K}+6\frac{\beta_1(\beta_1-\alpha_1)}{K}$
Астатическая второго порядка	C	0
	C_1	0
	C_2	$\frac{2}{K}$
	C_3	$6\frac{\alpha_1-\beta_1}{K}$

9. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ МНОГОКОНТУРНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

При анализе сложных многоконтурных систем автоматического регулирования особое значение приобретают их структурные схемы, показывающие возможные пути распространения сигналов, осуществляющих взаимодействие между основными элементами системы.

Для того чтобы пояснить, что понимается в дальнейшем под понятием структурной схемы, рассмотрим фиг. 54, на которой приведена схема, поясняющая принцип действия любой одноконтурной динамической системы с обратной связью. Как мы видим, схема состоит из элемента сравнения *1*; структурного элемента *2*, включающего все элементы системы, находящиеся между элементом сравнения и выходом; точки разветвления *3*, показывающей, что сигнал на выходе ответвляется в цепь обратной связи;



Фиг. 54. Простейшая структурная схема одноконтурной динамической системы с обратной связью.

структурного элемента 4, включающего все элементы системы, находящиеся в ее цепи обратной связи, и, наконец, линий соединения перечисленных выше элементов структурной схемы.

Уравнение элемента сравнения имеет вид

$$\varepsilon(t) = g(t) \mp z(t), \tag{321}$$

или, если перейти к изображениям,

$$E(s) = G(s) \mp Z(s), \tag{322}$$

где знак минус или плюс указывает на то, является ли обратная связь в схеме отрицательной или положительной.

Если обозначить передаточные фукции структурных элементов 2 и 4 соответственно, через $W_1(s)$ и $Z_1(s)$, то уравнения этих элементов будут иметь вид

$$X(s) = W_1(s) E(s) \tag{323}$$

и

$$Z(s) = Z_1(s) X(s). \tag{324}$$

Исключая из уравнений (322) — (324) $E(s)$ и $Z(s)$, получим передаточную функцию системы в следующем виде:

$$\frac{X(s)}{G(s)} = \frac{W_1(s)}{1 \mp W_1(s) Z_1(s)}. \tag{325}$$

Структурная схема любой системы автоматического регулирования, какой бы сложной она ни была, всегда состоит из перечисленных выше четырех типов структурных элементов, а именно:

1) структурных элементов направленного действия, характеризуемых их передаточными функциями;

2) элементов сравнения, в которых происходит вычитание или сложение двух сигналов;

3) точек разветвления, в которых путь распространения сигнала разветвляется на несколько путей, ведущих к различным точкам системы;

4) связей или линий структурной схемы, указывающих направления распространения сигналов.

Связи можно подразделить на прямые и обратные, положительные и отрицательные.

Если две какие-либо точки структурной схемы соединены несколькими связями, имеющими одинаковое направление сигнала, то эти связи называются *прямыми*, если же направления распространения сигналов разные, то связи, имеющие направление распространения сигнала, противоположное направлению, принятому за основное, называются *обратными*.

Связь называется *положительной*, если передаваемый ею сигнал складывается с входным сигналом в элементе сравнения.

Связь называется *отрицательной*, если передаваемый ею сигнал вычитается из входного сигнала в элементе сравнения.

Сделаем несколько замечаний относительно передаточных функций структурных элементов, входящих в состав структурной схемы.

Если структурный элемент содержит только сосредоточенные параметры, то, как мы видели, его передаточная функция всегда может быть представлена в виде дробно-рациональной функции от s вида

$$W(s)=\frac{b_m s^m+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0}. \tag{326}$$

Если теперь предположить, что нам известны все корни как числителя, так и знаменателя в уравнении (326), то, разлагая его на множители, получим

$$W(s)=\frac{b_m}{a_n}\cdot\frac{(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)\ldots(s-\gamma_m)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_n)}. \tag{327}$$

Предполагая теперь, что числитель или знаменатель имеют ν нулевых корней, преобразуя сомножители числителя и знаменателя, соответствующие вещественным корням $\lambda_i=-\omega_i$, $\gamma_e=-\beta_e$, к виду

$$s-\lambda_i=s+\omega_i=\frac{1}{T_i}(T_i s+1); \tag{328}$$

$$s-\gamma_e=s+\beta_e=\frac{1}{\tau_e}(\tau_e s+1), \tag{329}$$

где

$$T_i=\frac{1}{\omega_i};\quad \tau_e=\frac{1}{\beta_e}, \tag{330}$$

и преобразуя сомножители числителя и знаменателя, соответствующие комплексным сопряженным корням, к виду

$$(s-\lambda_i)(s-\lambda_{i+1})=s^2+2\alpha_i s+\left(\alpha_i^2+\beta_i^2\right)=$$
$$=\frac{1}{T_{ki}^2}\left(T_{ki}^2 s^2+2\zeta_{ki}T_{ki}s+1\right), \tag{331}$$

где

$$T_{ki}=\frac{1}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}};\quad \zeta_{ki}=\frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}} \tag{332}$$

и

$$(s-\gamma_l)(s-\gamma_{l+1})=s^2+2\alpha_l s+\left(\alpha_l^2+\beta_l^2\right)=$$
$$=\frac{1}{\tau_{di}^2}\left(\tau_{di}^2 s^2+2\zeta_{di}\tau_{di}s+1\right), \tag{333}$$

где

$$\tau_{di}=\frac{1}{\sqrt{\alpha_l^2+\beta_l^2}};\quad \zeta_{di}=\frac{\alpha_l}{\sqrt{\alpha_l^2+\beta_l^2}}, \tag{334}$$

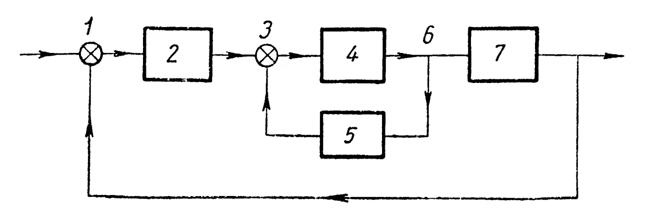
вместо уравнения (327), можем написать:

$$W(s)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{\varkappa}k_i\prod\limits_{i=1}^{\mu}(\tau_i s+1)\prod\limits_{i=1}^{\eta}\left(\tau_{di}^2 s^2+2\zeta_{di}\tau_{di}s+1\right)}{s^{\pm\nu}\prod\limits_{i=1}^{\rho}(T_i s+1)\prod\limits_{i=1}^{\sigma}\left(T_{ki}^2 s^2+2\zeta_{ki}T_{ki}s+1\right)}. \tag{335}$$

В соответствии с этой формой выражения для передаточной функции, содержащей шесть видов сомножителей, любой структурный элемент можно рассматривать как последовательное соединение в общем случае шести типов элементарных структурных звеньев. Более подробно вопрос

о классификации звеньев будет рассмотрен в следующей главе, сейчас же мы ограничимся лишь замечанием, что каждому структурному элементу или во всяком случае нескольким вместе взятым звеньям всегда можно привести в соответствие совершенно определенное устройство, входящее в состав системы регулирования.

На фиг. 55 в виде примера приведена структурная схема системы регулирования скорости гидротурбины, рассмотренной в главе III. Она состоит из элемента сравнения *1*, дающего сигнал, пропорциональный отклонению скорости турбины от требуемого значения; структурного элемента *4*, включающего центробежный маятник и вспомогательный сервомотор, воздействующий на золотник сервомотора направляющего аппарата



Фиг. 55. Структурная схема системы регулирования скорости.

турбины; элемента сравнения *3*, сравнивающего сигнал от вспомогательного сервомотора с сигналом на выходе изодрома; структурного элемента *4*, соответствующего сервомотору направляющего аппарата турбины; структурного элемента *5*, соответствующего изодромному устройству; точки разветвления *6*, находящейся на выходе регулятора; структурного элемента *7*, представляющего собой гидротурбину.

10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ

Перейдем теперь к рассмотрению нескольких примеров, поясняющих способы преобразования структурных схем многоконтурных систем к эквивалентным им одноконтурным. Эти способы, облегчая определение передаточных функций, как это мы увидим в дальнейшем, имеют существенное значение для анализа устойчивости и качества многоконтурных систем.

Пример 1. В качестве первого примера рассмотрим структурную схему на фиг. 56. Она состоит из двух последовательно включенных структурных элементов с передаточными функциями $W_1(s)$ и $W_2(s)$, причем первый из этих элементов охвачен рядом параллельных обратных связей с передаточными функциями $Z_1(s), \ldots, Z_n(s)$.

Учитывая, что передаточная функция нескольких параллельно соединенных элементов равна сумме передаточных функций этих элементов, мы можем преобразовать схему на фиг. 56, *а* к виду, изображенному на фиг. 56, *б*, где предположено, что

$$Z(s) = Z_1(s) + \ldots + Z_n(s). \tag{336}$$

Но передаточная функция структурного элемента $W_1(s)$, охваченного обратной связью $Z(s)$, согласно уравнению (325) имеет вид

$$W_{11}(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W(s)\,Z(s)}, \tag{337}$$

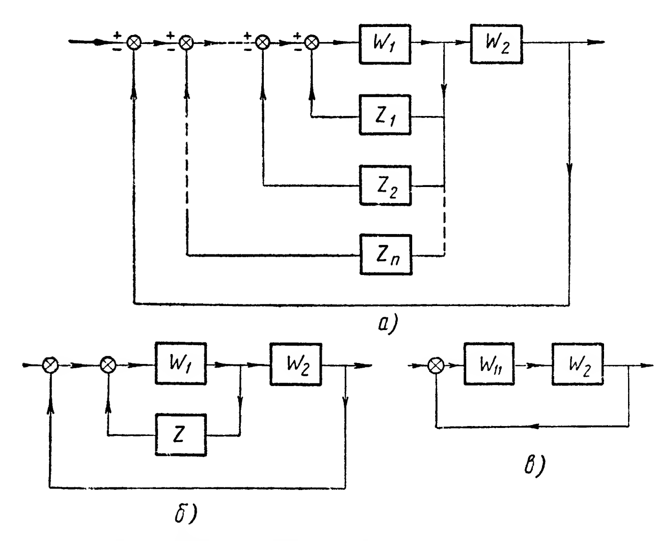
или, учитывая уравнение (336),

$$W_{11}(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)\,[Z_1(s) + Z_2(s) + \ldots + Z_n(s)]}. \qquad (338)$$

Таким образом, двухконтурную схему на фиг. 56, *б* мы можем заменить одноконтурной схемой, состоящей из последовательного соединения структурных элементов $W_{11}(s)$ и $W_2(s)$ (фиг. 56, *в*).

Итак, передаточная функция системы на фиг. 56, *а* с разомкнутой главной обратной связью имеет вид

$$KW(s) = W_{11}(s)\,W_2(s) = \frac{W_1(s)\,W_2(s)}{1 + W_1(s)\,[Z_1(s) + Z_2(s) + \ldots + Z_n(s)]}. \qquad (339)$$



Фиг. 56. Пример преобразования структурной схемы.

Пример 2. Рассмотрим многоконтурную (четырехконтурную) систему на фиг. 57. Передаточная функция $W_{44}(s)$ структурного элемента $W_4(s)$, охваченного обратной связью $Z_4(s)$, равна

$$W_{44}(s) = \frac{W_4(s)}{1 + W_4(s)\,Z_4(s)}, \qquad (340)$$

и четырехконтурная схема на фиг. 57, *а* может быть сведена к трехконтурной схеме на фиг. 57, *б*.

Точно так же два последовательно соединенных структурных элемента с передаточными функциями $W_3(s)$, $W_{44}(s)$, охваченных обратной связью $Z_3(s)$, могут быть заменены эквивалентным структурным элементом с передаточной функцией

$$W_{33}(s) = \frac{W_3(s)\,W_{44}(s)}{1 + Z_3(s)\,W_3(s)\,W_{44}(s)}, \qquad (341)$$

или

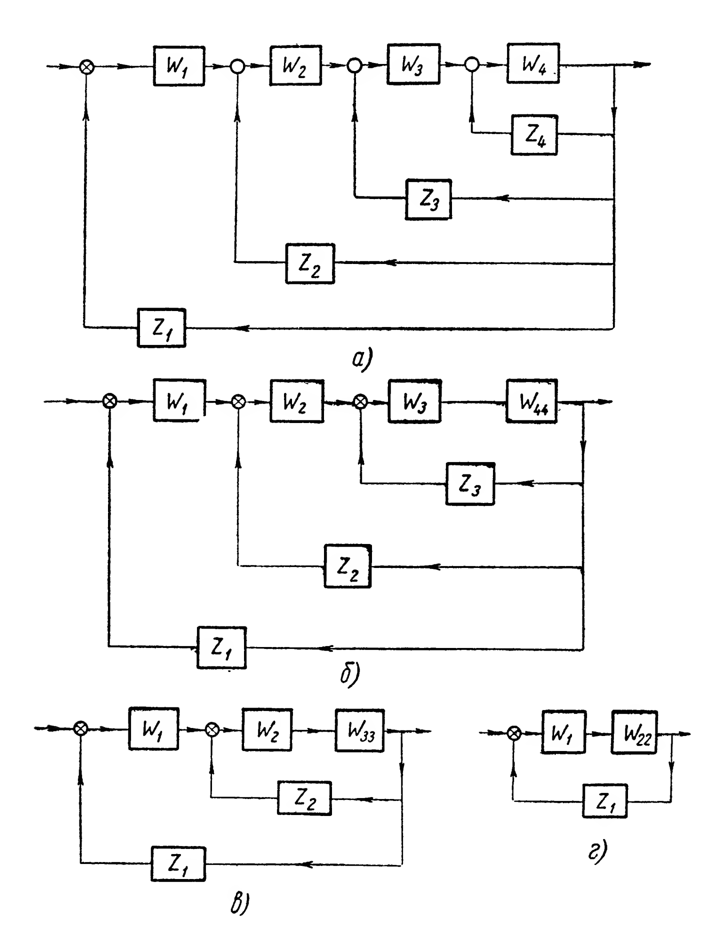
$$W_{33}(s) = \frac{W_3(s)\,W_4(s)}{1 + Z_4(s)\,W_4(s) + Z_3(s)\,W_3(s)\,W_4(s)}, \qquad (342)$$

после чего трехконтурная схема на фиг. 57, *б* сводится к двухконтурной схеме на фиг. 57, *в*.

Точно так же двухконтурная схема на фиг. 57, *в* может быть сведена к одноконтурной схеме на фиг. 57, *г*, где

$$W_{22}(s) = \frac{W_2(s)\, W_{22}(s)}{1 + Z_2(s)\, W_2(s)\, W_{33}(s)} =$$

$$= \frac{W_2(s)\, W_3(s)\, W_4(s)}{1 + Z_4(s)\, W_4(s) + Z_3(s)\, W_3(s)\, W_4(s) + Z_2(s)\, W_2(s)\, W_3(s)\, W_4(s)}. \quad (343)$$



Фиг. 57. Пример преобразования структурной схемы.

Таким образом, передаточная функция всей системы с разомкнутой главной обратной связью имеет вид

$$KW(s) = Z_1(s)\, W_1(s)\, W_{22}(s) =$$

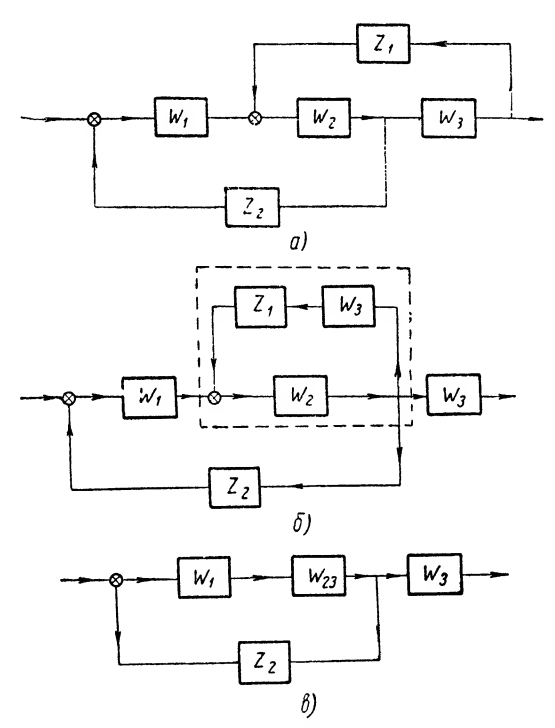
$$= \frac{Z_1(s)\, W_1(s)\, W_2(s)\, W_3(s)\, W_4(s)}{1 + Z_4(s)\, W_4(s) + Z_3(s)\, W_3(s)\, W_4(s) + Z_2(s)\, W_2(s)\, W_3(s)\, W_4(s)}, \quad (344)$$

а передаточная функция всей системы в замкнутом состоянии

$$Y(s) = \frac{1}{Z_1(s)} \cdot \frac{KW(s)}{1 + KW(s)} =$$

$$= \frac{W_1 W_2 W_3 W_4}{1 + Z_4 W_4 + Z_3 W_3 W_4 + Z_2 W_2 W_3 W_4 + Z_1 W_1 W_2 W_3 W_4}. \qquad (345)$$

Пример 3. Прежде чем составлять передаточную функцию схемы на фиг. 58, *а*, несколько преобразуем ее. Так как сигнал на входе динамического элемента $W_3(s)$, прежде чем попасть как на выход схемы, так и в цепь обрат-



Фиг. 58. Пример преобразования структурной схемы.

ной связи $Z_1(s)$, должен пройти через один и тот же элемент $W_3(s)$, то схема на фиг. 58, *а* может быть преобразована к схеме на фиг. 58, *б*.

Перейдем теперь к получению выражения для передаточной функции. Передаточная функция части схемы, отмеченной на фиг. 58, *б*, пунктиром, равна

$$W_{23}(s) = \frac{W_2(s)}{1 + Z_1(s) W_2(s) W_3(s)}, \qquad (346)$$

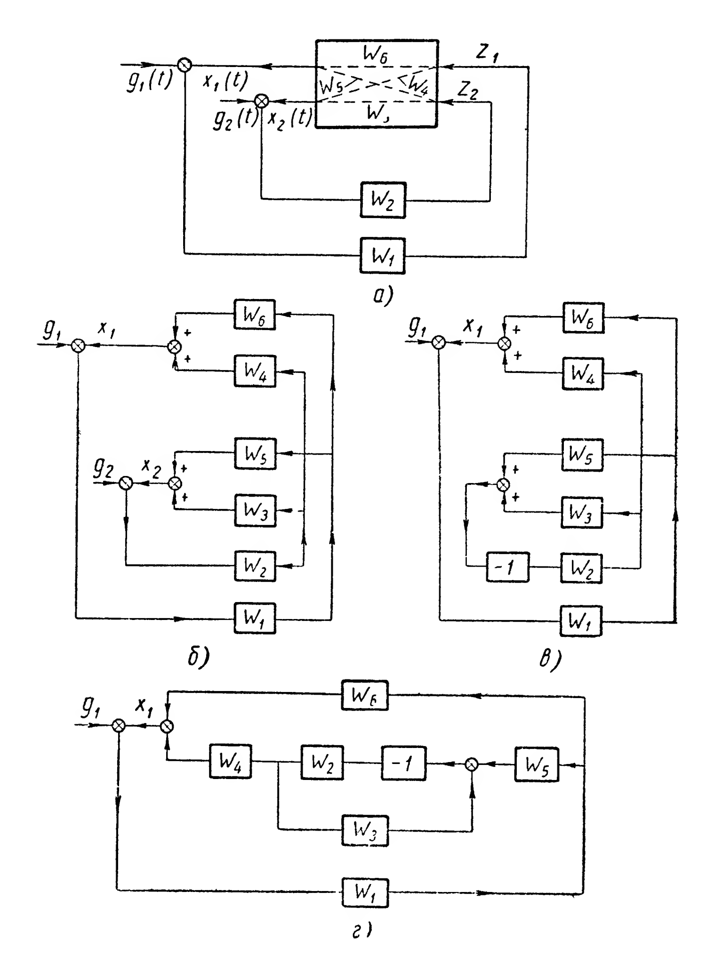
и, следовательно, схема на фиг. 58, *б* может быть преобразована к схеме на фиг. 58, *в*, передаточная функция $\Phi(s)$ которой, очевидно, имеет вид

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{W_1(s) W_{23}(s) W_3(s)}{1 + Z_2(s) W_1(s) W_{23}(s)} =$$

$$= \frac{W_1(s) W_2(s) W_3(s)}{1 + Z_1(s) W_2(s) W_3(s) + Z_2(s) W_1(s) W_2(s)}. \qquad (347)$$

Пример 4. В качестве последнего примера, показывающего, каким образом иногда удается упростить структурную схему выявлением параллельных путей распространения сигнала, рассмотрим схему на фиг. 59, *а*.

Как мы видим, рассматриваемая система регулирования имеет две регулируемые величины x_1 и x_2 и два регулятора с передаточными функциями $W_1(s)$



Фиг. 59. Пример преобразования структурной схемы.

и $W_2(s)$. Сложность схемы заключается в том, что каждый из регуляторов воздействует через объект на обе регулируемые величины.

Обозначая передаточные функции объекта по отношению к выходу Z_1, одного из регуляторов через

$$\frac{X_1(s)}{Z_1(s)} = W_6(s);$$

$$\frac{X_2(s)}{Z_1(s)} = W_5(s) \qquad (348)$$

и передаточные функции объекта по отношению к выходу второго регулятора через

$$\frac{X_1(s)}{Z_2(s)} = W_4(s);$$
$$\frac{X_2(s)}{Z_2(s)} = W_3(s), \tag{349}$$

преобразуем схему на фиг. 59, *а* к виду, изображенному на фиг. 59, *б*.

Поставим теперь себе задачу определить одну из передаточных функций системы, например

$$\Phi_{11}(s) = \frac{X_1(s)}{G(s)}.$$

Для этого выявим параллельные пути распространения сигнала в схеме, предварительно положив, что $g_2(t) = 0$, и заменив элемент сравнения для второй регулируемой величины передаточной функцией, равной -1. Возможность такой замены вытекает из того, что если в уравнении

$$\varepsilon_2(t) = g_2(t) - x_2(t) \tag{350}$$

положить $g_2(t) = 0$, то мы получим

$$\frac{E_2(s)}{X_2(s)} = -1. \tag{351}$$

Итак, схема на фиг. 59, *б* сводится к виду, графически представленному на фиг. 59, *в*. Заметив теперь, что сигнал ошибки после прохождения через структурный элемент $W_1(s)$ разветвляется по двум параллельным путям: через $W_6(s)$ и через $W_5(s)$, элемент сравнения, передаточную функцию, равную (-1), элемент $W_2(s)$ и элемент $W_4(s)$, мы можем преобразовать схему на фиг. 59, *в* к виду, изображенному на фиг. 59, *г*. Передаточная функция $KW(s)$ этой последней схемы может быть составлена без всяких затруднений, а именно

$$KW(s) = W_1(s)\left[W_6(s) + \frac{W_5(s)(-W_2(s))W_4(s)}{1 + W_2(s)W_3(s)}\right] \tag{352}$$

и

$$\Phi_{11}(s) = \frac{KW(s)}{1 + KW(s)} =$$
$$= \frac{W_1(s)[W_6(s) + W_2(s)W_3(s)W_6(s) - W_2(s)W_4(s)W_5(s)]}{1 + W_2(s)W_3(s) + W_1(s)[W_6(s) + W_2(s)W_3(s)W_6(s) - W_2(s)W_4(s)W_5(s)]}. \tag{353}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Солодовников В. В., Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, гл. I, ГИТТЛ, 1952.

2. Джеймс Х., Никольс Н., Филипс Р., Теория следящих систем Изд. иностр. литературы, 1951.

ГЛАВА VII

ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Системы автоматического регулирования представляют собой, как это мы видели в главе III, совокупность элементов, основные функции которых заключаются в измерении регулируемой величины и выявлении отклонения ее от заданного значения, формировании и усилении управляющего сигнала, перемещении регулирующего органа и т. д.

При анализе устойчивости, точности и переходных процессов разделение элементов систем автоматического регулирования по их функциям или по конструктивному оформлению не приносит пользы. Важно различать элементы по их динамическим свойствам.

Рассмотрение элементов системы автоматического регулирования с этой точки зрения показывает что разнообразные элементы, имеющие самое различное конструктивное оформление и разный принцип действия, описываются одинаковыми диференциальными уравнениями и, следовательно, имеют одинаковые передаточные функции. На этом основании все элементы самых разнообразных систем автоматического регулирования могут быть заменены небольшим числом элементарных звеньев.

Расчленение системы на звенья не представляет трудности, если составлены диференциальные уравнения элементов системы или экспериментально исследованы переходные процессы в них.

Любая линейная система с сосредоточенными постоянными может быть разбита на такие элементарные звенья, которые описываются обыкновенными диференциальными уравнениями, каждое из которых имеет порядок не выше второго. Отсюда следует, что число типов элементарных звеньев не может быть велико.

Следует иметь в виду, что не всегда один элемент системы заменяется одним звеном. Иногда один элемент заменяется комбинацией из двух или трех элементарных звеньев или наоборот.

Системы автоматического регулирования, как это уже указывалось в главе II, являются системами направленного действия, в которых воздействия могут проходить только в одном направлении. Это определяется свойствами элементов систем. Например, если имеется чувствительный элемент в виде термометра сопротивления, применяемый для измерения температуры какой-нибудь камеры, то изменение температуры камеры влияет на величину сопротивления термометра, но изменение сопроти-

вления термометра не может повлиять на температуру камеры. Следовательно, воздействие передается только в направлении от камеры к термометру. Большинство звеньев систем автоматического регулирования обладает таким направленным (или детектирующим) действием.

По направлению прохождения воздействия различают вход и выход звена и соответственно входную и выходную величины звена. Выходная величина звена направленного действия определяется воздействием на его вход (входной величиной), но входная величина никак не зависит от изменения выходной величины. Иначе говоря, входная величина является причиной, выходная — следствием. Итак, звено направленного действия не оказывает обратного действия на предшествующее звено. Диференциальные уравнения таких звеньев можно составлять отдельно и независимо от других звеньев.

В качестве переменной, характеризующей состояние звена, принято брать выходную величину. Последняя входит в диференциальное уравнение звена в качестве зависимой переменной. Входная величина является независимой переменной.

1. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗВЕНЬЕВ

В главе VI было показано, что в наиболее общем случае передаточная функция структурного элемента системы автоматического регулирования может быть представлена в виде

$$W(s)=\frac{\prod_{i=1}^{\varkappa} k_i \prod_{i=1}^{\mu}(\tau_i s+1)\prod_{i=1}^{\eta}\left(\tau_{di}^2 s^2+2\zeta_{di}\tau_{di}s+1\right)}{s^{\nu}\prod_{i=1}^{\rho}(T_i s\pm 1)\prod_{i=1}^{\sigma}\left(T_{ki}^2 s^2\pm 2\zeta_{ki}T_{ki}s\pm 1\right)}. \qquad (354)$$

В соответствии с этой формой выражения для передаточной функции можно указать шесть типов звеньев, соответствующих шести видам сомножителей в приведенном выражении передаточной функции.

Звенья, имеющие передаточные функции, соответствующие трем типам сомножителей, входящих в знаменатель, будем называть соответственно интегрирующими, апериодическими и колебательными.

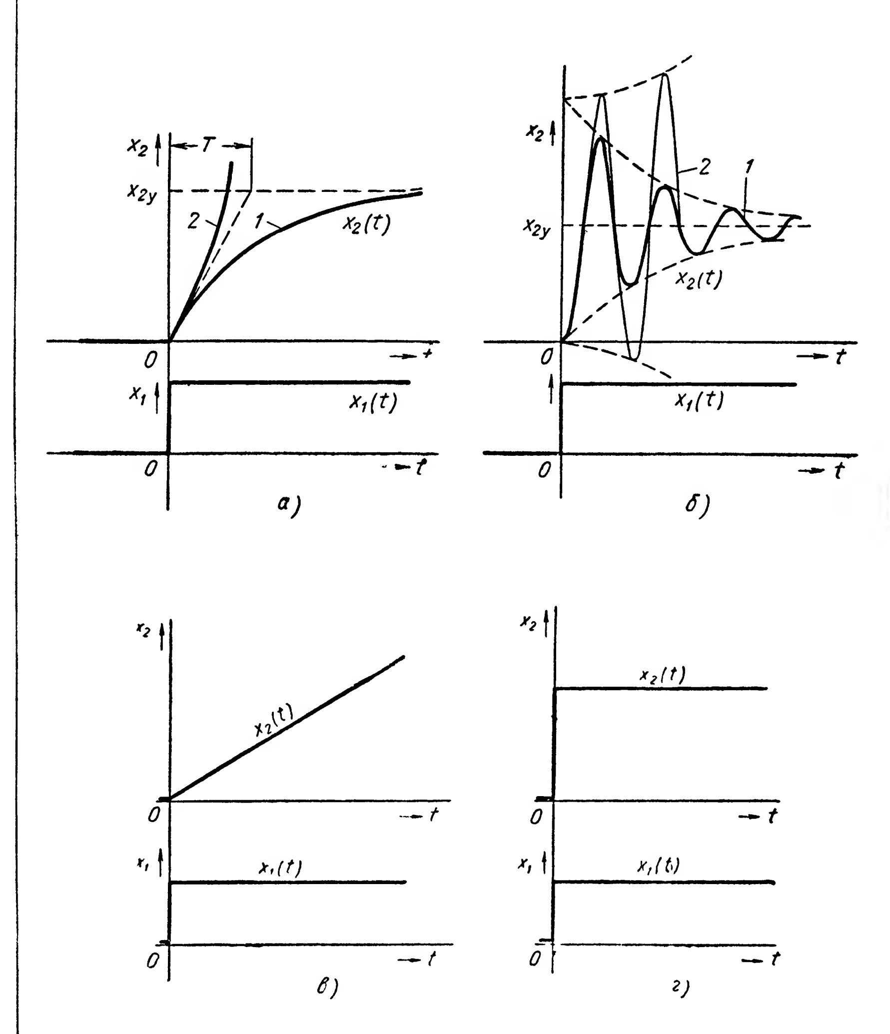
Если все члены какого-либо сомножителя в знаменателе выражения (354) положительны, то оно соответствует устойчивому звену, а если хотя бы один из них отрицателен, то неустойчивому.

При дальнейшем изложении там, где это не может вызвать недоразумений, мы будем для краткости опускать слово „устойчивые“, говоря об устойчивых звеньях.

Звенья, имеющие передаточные функции, соответствующие трем типам сомножителей, входящих в числитель, будем называть соответственно усилительными, диференцирующими первого порядка и диференцирующими второго порядка[1].

---

[1] В литературе встречаются и другие названия для этих звеньев. Так, апериодическое звено называют еще инерционным, одноемкостным и релаксационным, интегрирующее — нейтральным.



Фиг. 60. Графики переходных процессов основых звеньев при скачкообразном изменении входной величины:

а — в апериодическом звене (*1* — устойчивом, *2* — неустойчивом); б) в колебательном звене (*1* — устойчивом, *2* — неустойчивом); *в* — в интегрирующем звене; *г* — в усилительном звене.

Так как звенья имеют различные передаточные функции, то они различаются и по виду переходного процесса, возникающего при изменении входной величины. Для исследования и сравнения звеньев принято помимо их передаточных функций рассматривать переходный процесс при определенном стандартном типе возмущения — при скачкообразном изменении входной величины на единицу и при нулевых начальных условиях (звено в покое), т. е. при единичном ступенчатом воздействии. Функция, определяющая изменение величины на выходе звена при этих условиях, называется переходной функцией звена.

На фиг. 60 изображены переходные функции для четырех типов звеньев: апериодического, колебательного, интегрирующего и усилительного. Здесь x_1 обозначает входную величину, x_2 — выходную величину.

Переходная функция дает изображение реального переходного процесса и может быть получена экспериментально путем записи изменения выходной величины при скачкообразном изменении входной величины.

Из графика видно, что апериодическое звено характеризуется плавным нарастанием выходной величины до установившегося значения по экспоненте (устойчивое апериодическое звено) или неограниченным нарастанием выходной величины со все возрастающей скоростью (неустойчивое апериодическое звено). Для колебательного звена характерен затухающий колебательный процесс (устойчивое колебательное звено) или расходящийся колебательный процесс (неустойчивое колебательное звено). Выходная величина интегрирующего звена нарастает со скоростью, пропорциональной значению входной величины. Таким образом, выходная величина этого звена пропорциональна интегралу по времени от входной величины. Отсюда происходит и название звена. В усилительном звене отсутствует переходный процесс, выходная величина изменяется одновременно с изменением входной величины.

Кроме передаточных и переходных функций звеньев, в теории автоматического регулирования широко применяются частотные характеристики звеньев. Они могут быть получены из диференциального уравнения или передаточной функции звена.

Ниже рассмотрены характеристики основных типов звеньев на основании конкретных примеров.

2. АПЕРИОДИЧЕСКОЕ ЗВЕНО

Апериодическим звеном называется простейшая составная часть структурной схемы системы автоматического регулирования, имеющая передаточную функцию вида

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}. \tag{355}$$

Примеры устройств, которые можно рассматривать как апериодические звенья, приведены на фиг. 61. На фиг. 61, *а* входной величиной является давление воздуха в магистрали, выходной — давление воздуха в резервуаре; на фиг. 61, *б* и *в* входной величиной является напряжение, поданное на левые зажимы цепи, выходной — напряжение на емкости (фиг. 61, *б*) и на сопротивлении (фиг. 61, *в*); на фиг. 61, *г* входной величиной является температура жидкости, выходной — температура тела.

В соответствии с видом передаточной функции (355) диференциальное уравнение апериодического звена можно записать в следующей форме:

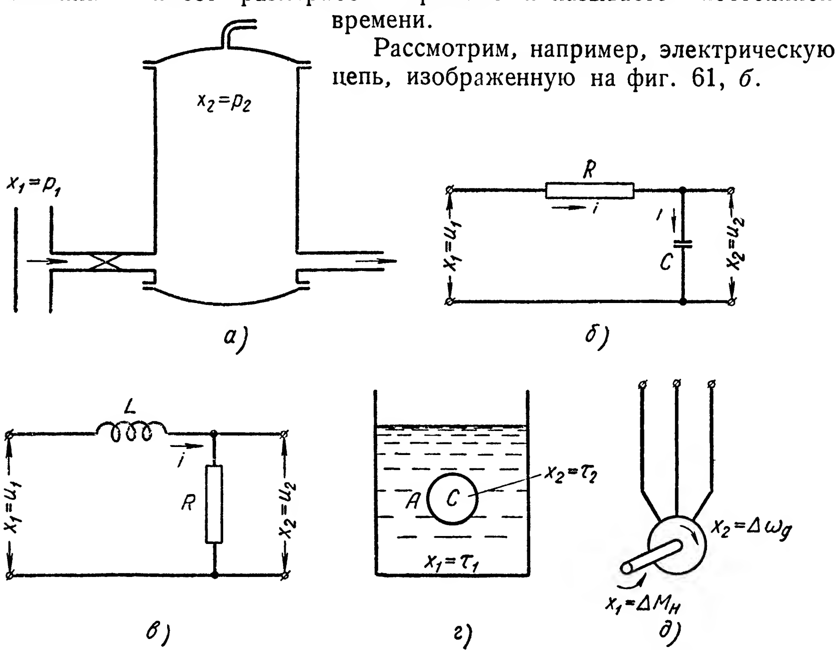
$$T\frac{dx_2}{dt}+x_2=kx_1. \tag{356}$$

где x_1 — величина на входе;

x_2 — величина на выходе.

Величина T имеет размерность времени и называется постоянной времени.

Рассмотрим, например, электрическую цепь, изображенную на фиг. 61, *б*.



Фиг. 61. Примеры элементов систем автоматического регулирования, которые могут замещаться апериодическим звеном устойчивым (*а* — *г*) и неустойчивым (*д*):

а — резервуар, присоединенный к воздушной магистрали через сопротивление; *б* — электрическая цепь из сопротивления и конденсатора; *в* — электрическая цепь из дросселя и сопротивления; *г* — тело C, погруженное в нагретую жидкость; *д* — короткозамкнутый двигатель (при скольжении больше критического).

По второму закону Кирхгофа можно написать:

$$iR+u_2=u_1; \tag{357}$$

$$\frac{du_2}{dt}=\frac{i}{C}. \tag{358}$$

Подставляя уравнение (358) в (357), находим

$$RC\frac{du_2}{dt}+u_2=u_1.$$

Если обозначить $u_1=x_1$; $u_2=x_2$; $RC=T$, то получим уравнение (356).

Найдем теперь закон изменения температуры для нагреваемого тела (фиг. 61, *г*).

По формуле Ньютона поток тепла q, передаваемого телу (в калориях в секунду), прямо пропорционален общему коэфициенту теплопередачи A и разности между температурой нагревающей среды τ_1 и температурой нагреваемого тела τ_2. Таким образом,

$$q = A(\tau_1 - \tau_2). \tag{359}$$

Скорость нарастания температуры тела, очевидно, прямо пропорциональна потоку поступающего в него тепла и обратно пропорциональна суммарной его теплоемкости C:

$$\frac{d\tau_2}{dt} = \frac{q}{C}. \tag{360}$$

Подставляя уравнение (360) в (359), находим

$$\frac{C}{A} \cdot \frac{d\tau_2}{dt} + \tau_2 = \tau_1 \tag{361}$$

или после замены $\tau_1 = x_1$; $\tau_2 = x_2$; $\frac{C}{A} = T$ опять получим уравнение (356).

В приведенных примерах входная и выходная величины обладали одинаковой физической природой и выражались в единицах одинаковой размерности. Часто входная и выходная величины звена имеют разную физическую природу. Так, например, входной величиной звена, представленного на фиг. 61, *в*, может быть принято напряжение, а выходной величиной — ток; в электрических нагревателях в качестве входной величины принимается ток или мощность, а в качестве выходной — температура и т. п. Кроме того, даже при одинаковых входной и выходной величинах установившиеся их значения могут отличаться друг от друга. Во всех этих случаях в уравнениях, описывающих процесс в звене, должен фигурировать коэфициент k, учитывающий соотношение между установившимися значениями выходной и входной величин, который мы будем называть *передаточным коэфициентом звена*.

Найдем уравнение движения элемента, изображенного на фиг. 61, *д*. Этим элементом является асинхронный короткозамкнутый двигатель, входной величиной которого является изменение нагрузки, а выходной величиной — изменение скорости вращения ротора.

Уравнение движения привода, как известно, может быть записано в виде

$$J\frac{d\omega_\partial}{dt} = \sum M, \tag{362}$$

где J — момент инерции вращающихся масс.

Полагаем момент нагрузки $M_н$ не зависящим от скорости ω_∂, а момент двигателя M_∂ в области малых отклонений скорости от равновесного ее значения ω_0 линейно зависящим от скорости:

$$M_\partial = M_к + r\omega_\partial.$$

Вводя в рассмотрение приращения величин от равновесных значений

$$\Delta M_н = M_н - M_0;$$

$$\Delta M_д = M_д - M_0;$$

$$\Delta \omega_д = \omega_д - \omega_0,$$

из уравнения (362) найдем

$$J \frac{d\Delta\omega_д}{dt} = r\Delta\omega_д + \Delta M_н. \tag{363}$$

Обозначая

$$\frac{J}{r} = T; \ \frac{1}{r} = k,$$

получим в окончательном виде уравнение движения системы

$$T \frac{d\Delta\omega_д}{dt} - \Delta\omega_д = k\Delta M_н. \tag{364}$$

Как видно из уравнения (364), рассмотренный элемент согласно принятой классификации звеньев представляет собой апериодическое неустойчивое звено, общее уравнение которого получается из уравнения (364) путем замены $\Delta M_н = x_1$ и $\Delta\omega_д = x_2$ в виде

$$T \frac{dx_2}{dt} - x_2 = kx_1. \tag{365}$$

Из уравнений (356) и (365) видно, что свойства апериодического звена определяются двумя параметрами: постоянной времени T и передаточным коэфициентом k.

В дальнейшем мы все диференциальные уравнения звеньев будем приводить к такому виду, чтобы коэфициент при x_2 был равен единице.

Переходная функция апериодического звена. Решение уравнения (356) для случая, когда величина на входе x_1 представляет собой единичную функцию ($x_1 = [1]$), даст выражение переходной функции, которую мы будем обозначать $h(t)$. Выражение для переходной функции апериодического звена имеет вид

$$h(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right). \tag{366}$$

Эта функция изображена на фиг. 60, *а* (кривая *1*).

Соответственно для неустойчивого апериодического звена

$$h(t) = ke^{\frac{t}{T}}. \tag{367}$$

Эта функция изображена на фиг. 60, *а* (кривая *2*).

Частотные характеристики апериодического звена. Для получения частотных характеристик в формулу (355) передаточной

функции апериодического звена вместо s подставим $j\omega$. В результате получим

$$W(j\omega)=\frac{k}{Tj\omega+1}=\frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2+1}}e^{-j\operatorname{arctg}T\omega}. \tag{368}$$

Модуль этой функции представляет собой амплитудную частотную характеристику апериодического звена

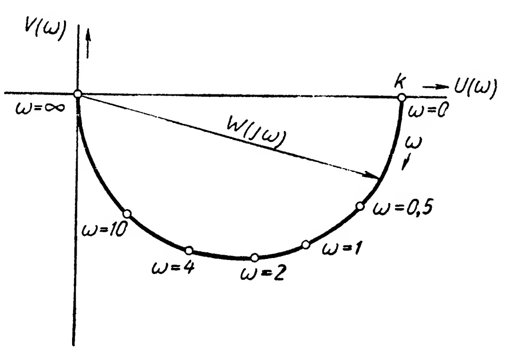
$$A(\omega)=\frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2+1}}. \tag{369}$$

Аргумент этой функции является фазовой частотной характеристикой апериодического звена

$$\theta(\omega)=-\operatorname{arctg}T\omega. \tag{370}$$

Амплитудная и фазовая частотные характеристики, как это уже указывалось, могут быть сняты экспериментально путем измерения амплитуды и фазы выходной величины звена, когда на вход подается синусоидально изменяющееся воздействие различной частоты.

Кривая, описываемая концом вектора $W(j\omega)$ на комплексной плоскости при изменении ω от $-\infty$ до ∞, называется амплитудно-фазовой характеристикой.



Фиг. 62. Амплитудно-фазовая характеристика апериодического звена.

Амплитудно-фазовая характеристика апериодического звена при $\omega>0$ представляет собой полуокружность, изображенную на фиг. 62. Она получается, если в выражение (368) подставлять значения ω от 0 до ∞ и откладывать по оси абсцисс действительную часть выражения $W(j\omega)$, а по оси ординат — мнимую часть. Стрелка около характеристики показывает направление перемещения конца вектора $W(j\omega)$ при увеличении ω. Характеристика начинается из точки k на действительной оси (при $\omega=0$). По мере увеличения частоты модуль комплекса $W(j\omega)$ уменьшается, а фаза сдвигается вплоть до $-90°$, когда ω стремится к бесконечности. Диаметр окружности равен коэфициенту усиления k, распределение отметок ω на характеристике определяется величиной постоянной времени T. Распределение этих отметок на фиг. 62 дано для одного конкретного численного значения T.

Из амплитудно-фазовой характеристики апериодического звена мы видим, что при частоте, близкой к нулю, звено не дает сдвига фазы выходной величины, при частоте, приближающейся к бесконечности, выходная величина отстает от входной на 90°.

3. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ЗВЕНО

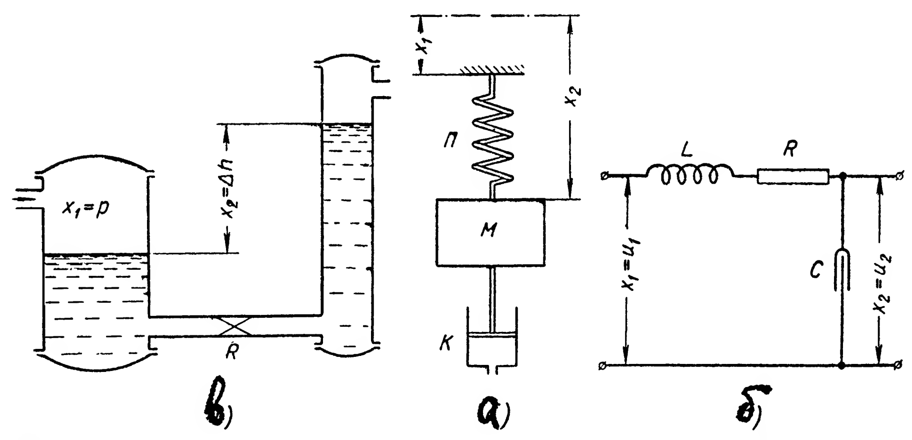
Колебательным звеном называется простейшая составная часть структурной схемы системы автоматического регулирования, имеющая передаточную функцию вида

$$W(s)=\frac{k}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}^{*}. \qquad (371)$$

Неустойчивые колебательные звенья имеют передаточные функции вида

$$W(s)=\frac{k}{T^2s^2-2\zeta Ts+1}. \qquad (372)$$

Примеры устойчивых колебательных звеньев приведены на фиг. 63. При скачкообразном изменении входной величины выходная величина



Фиг. 63. Примеры элементов систем автоматического регулирования, которые могут замещаться устойчивым колебательным звеном:

а — масса *М*, соединенная с пружиной *П* и снабженная катарактом *К*; *б* — электрическая цепь из индуктивности, сопротивления и емкости; *в* — сообщающиеся сосуды, соединенные через гидравлическое сопротивление.

каждого из этих звеньев совершает затухающее колебательное движение, показанное на фиг. 60, *б* (кривая *1*).

В соответствии с уравнением (371) динамические свойства колебательного звена описываются диференциальным уравнением второго порядка:

$$T^2\frac{d^2x_2}{dt^2}+2\zeta T\frac{dx_2}{dt}+x_2=kx_1. \qquad (373)$$

Рассмотрим в качестве примера электрическую цепь (фиг. 63, *б*).

---

* Выражение для передаточной функции колебательного звена может также быть представлено в виде

$$W(s)=\frac{k}{T_0^2s^2+Ts+1}.$$

По второму закону Кирхгофа можно написать:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+u_2=u_1. \qquad (374)$$

Из соотношения (358)

$$i=C\frac{du_2}{dt}. \qquad (375)$$

Диференцируя выражение (375), находим

$$\frac{di}{dt}=C\frac{d^2u_2}{dt^2}. \qquad (376)$$

Подставляя в уравнение цепи (374) значения тока и его производной, получаем

$$LC\frac{d^2u_2}{dt^2}+RC\frac{du_2}{dt}+u_2=u_1. \qquad (377)$$

Приняв обозначения

$$\sqrt{LC}=T;\ \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}=\zeta;\ u_1=x_1;\ u_2=x_2,$$

находим общее уравнение колебательного звена в форме уравнения (373).

В случае неустойчивого колебательного звена его уравнение движения принимает вид

$$T^2\frac{d^2x_2}{dt^2}-2\zeta T\frac{dx_2}{dt}+x_2=kx_1. \qquad (378)$$

Для общности сюда введен передаточный коэфициент звена, равный отношению установившихся значений выходной и входной величин. Для случая рассмотренной электрической цепи этот коэфициент равен единице.

Все характеристики и свойства колебательного звена определяются тремя параметрами: постоянной времени T, относительным коэфициентом затухания ζ и передаточным коэфициентом k*.

Уравнение (377) является линейным диференциальным уравнением второго порядка. Характеристическое уравнение, соответствующее этому диференциальному уравнению, имеет вид

$$T^2\lambda^2+2\zeta T\lambda+1=0. \qquad (379)$$

Корни квадратного уравнения (379) находятся по формуле

$$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{T}\left(\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}\right). \qquad (380)$$

Если параметры звена таковы, что имеет место неравенство

$$\zeta^2-1<0, \qquad (381)$$

* Если передаточная функция колебательного звена представлена выражением, приведенным в сноске к стр. 176, то и в этом случае звено характеризуется тремя параметрами: T, T_0 и k.

то корни характеристического уравнения (379) получаются комплексными[1] и могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= -\alpha + j\beta \\ \lambda_2 &= -\alpha - j\beta\end{aligned}\right\} (j = +\sqrt{-1}). \tag{382}$$

где

$$\alpha = \frac{\zeta}{T}; \tag{383}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}. \tag{384}$$

Как будет видно из дальнейшего, величина α характеризует быстроту затухания колебаний в звене и называется коэфициентом затухания; β есть угловая частота колебаний.

Если коэфициент ζ при первой производной в диференциальном уравнении звена окажется равным нулю, то найдем, что

$$\alpha = 0; \quad \beta = \frac{1}{T} = \omega_0. \tag{385}$$

Колебания при этом не затухают и имеют угловую частоту ω_0 (собственная угловая частота). Колебательное звено, для которого $\zeta = 0$, иногда называют *консервативным звеном.*

Если коэфициент при первой производной выходной величины в уравнении движения системы отрицателен, как это имеет место в уравнении (378), то коэфициент затухания также отрицателен и амплитуда колебаний выходной величины звена с течением времени будет возрастать.

Переходная функция колебательного звена. При скачкообразном изменении входной величины звена решение уравнения (373) может быть найдено путем применения обратного преобразования Лапласа к передаточной функции (371)

Учитывая значение корней характеристического уравнения (379), находим, что в рассматриваемом случае переходная функция колебательного звена выражается зависимостью

$$h(t) = k\left[1 - \frac{e^{-\frac{\zeta}{T}t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} t + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right]. \tag{386}$$

Это есть затухающий колебательный процесс с относительным коэфициентом затухания ζ и угловой частотой ω_0, стремящийся к установившемуся значению $h(\infty) = k$ (при $t \to \infty$). Такой процесс показан на фиг. 60, *б* (кривая *1*).

---

[1] Если корни характеристического уравнения (380) получаются действительными, то, как показано ниже, вместо колебательного звена в структурную схему следует включить два апериодических звена.

Соответственно для неустойчивого колебательного звена получим

$$h(t) = k \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{\frac{\zeta}{T} t} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} t + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right). \quad (387)$$

Посредством выкладок, аналогичных приведенным, можно доказать, что процессы во всех элементах, указанных на фиг. 63 описываются уравнениями, идентичными уравнению (373). Однако, как уже отмечалось выше, колебания в звене возникают лишь в тех случаях, когда выполняется условие (381), т. е. если корни характеристического уравнения являются комплексными величинами. В противном случае, если параметры звена таковы, что удовлетворяется неравенство

$$\zeta > 1, \quad (388)$$

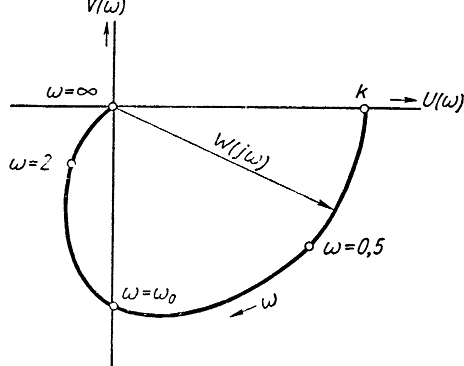
то корни характеристического уравнения получаются действительными и равными

$$\lambda_1 = -\frac{1}{T_1}; \quad \lambda_2 = -\frac{1}{T_2}, \quad (389)$$

где

$$T_1 = \frac{T}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}};$$

$$T_2 = \frac{T}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}.$$



Фиг. 64. Амплитудно-фазовая характеристика колебательного звена.

В этом случае переходный процесс описывается зависимостью

$$x_2 = kx_1 \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right). \quad (390)$$

Звено такого рода может быть всегда представлено как два апериодических звена (первого порядка), обладающих постоянными времени T_1 и T_2 и коэфициентами усиления k_1 и k_2 ($k_1 k_2 = k$), соединенных последовательно: выход первого со входом второго.

Частотные характеристики колебательного звена. Для получения частотных характеристик заменяем s на $j\omega$ в выражении для передаточной функции

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2\omega^2 + 2\zeta T j\omega} = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2\omega^2}} e^{-j \operatorname{arctg} \frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2\omega^2}}. \quad (391)$$

Модуль этой функции является амплитудной частотной характеристикой, аргумент — фазовой частотной характеристикой колебательного звена. Амплитудно-фазовая характеристика представляет кривую, описываемую концом вектора $W(j\omega)$ при изменении ω от 0 до бесконечности. Эта кривая имеет вид, представленный на фиг. 64. Она начинается в точке k на действительной оси (при $\omega = 0$), как и характеристика апериодического звена. Однако в дальнейшем модуль комплекса

$W(j\omega)$ увеличивается, пока не достигает максимума при определенной частоте, меньшей чем ω_0. Эта частота является резонансной частотой звена. При угловой частоте ω_0 частотная характеристика пересекает мнимую ось, что характеризует отставание выходной величины на 90° по отношению к входной.

При $\omega \to \infty$ частотная характеристика подходит к началу координат, однако в отличие от характеристики апериодического звена кривая в этой точке касается действительной, а не мнимой оси. Выходная величина при частоте, близкой к бесконечности, отстает от входной на угол 180°. Численные отметки ($\omega = 0{,}5$; $\omega = 2$) на фиг. 64 даны для конкретного примера колебательного звена.

В системах автоматического регулирования часто встречаются элементы или совокупность элементов, которые по своим динамическим свойствам достаточно близко подходят к свойствам колебательного звена. Такими элементами являются, например, мембранный исполнительный механизм, электрический фильтр, измерительная система диференциального манометра и т. п.

4. ИНТЕГРИРУЮЩЕЕ ЗВЕНО

Звено, передаточная функция которого имеет вид

$$W(s) = \frac{k}{s}, \tag{392}$$

называется *интегрирующим звеном*. Скорость изменения выходной величины такого звена пропорциональна входной величине. Если отвлечься от имеющей иногда место ограниченности рабочего участка соответствующего элемента системы, выходная величина интегрирующего звена может неограниченно нарастать или убывать при неизменном значении входной величины. В отличие от апериодического и колебательного звена в интегрирующем звене нет определенного соотношения между установившимися значениями входной и выходной величин, а есть лишь определенное соотношение между значениями входной величины и скоростью изменения выходной величины.

Примеры интегрирующих звеньев даны на фиг. 65. Во всех этих примерах мы получаем такое изменение выходной величины при единичном скачке входной величины, которое показано на фиг. 60, *в*. Поэтому мы должны для резервуара (фиг. 65, *а*) в качестве входной величины принять поток жидкости, выходной — высоту уровня; для электродвигателя (фиг. 65, *б*) в качестве входной величины принять напряжение на якоре, выходной — угол поворота якоря; для поршневого серводвигателя (фиг. 65, *в*) в качестве входной величины принять поток масла, а выходной величины — путь поршня [1].

Составим уравнение поршневого исполнительного механизма (фиг. 65, *в*).

Обозначим через μ путь поршня и через σ отклонение плунжера управляющего золотника от среднего положения. Допустим, что про-

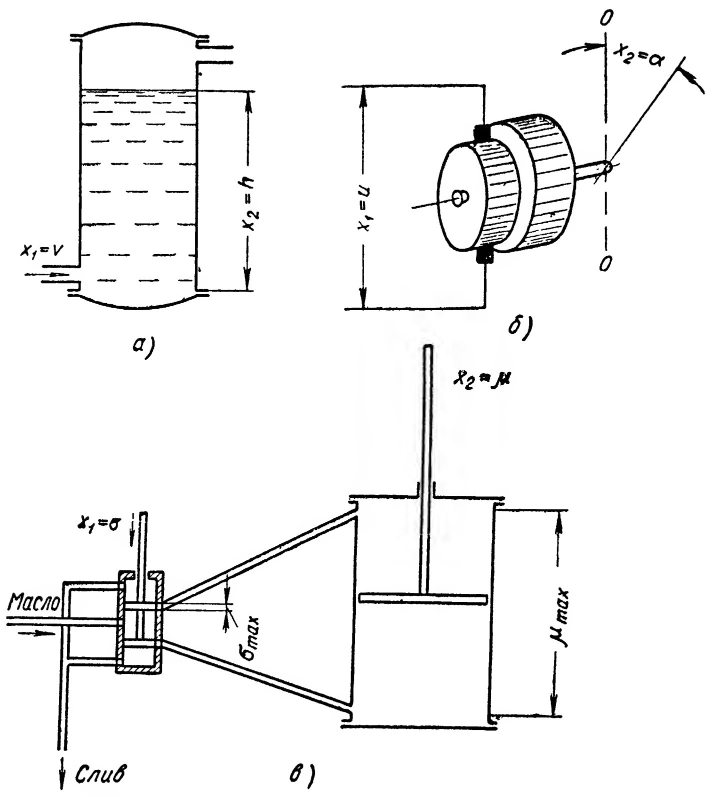
---

[1] В обоих последних примерах мы полагаем, что можно пренебречь влиянием массы движущихся частей на переходные процессы.

филь окон золотника таков, что поток жидкости, поступающей в цилиндр, прямо пропорционален отклонению золотника от среднего положения. Тогда, очевидно, и скорость поршня будет прямо пропорциональна отклонению золотника, откуда следует уравнение

$$\frac{d\mu}{dt} = k\sigma, \qquad (393)$$

где k — коэфициент пропорциональности, зависящий от параметров механизма.



Фиг. 65. Примеры элементов систем автоматического регулирования, замещаемых интегрирующим звеном:

а — резервуар, наполняемый жидкостью; *б* — двигатель постоянного тока; *в* — поршневой исполнительный механизм.

Обозначим выходную величину звена μ через x_2, входную величину σ — через x_1 и назовем k передаточным коэфициентом интегрирующего звена. Тогда получим уравнение интегрирующего звена в общем виде:

$$\frac{dx_2}{dt} = kx_1. \qquad (394)$$

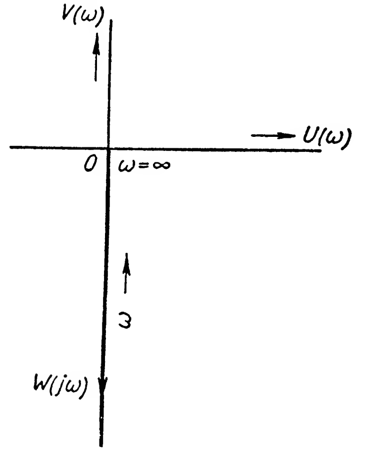
Из формулы (394) видно, что интегрирующее звено характеризуется только одним параметром k — передаточным коэфициентом. Передаточный

коэфициент интегрирующего звена есть отношение скорости изменения выходной величины к входной величине.

Уравнение (394) справедливо и для других примеров, данных на фиг. 65.

Переходная функция интегрирующего звена. Полагая, что входная величина в уравнении (394) является единичной ступенчатой функцией, получим следующее выражение для переходной функции интегрирующего звена:

$$h(t) = kt. \qquad (395)$$



Фиг. 66. Амплитудно-фазовая характеристика интегрирующего звена.

Эта зависимость представлена на фиг. 60, *в*.

Частотные характеристики интегрирующего звена. Для получения частотных характеристик заменим s на $j\omega$ в выражении передаточной функции звена (394). Тогда получим

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = \frac{k}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \qquad (396)$$

При изменении ω от 0 до бесконечности конец вектора $W(j\omega)$ движется по отрицательной части мнимой оси от $-\infty$ до нуля (фиг. 66). Интегрирующее звено создает отставание выходной величины на 90° при всех частотах. Амплитуда выходной величины тем меньше, чем больше частота.

Интегрирующие звенья часто встречаются в системах автоматического регулирования. Например, гидравлические и электрические исполнительные механизмы, усилители, такие регулируемые объекты, как барабан парового котла, в котором регулируется уровень воды, и многие другие объекты регулирования имеют передаточные функции, аналогичные передаточной функции интегрирующего звена.

5. УСИЛИТЕЛЬНОЕ ЗВЕНО

Усилительным звеном мы будем называть такое звено структурной схемы, в котором величина на выходе воспроизводит без всяких искажений и запаздывания входную величину. Отношение выходной величины к входной называется коэфициентом усиления этого звена. Входная и выходная величины определяются по направлению воздействий в системе.

На фиг. 67 показаны примеры передач, которые могут замещаться усилительными звеньями: рычаг, короткий трубопровод, электронный усилитель (безинерционный). Для рычага входной величиной является перемещение одного конца, выходной — перемещение другого конца, для трубопровода — соответственно давление или расход на входном конце и выходном конце. Следует заметить, что трубопровод может

заменяться усилительным звеном при сравнительно небольшой длине, когда можно пренебречь временем распространения возмущения по его длине. Для электронного усилителя входной и выходной величинами являются напряжения или токи на входе и выходе.

Для всех усилительных звеньев зависимость между выходной и входной величинами описывается соотношением

$$x_2 = kx_1. \qquad (397)$$

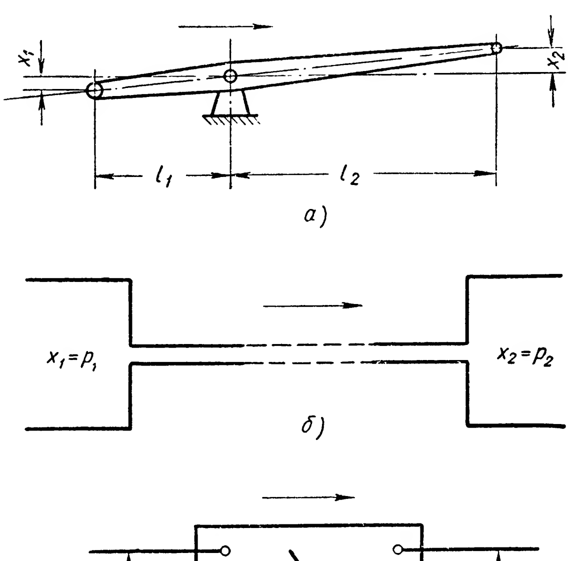
Для рычага коэфициент усиления $k = \frac{l_2}{l_1}$ (отношение плеч), для трубопровода $k = 1$.

Переходный процесс в идеальном усилительном звене отсутствует, выходная величина изменяется немедленно после изменения входной величины. Переходная функция есть прямая линия (см. фиг. 60, *г*).

Передаточная функция усилительного звена является постоянной величиной. Амплитудно-фазовая характеристика представляет собой точку:

$$W(s) = k; \qquad (398)$$

$$W(j\omega) = k. \qquad (399)$$



Фиг. 67. Примеры передающих органов систем автоматического регулирования, замещаемых усилительным звеном:

а — рычаг; *б* — трубопровод; *в* — безинерционный усилитель.

6. ДИФЕРЕНЦИРУЮЩЕЕ ЗВЕНО ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Диференцирующим звеном первого порядка мы будем называть звено, передаточная функция которого имеет вид

$$W(s) = k(\tau s + 1), \qquad (400)$$

где k — передаточный коэфициент звена;

τ — постоянная, имеющая размерность времени, характеризующая степень влияния скорости изменения входной величины на выходную величину.

Выходная величина этого звена определяется не только значением, но и скоростью изменения входной величины (производной от входной величины).

Уравнение этого звена согласно передаточной функции (400) имеет вид

$$x_2 = k\left(\tau \frac{dx_1}{dt} + x_1\right). \qquad (401)$$

Переходная функция диференцирующего звена первого порядка. При скачкообразном изменении входной величины на выходе диференцирующего звена получается мгновенный импульс с бесконечно большой амплитудой, соответствующей бесконечно большой скорости изменения входной величины в момент скачка, а затем выходная величина принимает постоянное установившееся значение. Итак,

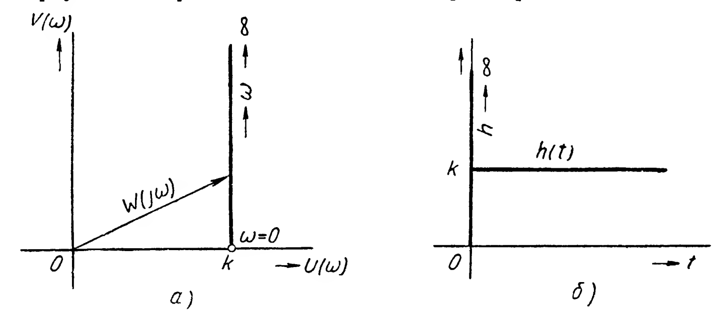
$$h(t) = k\{[1] + \tau\delta(t)\},$$

где через $\delta(t)$ — обозначена дельта функция (см. п. 4 главы IV) (фиг. 68, *б*).

Частотные характеристики диференцирующего звена первого порядка. Выражение для амплитуднофазовой характеристики получим после замены $s = j\omega$ в выражении (400).

$$W(j\omega) = k(j\omega\tau + 1) = k\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}\, e^{j\,\mathrm{arctg}\,\omega\tau}. \qquad (402)$$

Модуль этой функции является амплитудной частотной характеристикой, аргумент — фазовой частотной характеристикой. Амплитудно-



Фиг. 68. Амплитудно-фазовая характеристика и переходная функция диференцирующего звена первого порядка (идеального).

фазовая характеристика параллельна мнимой оси (фиг. 68, *а*). Диференцирующее звено создает опережение выходной величины тем большее, чем больше частота; при большой частоте сдвиг приближается к 90°.

Наличие диференцирующего звена первого порядка в основном контуре системы означает введение производной в закон регулирования и обычно бывает полезно для улучшения качества регулирования и обеспечения устойчивости системы.

7. ДИФЕРЕНЦИРУЮЩЕЕ ЗВЕНО ВТОРОГО ПОРЯДКА

Назовем *диференцирующим звеном второго порядка* звено; передаточная функция которого имеет вид

$$W(s) = k(\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1); \qquad (403)$$

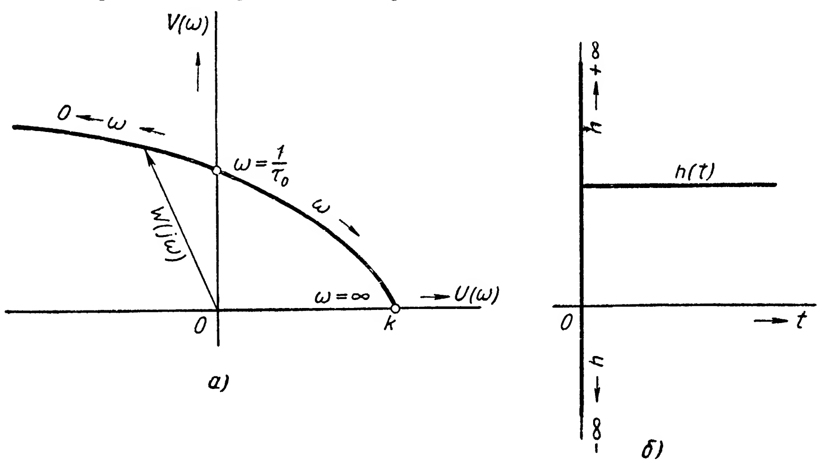
при этом предполагается, что выражение (403) нельзя представить в виде произведения двух двучленов первой степени, так как иначе это звено можно было бы заменить двумя диференцирующими звеньями первого порядка, соединенными последовательно. Трехчлен (403) нельзя разложить на простые сомножители, когда он имеет комплексные корни.

Уравнение такого звена согласно выражению (403) имеет вид

$$x_2 = k\left(\tau^2 \frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dx_1}{dt} + x_1\right). \qquad (404)$$

Как видно из уравнения (404), выходная величина звена определяется не только входной величиной, но и первой и второй производными от нее. Звено характеризуется тремя параметрами: передаточным коэфициентом k и постоянными τ и ζ. Эти постоянные характеризуют диференцирующее действие звена.

Переходная функция диференцирующего звена второго порядка. При скачкообразном изменении входной величины



Фиг. 69. Амплитудно-фазовая характеристика и переходная функция диференцирующего звена второго порядка (идеального).

в первый момент на выходе получаются мгновенные импульсы бесконечно большой амплитуды, соответствующие бесконечно большой скорости изменения входной величины и ее производной в момент скачка, а затем выходная величина принимает постоянное значение (фиг. 69, *б*). Итак,

$$h(t) = k\left[[1] + 2\zeta\tau\delta(t) + \tau^2 \frac{d\delta}{dt}\right].$$

Частотные характеристики идеального диференцирующего звена второго порядка. После замены s на $j\omega$ в выражении передаточной функции (403) получим

$$W(j\omega) = k\,[(1 - \omega^2\tau^2) + j2\zeta\omega\tau] =$$

$$= k\sqrt{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2\tau^2} \cdot e^{j \operatorname{arctg} \frac{2\zeta\tau\omega}{1 - \omega^2\tau^2}}. \qquad (405)$$

Модуль этой функции является амплитудной частотной характеристикой, аргумент — фазовой частотной характеристикой.

Амплитудно-фазовая характеристика представляет собой параболу в верхней полуплоскости (фиг. 69, *а*), которая начинается из точки k.

Таблица 9

Сводка уравнений и характеристик типовых звеньев

Уравнения и характеристики	Звено					
	Апериодическое	Колебательное	Интегрирующее	Усилительное	Диференцирующее первого порядка (идеальное)	Диференцирующее второго порядка (идеальное)
Диференциальное уравнение	$T\frac{dx_2}{dt} \pm x_2 = kx_1$	$T^2\frac{d^2x_2}{dt^2} \pm 2\zeta T\frac{dx_2}{dt} + x_2 = kx_1$ $\left(T_0^2\frac{d^2x_2}{dt^2} \pm T\frac{dx_2}{dt} + x_2 = kx_1\right)$	$\frac{dx_2}{dt} = kx_1$	$x_2 = kx_1$	$x_2 = k\left(\tau\frac{dx_1}{dt} + x_1\right)$	$x_2 = k\left(\tau^2\frac{d^2x_2}{dt^2} + 2\zeta\tau\frac{dx_1}{dt} + x_1\right)$
Диференциальное уравнение в операторной форме	$Tpx_2 \pm x_2 = kx_1$	$T^2p^2x_2 \pm 2\zeta Tpx_2 + x_2 = kx_1$	$px_2 = kx_1$	—	$x_2 = k(\tau p + 1)x_1$	$x_2 = k(\tau^2p^2 + 2\zeta\tau p + 1)x_1$
Передаточная функция	$W(s) = \frac{k}{Ts \pm 1}$	$W(s) = \frac{k}{T^2s^2 \pm 2\zeta Ts + 1}$	$W(s) = \frac{k}{s}$	$W(s) = k$	$W(s) = k(\tau s + 1)$	$W(s) = k(\tau^2s^2 + 2\zeta\tau s + 1)$
Амплитудно-фазовая характеристика	$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}$	$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - T^2\omega^2) + 2\zeta Tj\omega}$	$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$	$W(i\omega) = k$	$W(j\omega) = k(1 + j\omega\tau)$	$W(j\omega) = k[(1-\omega^2\tau^2) + j\omega 2\zeta\tau]$
Амплитудная частотная характеристика	$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}$	$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2T^2\omega^2}}$	$A(\omega) = \frac{k}{\omega}$	k	$A(\omega) = k\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}$	$A(\omega) = k\sqrt{(1-\omega^2\tau^2)^2 + 4\zeta^2\tau^2\omega^2}$
Фазовая частотная характеристика	$\theta(\omega) = -\operatorname{arctg}\omega T$	$\theta(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2\omega^2}$	$\theta(\omega) = -\frac{\pi}{2}$	0	$\theta(\omega) = \operatorname{arctg}\omega\tau$	$\theta(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{2\zeta\tau\omega}{1 - \tau^2\omega^2}$
Переходная функция	$h(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$	$h(t) = k\left[1 - \frac{e^{-\frac{\zeta}{T}t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega t + \psi)\right]$	$h(t) = kt$	$h(t) = k$	$k\{[1] + \tau\delta(t)\}$	$k\left\{[1] + 2\zeta\tau\delta(t) + \tau^2\frac{d\delta}{dt}\right\}$

Как видно, диференцирующее звено второго порядка создает опережение выходной величины тем большее, чем больше частота. При $\omega \rightarrow \infty$ опережение приближается к 180°.

Наличие диференцирующего звена второго порядка в основном контуре системы регулирования означает введение первой и второй производных в закон регулирования, что часто бывает полезно для улучшения качества регулирования.

Из сравнения свойств усилительного и диференцирующих звеньев с остальными (см. табл. 9) видно, что в отличие от остальных звеньев их передаточные функции не имеют знаменателя. Отсюда следует, что добавление усилительных и идеальных диференцирующих звеньев в структурную схему системы не изменяет порядка диференциального уравнения системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марьяновский Д. И., Устойчивость линейных систем автоматического регулирования, „Электричество" № 9, 1946.

2. Солодовников В. В., Устойчивость линейных следящих систем и систем автоматического регулирования, „Автоматика и телемеханика" № 1, 1946.

3. Воронов А. А., Элементы теории автоматического регулирования, Оборонгиз, 1950.

4. Айзерман М. А., Теория автоматического регулирования двигателей, Техтеоретиздат, 1952.

ГЛАВА VIII

ПРИМЕРЫ СОСТАВЛЕНИЯ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СТРУКТУРНЫХ СХЕМ И ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Покажем, пользуясь конкретными примерами, рассмотренными в главе III, каким образом составляются диференциальные уравнения, структурные схемы и определяются передаточные функции систем автоматического регулирования.

1. СИСТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СКОРОСТИ ГИДРОТУРБИНЫ

Составим диференциальные уравнения каждого из элементов системы автоматического регулирования скорости гидротурбины (см. фиг. 29) [1]. Автоматический регулятор скорости гидротурбины, состоящий из чувствительного элемента, двух гидравлических усилителей, гидравлического сервомотора, регулирует число оборотов гидротурбины при изменении нагрузки генератора переменного тока, вращаемого гидротурбиной. Регулирование происходит путем изменения расхода воды, проходящей через гидротурбину.

При этом происходит увеличение или уменьшение ее вращающего момента.

Уравнение движения ротора гидротурбины

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_{\partial} - M_c, \tag{406}$$

где J — момент инерции ротора гидротурбины и генератора;
ω — угловая скорость вращения ротора гидротурбины;
M_{∂} — вращающий момент, развиваемый гидротурбиной;
M_c — момент сопротивления, зависящий от электрической нагрузки генератора.

Вращающий момент M_{∂} может быть найден по формуле

$$M_{\partial} = \frac{1}{2}\varkappa z\frac{v^3}{\omega}, \tag{407}$$

где v — скорость течения воды;
ω — угловая скорость вращения ротора гидротурбины;
z — величина открытия;
$\varkappa$ — коэфициент, зависящий от конструкции гидротурбины.

Произведем линеаризацию уравнения (407) с помощью разложения в ряд Тейлора (см. главу IV) по степеням z и ω и будем считать, что изменения угловой скорости гидротурбины невелики, тогда отклонения величин $\Delta\omega$ и Δz от установившихся значений малы, и мы можем пренебречь членами разложения второго и более высоких порядков.

$$M_\partial = \frac{1}{2}\varkappa z_0 \frac{v^3}{\omega_0} + \frac{1}{2}\varkappa \frac{v^3 z_0}{\omega_0} \cdot \frac{\Delta z}{z_0} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varkappa v^3 z_0}{\omega_0} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0}, \qquad (408)$$

где ω_0 — установившееся число оборотов гидротурбины.

Если установившееся значение момента, развиваемого гидротурбиной, обозначить через $M_{\partial 0}$, то

$$M_{\partial 0} = \frac{1}{2}\varkappa z_0 \frac{v^3}{\omega_0}, \qquad (409)$$

и формула для вращающего момента перепишется в виде

$$M_\partial = M_{\partial 0}\left(1 + \frac{\Delta z}{z_0} - \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right). \qquad (410)$$

Обозначив через M_{c0} установившееся значение момента сопротивления, напишем уравнение для момента M_c в случае сброса нагрузки (внезапного отключения ряда потребителей электроэнергии от генератора):

$$M_c = M_{c0} - \Delta M_c\,[1]. \qquad (411)$$

Диференциальное уравнение движения ротора гидротурбины с учетом уравнений (410) и (411) будет иметь вид

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_{\partial 0}\left(1 + \frac{\Delta z}{z_0} - \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) - M_{c0} + \Delta M_c\,[1].$$

Так как в установившемся состоянии имеем равенство установившихся значений вращающего момента и момента сопротивления (т. е. $M_{\partial 0} = M_{c0}$), то уравнение движения перепишется в виде

$$\frac{J\omega_0}{M_{\partial 0}} \cdot \frac{d\omega}{dt\omega_0} = \frac{\Delta M_c}{M_{o0}}\,[1] - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \frac{\Delta z}{z_0}.$$

Введем относительные переменные

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \gamma; \quad \frac{\Delta z}{z_0} = \mu$$

и коэфициент

$$f_0 = \frac{\Delta M_c}{M_{\partial 0}},$$

а также постоянную времени

$$T_a = \frac{J\omega_0}{M_{c0}},$$

тогда получим уравнение движения гидротурбины в безразмерной форме:

$$T_a\frac{d\gamma}{dt} + \gamma = f_0\,[1] + \mu.$$

Применив к этому уравнению преобразование Лапласа, получим

$$(T_a s + 1)\Gamma(s) = \frac{F_0}{s} + M(s) \tag{412}$$

или

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s(T_a s + 1)} F_0 + \frac{1}{T_a s + 1} M(s). \tag{413}$$

Синхронный генератор используется для питания синхронного мотора чувствительного элемента, скорость вращения которого зависит от скорости вращения гидротурбины. Представив этот элемент в виде сравнивающего устройства и имея в виду, что скорости вращения синхронных генератора и мотора одинаковы, можно записать его уравнение в относительных переменных:

$$\varepsilon(t) = -\gamma(t). \tag{414}$$

Составим теперь диференциальное уравнение центробежного маятника [2].

При вращении диска маятника вращающиеся грузы, охваченные лентой, будут расходиться под действием центробежной силы, значение которой определяется как

$$f_ц = k_p \omega^2 r, \tag{415}$$

где r — расстояние от оси вращения до центра тяжести грузов;
k_p — постоянная, зависящая от конструкции центробежного маятника.

При изменении скорости вращения синхронного мотора грузы маятника будут перемещать его штифт, а вместе с ним и рычаг. Свяжем функциональной зависимостью перемещения штифта с изменением радиуса r:

$$r = f(x). \tag{416}$$

Разлагая в ряд Тейлора правую часть уравнения (415) и пренебрегая членами выше первого порядка, получим

$$f_ц = k_p \omega_0^2 r_0 + 2k_p \omega_0 r_0 \Delta\omega + k_p \omega_0^2 \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) \Delta x. \tag{417}$$

Уравнение движения штифта запишем в виде

$$m_n \frac{d^2 x}{dt^2} = f_ц - f_c, \tag{418}$$

где m_n — приведенная к штифту масса подвижных частей маятника;
f_c — сила сопротивления, препятствующая движению пяты.

Предположим, что зависимость силы сопротивления от упругости пружины, трения ленты и приведенного веса грузов выражается соотношением

$$f_c = k_c \Delta x + R_0 + D\frac{dx}{dt} + G, \tag{419}$$

где R_0 — сила предварительного натяжения пружины;
k_c — коэфициент жесткости пружины;
D — коэфициент скоростного сопротивления (перемещению ленты и муфты);
G — вес грузов.

Подставив в уравнение (418) уравнения (417) и (419), получим

$$m_n \frac{d^2x}{dt^2} = k_p\omega_0^2 r_0 + 2k_p\omega_0 r_0\Delta\omega +$$

$$+ k_p\omega_0^2 \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) \Delta x - R_0 - k_c\Delta x - D\frac{dx}{dt} - G. \qquad (420)$$

Для установившегося состояния имеем

$$G + f_0 = k_p\omega_0^2 r_0.$$

Перепишем уравнение (420) в безразмерной форме:

$$T_p^2 \frac{d^2\eta}{dt^2} + T_k \frac{d\eta}{dt} + \delta\eta = \varepsilon, \qquad (421)$$

где

$$\eta = \frac{\Delta x}{x_m}; \quad T_p^2 = \frac{m_n x_m}{2k_p\omega_0^2 r_0};$$

$$T_k = \frac{Dx_m}{2k_p\omega_0^2 r_0} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{\left[k_c - k_p\omega_0^2\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right] x_m}{2k_p\omega_0^2 r_0}.$$

Величина δ носит название коэфициента неравномерности центробежного маятника.

Из уравнения (421) следует, что передаточная функция для центробежного маятника имеет вид

$$K_1 W_1(s) = \frac{H(s)}{E(s)} = \frac{k_1}{T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1}; \qquad (422)$$

где

$$T_1 = \frac{T_p}{\sqrt{\delta}};$$

$$\xi_1 = \frac{T_k}{2T_p\sqrt{\delta}};$$

$$k_1 = \frac{1}{\delta}.$$

Перемещение золотника вспомогательного гидравлического сервомотора $\rho(t)$ представляет собой разность между перемещением штифта маятника $\eta(t)$ и перемещением штока изодрома $\zeta(t)$. Поэтому рычаг можно рассматривать как элемент сравнения, описываемый уравнением

$$\rho(t) = \eta(t) - \zeta(t). \qquad (423)$$

Уравнение движения поршня, а вместе с ним и главного распределительного золотника без учета приведенной массы поршня (а эта масса мала) будет

$$D_b \frac{dq}{dt} = k_b F_b \Delta P_b,$$

где q — перемещение распределительного золотника;

k_b — приведенная к золотнику постоянная гидравлического клапана;

F_b — площадь поршня вспомогательного сервомотора;

ΔP_b — рабочий перепад давлений;

$$\frac{D_b q_m}{P_{b_m}} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = k_b F_b \frac{\Delta P_b}{P_{b_m}}, \qquad (424)$$

где σ — относительное перемещение плунжера.

Так как перепад давлений в гидравлическом сервомоторе определяется разностью положений поршня и плунжера, то

$$\frac{\Delta P_{BC}}{P_{BC_m}} = k_г \rho - k'_г \sigma,$$

где $k_г$; $k'_г$ — постоянные клапанов, приведенные к относительным единицам и зависящие от конструкции плунжера и поршня.

Итак, уравнение движения будет

$$\frac{D_b q_m}{P_{b_m}} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + k_b F_b k'_г \sigma = k_b F_b k_г \rho,$$

и, следовательно, передаточная функция вспомогательного сервомотора имеет вид

$$K_2 W_2(s) = \frac{\Sigma(s)}{\rho(s)} = \frac{k_2}{T_2 s + 1}, \qquad (425)$$

где

$$T_2 = \frac{D_b q_m}{P_{b_m} k_b k'_г F_b}$$

постоянная времени вспомогательного сервомотора;

$$k_2 = \frac{k_г}{k'_г}.$$

Ввиду того, что значение приведенной массы поршня m_{cn} гидравлического сервомотора, управляющего направляющим аппаратом гидротурбины, довольно велико, уравнение его движения можно записать в виде

$$m_{cn} \frac{d^2 n}{dt^2} + D_c \frac{dn}{dt} = \Delta P_c F_c, \qquad (426)$$

где m_{cn} — приведенная масса поршня;

D_c — постоянный коэфициент, зависящий от гидравлических потерь;

ΔP_c — рабочий перепад давлений в сервомоторе.

Преобразуем уравнение (426) для перехода к безразмерной форме. Для этого перепишем его в следующем виде:

$$\frac{m_{cn} n_m}{F_c P_m} \cdot \frac{d^2 n}{n_m dt^2} + \frac{D_c n_m}{F_c P_m} \cdot \frac{dn}{dt n_m} = \frac{\Delta P_c}{P_m}. \qquad (427)$$

Отношения давлений будут пропорциональны отношениям соответствующих ходов золотника гидравлического усилителя:

$$\frac{\Delta P}{P_m} = k_{cn} \frac{b}{b_m} = k_n k_{cn} \sigma, \qquad (428)$$

где k_{cn} — постоянная гидравлического клапана, зависящая от конструкции золотника и типа применяемого масла;

k_n — коэфициент пропорциональности.

Введем обозначения

$$\mu = \frac{n}{n_m}; \qquad T^2_{cn} = \frac{m_{cn} n_m}{F_c P_m};$$

$$T_{кn} = \frac{D_c n_m}{F_c P_m}; \qquad k' = k_n k_{cn}.$$

Применяя к уравнению (427) преобразование Лапласа и учитывая уравнение (428), получим

$$(T^2_{cn} s^2 + T_{кn} s)\, M(s) = k' \sum(s). \tag{429}$$

Таким образом, передаточная функция гидравлического сервомотора имеет вид

$$K_{гм} W_{гм}(s) = \frac{M(s)}{\sum(s)} = \frac{k'}{T^2_{cn} s^2 + T_{кn} s}, \tag{430}$$

и гидравлический сервомотор можно представить себе в виде соединения двух типовых звеньев — апериодического и интегрирующего:

$$K_{гм} W_{гм}(s) = K_3 W_3(s) K_4 W_4(s) = \frac{k_3 k_4}{s(T_3 s + 1)}, \tag{431}$$

где

$$k_3 = \frac{1}{T_{кn}};$$

$$T_3 = \frac{T^2_{cn}}{T_{кn}};$$

$$k_4 = k'.$$

Шток поршня силового сервомотора через рычажный механизм воздействует на стакан изодрома. Выходной шток изодрома через специальное устройство соединен с пальцем стакана. На фиг. 70 приведена схема изодрома с кинематическими связями, заменяющими механизм остаточной неравномерности.

Перемещение точки B (фиг. 70) определяется по правилу рычага:

$$a = \frac{l_2}{l_1} k.$$

Пружина сжимается за счет разности перемещения ее концов.

Величина сжатия пружины равна

$$e = a - u = \frac{l_2}{l_1} k - u = ik - u,$$

где i — передаточное число изодрома.

Уравнение движения изодрома

$$m_{nu} \frac{d^2 k}{dt^2} = f_{np} + D_u \frac{dh}{dt},$$

где h — относительное перемещение поршня изодрома;

m_{nu} — масса поршня изодрома;

D_u — коэфициент демпфирования;

f_{np} — сила пружины.

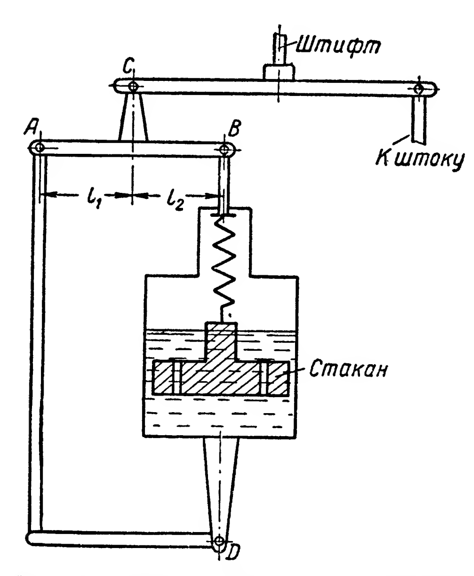
Пренебрегая массой поршня, т. е. полагая $m_{nu} = 0$, мы можем написать:

$$C_u l + D_u \frac{dh}{dt} = 0$$

или

$$D_u \frac{dk}{dt} - D_u \frac{du}{dt} - C_u u + C_u ik = 0 .$$

Вводя относительные перемещения, перепишем это уравнение:



Фиг. 70. Кинематическая схема изодромного устройства.

$$T_u \frac{d\zeta}{dt} + \zeta = T_u \beta \frac{d\mu}{dt} + \lambda\mu,$$

где постоянная времени изодрома

$$T_u = \frac{D_u}{C_u}$$

и относительные перемещения

$$\mu = \frac{k}{k_m}$$

k_m — максимальное перемещение точки D);

$$\zeta = \frac{u}{u_m}$$

(u_m — максимальное перемещение точки A);

$$\beta = \frac{k_m}{u_m};$$

$$\lambda = i\beta$$

(λ — постоянная остаточной неравномерности).

Из полученного уравнения следует, что передаточная функция изодрома имеет вид

$$K_{z_1} Z_1(s) = \frac{Z(s)}{M(s)} = \frac{(\beta T_u s + 1)}{T_u s + 1} \tag{432}$$

или

$$K_{z_1} Z_1(s) = \frac{k_5 (T_5 s + 1)}{T_4 s + 1}, \tag{433}$$

где

$$k_5 = 1; \quad T_4 = T_u$$

и

$$T_5 = \beta T_u .$$

Итак, передаточные функции элементов регулятора скорости вращения гидротурбины определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} K_1 W_1(s) &= \frac{k_1}{T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1}; \\ K_2 W_2(s) &= \frac{k_2}{T_2 s + 1}; \\ K_3 W_3(s) K_4 W_4(s) &= \frac{k_3 k_4}{s(T_3 s + 1)}; \\ K_{z_1} Z_1(s) &= \frac{k_5(T_5 s + 1)}{T_4 s + 1}. \end{aligned}\right\} \tag{434}$$

Составим теперь структурную схему всей системы и определим ее передаточные функции.

Структурная схема системы автоматического регулирования скорости гидротурбины, составленная в соответствии с фиг. 29 и 30, приведена на фиг. 71. Имея в виду, что три последовательно соединенных элемента с передаточными функциями $K_2W_2(s)$, $K_3W_3(s)$, $K_4W_4(s)$ можно заменить одним элементом с передаточной функцией

$$K_n W_n(s) = K_2 W_2(s) K_3 W_3(s) K_4 W_4(s), \tag{435а}$$

мы можем преобразовать схему на фиг. 71, *а* к схеме на фиг. 71, *б*.

Передаточная функция части системы, отмеченной на фиг. 71, *б* пунктиром, равна

$$K_B W_B(s) = \frac{K_n W_n(s)}{1 + K_n W_n(s) K_{z_1} Z_1(s)}. \tag{435б}$$

Заменив на структурной схеме часть, обведенную пунктиром, одним элементом, имеющим передаточную функцию $K_BW_B(s)$, получим преобразованную структурную схему (фиг. 71, *в*).

Из фиг. 71, *в* легко видеть, что передаточная функция регулятора скорости будет иметь вид

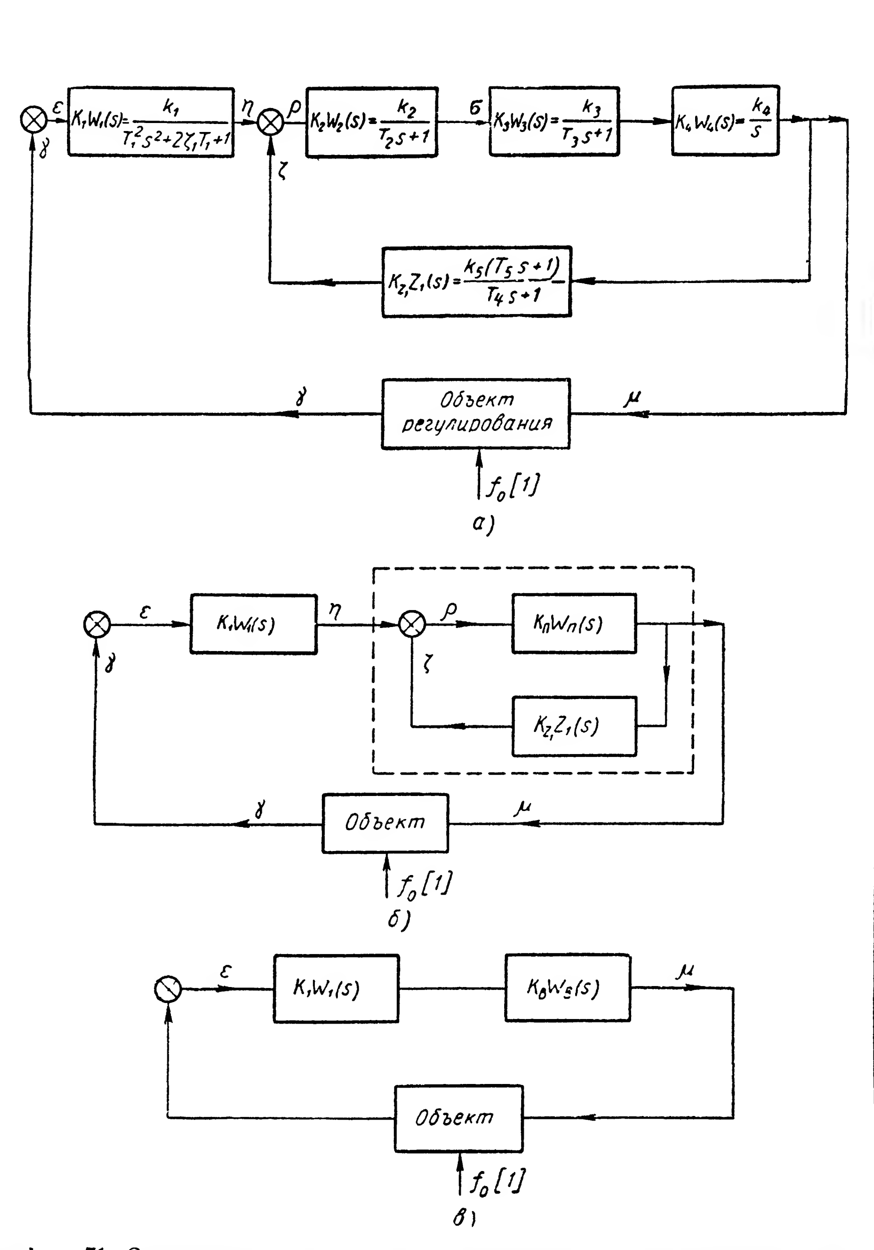
$$K_p W_p(s) = K_1 W_1(s) K_B W_B(s), \tag{436}$$

и, следовательно, подставив в формулу (436) значения передаточных функций, представленных формулами (435а) и (435б), получим выражение для передаточной функции регулятора в виде

$$K_p W_p(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{K_1 W_1(s) K_2 W_2(s) K_3 W_3(s) K_4 W_4(s)}{1 + K_2 W_2(s) K_3 W_3(s) K_4 W_4(s) K_{z_1} Z_1(s)}. \tag{437}$$

Подставляя в формулу (437) выражения для входящих в нее передаточных функций, получим

$$K_p W_p(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{k_1 k_2 k_3 k_4}{s\left(T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1\right)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}}{1 + \dfrac{k_2 k_3 k_4 k_5 (T_5 s + 1)}{s(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}}. \tag{438}$$



Фиг. 71. Структурная схема системы автоматического регулирования скорости вращения гидротурбин.

Так как $E(s) = -\Gamma(s)$, то можно написать:

$$K_p W_p(s) = -\frac{M(s)}{\Gamma(s)}. \tag{439}$$

Исключая $M(s)$ из выражений (413) и (439), получим

$$\Gamma(s) = \frac{F_0}{s(T_a s + 1)} - \frac{K_p W_p(s)\,\Gamma(s)}{(T_a s + 1)}, \tag{440}$$

откуда

$$\Gamma(s) = \frac{\dfrac{F_0}{s(T_a s + 1)}}{1 + \dfrac{K_p W_p(s)}{T_a s + 1}},$$

и передаточная функция замкнутой системы по отношения к возмущающему воздействию

$$Y(s) = \frac{\Gamma(s)}{F_0} = \frac{\dfrac{1}{s(T_a s + 1)}}{1 + \dfrac{K_p W_p(s)}{T_a s + 1}}, \tag{441}$$

или в развернутой форме

$$Y(s) = \frac{\dfrac{1}{s(T_a s + 1)}}{1 + \dfrac{k_1 k_2 k_3 k_4 (T_4 s + 1)}{(T_a s + 1)\left(T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1\right)[s(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1) + k_2 k_3 k_4 k_5 (T_5 s + 1)]}}. \tag{442}$$

2. ЭЛЕКТРОННЫЙ РЕГУЛЯТОР НАПРЯЖЕНИЯ

Найдем передаточные функции системы регулирования напряжения генератора, схема и принцип действия которой были рассмотрены в главе III (фиг. 32).

Для получения желаемой характеристики компаундирования в схеме используются трансформаторы тока и напряжения. Как и обычно, будем рассматривать в этой системе отклонения переменных от установившихся значений.

Отклонение напряжения от требуемого значения на входе трансформатора чувствительного элемента (см. фиг. 32) при увеличении или уменьшении напряжения сети обозначим через — u_a.

Напряжение на выходе трансформатора будет равно

$$u_1 = k_{T_1} u_a,$$

где k_{T_1} — коэфициент трансформации.

Таким образом, передаточная функция трансформатора имеет вид

$$K_1 W_1(s) = \frac{U_1(s)}{U_a(s)} = k_{T_1}. \tag{443}$$

Обозначив через u_f напряжение, снимаемое с выхода нелинейного моста, получим

$$u_f = k_u k_{дин} u_1,$$

где $k_{дин}$ — динамический коэфициент усиления;
k_u — коэфициент стабилизации, определяемый по формуле[1]

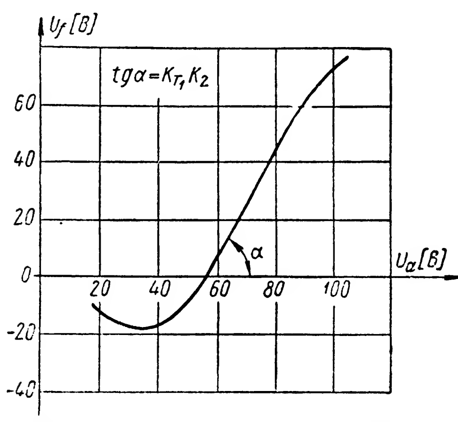
$$k_u = \frac{R_{дин} R}{R_{ст} - R} \; \frac{R_{ст} + R}{R_{дин} + R},$$

где принято

$$R = R_4 = R_5 = R_6;$$

$$k_u = \frac{k_{ст}}{k_{дин}};$$

($k_{ст}$ — статический коэфициент усиления).



Фиг. 72. Статическая характеристика измерительного элемента.

Учитывая, что напряжение u_f с выхода нелинейного моста приложено к контуру, состоящему из сопротивления и емкости, получим

$$T_f \frac{du_f}{dt} + u_f = k u_1,$$

где u_f — напряжение на выходе чувствительного элемента,
$T_f = R_f C_f$ — постоянная времени контура.

Отсюда передаточная функция чувствительного элемента будет

$$K_2 W_2(s) = \frac{U_f(s)}{U(s)} = \frac{k_2}{T_f s + 1}, \tag{444}$$

где

$$k_2 = k_u k_{дин} k_{f1}.$$

Приближенное значение произведения коэфициентов $k_{T_1} \cdot k_2$ может быть определено по статической характеристике измерительного элемента (фиг. 72).

На сетку лампы первого каскада подается напряжение u_{g_1}, представляющее собой разность двух напряжений: напряжения выхода измерительного элемента и напряжения отрицательной обратной связи, т. е.

$$u_{g_1} = u_f - u_c. \tag{445}$$

Обозначив через k_3 коэфициент усиления первого каскада усилителя, определим напряжение на первичной обмотке трансформатора T_2:

$$u_{a_1} = k_3 u_{g_1},$$

[1] И. Г. Гольдреер, Стабилизаторы напряжения, Госэнергоиздат, 1952.

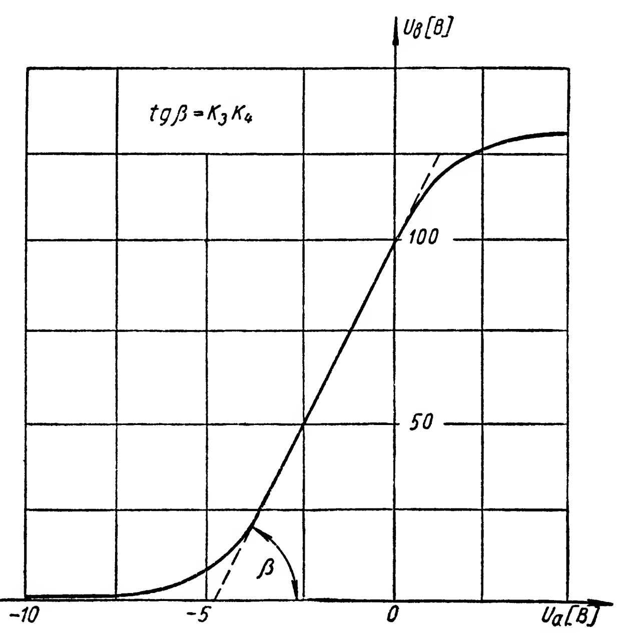
и передаточная функция первого каскада записывается в виде

$$K_3 W_3(s) = \frac{U_{a_1}(s)}{U_{g_1}(s)} = k_3. \qquad (446)$$

Обозначив напряжение на выходе тиратронов $u_в$, найдем значение передаточной функции тиратронного каскада:

$$K_4 W_4(s) = \frac{U_в(s)}{U_{a_1}(s)} = k_4, \qquad (447)$$

где k_4 — коэфициент усиления тиратронного каскада.



Фиг. 73. Статическая характеристика усилителя.

Произведение коэфициентов усиления первого каскада и тиратронного каскада определяются по статической характеристике усилителя (фиг. 73).

Диференциальное уравнение для обмотки возбуждения возбудителя и якоря возбудителя, питающего обмотку возбуждения генератора, запишем в следующем виде

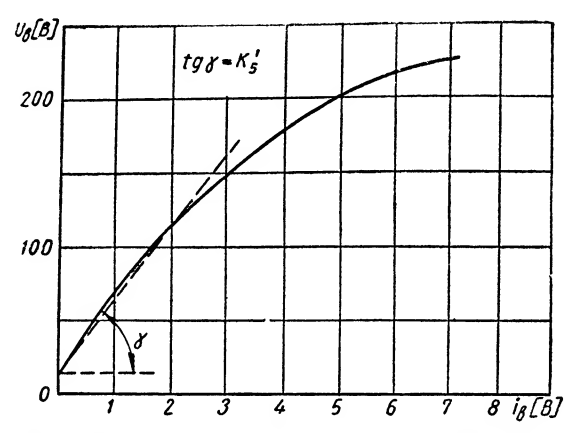
$$T_в T_р \frac{d^2 u_р}{dt^2} + (T_в + T_р) \frac{du_р}{dt} + u_р = k_5 u_в, \qquad (448)$$

где $u_р$ — изменение напряжения на зажимах обмотки полюсов генератора переменного тока;

$T_в$ — постоянная времени обмотки возбуждения возбудителя;

$T_р$ — постоянная времени обмотки возбуждения генератора переменного тока.

Коэфициент k_5 в уравнении (448) можно найти по статической характеристике возбудителя (см. фиг. 74).



Фиг. 74. Статическая характеристика возбудителя.

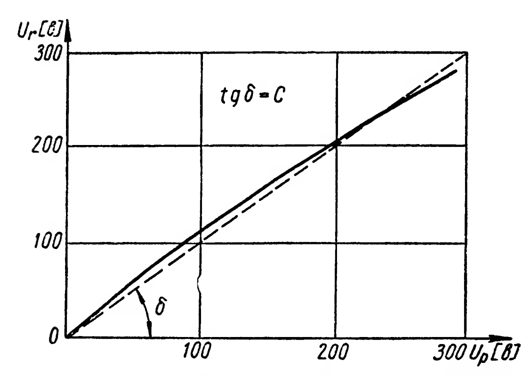
Воспользовавшись преобразованием Лапласа, получим выражение для передаточной функции

$$K_5 W_5(s) = \frac{U_p(s)}{U_в(s)} = \frac{k_5}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1}, \qquad (449)$$

где

$$T_0^2 = T_в T_p;$$

$$2\xi_0 T_0 = T_в + T_p.$$



Фиг. 75. Статическая характеристика генератора.

Передаточная функция генератора переменного тока

$$K_6 W_6(s) = \frac{U_г(s)}{U_p(s)} = \frac{c}{T_г s + 1}\ *, \qquad (450)$$

где c — коэфициент усиления генератора;

$T_г$ — постоянная времени генератора.

Значение коэфициента c определяется по статической характеристике генератора (фиг. 75).

Корректирующее устройство регулятора напряжения состоит из потенциометра R_{13} (см. фиг. 32), позволяющего регулировать напряжение обратной связи, конденсатора C_3 и сопротивления R_{14}.

---

* Представление передаточной функции генератора зависимостью (450) заимствовано из статьи Л. С. Гольдфарба „Анализ устойчивости электронного регулятора напряжения", „Автоматика и телемеханика" № 6, 1948.

Напишем диференциальное уравнение корректирующего устройства в виде

$$u_p\beta = i_c R_{14} + \frac{1}{c_3}\int i_c\, dt,$$

где β — коэфициент обратной связи;

i_c — ток, протекающий по сопротивлению R_{14}.

Или

$$T_c\beta \frac{du_p}{dt} = T_c \frac{du_c}{dt} + u_c,$$

где $u_c = i_c R_{14}$, и соответствующая передаточная функция

$$K_{z_1}Z_1(s) = \frac{U_p(s)}{U_c(s)} = \frac{T_c\beta s}{T_c s + 1}. \tag{451}$$

Итак, передаточные функции элементов системы определяются формулами

$$K_1W_1(s) = k_{T_1};\quad K_4W_4(s) = k_4;$$

$$K_2W_2(s) = \frac{k_2}{T_f s + 1};\quad K_5W_5(s) = \frac{k_5}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1};$$

$$K_3W_3(s) = k_3;\quad K_6W_6(s) = \frac{c}{T_z s + 1};$$

$$K_{z_1}Z_1(s) = \frac{T_c\beta s}{T_c s + 1}.$$

На фиг. 76, *а* изображена структурная схема электронного регулятора напряжения.

Элементы структурной схемы, обведенные на фиг. 76, *а* пунктиром, могут быть заменены одним элементом, имеющим передаточную функцию:

$$K_nW_n(s) = \frac{K_3W_3(s)\,K_4W_4(s)\,K_5W_5(s)}{1 + K_3W_3(s)\,K_4W_4(s)\,K_5W_5(s)\,K_{z_1}Z_1(s)},$$

или в развернутой форме

$$K_nW_n(s) = \frac{\dfrac{k_3k_4k_5}{T_0^2s^2 + 2\xi_0T_0s + 1}}{1 + \dfrac{k_3k_4k_5T_c\beta s}{\left(T_0^2s^2 + 2\xi_0T_0s + 1\right)(T_cs + 1)}}, \tag{452}$$

и структурная схема примет вид, изображенный на фиг. 76, *б*. Из фиг. 76, *б* очевидно, что передаточная функция всей системы в разомкнутом состоянии определится по формуле

$$KW(s) = K_1W_1(s)\,K_2W_2(s)\,K_nW_n(s)\,K_6W_6(s), \tag{453}$$

а передаточная функция замкнутой системы будет

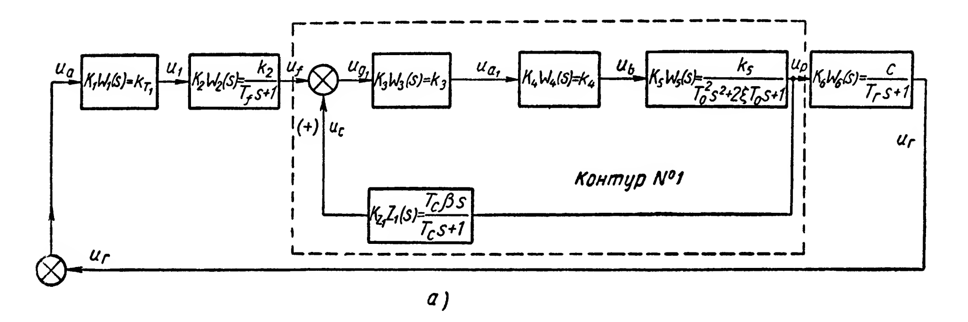
$$\Phi(s) = \frac{K_1W_1(s)\,K_2W_2(s)\,K_nW_n(s)\,K_6W_6(s)}{1 + K_1W_1(s)\,K_2W_2(s)\,K_nW_n(s)\,K_6W_6(s)}, \tag{454}$$

или в развернутой форме

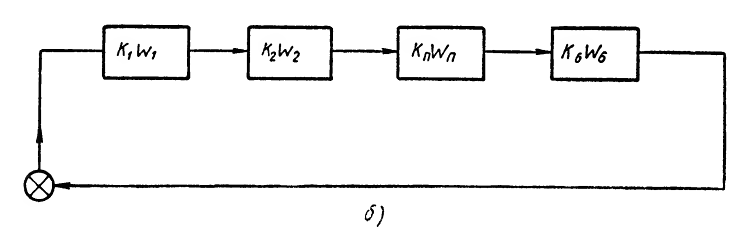
$$KW(s)=\frac{\dfrac{k_{T_1}k_2k_3k_4k_5c}{\left(T_0^2s^2+2\xi_0T_0s+1\right)(T_fs+1)(T_{\imath}s+1)}}{1+\dfrac{k_3k_4k_5T_c\beta s}{\left(T_0^2s^2+2\xi_0T_0s+1\right)(T_cs+1)}} \tag{455}$$

и

$$\Phi(s)=\frac{1}{1+\dfrac{1+\dfrac{k_3k_4k_5T_c\beta s}{\left(T_0^2s^2+2\xi_0T_0s+1\right)(T_cs+1)}}{\dfrac{k_{T_1}k_2k_3k_4k_5c}{\left(T_0^2s^2+2\xi_0T_0s+1\right)(T_fs+1)(T_{\imath}s+1)}}}. \tag{456}$$



а)



б)

Фиг. 76. Структурная схема электронного регулятора напряжения.

3. СЛЕДЯЩАЯ СИСТЕМА КОПИРОВАЛЬНО-ФРЕЗЕРНОГО СТАНКА

Описание следящей системы и ее принципиальная схема приведены в главе III (см. фиг. 35).

Копировальный прибор системы — это измерительное устройство, сравнивающее перемещение пальца прибора $v(t)$ с перемещением фрезы $x(t)$.

Рассогласование $\varepsilon(t)$ представляет собой разность этих двух перемещений:

$$\varepsilon(t)=v(t)-x(t). \tag{457}$$

Имея в виду, что напряжение на выходном трансформаторе $T_у$ (см. фиг 35) пропорционально рассогласованию, получим

$$u_t = k_1 \varepsilon (t),$$

где k_1 — передаточный коэфициент, или иначе тангенс угла наклона статической характеристики копировального прибора (фиг. 77).

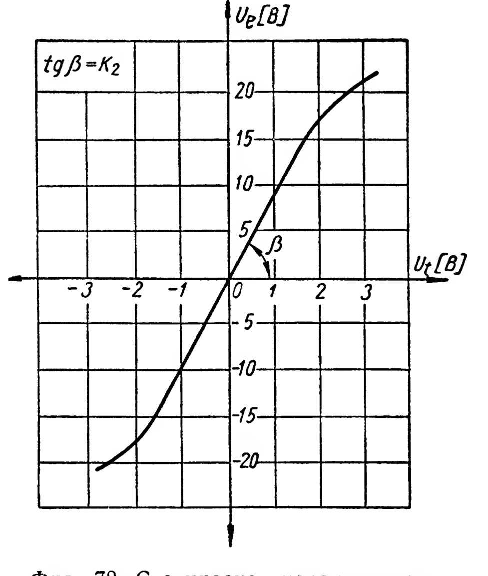
Полагая, что напряжение u_e на выходе первого каскада усилителя пропорционально напряжению u_t, можем написать:

$$u_e = k_1 k_2 \varepsilon (t), \qquad (458)$$

где k_2 — коэфициент усиления первого каскада усилителя.

Коэфициент усиления k_2 можно определить по статической характеристике первого каскада электронного усилителя (фиг. 78).

Фиг. 77. Статическая характеристика копировального прибора.



Фиг. 78. Статическая характеристика первого каскада электронного усилителя.

Таким образом, в качестве передаточной функции $K_1 W_1 (s)$ копировального прибора и первого каскада усилителя может рассматриваться выражение

$$\frac{U_f(s)}{E(s)} = k_t k_2. \qquad (459)$$

Напряжение $u_в$, подаваемое на сетки ламп второго каскада, представляет собой разность двух напряжений, т. е.

$$u_в = u_e - u_c, \qquad (460)$$

где u_c — напряжение отрицательной обратной связи;

u_e — напряжение на зажимах первичной обмотки трансформаторов T_3, T_4.

Напряжения со вторичных обмоток трансформаторов *9* и *10* (см. фиг. 35) поступают на сетки ламп $Л_3$ и $Л_4$.

Трансформаторы T_3 и T_4 — это своеобразный диференцирующий элемент. Обозначив через i_e ток в первичной обмотке трансформаторов T_3 и T_4, напишем его диференциальное уравнение:

$$u_e = L_e \frac{di_e}{dt} + R_e i_e,$$

где R_e, L_e — омическое сопротивление и индуктивность первичной обмотки трансформатора;

Обозначив через u_m — э. д. с., наводимую во вторичной обмотке трансформатора при протекании тока i_e в его первичной обмотке, запишем уравнение в виде

$$u_m = M \frac{di_e}{dt},$$

где M — коэфициент взаимоиндуктивности.

Применяя к последним двум уравнениям преобразование Лапласа и исключая из них $I_e(s)$, получим

$$(T_e s + 1)\, U_m(s) = T_m s U_e(s),$$

где

$$T_m = \frac{M}{R_e} \quad \text{и} \quad T_e = \frac{L_e}{R_e}.$$

Итак, передаточная функция этого элемента будет

$$K_{z_1} W_1(s) = \frac{U_m(s)}{U_e(s)} = \frac{T_m s}{T_e s + 1}. \tag{461}$$

Имея в виду, что трансформаторы *9* и *10* (см. фиг. 35) повышают напряжение на сетках ламп, найдем также передаточную функцию в виде

$$K_3 W_3(s) = \frac{U_g(s)}{U_b(s)} = k_3, \tag{462}$$

где k_3 — коэфициент трансформации трансформатора.

На сетки ламп второго каскада усилителя поступает сумма двух напряжений[1]: от трансформаторов T_3 и T_4 — u_g и от положительной обратной связи — u_m. Итак,

$$u_w = u_g + u_m, \tag{463}$$

где u_w — напряжение на сетках ламп $Л_3$ и $Л_4$.

Передаточная функция второго каскада усилителя определяется по формуле

$$K_4 W_4(s) = \frac{U_f(s)}{U_w(s)} = k_4, \tag{464}$$

где k_4 — коэфициент усиления второго каскада усилителя (фиг. 79).

Теперь определим передаточную функцию для электромашинного усилителя (ЭМУ), нагруженного электродвигателем.

---

[1] Здесь для упрощения задачи исключена составляющая напряжения, пропорциональная интегралу напряжения u_e (см. Т. Н. Соколов, Н. А. Дружинский, Н. Н. Верин, А. М. Разыграев, А. Г. Назаров, Электрокопировально-фрезерный полуавтомат, Машгиз, 1951).

Воспользовавшись обозначениями, данными на фиг. 80, напишем уравнение переходных процессов в управляющей обмотке ЭМУ в виде

$$u_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}, \tag{465}$$

где R_f, L_f — омическое сопротивление и индуктивность управляющей обмотки.

При вращении якоря ЭМУ отдельным двигателем между короткозамкнутыми щетками образуется э. д. с., величина которой определяется уравнением

$$e_k = k_k i_f = (R_q + R_r) i_k + (L_q + L_r) \frac{di_k}{dt}, \tag{466}$$

где R_q, L_q — омическое сопротивление и индуктивность поперечной цепи якоря;

R_r, L_r — омическое сопротивление и индуктивность дополнительной (сериесной) обмотки;

k_k — коэфициент усиления первого каскада ЭМУ.

Неподвижный поперечный поток при вращении якоря создает э. д. с. e_d на продольных щетках:

$$e_a = k_a i_k = \left(R_d + \frac{R_u R_0}{R_0 + R_u} + R_g\right) i_q + \left(L_d + L_u \frac{R_0}{R_0 + R_u} + L_g\right) \frac{di_q}{dt} + k_e \frac{d\theta}{dt}, \tag{467}$$

где R_d, L_d — омическое сопротивление и индуктивность якоря по продольной оси;

R_u, L_u — омическое сопротивление и индуктивность компенсационной обмотки (поток компенсационной обмотки всегда направлен навстречу потоку реакции якоря; при равенстве этих потоков получаем в ЭМУ полную компенсацию, и управление напряжением будет производиться за счет изменения тока i_f);

R_g, L_g — омическое сопротивление и индуктивность якоря электродвигателя;

R_0 — шунтирующее сопротивление, позволяющее получить требуемую степень компенсации;

k_e — постоянная противо э. д. с. электродвигателя привода;

θ — угол поворота вала электродвигателя привода;

k_q — коэфициент усиления второго каскада ЭМУ.

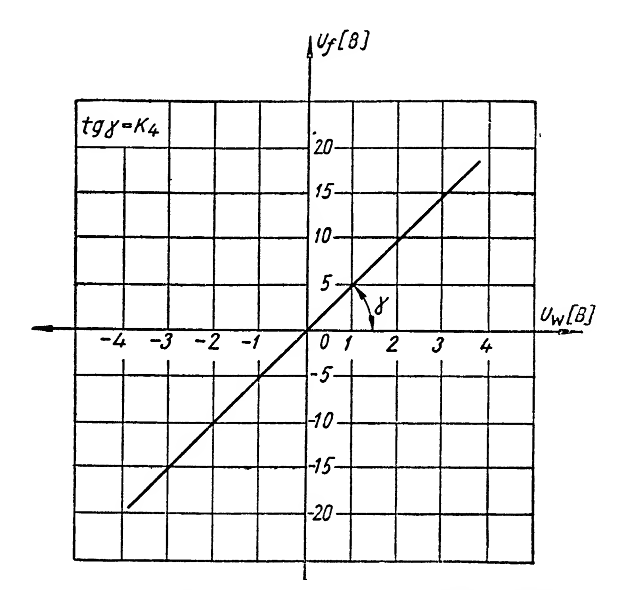
Коэфициенты усиления первого и второго каскадов ЭМУ определяются по статической характеристике (фиг. 81), тангенс угла наклона которой в ее линейной части равен

$$\frac{k_a k_k}{R_k}.$$

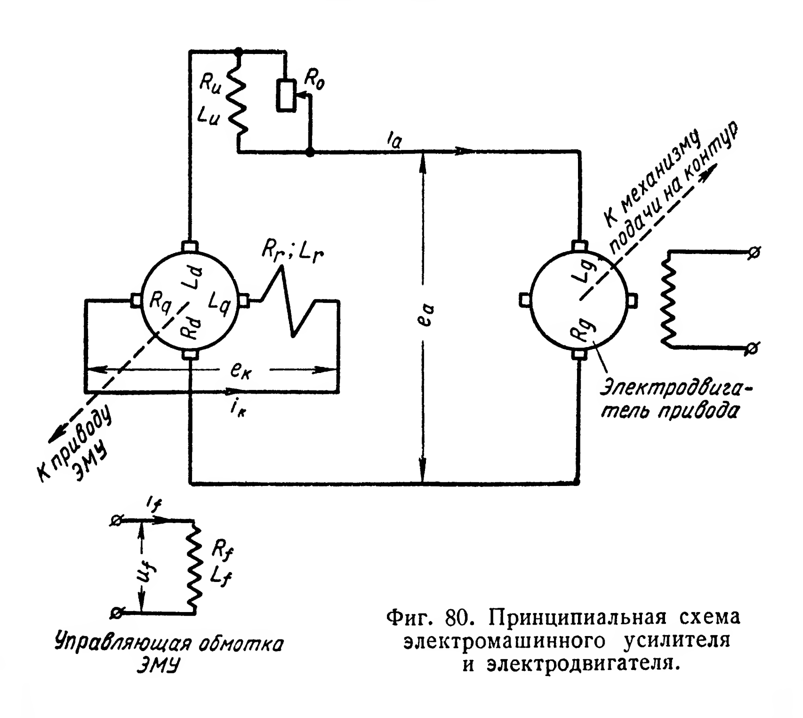
Уравнение движения электропривода записывается в обычной форме:

$$J_n \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_\partial - M_c, \tag{468}$$

где J_n — приведенный к валу вращения ротора двигателя момент инерции механизма подачи;



Фиг. 79. Статическая характеристика второго каскада усилителя.



Фиг. 80. Принципиальная схема электромашинного усилителя и электродвигателя.

$M_д$, M_c — вращающий момент электродвигателя и момент сопротивления

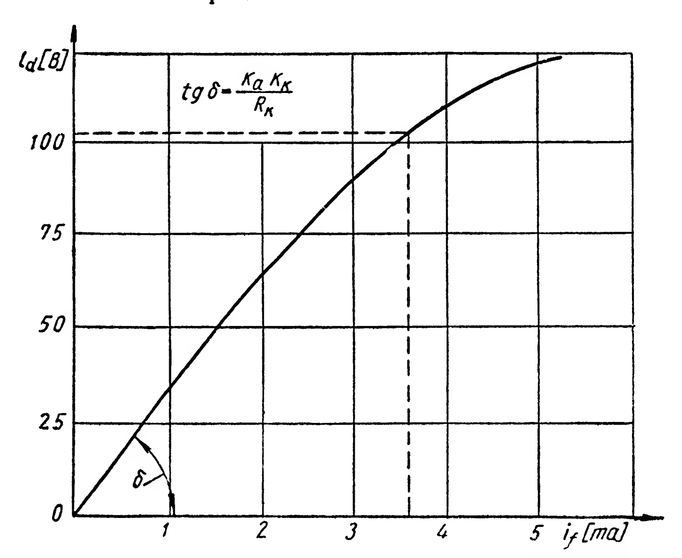
$$M_д = k_м i_a,$$

где $k_м$ — постоянная.

Примем, что момент сопротивления выходного вала пропорционален скорости вращения двигателя:

$$M_c = D\frac{d\theta}{dt}, \qquad (469)$$

где D — постоянный коэфициент.



Фиг. 81. Статическая характеристика электромашинного усилителя.

Тогда уравнение движения электропривода будет

$$J_n\frac{d^2\theta}{dt^2} + D\frac{d\theta}{dt} = k_м i_a. \qquad (470)$$

Применяя к уравнениям (465)—(467) и (470) преобразование Лапласа, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{U_f(s)}{R_f} = (T_f s + 1) I_f(s); \\ &\frac{k_k}{R_k} I_f(s) = (T_k s + 1) I_k(s); \\ &\frac{k_a}{R_a} I_k(s) = (T_a s + 1) I_a(s) + \frac{k_e}{R_a} s\,\Theta(s); \\ &k_м I_a(s) = s\,[J_n s + D]\,\Theta(s), \end{aligned} \qquad (471)$$

где

$$T_f = \frac{L_f}{R_f}; \quad T_k = \frac{L_q + L_r}{R_q + R_r};$$

$$T_a = \frac{L_d + L_u \dfrac{R_0}{R_0 + R_u} + L_g}{R_d + \dfrac{R_0 R_u}{R_0 + R_u} + R_g};$$

$$R_k = R_q + R_r; \quad R_a = R_d + \frac{R_0 R_u}{R_0 + R_u} + R_g.$$

Исключая из двух последних уравнений системы $J_a(s)$, получим

$$I_k(s) = \frac{R_a D + k_e k_м}{k_a k_и} s \left[\frac{J_n T_a}{D + \dfrac{k_e k_м}{R_a}} s^2 + \frac{T_a D + J_n}{D + \dfrac{k_e k_м}{R_a}} s + 1 \right] \Theta(s). \quad (472)$$

Обозначим через

$$T_0^2 = \frac{J_n T_a}{D + \dfrac{k_e k_м}{R_a}};$$

$$2\xi_0 T_0 = \frac{T_a D + J_n}{D + \dfrac{k_e k_м}{R_a}},$$

тогда после подстановки этих обозначений уравнение (472) запишется в виде

$$I_k(s) = \frac{R_a D + k_e k_м}{k_a k_м} s \left(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1 \right) \Theta(s).$$

Исключив из первого и второго уравнений системы (471) значения $I_k(s)$ и $I_f(s)$, получим передаточную функцию для ЭМУ, нагруженного электродвигателем, в виде

$$K' W'(s) = \frac{\Theta(s)}{U_f(s)} = \frac{k}{s(T_f s + 1)(T_k s + 1)\left(T_0^2 s^2 + 2\xi T_0 s + 1\right)}, \quad (473)$$

где

$$k = \frac{k_и k_n k_k}{R_f R_k (R_a D + k_e k_м)}.$$

Уравнение (473) — уравнение четырех последовательно соединенных типовых звеньев (два звена апериодические, одно колебательное и одно интегрирующее):

$$K' W'(s) = K_5 W_5(s) K_6 W_6(s) K_7 W_7(s) K_8 W_8(s),$$

где

$$K_5 W_5(s) = \frac{k_5}{(T_f s + 1)};$$

$$K_6 W_6(s) = \frac{k_6}{(T_k s + 1)};$$

$$K_7 W_7(s) = \frac{k_7}{\left(T_0^2 s^2 + 2\xi T_0 s + 1\right)} \quad \text{и} \quad K_8 W_8(s) = \frac{k_8}{s}.$$

Структурная схема сложного элемента представлена на фиг. 82, *а*. В тех случаях, когда $\frac{J_n}{D_g}$ много больше, чем T_a, значением T_a можно пренебречь, и передаточная функция приводится к виду

$$K''W''(s) = \frac{\Theta(s)}{U_f(s)} = \frac{k}{s(T_f s + 1)(T_k s + 1)(T_{\partial в} s + 1)}, \qquad (474)$$

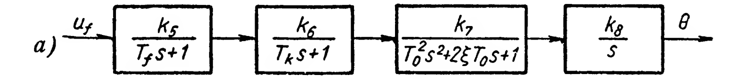
где

$$T_{\partial в} = \frac{J_n}{D + \frac{k_e k_м}{R_a}}.$$

Элемент с передаточной функцией $K''W''(s)$, очевидно, состоит из трех апериодических и одного интегрирующего звеньев (фиг. 82, *б*). Передаточная функция редуктора механизма подачи

$$K_9 W_9(s) = \frac{X(s)}{\Theta(s)} = k_9, \qquad (475)$$

где k_9 — коэфициент, зависящий от передаточного отношения редуктора и шага винта подающего устройства.



б) u_f → $\frac{k_5'}{T_f s+1}$ → $\frac{k_6'}{T_k s+1}$ → $\frac{k_7'}{T_{\partial в} s+1}$ → $\frac{k_8'}{s}$ → θ_9

Фиг. 82. Структурная схема электромагнитного усилителя с электродвигателем:
а — полная; *б* — упрощенная.

Корректирующий контур в цепи обратной связи состоит из сопротивлений R_c и емкости C_c.

Диференциальное уравнение для такого рода обратной связи может быть представлено в виде

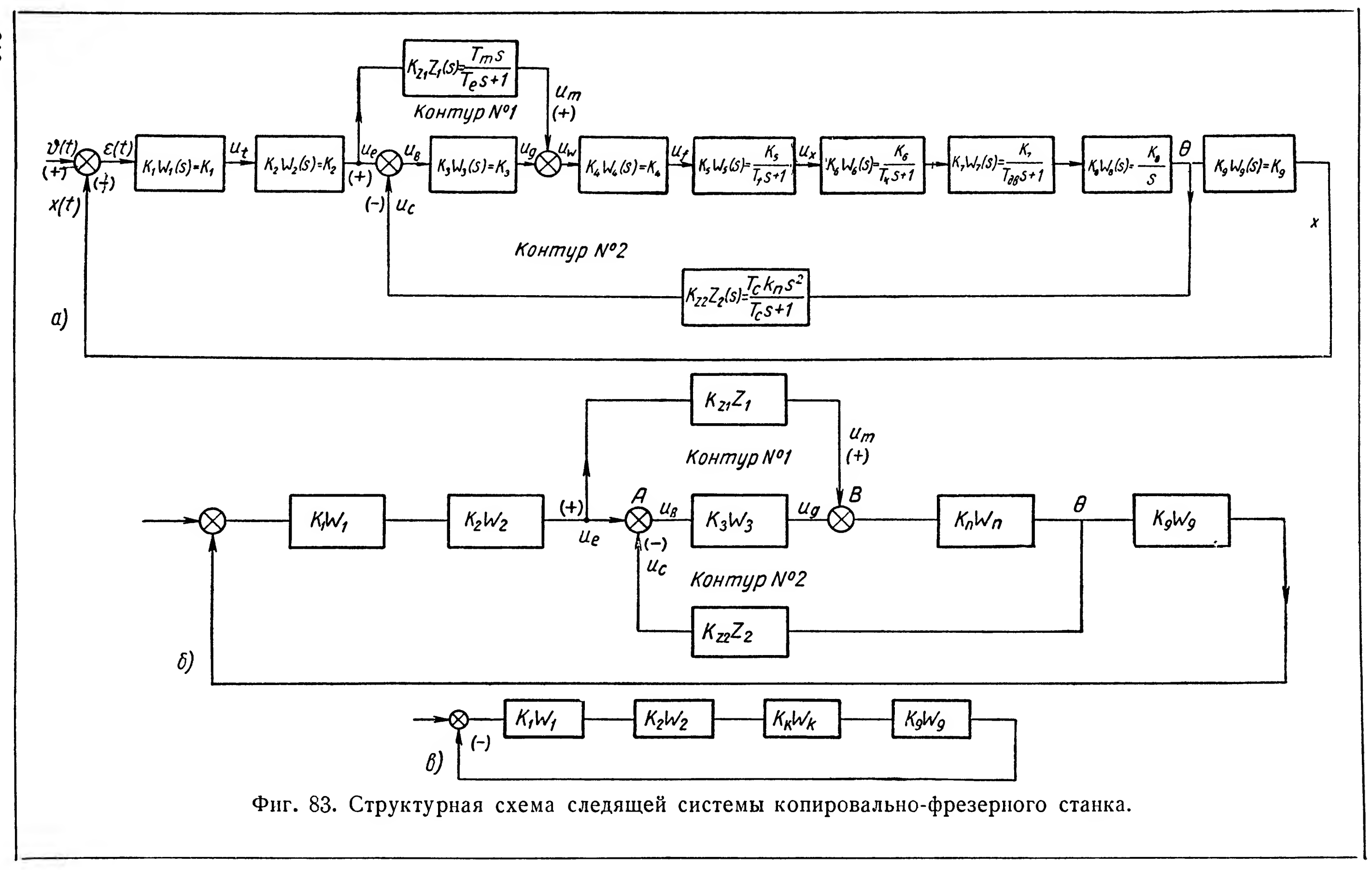
$$T_c \frac{de_a}{dt} = T_c \frac{du_c}{dt} + u_c,$$

но

$$e_a = k_n \frac{d\theta}{dt},$$

поэтому передаточная функция контура обратной связи

$$K_{z_2} Z_2(s) = \frac{U_c(s)}{\Theta(s)} = \frac{T_c k_n s^2}{T_c s + 1}. \qquad (476)$$



Фиг. 83. Структурная схема следящей системы копировально-фрезерного станка.

На фиг. 83 представлена структурная схема системы. Как видно, эта система состоит из трех сравнивающих устройств и 11 типовых звеньев.

Заменив звенья с передаточными функциями $K_4 W_4(s)$; $K_5 W_5(s)$; $K_6 W_6(s)$ и $K_7 W_7(s)$ структурным элементом с передаточной функцией

$$K_n W_n(s) = \frac{k_4 k_5 k_6 k_7 k_8}{s(T_f s + 1)(T_k s + 1)(T_{\partial в} s + 1)}, \tag{477}$$

получим структурную схему, изображенную на фиг. 83, *б*.

Найдем преобразование Лапласа $U_в(s)$ для напряжения на входе трансформатора второго каскада усилителя (сравнивающего звена *A*, фиг. 83, *б*):

$$U_в(s) = U_e(s) - \Theta K_{z_2} Z_2(s) K_n W_n(s). \tag{478}$$

Принимая во внимание, что (фиг. 83, *б*)

$$U_\partial(s) = U_в(s) K_3 W_3(s) \tag{479}$$

и

$$U_m(s) = U_e(s) K_{z_1} Z_1(s), \tag{480}$$

на основании уравнения (463) получим

$$\frac{\Theta(s)}{K_n W_n(s)} = U_в(s) K_3 W_3(s) + U_e(s) K_{z_1} Z_1(s), \tag{481}$$

откуда

$$U_в(s) = \frac{\Theta(s) - U_e(s) K_{z_1} Z_1(s) K_n W_n(s)}{K_3 W_3(s) K_n W_n(s)}. \tag{482}$$

Подставив $U_в(s)$ в формулу (481), получим

$$\Theta(s) - U_e(s) K_{z_1} Z_1(s) K_n W_n(s) = U_e(s) K_3 W_3(s) K_n W_n(s) -$$

$$\Theta(s) K_{z_2} Z_2(s) K_n W_n(s) K_3 W_3(s).$$

Из этого уравнения найдем передаточную функцию части структурной схемы на фиг. 83, *б*, состоящей из контуров № 1 и 2:

$$K_k W_k(s) = \frac{\Theta(s)}{U_e(s)} = \frac{K_3 W_3(s) K_n W_n(s) + K_{z_1} Z_1(s) K_n W_n(s)}{1 + K_n W_n(s) K_3 W_3(s) K_{z_2} Z_2(s)}. \tag{483}$$

Заменив на структурной схеме эти два контура структурным элементом с передаточной функцией $K_k W_k(s)$, получим схему, состоящую из четырех последовательно включенных элементов (фиг. 83, *в*). Тогда передаточная функция разомкнутой системы будет

$$K W(s) = K_1 W_1(s) K_2 W_2(s) K_k W_k(s) K_9 W_9(s), \tag{484}$$

Подставив выражения для передаточных функций в формулу (482), получим

$$KW(s) = \frac{\dfrac{k_1k_2k_3k_4k_5k_6k_7k_8k_9}{s(T_fs+1)(T_ks+1)(T_{\partial в}s+1)}}{1+\dfrac{k_1k_2k_3k_4k_5k_6k_7k_8k_nT_cs}{(T_fs+1)(T_ks+1)(T_{\partial в}s+1)(T_cs+1)}} +$$

$$+\frac{\dfrac{k_1k_2k_3k_4k_5k_6k_7k_8T_m}{(T_cs+1)(T_fs+1)(T_ks+1)(T_{\partial в}s+1)}}{1+\dfrac{k_1k_2k_3k_4k_5k_6k_7k_8k_nT_cs}{(T_fs+1)(T_ks+1)(T_{\partial в}s+1)(T_cs+1)}}. \qquad (485)$$

4. СЛЕДЯЩАЯ СИСТЕМА РАДИОЛОКАЦИОННОЙ СТАНЦИИ

Элементы, входящие в следящую систему радиолокатора (по каналу угла места цели), приведены на упрощенной схеме (см. фиг. 38). Отраженные от цели сигналы принимаются антенной, расположенной в фокусе параболического отражателя. Сигнал $\varepsilon(t)$ с антенны проходит через радиолокационный приемник, поступает на детектирующую лампу, на выходе которой включен фильтр, состоящий из емкости $C_ф$ и сопротивления $R_ф$.

Сигнал ошибки по углу места цели определяется зависимостью

$$\varepsilon(t) = g(t) - x(t),$$

где $g(t)$ — угол места цели;

$x(t)$ — угол места оси вращения антенны.

Напряжение u_1, поступающее на сетку детектора, пропорционально величине ошибки:

$$u_1 = k_1\varepsilon,$$

где k_1 — коэфициент усилия радиоприемника.

Напряжение u_2 с анода детектора поступает на усилитель и после усиления поступает в трансформатор, настроенный с помощью конденсаторов на частоту 30 пер/сек. Запишем уравнение фильтра и усилителя в операторном виде:

$$(T_3s+1)U_2(s) = k_2U_1(s), \qquad (486)$$

где T_3 — постоянная фильтра и диодного детектора;

k_2 — коэфициент усиления усилителя ошибки.

Передаточная функция детектора с фильтром будет [3]

$$K_1W_1(s) = \frac{U_2(s)}{\mathrm{E}(s)} = \frac{k_3}{T_3s+1}, \qquad (487)$$

где $k_3 = k_1k_2$ — коэфициент усиления двух звеньев.

Коммутирующее устройство выполняет функции фазового дискриминатора, причем среднее значение выпрямленного напряжения на выходе

коммутирующего звена равно амплитуде сигнала ошибки. С выхода коммутирующего устройства напряжение u_m поступает на вход сглаживающего фильтра, состоящего из дросселя, сопротивления и емкости.

Диференциальное уравнение для сглаживающего фильтра записывается в виде

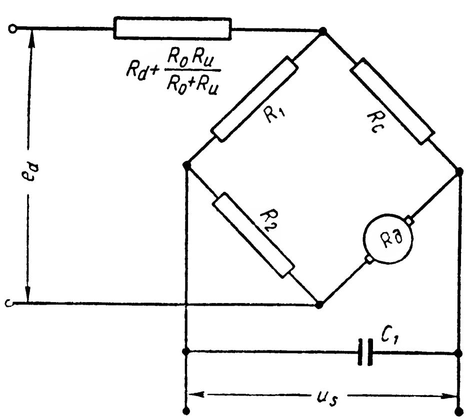
$$R_r \frac{di}{dt} + L_r \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{c_2} = u_m$$

или

$$T_r T_h \frac{du^2_r}{dt^2} + T_r \frac{d^2 u_r}{dt} + u_r = T_r u_m,$$

где

$$T_r = C_r R_r \text{ и } T_h = \frac{L_r}{R_r}.$$



Фиг. 84. Мостовая тахометрическая схема.

Применив к этому уравнению преобразование Лапласа, получим передаточную функцию для сглаживающего фильтра $K_2\,W_2(s)$ в виде

$$K_2 W_2(s) = \frac{U_r(s)}{E_з(s)} = \frac{k_4}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1}, \tag{488}$$

где

$$T_0^2 = T_r T_h;\ \xi_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_r}{T_h}};\ k_4 = T_r.$$

Усилитель постоянного тока питает две включенные навстречу друг другу управляющие обмотки ЭМУ. Анодные токи выходных ламп усилителя протекают по управляющим обмоткам ЭМУ, и поток управляющей обмотки создается разностью этих токов (т. е. $i_f^{\mathrm{I}} - i_f^{\mathrm{II}}$). Передаточная функция ЭМУ и двигателя [см. формулу (474)], имеет вид:

$$K''W''(s) = \frac{\Theta(s)}{U_f(s)} = \frac{k}{s(T_f s + 1)(T_k s + 1)(T_{дв} s + 1)}. \tag{489}$$

Тахометрическая обратная связь применена для стабилизации системы управления.

Напряжение, пропорциональное скорости вращения двигателя, получается с помощью мостовой схемы, причем сам двигатель включен в одно из плеч моста (фиг. 84).

Напряжение $E_d(s)$ определяется по формуле

$$E_d(s) = I_a(s)\left(R_d + \frac{R_u R_0}{R_0 + R_u} + R_c + R_g\right) + k_e \Theta_g(s). \tag{490}$$

Определив значения тока $I_a(s)$ из последнего уравнения системы (471) и подставив его в уравнение (490), получим

$$E_d(s) = s\left[\frac{(J_n s + D_g)}{k_м}\left(R_d + \frac{R_u R_0}{R_u + R_0} + R_c + R_d\right) + k_e\right]\Theta_g(s).$$

Уравнение, связывающее выходное напряжение моста u_s с входным напряженным e_d, имеет вид

$$u_s = e_d \left(\frac{R'_a + R_1}{R'_a + R_1 + R_2} - \frac{R'_a + R_c}{R'_a + R_c + R_g} \right),$$

где

$$R'_a = R_d + \frac{R_u R_0}{R_u + R_0}.$$

Выполнив ряд преобразований, определим уравнение, связывающее напряжение, создаваемое тахометрической обратной связью с углом поворота двигателя:

$$U_s(s) = k_s (T_{\partial в_0} s + 1)\, \Theta_g(s),$$

где

$$k_s = \frac{R_1}{R_1 + R_2} k_e. \tag{491}$$

Для простоты в формуле (491) будем считать, что $D_g = 0$, тогда

$$T_{\partial в 0} = \frac{R_g - \frac{R_2}{R_1} R_c}{R_g + R_c} T_{\partial в}.$$

Электромеханическая постоянная находится по обычной формуле

$$T_{\partial в} = \frac{J_n}{D_g + \frac{k_e k_u}{R_a}}.$$

Конденсатор C_1 (фиг. 84) является емкостной нагрузкой на выходе тахометрического моста. Поэтому передаточная функция тахометрической обратной связи будет

$$K_{z_1} Z_1(s) = \frac{U_s(s)}{\Theta_g(s)} = \frac{k_s s\,(T_{\partial в 0} s + 1)}{T_x s + 1}, \tag{492}$$

где постоянная времени фильтра T_x находится по формуле

$$T_x = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_1.$$

Напряжение с выхода тахометрического моста поступает на корректирующий контур, представляющий собой фильтр верхних частот. Нагрузкой этого фильтра является выходной потенциометр R_z. Потенциометром R_z регулируется величина напряжения обратной связи u_y.

Уравнение фильтра

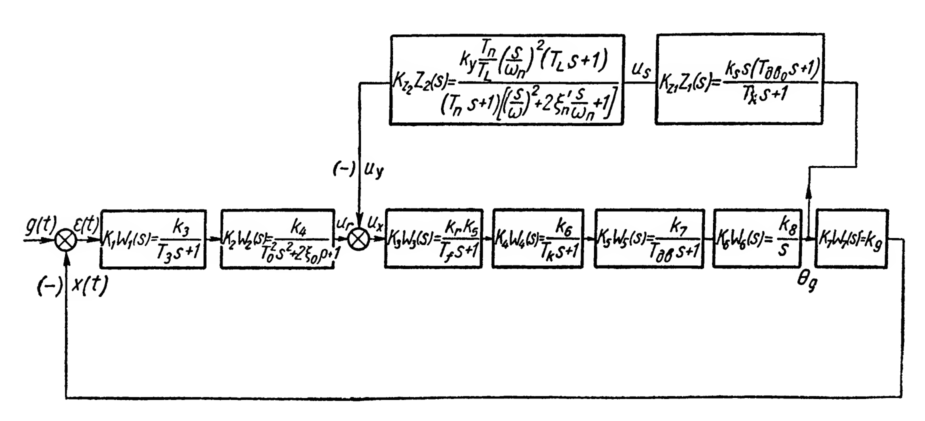
$$R_z C_z R_n C_n s^2 \left(\frac{L_m}{R_n} s + 1 \right) U_s(s) = \left[R_n C_n s \left(R_z C_z s + 1 + \frac{C_z}{C_n} \right) \left(\frac{L_m}{R_n} s + 1 \right) + R_z C_z s + 1 \right] U_y(s). \tag{493}$$

Из этого уравнения найдем выражение для передаточной функции корректирующего контура:

$$K_{z_2} Z_2(s) = \frac{U_y(s)}{U_s(s)} = \frac{\frac{T_n}{T_L}\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 (T_L s + 1)}{(T_n s + 1)\left[\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi_n \frac{s}{\omega_n} + 1\right]}, \tag{494}$$

где $T_L = \frac{L_m}{R_n} T_n$, ω_n и ξ_n находятся путем разложения знаменателя формулы (493) на простые множители.

Напряжение u_y с выхода корректирующего контура поступает на экранные сетки выходных ламп электронного усилителя. Поэтому при



Фиг. 85. Структурная схема следящей системы радиолокационной станции.

изменении тока якоря мотора в цепи отрицательной обратной связи появится противодействующее напряжение, препятствующее начавшемуся нарастанию тока якоря мотора.

Напряжение на управляющих обмотках связано зависимостью

$$u_x = k_r u_r - k_y u_y,$$

где k_r — коэфициент усиления в оконечном каскаде (в цепи управляющая сетка — анод);

k_y — коэфициент усиления в оконечном каскаде (в цепи экранная сетка — анод).

Передаточные функции элементов системы приведены на структурной схеме фиг. 85.

Преобразуем структурную схему, заменив передаточной функцией $K_n W_n(s)$ передаточные функции элементов внутреннего контура, где

$$K_n W_n(s) = \frac{K_3 W_3(s) K_4 W_4(s) K_5 W_5(s) K_6 W_6(s)}{1 + K_3 W_3(s) K_4 W_4(s) K_5 W_5(s) K_6 W_6(s) K_{z_1} Z_1(s) K_{z_2} Z_2(s)}, \tag{495}$$

а передаточная функция разомкнутой системы

$$KW(s) = K_1 W_1(s) K_2 W_2(s) K_n W_n(s) K_7 W_7(s) \tag{496}$$

или в развернутом виде

$$KW(s) =$$

$$= \frac{\dfrac{k_r k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9}{s(T_3 s + 1)(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1)(T_f s + 1)(T_k s + 1)(T_{\partial в} s + 1)}}{1 + \dfrac{k_r k_y k_s k_5 k_6 k_7 k_8 \dfrac{T_n}{T_L}\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)^2 (T_L s+1)(T_{\partial в_0} s+1)}{(T_f s+1)(T_k s+1)(T_{\partial в} s+1)(T_в s+1)(T_x s+1)\left[\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\dfrac{s}{\omega_n} + 1\right]}}. \tag{497}$$

Произведение коэфициентов, стоящих в числителе и знаменателе формулы (497), будем обозначать соответственно через $K_в$ и K_a.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солодовников В. В., Применение операторного метода к исследованию процесса регулирования скорости гидротурбины, „Автоматика и телемеханика“ № 1, 1941.
2. Воронов А. А., Элементы теории автоматического регулирования, Воениздат, 1951.
3. Джеймс Х., Никольс Н., Филипс Р., Теория следящих систем, Издательство ИЛ, 1951.

РАЗДЕЛ II

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Цель настоящего раздела состоит в изложении методов анализа устойчивости систем автоматического регулирования, диференциальные уравнения возмущенного движения которых являются линейными уравнениями с постоянными коэфициентами.

В главе IX, являющейся первой главой настоящего раздела, дается определение понятия устойчивости по Ляпунову и приводятся известные теоремы Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия для устойчивости (неустойчивости) по так называемым уравнениям первого приближения.

Эти теоремы имеют большое принципиальное значение, так как они строго определяют границы применимости излагаемых в последующих главах методов анализа устойчивости, основанных на рассмотрении линейных диференциальных уравнений.

В этой же главе дается краткая характеристика прямого метода Ляпунова анализа устойчивости.

В следующей X главе рассматриваются различные критерии, применяемые в настоящее время при анализе устойчивости линеаризованных систем регулирования.

XI глава посвящена изложению метода выделения областей устойчивости.

В главе XII основное внимание уделено методу анализа устойчивости систем автоматического регулирования, основанному на логарифмических частотных характеристиках. Показано, что этот метод удобен для анализа устойчивости не только одноконтурных, но и многоконтурных систем.

Глава XIII представляет собой краткое изложение вопроса об анализе устойчивости систем с запаздыванием как простейшего класса систем с распределенными параметрами.

Наконец, в последней XIV главе раздела даются примеры анализа устойчивости систем регулирования методом логарифмических частотных характеристик.

ГЛАВА IX

ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ, ПО ЛЯПУНОВУ, И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Одной из основных задач теории автоматического регулирования является изучение протекания процесса регулирования во времени. Оно ведется средствами математического анализа на следующей основе.

Каждой системе автоматического регулирования соответствует вполне определенная система диференциальных уравнений, которая (см. главу IV) может быть приведена к виду

$$\frac{dy_k}{dt} = Y_k(y_1, \ldots, y_n); \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где y_k — переменные, описывающие состояние системы регулирования;
Y_k — известные функции, определенные в некоторой фиксированной области G пространства переменных $y_1, \ldots, y_n$.

В этом пространстве уравнения (1) определяют компоненты Y_k вектора скорости $\bar{v}$ движения некоторой точки M, называемой изображающей точкой. С физической точки зрения уравнения (1) следует рассматривать как математическую форму записи тех физических законов, которым подчиняется система автоматического регулирования.

Свойства и особенности этих законов полностью либо приближенно, но с достаточной точностью отражаются характером функций $Y_k(y_1, \ldots, y_n)$. Область G определения функций $Y_k(y_1, \ldots, y_n)$ является той частью пространства $y_1, \ldots, y_n$, на которую распространяется действие означенных физических законов.

Пусть величины $y_{10}, \ldots, y_{n0}$ обозначают начальные значения переменных $y_1, \ldots, y_n$. Они однозначно определяют исходное состояние системы регулирования при $t = t_0$. Каждой системе начальных значений $y_{10}, \ldots, y_{n0}$ соответствует решение

$$y_k = y_k(y_{10}, \ldots, y_{n0}, t); \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

уравнений (1). Предполагается, что это решение определено для любых значений времени $t > t_0$ и оно является единственным.

Решение (2) описывает какое-либо движение системы автоматического регулирования, определяемое ее исходным состоянием, и предположение о том, что такое движение единственно, отвечает существу большинства физических законов.

Процессы, установившиеся в системе автоматического регулирования, описываются так называемыми очевидными решениями уравнений (1).

Эти решения

$$y_1 = y_1^*, \ldots, y_n = y_n^* \tag{3}$$

представляют собой корни уравнений

$$Y_k(y_1, \ldots, y_n) = 0; \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Они входят в семейство решений (2) и определяются начальными значениями $y_{k0} = y_k^*$.

Обычно рассматриваются такие случаи, когда имеется только одно решение (3), соответствующее вполне определенному и теоретически мыслимому установившемуся процессу в системе регулирования.

Одним из основных вопросов теории автоматического регулирования является вопрос о том, соответствует ли очевидное решение (3) какому-либо физически наблюдаемому и действительно существующему установившемуся процессу в системе автоматического регулирования. Вопрос может быть разрешен при исследовании этого решения на устойчивость.

Как известно из опыта, физически наблюдаемым и действительно существующим установившимся процессам однозначно соответствуют так называемые устойчивые решения (3), а физически ненаблюдаемым процессам — неустойчивые решения (3). Следовательно, в математической трактовке вопрос о соответствии решения (3) физически наблюдаемому и установившемуся процессу в системе автоматического регулирования — это вопрос об устойчивости или неустойчивости решения (3).

В дальнейшем удобно иметь дело с уравнениями, полученными из уравнения (1) путем преобразования переменных по формуле

$$y_k = y_k^* + x_k; \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

По терминологии Ляпунова эти уравнения называются уравнениями возмущенного движения и имеют вид

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, \ldots, x_n); \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

где обозначено

$$X_k(x_1, \ldots, x_n) = Y_k\left(x_1 + y_1^*, \ldots, x_n + y_n^*\right); \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Формула (5) определяет преобразование переноса начала координат в точку с координатами y_k^*, вследствие чего очевидному решению (3) уравнений (1) соответствует очевидное решение

$$x_1^* = 0, \ldots, x_n^* = 0 \tag{8}$$

уравнений (6). По терминологии Ляпунова это решение следует называть невозмущенным движением системы.

Пусть при $t = t_0$ переменные x_k принимают какие-либо свои начальные значения x_{k0}, из которых по крайней мере одно не равно нулю;

эти значения называются возмущениями. Каждой заданной системе таких возмущений отвечает однозначное и непрерывное решение

$$x_k = x_k(x_{10}, \ldots, x_{n0}t) \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

уравнений (6); это решение называется возмущенным движением системы автоматического регулирования.

Если бы мы знали все решения (9), то мы знали бы все возмущенные движения системы автоматического регулирования. Но легко видеть, что в большинстве случаев отыскание решений (9) представляет задачу непреодолимой трудности, благодаря чему мы лишены возможности получить руководящее начало для рационального выбора параметров регулятора. В таком случае нужен общий подход к чисто качественному, одновременному обозрению всего семейства возмущенных движений (9), который позволил бы без интегрирования судить об их специфических тенденциях при $t \to \infty$ сходиться к невозмущенному движению (8) независимо от того, какими частными значениями возмущений x_{k0} движение (9) определяется.

Учение Ляпунова об устойчивости движения позволяет судить об интересующих нас свойствах возмущенных движений, не прибегая к интегрированию уравнений (6), и поэтому указывает путь к рациональному расчету регуляторов.

Если окажется, что при определенной настройке регулятора решение (8) будет устойчивым, то это будет означать, что регулируемая система сама, без постороннего вмешательства, изберет тот режим невозмущенного движения, который соответствует этому решению. Если же решение (8) будет неустойчивым, то такого установившегося режима физически осуществить нельзя, ибо при сколь угодно малых возмущениях x_{k0} система автоматического регулирования будет удаляться от него неограниченно.

Таким образом, определение устойчивости движения уравнения (8), данное Ляпуновым, получает большое прикладное значение при изучении важных вопросов современной техники.

Смысл этого определения применительно к задачам теории автоматического регулирования таков.

Будем наблюдать и сравнивать в каждый момент времени $t > t_0$ любое возмущенное движение (9) с невозмущенным движением (8), изучая разности

$$x_k - x_k^* = y_k - y_k^* = x_k; \quad (k = 1, \ldots, n),$$

начальное значение которых таково:

$$x_k(0) - x_k^* = y_k(0) - y_k^* = x_{k0}; \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Тогда можно дать следующее определение.

Невозмущенное движение (8) называется устойчивым по отношению к величинам x_k, если при всяком заданном положительном числе ε, как бы мало оно ни было, найдется другое такое положительное число $\eta(\varepsilon)$, что для всех возмущений x_{k0}, удовлетворяющих условиям

$$|x_{k0}| \leqslant \eta, \quad (h = 1, \ldots, n), \tag{10}$$

возмущенное движение в уравнении (9) как следствие будет удовлетворять неравенствам

$$|x_k(t)| < \varepsilon; \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

при любом $t > t_0$.

Если же при любом сколь угодно малом заданном $\varepsilon > 0$ невозможно найти такое число $\eta(\varepsilon)$, при котором [для любых возмущений x_{k0}, удовлетворяющих условиям (10), хотя бы одно неравенство (11) нарушается, то невозмущенное движение (8) называется неустойчивым.

Этому определению можно придать наглядный геометрический характер, если иметь в виду, что все многообразие возмущенных движений в уравнении (9) возникает вблизи начала координат, определяемого равенствами (8).

Невозмущенное движение в уравнении (8) называется устойчивым по отношению к величинам x_k, если при всяком заданном и положительном числе A, как бы оно ни было мало, возможно выбрать такое число $\lambda(A)$, что для всех возмущений x_{k0}, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{n} x_{k0}^2 \leqslant \lambda, \tag{10'}$$

возмущенное движение (9) как следствие будет удовлетворять неравенству

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t) < A \tag{11'}$$

при всяком $t > 0$, в противном же случае невозмущенное движение называется неустойчивым. Множество точек, удовлетворяющих условию (11'), назовем A-окрестностью, а множество точек, удовлетворяющих неравенству (10'), λ-окрестностью очевидного решения (8).

Неравенство (10') ограничивает совокупность начальных возмущений системы автоматического регулирования; неравенство (11') ограничивает характер протекания возмущенного движения системы. Во всех тех случаях, когда эти неравенства соблюдаются, говорят, что возмущенное движение системы регулирования сходится к движению невозмущенному, что и выражает собой физический смысл устойчивости невозмущенного движения, по Ляпунову.

Однако характер определенной таким образом сходимости возмущенных движений к невозмущенному движению (или, что то же самое, характер устойчивости невозмущенного движения) может быть двояким.

Так, если A — любое выбранное и фиксированное число, то, изучая устойчивость интересующих нас решений, мы можем, вообще говоря, утверждать, что возмущенные движения способны пребывать в A-окрестности невозмущенного движения.

Во-вторых, дальнейшее выяснение деталей возмущенного движения, связанное с возможностью изменять число A и, в частности, выбирать его сколь угодно малым, позволяет обнаружить либо асимптотический характер возмущенного движения, при котором $\lim x_k(t) = 0$, $t \to \infty$, либо его стремление оставаться в A-окрестности более узкой, чем та, которая была определена в самом начале.

Выражение

$$R^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2(t)$$

означает квадрат расстояния изображающей точки M от начала координат.

В случае асимптотического характера возмущенных движений точка M непрерывно приближается к началу координат, и функция R^2 убывает. Таким образом, мы имеем $\frac{dR^2}{dt} < 0$ при любом $t > t_0$. Тогда, каково бы ни было сколь угодно малое число A, всегда найдется (в силу условия $\frac{dR^2}{dt} < 0$) такое — λ, что неравенства (10′) и (11′) выполняются. В этом случае говорят, что имеет место асимптотическая устойчивость возмущенного движения.

Может оказаться, что каково бы ни было фиксированное число A, всегда можно выбрать такое число λ, что неравенства (10′) и (11′) удовлетворяются при любых x_{k0}, принадлежащих G, тогда говорят *об устойчивости невозмущенного движения в большом*. Если же выполнение неравенств (10′) и (11′) требует ограничения возмущений x_{k0} их достаточно малыми значениями, то говорят *об устойчивости в малом.*

В некоторых весьма важных случаях работы систем требуется так выбирать параметры регулятора, чтобы исследуемый установившийся режим работы системы обладал безусловной неустойчивостью, т. е. был бы физически неосуществимым.

Учение Ляпунова об устойчивости движения позволяет решить и этот весьма сложный и важный вопрос теории автоматического регулирования с помощью известных теорем Ляпунова и Четаева о неустойчивости.

В качестве примера, иллюстрирующего вышесказанное, рассмотрим задачу о возмущенных движениях простой системы автоматического регулирования так называемого нейтрального самолета, управляемого автопилотом [1]. Уравнения движения ее таковы:

$$\ddot{\psi} + M\dot{\psi} + N\eta = K;$$
$$\dot{\eta} = \varphi(\sigma); \quad \sigma = a\psi + E\dot{\psi} + G^2\ddot{\psi} - \frac{1}{l}\eta, \tag{12}$$

где ψ — координата объекта регулирования;
η — координата регулирующего органа;
M, N, K — положительные постоянные;
a, E, G, l — постоянные регулятора.
$\Phi(\sigma)$ — заданная функция аргумента σ, обладающая свойством $f(0) = 0$; $\sigma\Phi(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$.

Обозначив $\psi = y_1$, $\dot{\psi} = y_2$, $\eta = y_3$, получим исходные уравнения в нормальной форме

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2; \qquad \frac{dy_2}{dt} = -My_2 - Ny_3 + K; \qquad \frac{dy_3}{dt} = \Phi(\sigma);$$
$$\sigma = ay_1 + (E - MG^2)\,y_2 - \left(\frac{1}{l} + NG^2\right)y_3 + KG^2.$$

[1] Задача впервые рассматривалась Б. В. Булгаковым, ДАН СССР № 9, т. XXXVII, 1942.

Их очевидное решение определяется уравнениями

$$y_2 = 0;$$
$$My_2 + Ny_3 = 0;$$
$$ay_1 + (E - MG^2)\,y_2 - \left(\frac{1}{l} + NG^2\right) y_3 + KG^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$y_1^* = -\frac{KG^2}{a} + \left(\frac{1}{l} + NG^2\right)\frac{K}{N}; \quad y_2^* = 0; \quad y_3^* = \frac{K}{N}.$$

Задача состоит в таком выборе постоянных регулятора, при которых полученное решение обладало бы устойчивостью по Ляпунову.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПО УРАВНЕНИЯМ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

В большинстве задач теории автоматического регулирования функции $X_k(x_1, \ldots, x_n)$ допускают разложение в степенные ряды, сходящиеся в некоторой H-окрестности начала координат (8):

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 < H,$$

если постоянная $H > 0$ достаточно мала. В этих случаях уравнениям (6) всегда можно придать вид

$$\frac{dx_k}{dt} = a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n + F_k(x_1, \ldots, x_n); \; (k = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

где $a_{ks}\,(k,\ s = 1, \ldots, n)$ — постоянные линейной части разложения, а функции F_k не содержат членов ниже второго порядка малости.

В практике распространено стремление судить об устойчивости решения (8), рассматривая лишь уравнения так называемого первого приближения

$$\frac{dx_k}{dt} = a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n; \; (k = 1, \ldots, n) \tag{14}$$

вместо уравнений (13).

Так как справедливость замены уравнений (13) уравнениями (14) заранее не ясна, возникла задача указать все случаи исследования уравнений (13), в которых устойчивость (неустойчивость) решения (8) вытекает из рассмотрения уравнений первого приближения (14). Эту исключительно важную и принципиальную для теории регулирования задачу впервые разрешил Ляпунов.

Он показал, что все случаи исследования уравнений (14) следует разделять на две категории: категорию некритических и категорию критических случаев.

К первой из них он относит случаи, в которых вопрос об устойчивости (неустойчивости) невозмущенного движения однозначно разрешается на основании исследования уравнений первого приближения (14).

Чтобы эти случаи обнаружить, следует составить характеристическое уравнение

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (15)$$

и исследовать его корни $\lambda_k (k = 1, \ldots, n)$.

Ляпунов доказал две следующие основные теоремы, позволяющие исследовать все случаи первой категории.

Теорема первая. Если вещественные части всех корней λ_k характеристического уравнения (15) первого приближения отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от членов разложения выше первого порядка малости.

Теорема вторая. Если среди корней λ_k характеристического уравнения (15) первого приближения найдется по меньшей мере один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво независимо от членов разложения выше первого порядка малости.

Все критические случаи имеют место лишь тогда, когда среди всех корней λ_k уравнения (15) имеется некоторая группа корней, вещественная часть которых равна нулю, тогда как остальная группа корней имеет вещественную часть отрицательную. Во всех этих критических случаях вопрос об устойчивости невозмущенного движения (8) не может быть разрешен на основании исследования уравнений первого приближения.

Как показал Ляпунов, в критических случаях устойчивость (неустойчивость) невозмущенного движения определяется видом нелинейных функций F_k, поэтому во всех этих случаях требуется рассматривать уравнения (13) в их исходном виде.

Следует иметь в виду, что исследование критических случаев представляет особенно большой интерес для решения целого ряда важных прикладных задач, к которым, в частности, относится задача об устойчивости продольного движения самолета.

Методы решения задачи об устойчивости невозмущенного движения были развиты самим Ляпуновым, а также Н. Г. Четаевым, И. Г. Малкиным, Г. В. Каменковым и др.

Важное приложение к динамическим системам и к системам автоматического регулирования учения Ляпунова об устойчивости в критических случаях дали Н. Н. Баутин и А. И. Лурье. Они показали, что вопрос об устойчивости регулируемых систем в критических случаях связан с определением опасных и безопасных участков границы области устойчивости системы.

Из предыдущего ясно, что для решения задачи об устойчивости движения важное значение приобретают теоремы, позволяющие выяснить необходимые и достаточные условия, при выполнении которых вещественные части всех корней характеристического уравнения (15) отрицательны.

Такого рода теоремы рассмотрены в следующей главе, мы же вкратце изложим другой способ решения задачи об устойчивости, получившей название *прямого метода Ляпунова.*

3. О ПРЯМОМ МЕТОДЕ ЛЯПУНОВА

Прямой метод Ляпунова изучения устойчивости сводится к построению таких функций V переменных $x_1, \ldots, x_n$, полные производные которых по времени, вычисленные согласно уравнениям (6), обладают некоторыми специфическими для устойчивости свойствами.

Каждая V-функция определена в области G заданной неравенством

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 < L,$$

где L — некоторая постоянная.

Предполагается, что L может принимать любые положительные значения, тогда область G' будет содержаться в области G, если L достаточно мало, или будет содержать в себе область G, если L достаточно велико, либо совпадать с областью G.

Всякую функцию V назовем знакопостоянной, если она, кроме нулевых значений, принимает всюду в G' только значения одного знака.

Всякую знакопостоянную функцию, принимающую нулевое значение только в начале координат, назовем знакоопределенной и, желая обратить внимание на ее знак, определенно положительной или определенно отрицательной.

Так, например, из двух функций

$$V_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2; \quad V_2 = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2$$

функция V_1 — знакоопределенная, тогда как функция V_2 — только знакопостоянна.

Если постоянная L достаточно мала, то уравнение $V = C$, где C — постоянная для всякой знакоопределенной функции, представляет собой однопараметрическое семейство замкнутых поверхностей. При уменьшении параметра C поверхности стягиваются к началу координат, а в пределе при $C = 0$ превращаются в точку — начало координат. Эти поверхности пересекают все пути, идущие из начала координат в бесконечность.

Если же постоянная L достаточно велика, то поверхности $v = c$ могут быть и не замкнутыми. Действительно, например, знакоопределенная функция

$$v = x_1^2 + \frac{x_2^2}{1 + x_2^2}$$

определяет семейство замкнутых кривых $v = c$ лишь при $c \leqslant 1$; при каждом $c > 1$ кривая $v = c$ состоит из двух ветвей, не имеющих общих точек (фиг. 1). Следовательно, данная v-функция может служить функцией Ляпунова лишь для такого исследования устойчивости, при котором возмущения x_1, x_2 ограничены условием

$$x_{10}^2 + \frac{x_{20}^2}{1 + x_{20}^2} < 1,$$

т. е. когда движение начинается с точки M_1 (фиг. 1). Как показали Е. А. Барбашин и Н. Н. Красовский, для получения замкнутых

поверхностей во всей области G' знакоопределенные v-функции должны обладать дополнительным свойством:

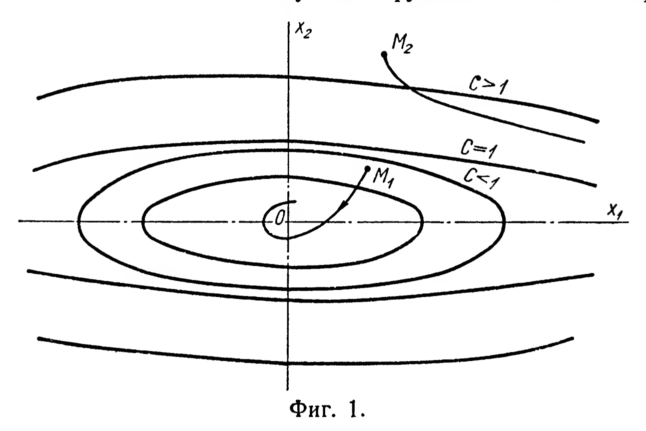
$$v(x_1 \ldots x_n) > M$$

при $\sum_k x_k^2 > L$, где M — любое положительное число. Это свойство существенно при исследовании устойчивости.

Наряду с функциями V будем рассматривать их полные производные по времени, вычисленные согласно уравнениям возмущенного движения (6):

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} X_k (x_1, \ldots, x_n).$$

Ляпуновым доказаны две следующие фундаментальные теоремы.



Фиг. 1.

Теорема первая. Если диференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию V, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений была бы знакопостоянной функцией противоположного знака с V или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Теорема вторая. Если диференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию V, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений была бы функцией знакоопределенной противоположного знака с V, то возмущенное движение устойчиво асимптотически. Следовательно, в данном случае возмущенное движение будет при $t \to \infty$ сходиться к движению невозмущенному, причем

$$\lim_{t \to \infty} x_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Функции V, удовлетворяющие условиям этих теорем, называются функциями Ляпунова.

Для того чтобы пояснить прямой метод Ляпунова, вернемся к нашему примеру.

Пользуясь формулами (5) найдем:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -Mx_2 - Nx_3;$$

$$\frac{dx_3}{dt} = h\left[ax_1 + px_2 - \frac{1}{i}x_3\right],$$

где

$$v = E - MG^2; \qquad i = \frac{l}{1 + lNG^2}.$$

Исследуем устойчивость очевидного решения

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 0.$$

Наиболее простая, знакоопределенная, всюду положительная функция данной задачи имеет вид.

$$V = A\left(\frac{M}{N}x_2 + x_3\right)^2 + Bx_3^2 + C\int_0^\sigma \Phi(\sigma)\,d\sigma,$$

где A, B, C — положительные постоянные, а через σ обозначена ради сокращения записей известная линейная функция переменных x_1, x_2, x_3 [см. последнюю формулу (12)].

Полная производная функции V имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{2AM}{N^2}(Mx_2 + Nx_3)^2 - \frac{C}{i}\Phi^2(\sigma) + \left[\frac{2AM}{N} + aC - pMC\right]x_2\Phi(\sigma) + \\ + [2A + 2B - pNC]\,x_3\Phi(\sigma).$$

Оценивая знак $\dot{V}$, можно получить различные формы достаточных критериев устойчивости очевидного решения. В данном случае, требуя соблюдения соотношений

$$\frac{2AM}{N} + (a - pM)C = 0; \; 2A + 2B = pNC; \; i > 0, \qquad (16)$$

находим

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{2AM}{N^2}\left(\frac{M}{N}x_2 + x_3\right)^2 - \frac{C}{i}\Phi^2(\sigma).$$

Легко видеть, что при соблюдении условий (16) $\dot{V}$ — всюду знакопостоянная функция знака, противоположного V, следовательно, по первой теореме Ляпунова невозмущенное решение устойчиво.

Отметим, что эта устойчивость не связана какими-либо ограничениями относительно величин возмущений, поэтому условия (16) дают достаточный критерий устойчивости в большом. Обратимся к ним. Их можно рассматривать как уравнения, содержащие неизвестные A, B, C. Уравнения должны разрешаться при положительных значениях

неизвестных. Пусть C — произвольная положительная постоянная. Находим

$$A = \frac{N}{2M}(pM - a)\,C;\quad B = \frac{aN}{2M}C$$

и для данной задачи получаем следующую форму достаточного критерия устойчивости в большом:

$$pM > a;\ a > 0;\ i > 0.$$

Раскрывая истинное значение p, i, находим окончательно

$$a > 0;\ EM > a + M^2G^2;\ 1 + lNG^2 > 0;\ l > 0.$$

Итак, при любых значениях постоянных регулятора, удовлетворяющих приведенным неравенствам, рассматриваемое невозмущенное движение устойчиво в большом. Следовательно, интересующий нас в системе регулирования установившийся режим физически осуществим, каковы бы ни были возмущения x_{10}, x_{20}, x_{30}, приложенные к системе.

Трудность применения прямого метода Ляпунова к решению прикладных задач связана с отсутствием широко разработанных приемов построения функций Ляпунова в тех или иных частных случаях. Однако если задача о построении функций Ляпунова для какого-либо класса систем решена, то прямой метод Ляпунова можно рассматривать как наиболее эффективный метод исследования устойчивости. Его особенная ценность проявляется в тех случаях, когда интересуются исследованием устойчивости в большом, т. е. при любых конечных возмущениях. Кроме того, этот метод может применяться к изучению устойчивости тех систем регулирования, которые содержат существенно нелинейные и неаналитические (разрывные) характеристики. Во всех этих случаях возможность применения метода первого приближения исключена.

Если какая-либо задача об устойчивости в теории регулирования может быть решена прямым методом, то это решение не будет однозначным. Действительно, функции Ляпунова определены столь общими свойствами, что их может быть построено бесчисленное множество. Следовательно условия устойчивости, к которым приводит прямой метод, являются условиями достаточными и их нарушение еще не будет означать неустойчивости системы. Последнее может иметь для нас двоякий смысл. Дело в том, что свобода выбора функций Ляпунова позволяет строить критерии устойчивости систем регулирования, в которых некоторые нелинейные элементы не могут быть точно охарактеризованы. К этим элементам принадлежит, например, гидравлический сервомотор. Любой другой известный метод исследования устойчивости не дает возможности строго решить задачу об устойчивости в большом в этом случае. Однако всегда при этом следует помнить, что полученное решение может оказаться неконструктивным, т. е. таким, которое предъявляет чрезмерно высокие требования к параметрам регулятора, реализовать которые практически нельзя.

Вопрос о конструктивности решений задачи, доставляемых прямым методом, в каждом частном случае следует подвергать особому рассмотрению.

4. О ПРИМЕНЕНИИ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

а) Постановка задачи

Прямой метод стал применяться в теории регулирования с момента опубликования небольшой заметки А. И. Лурье и В. Н. Постникова о решении одной частной задачи. Позднее А. И. Лурье развил излагаемый ниже алгорифм построения функции Ляпунова, разрешающей задачу устойчивости для одного класса регулируемых систем. Эти исследования были затем продолжены и развиты рядом советских ученых.

Итак, рассмотрим систему регулирования, возмущенное движение которой описывается уравнениями

$$\dot{\eta}_k = \sum_{k=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + \eta_k\xi \quad (k = 1, \ldots, n);$$

$$\dot{\xi} = \Phi(\sigma), \quad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha\eta_\alpha - \xi, \tag{17}$$

где $b_{k\alpha}$ — постоянные;

η_α — координаты объекта регулирования;

ξ — координата регулирующего органа;

η_k — постоянные регулирующего органа;

p_α — постоянные регулятора;

σ — управляющий сигнал, формируемый измерительными органами регулятора, которые предполагаются идеальными.

Функция $\Phi(\sigma)$ описывает скорость перестановки регулирующего органа из одного положения в другое, в соответствии со значением управляющего сигнала σ. Это — однозначная, ограниченная функция, обладающая следующими свойствами: $\Phi(\sigma) = 0$ при $\sigma = 0$, $\sigma\Phi(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$.

Условимся, что такие функции образуют класс A функций.

В некоторых случаях, оговоренных особо, будет идти речь о таких функциях $\Phi(\sigma)$, которые в дополнение к сказанному обладают следующими свойствами: $\left[\frac{d\Phi}{d\sigma}\right]_{\sigma=0} \geqslant h > 0$, $\sigma\Phi(\sigma) > 0$, $\sigma \neq 0$, $\Phi(\sigma) = \Phi(\sigma) - h\sigma$.

Условимся, что эти функции образуют подкласс A' функций $\Phi(\sigma)$ в классе A.

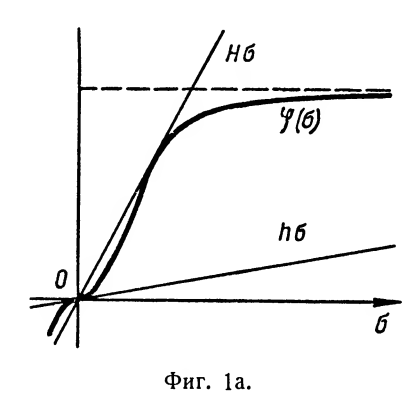
Выделение подкласса A' преследует цель среди всевозможных исполнительных органов, характеризуемых функциями класса A, выделить те, которые обладают значительной быстротой реагирования на поступающие сигналы σ. Так, если h — фиксированное число, то приведенные условия означают, что модуль скорости перекладки регулирующего органа всегда больше величины h.

Для функций подкласса A' будем рассматривать и другое положение $H\sigma$ луча, ограничивающего кривую $\Phi(\sigma)$ сверху при $\sigma > 0$. Все функции подкласса A' будут изображаться кривыми, расположенными между лучами $y = h\sigma$, $y = H\sigma$, $H > h$, где H, h — фиксированные числа (фиг. 1а).

Если окажется, что функция $\Phi(\sigma)$ имеет какое-либо пересечение с этими лучами при $\sigma=\sigma_\gamma$, то речь будет идти о диапазоне регулирования системы по σ, равном $2|\sigma_\gamma|$.

К функциям подкласса A' следует отнести также Z-образную функцию $\Phi(\sigma)=Q\operatorname{sign}\sigma$, для которой принимается $H=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$.

В частном и предельном случае может оказаться, что для некоторых Z-образных функций $Q=\infty$, а $2|\sigma_\gamma|=0$. В этом случае исполнительный орган, характеризуемый это функцией, будем считать идеальным, т. е. таким, который бесконечно быстро переставляет регулирующий орган из одного положения в другое. Уравнение такого органа записывается следующим образом:



Фиг. 1а.

$$\xi=\sum_{\alpha=1}^{n}p_\alpha y_\alpha.$$

Рассмотренный класс функций $\varphi(\sigma)$ включает в себя характеристики подавляющего большинства исполнительных органов, используемых в современной технике регулирования. Целесообразность объединения этих характеристик одним классом функций подтверждается следующим весьма важным соображением.

Обычно определение функций $\Phi(\sigma)$ производится экспериментально, путем графической записи скорости хода исполнительного органа в так называемом статическом режиме, когда величина σ принимает известные фиксированные, дискретные значения. При такой записи получается как бы семейство функций $\Phi(\sigma)$, зависящее от приложенной фиксированной нагрузки.

Однако фактические условия работы исполнительных органов включают в себя непрерывное изменение действующей нагрузки. Ее действие на исполнительный орган сводится к заметному искажению вида функции $\Phi(\sigma)$, записанной в статическом режиме. Это искажение не может быть полностью учтено, несмотря на то, что оно не меняет определенного выше класса функций $\Phi(\sigma)$.

В то же время особенно сильные искажения функции $\Phi(\sigma)$ в процессе регулирования могут происходить в результате колебания уровня энергии внешнего источника питания регулятора. Следовательно, в каждой частной задаче невозможно строго фиксировать функцию $\Phi(\sigma)$ и тем более корректно проводить и линеаризацию ее коррекции, строго фиксируя коэфициент линейного приближения. Приведенные рассуждения показывают, что в подобных задачах всегда можно определить функцию $\Phi(\sigma)$ лишь с точностью ее принадлежности к классу A или подклассу A' функций. Этого определения будет вполне достаточно, если основные задачи теории автоматического регулирования решать на базе прямого метода Ляпунова.

Для окончательной формулировки задачи допустим, что возмущенное движение системы регулирования описывается уравнениями (17). Требуется найти условия, которые следует наложить на параметры регулятора, выполнение которых гарантирует устойчивость установившегося состояния системы автоматического регулирования, описываемого очевидным решением

$$\eta_1^* = 0, \ldots ; \ \eta_n^* = 0; \ \xi^* = 0$$

уравнений (17), каковы бы ни были возмущения и функции $\Phi(\sigma)$ класса A или подкласса A'.

б) Построение функции Ляпунова

Изложим метод построения функции Ляпунова для регулируемых систем, обладающих устойчивостью при выключенном регуляторе.

Функции Ляпунова удобнее строить, если уравнения задачи приведены к так называемой канонической форме.

С этой целью рассмотрим линейную подстановку

$$z_s = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(s)} \eta_\alpha + \xi \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{18}$$

Диференцируя z_s, после исключения с помощью уравнений (17) величин $\dot{\eta}_\alpha$, находим:

$$\dot{z}_s = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(s)} \left[\sum_{\beta=1}^{n} b_{\alpha\beta}\eta_\beta + n_\alpha \xi \right] + \Phi(\sigma).$$

Для того чтобы придать уравнениям в новых переменных каноническую форму

$$\dot{z}_s = \lambda_s z_s + \Phi(\sigma) \ (s = 1, \ldots, n), \tag{19а}$$

подберем постоянные $C_\alpha^{(s)}$ так, чтобы удовлетворялись соотношения

$$\left.\begin{aligned} \lambda_s C_\beta^{(s)} &= \sum_{\alpha=1}^{n} b_{\alpha\beta} C_\alpha^{(s)}; \\ \lambda_s &= \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(s)} n_\alpha \ (\beta, \ s = 1, \ldots n), \end{aligned}\right\} \tag{19б}$$

где λ_s — параметры преобразования, определение которых сводится к следующему.

Первые n соотношений (19б) следует рассматривать как линейные однородные уравнения относительно неизвестных $C_\alpha^{(s)}$. Как известно, они тогда лишь имеют ненулевые решения, когда их определитель равен нулю.

Таким образом, для того чтобы привести уравнения (17) к каноническому виду, мы должны выбрать числа λ_s как корни уравнения

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & \dots & b_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & \dots & b_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Чтобы закончить преобразование уравнений (17) остается выразить $\dot{\sigma}$ через новые переменные. Для этой цели надлежит определить из соотношений (19б) все значения $C_\alpha^{(s)}$ и разрешить соотношения (18) относительно старых переменных. При этом могут встретиться различные случаи в зависимости от корней уравнения $D(\lambda)=0$.

Здесь будут рассмотрены лишь регулируемые системы, для которых корни $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ — вещественные, $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ — попарно сопряженные комплексные, и все простые, обладают свойством

$$\operatorname{Re}\lambda_k \leqslant 0 \quad (k=1, \dots, n).$$

Для краткости такие системы назовем **собственно устойчивыми**.

В этом случае преобразование (18) является неособым, вследствие чего можем найти

$$\eta_\alpha=\sum_{k=1}^{n} D_k^{(\alpha)} z_k + G_\alpha \xi \quad (\alpha=1, \dots, n).$$

С помощью этих соотношений, диференцируя величину σ, получим

$$\dot{\sigma}=\sum_{k=1}^{n} \beta_k z_k - \Phi(\sigma),$$

где постоянные β_k известны.

Следовательно, преобразование позволяет поставить вопрос об устойчивости невозмущенного движения системы регуливования (17), описываемого очевидным решением $z_1^*=0, \dots, z_n^*=0$, $\sigma^*=0$ уравнений (19).

Для разрешения вопроса по прямому методу Ляпунова рассмотрим функцию

$$V=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{a_k a_l z_k z_l}{\lambda_k+\lambda_l}+\int_0^\sigma \Phi(\sigma)\,d\sigma, \tag{20}$$

где $a_1, \dots, a_r$ — вещественные, $a_{r+1}, \dots, a_n$ — попарно сопряженные, комплексные и в остальном произвольные постоянные.

Поскольку очевидно, что

$$-\frac{1}{\lambda_k+\lambda_l}=\int_0^\infty e^{-(\lambda_k+\lambda_l)\tau}\,d\tau,$$

то при любых значениях λ на основании тождества

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_k a_i z_k z_i}{\lambda_k+\lambda_i}=\int_0^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}a_k z_k e^{-\lambda_k \tau}\right]^2 d\tau$$

заключаем, что функция V принимает только вещественные и всюду положительные значения, обращаясь в нуль лишь в точке $z_1^*=\ldots=z_n^*=\sigma^*=0$. Ее полная производная такова

$$\frac{dV}{dt}=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_k a_i z_k z_i-\Phi^2(\sigma)+\Phi(\sigma)\left[\sum_{k=1}^{n}\beta_k z_k-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_k a_i}{\lambda_k+\lambda_i}(z_k+z_i)\right].$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_k a_i z_k z_i=\left[\sum_{k=1}^{n}a_k z_k\right]^2;$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_k a_i}{\lambda_k+\lambda_i}(z_k+z_i)=2\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_k a_i z_k}{\lambda_k+\lambda_i},$$

и добавляя в правую часть выражения $\frac{dV}{dt}$ величину

$$\pm 2\Phi(\sigma)\sum_{k=1}^{n}a_k z_k=0,$$

получим

$$\frac{dV}{dt}=-\left[\sum_{k=1}^{n}a_k z_k+\Phi(\sigma)\right]^2+\Phi(\sigma)\sum_{k=1}^{n}\left[\beta_k+2a_k-\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_k a_i}{\lambda_k+\lambda_i}\right]z_k.$$

Если постоянные a_k определить при помощи следующего уравнения:

$$\beta_k+2a_k-2a_k\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_k+\lambda_i}=0\quad(k=1,\ldots,n),\tag{21}$$

то полная производная примет вид

$$\frac{dV}{dt}=-\left[\sum_{k=1}^{n}a_k z_k+\Phi(\sigma)\right]^2$$

и, очевидно, будет являться знакопостоянной функцией, принимая всюду отрицательные или нулевые значения.

Итак, можно сформулировать следующую теорему, доказанную А. И. Лурье: если постоянные регулятора таковы, что система квадратных уравнений (21) в которой $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$, $\beta_1,\ldots,\beta_r$ — веще-

ственные, а $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$, $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n$ — соответственно попарно сопряженные, комплексные числа, имеет хотя бы одну систему решений, содержащую $a_1, \ldots, a_r$ вещественных и $a_{r+1}, \ldots, a_n$ попарно сопряженных комплексных чисел, то установившееся состояние системы автоматического регулирования обладает устойчивостью в большом, какова бы ни была функция $\varphi(\sigma)$ класса A.

Можно доказать, что эта устойчивость асимптотическая.

Если среди вещественных корней окажется один, например λ_1, равный нулю, то в функции V следует опустить член $a_1^2 : 2\lambda_1$ и вместо него написать $A_1 z_1^2$, где $A > 0$. В этом случае в уравнениях (21) первое из них заменится уравнением $A + \beta_1 = 0$, которое наложит на β_1 условие $\beta_1 < 0$.

Для построения критерия устойчивости фактически нет необходимости решать уравнения (21), достаточно лишь найти условие их разрешимости. Как показывают примеры, эти условия сводятся к выполнению n совокупных неравенств, содержащих параметры объекта регулирования и регулятора, входящие в постоянные β_k.

А. И. Лурье предлагает следующую формулу для определения этих постоянных:

$$\beta_k = -\sum_{s=1}^{n} p_s \frac{N_s(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)},$$

где $D'(\lambda_k)$ — производная по λ определителя $D(\lambda)$, а $N_s(\lambda_k)$ — значение определителя $D(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_k$, в котором строка (столбец) элементов с номером s замещена числами $n_1, \ldots, n_n$.

Для краткости мы не останавливаемся на выводе этих важных формул, позволяющих в каждой частной задаче миновать все промежуточные выкладки и сразу же приступить к формированию искомого критерия устойчивости, как только будут написаны исходные уравнения.

В качестве примера приложения метода рассмотрим задачу о возмущенных движениях системы автоматического регулирования описываемую уравнениями

$$\ddot{\psi} + p\dot{\psi} + q\psi + r\eta = s$$

и

$$\dot{\eta} = \Phi^*(\sigma); \quad \sigma = a\psi + E\dot{\psi} + G^2\ddot{\psi} - \frac{1}{e}\eta, \tag{22}$$

где ψ — координата, p, q, r, s — постоянные объекта регулирования, η — координата регулирующего органа, a, E, G^2, l — постоянные регулятора, физический смысл которых ясен из написания σ, а $\Phi^*(\sigma)$ — функция класса A. Установившееся состояние системы определяется следующими величинами:

$$\psi^* = \frac{s}{q + alr}; \quad \eta^* = \frac{als}{q + alr}.$$

Чтобы привести уравнения (22) к форме уравнений (17) примем, что

$$\psi - \psi^* = \eta_1; \quad \dot{\psi} = \eta_2; \quad \eta - \eta^* = l\xi. \tag{22a}$$

Тогда после исключения в σ величины $\ddot{\psi}$ получим

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2;$$
$$\dot{\eta}_2 = b_{22}\eta_2 + b_{21}\eta_1 + n_2\xi;$$
$$\dot{\xi} = \Phi(\sigma); \quad \sigma = p_1\eta_1 + p_2\eta_2 - \xi,$$

где

$$b_{22} = -p; \; b_{21} = -q; \; n_2 = -r_i; \; \Phi(\sigma) = \frac{1}{i}\Phi^*(\sigma);$$

$$i = \frac{l}{1 + lrG^2}; \quad p_1 = a - qG^2; \; p_2 = E - pG^2.$$

Составим уравнение $D(\lambda) = 0$.

Имеем

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & b_{21} \\ 1 & b_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - b_{22}\lambda - b_{21},$$

откуда найдем

$$\lambda_1 + \lambda_2 = b_{22} < 0; \quad \lambda_1\lambda_2 = -b_{21} > 0$$

и

$$D'(\lambda) = 2\lambda - \lambda_1 - \lambda_2. \tag{23}$$

Очевидно, все корни λ_k будут иметь отрицательные вещественные части, если $p > 0$, $q > 0$.

Далее образуем определители N_1, N_2.

Имеем

$$N_1 = \begin{vmatrix} 0 & n_2 \\ 1 & b_{22} - \lambda \end{vmatrix} = -n_2; \quad N_2 = \begin{vmatrix} -\lambda & b_{21} \\ 0 & n_2 \end{vmatrix} = -\lambda n_2.$$

Применяя формулы (22), получим

$$\beta_1 = \frac{n_2}{\lambda_1 - \lambda_2}[p_1 + \lambda_1 p_2]; \quad \beta_2 = -\frac{n_2}{\lambda_1 - \lambda_2}[p_1 + \lambda_2 p_2]. \tag{23a}$$

В соответствии с уравнениями имеем

$$\beta_1 + 2a_1 - \frac{a_1^2}{\lambda_1} - \frac{2a_1a_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 0;$$

$$\beta_2 + 2a_2 - \frac{a_2^2}{\lambda_2} - \frac{2a_1a_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Нетрудно показать, что эти уравнения непременно удовлетворяют теореме А. И. Лурье, если выполняются следующие неравенства:

$$T^2 = 1 + \frac{\beta_1}{\lambda_1} + \frac{\beta_2}{\lambda_2} > 0;$$

$$D^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 \pm 2\lambda_1\lambda_2 \Gamma > 0.$$

Если воспользоваться обозначениями формул (23) и (23а), то последние неравенства легко привести к следующему окончательному виду:

$$\Gamma^2 = \frac{q + alr}{q(1 + lrG^2)} > 0;$$

$$D^2 = p^2 - 2q - \frac{lr}{1 + lrG^2)}(a - qG^2 - pE + pG^2) \pm 2q\Gamma > 0.$$

Не имея здесь возможности останавливаться более подробно на применении прямого метода Ляпунова к исследованию устойчивости систем автоматического регулирования, мы отсылаем читателя, интересующегося этим вопросом, к специальной литератутуре [5] — [13].

В настоящее время учение Ляпунова об устойчивости движения развилось в самостоятельную обширную дисциплину большого прикладного значения.

После Ляпунова его учение получило свое дальнейшее развитие главным образом в трудах советских ученых и изложено в монографиях Н. Г. Четаева, И. Г. Малкина и Г. Н. Дубошина [2], [3], [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехтеоретиздат, М.—Л. 1950.
2. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, ОГИЗ, Гостехиздат, 1946.
3. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, ГИТТЛ, М.—Л. 1952.
4. Дубошин Г. Н., Основы теории устойчивости движения, Изд-во Московского университета, 1952.
5. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехтеоретиздат, 1951.
6. Баутин Н. Н., Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, ОГИЗ, Гостехиздат, 1949
7. Еругин Н. П., О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории диференциальных уравнений в целом, ПММ, т. XIV, вып. 5, 1950.
8. Еругин Н. П., Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования, ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.
9. Барбашин Е. А. и Красовский Н. Н., Об устойчивости движения в целом, ДАН СССР, т. XXXVI, № 3, 1952.
10. Лурье А. И. и Постников В. Н., К теории устойчивости регулируемых систем, ПММ, АН СССР, т. VII, вып. 4, 1944.
11. Лурье А И., Об устойчивости одного класса регулируемых систем, ПММ, АН СССР, т. IX, вып. V, 1945.
12. Летов А. М., Собственно-неустойчивые регулируемые системы, ПММ, АН СССР, т. XIII, вып. III, 1949.
13. Малкин И. Г., К теории устойчивости регулируемых систем, ПММ, АН СССР, т. XIII, вып. II, 1950.

ГЛАВА X

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Под устойчивостью системы автоматического регулирования подразумевается свойство системы возвращаться к установившемуся состоянию после прекращения действия возмущения, которое вывело ее из этого состояния.

Устойчивая линейная система характеризуется тем, что любое ограниченное по абсолютной величине воздействие вызывает также ограниченное изменение величин, характеризующих состояние системы.

Как было показано в предыдущей главе, необходимым и достаточным условием устойчивости системы является отрицательность действительных частей всех корней характеристического уравнения. Если изображать эти корни характеристического уравнения на комплексной плоскости, то необходимое и достаточное условие устойчивости заключается в том, чтобы все корни были расположены в левой части комплексной плоскости (фиг. 2).

Если изменяются параметры системы, то будут изменяться и коэфициенты характеристического уравнения. Корни его при этом будут перемещаться в комплексной плоскости и могут пройти через мнимую ось в правую часть комплексной плоскости, что будет соответствовать переходу от устойчивой системы к неустойчивой. Соотношение между коэфициентами характеристического уравнения, при котором по крайней мере пара комплексных сопряженных корней находится на мнимой оси (или один вещественный корень в начале координат), а все остальные расположены левее ее, определяет границу устойчивости.

Граница устойчивости подразделяет совокупность значений коэфициентов характеристического уравнения и, значит, параметров системы на две области. Одна из этих областей соответствует устойчивости системы, другая — неустойчивости.

Итак, исследование устойчивости системы сводится к определению знаков действительных частей корней характеристического уравнения его или, что эквивалентно, к установлению расположения этих корней на комплексной плоскости.

Фактическое вычисление корней весьма просто лишь для характеристических уравнений первой и второй степеней. Общие выражения для корней уравнений третьей и четвертой степеней известны, но они громоздки и практически мало удобны. Уравнения более высоких сте-

пеней вообще не имеют общих выражений для корней. Поэтому важное значение преобретают правила, которые позволяют определить устойчивость системы, минуя вычисление корней. С помощью этих правил, называемых критериями устойчивости, не только устанавливают, устойчива система или нет, но выясняют влияние тех или иных параметров и структурных изменений в системе на устойчивость.

Существуют различные формы критериев устойчивости. С математической точки зрения эти формы критериев устойчивости эквивалентны, так как они выражают один и тот же факт, что все корни характеристического уравнения лежат в левой части комплексной плоскости. Однако с точки зрения практического применения каждый из этих критериев устойчивости занимает определенное место, и целесообразный выбор того или иного из них при решении конкретных задач позволяет провести исследование устойчивости наиболее простым путем.

Ниже рассматриваются основные формы критериев устойчивости и приводится их простейшее обоснование.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В основу критериев устойчивости, рассматриваемых ниже, может быть положен известный в теории функций комплексного переменного принцип аргумента. Для наших целей понадобится несколько видоизмененная формулировка принципа аргумента, точнее говоря, следствие принципа аргумента, доказательство которого мы и приведем.

Рассмотрим алгебраическое уравнение n-й степени с действительными коэфициентами:

$$D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{24}$$

Обозначив через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ корни этого уравнения, многочлен $D(\lambda)$ можно представить в виде произведения простейших сомножителей:

$$D(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n). \tag{25}$$

На комплексной плоскости λ каждому корню соответствует вполне определенная точка (фиг. 1). Геометрически каждый корень λ_i изображается в виде вектора, проведенного из начала координат к точке λ_i (фиг. 2). Длина этого вектора равна модулю комплексного числа λ_i, т. е. $|\lambda_i|$, а угол, образованный вектором с положительным направлением, — действительной оси, аргументу или фазе комплексного числа λ_i, т. е. $\arg\lambda_i$. Величины $(\lambda - \lambda_i)$, входящие множителями в $D(\lambda)$, геометрически изображаются векторами, проведенными из точек λ_i к точке λ (фиг. 3). Этот вектор не что иное, как разность двух векторов, соответствующих λ и λ_i. Положив $\lambda = j\omega$ в $D(\lambda)$, получим

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2)\ldots(j\omega - \lambda_n).$$

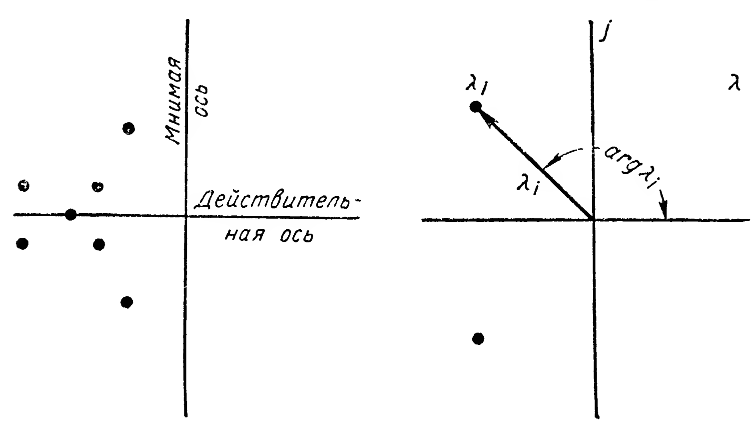
Концы элементарных векторов $(j\omega - \lambda_i)$ будут находиться на мнимой оси (фиг. 4) в точке $\lambda = j\omega$. $D(j\omega)$ — вектор, равный произведению элементарных векторов $(j\omega - \lambda_i)$ и действительного числа a_0. Модуль этого вектора равен произведению модулей элементарных векторов и a_0:

$$|D(j\omega)| = a_0|j\omega - \lambda_1|\,|j\omega - \lambda_2|\ldots|j\omega - \lambda_n|,$$

а аргумент или фаза его равна сумме аргументов элементарных векторов:

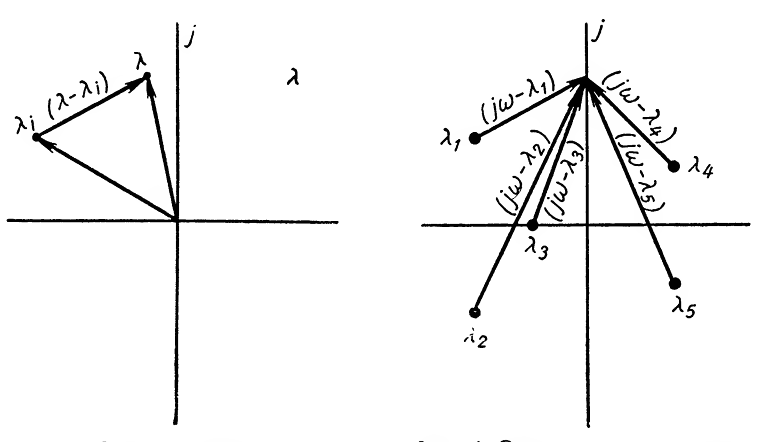
$$\arg D(j\omega) = \arg(j\omega - \lambda_1) + \arg(j\omega - \lambda_2) + \ldots + \arg(j\omega - \lambda_n).$$

Условимся считать вращение векторов против часовой стрелки положительным. Тогда при изменении ω от $-\infty$ до ∞ каждый элементарный вектор $(j\omega - \lambda_i)$ повернется на угол $+\pi$, если его начало (корень λ_i) лежит в левой части комплексной плоскости λ, и на угол $-\pi$, если его начало (корень λ_k) лежит в правой части комплексной плоскости λ (фиг. 5). Предположим, что уравнение $D(\lambda) = 0$ имеет m корней в правой части плоскости λ и, следовательно, $n - m$ корней в левой части комплексной плоскости. Тогда при возрастании ω от $-\infty$ до ∞ изменение аргумента вектора $D(j\omega)$ или угол поворота $D(j\omega)$



Фиг. 1. Расположение корней характеристического уравнения устойчивой системы.

Фиг. 2 . Модуль и фаза λ_i.



Фиг. 3. Элементарный вектор $(\lambda - \lambda_i)$.

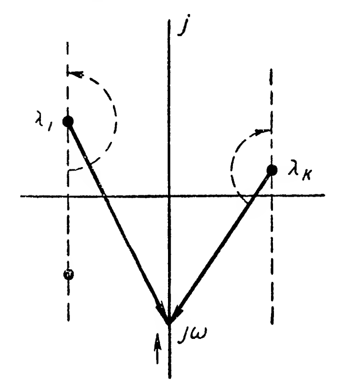
Фиг. 4. Элементарные векторы $(j\omega - \lambda_i)$.

(равный сумме изменений аргументов элементарных векторов) будет равен

$$\underset{-\infty\leqslant\omega\leqslant\infty}{\Delta \arg} D(j\omega) = (n-m)\pi - m\pi = (n-2m)\pi. \qquad (26)$$

Отсюда следует теорема:

Изменение аргумента $D(j\omega)$ при возрастании ω от $-\infty$ до ∞ равно разности $(n-m)$ между числом корней уравнения $D(\lambda)=0$, лежащих в левой части плоскости λ и числом (m), корней уравнения, лежащих в правой части плоскости λ умноженной на π.



Фиг. 5. Изменение аргументов $(j\omega-\lambda_l)$ и $(j\omega-\lambda_k)$ при возрастании ω от $-\infty$ до $+\infty$.

Эта теорема является следствием принципа аргумента.

Отметим здесь же необходимое условие отрицательности действительных частей корней уравнения $D(\lambda)=0$.

Так как для действительных корней $\lambda_i = -\alpha_i$

$$(\lambda-\lambda_i) = (\lambda+\alpha_i),$$

а для сопряженных комплексных корней $\lambda_{i,\,i+1} = -\alpha_i \pm j\omega_i$

$$(\lambda-\lambda_i)(\lambda-\lambda_{i+1}) = (\lambda+\alpha_i-j\omega_i)\times$$
$$\times(\lambda+\alpha_i+j\omega_i) = (\lambda+\alpha_i)^2+\omega_i^2,$$

то после подстановки $(\lambda-\lambda_i)$ в $D(\lambda)$ уравнения (25) и раскрытия скобок получим при $a_0>0$ многочлен с положительными коэфициентами [1]. Кроме того, очевидно, что если все коэфициенты положительны, то уравнение $D(\lambda)=0$ заведомо не может иметь отрицательных действительных корней.

2. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МИХАЙЛОВА

Критерий устойчивости Михайлова является геометрической интерпретацией соотношения (26). Для доказательства критерия Михайлова рассмотрим характеристическое уравнение системы (24)

$$D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Если все корни этого уравнения лежат в левой части комплексной плоскости λ и, значит, в правой части плоскости корней нет, то $m=0$ и согласно формуле (26)

$$\underset{-\infty\leqslant\omega\leqslant\infty}{\Delta \arg} D(j\omega) = n\pi.$$

Таким образом, это условие соответствует устойчивости системы. Отсюда заключаем, что *система автоматического регулирования будет устойчива, если при возрастании ω от $-\infty$ до ∞ изменение аргумента вектора $D(j\omega)$ будет равно $n\pi$,* где n — степень уравне-

[1] Если $a_0<0$, то без нарушения общности можно $D(\lambda)=0$ умножить на -1.

ния $D(\lambda)=0$. Нетрудно видеть, что $n\pi$ — это наибольшее изменение аргумента $D(j\omega)$.

При изменении ω от $-\infty$ до ∞ вектор $D(j\omega)$ на комплексной плоскости D опишет своим концом кривую, которая называется характеристической кривой или годографом вектора $D(j\omega)$.

Уравнение характеристической кривой можно найти подстановкой $\lambda=j\omega$ в многочлен $D(\lambda)$:

$$D(j\omega)=a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(j\omega)+a_n. \qquad (27)$$

Отделяя действительную и мнимую части в формуле (27), получаем

$$D(j\omega)=u(\omega)+jv(\omega), \qquad (28)$$

где

$$\left.\begin{aligned} u(\omega)&=a_n-a_{n-2}\omega^2+a_{n-4}\omega^4-\ldots;\\ v(\omega)&=a_{n-1}\omega-a_{n-3}\omega^3+a_{n-5}\omega^5-\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Действительная часть $u(\omega)$ является четной функцией, а мнимая $v(\omega)$ — нечетной функцией ω, т. е.

$$u(-\omega)=u(\omega); \quad v(-\omega)=-v(\omega),$$

поэтому для отрицательных значений ω

$$D(-j\omega)=u(\omega)-jv(\omega),$$

отсюда заключаем, что характеристическая кривая симметрична относительно действительной оси при ω и $-\omega$. Поэтому при построении характеристической кривой можно ограничиться лишь положительными значениями ω от 0 до ∞, при этом угол поворота вектора $D(j\omega)$, т. е. изменение аргумента $D(j\omega)$, уменьшится вдвое, и, следовательно, критерий устойчивости можно сформулировать следующим образом:

Система автоматического регулирования будет устойчива, если при возрастании ω *от 0 до* ∞ *вектор* $D(j\omega)$ *повернется на угол* $n\frac{\pi}{2}$, *где n — степень уравнения* $D(\lambda)=0$, *или, что то же самое, если характеристическая кривая при изменении* ω *от 0 до* ∞, *начиная с положительной действительной оси, обходит последовательно в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки) n квадрантов.*

В такой форме критерий устойчивости был предложен А. В. Михайловым в 1938 г. [1].

На фиг. 6 изображены характеристические кривые для $n=1, 2, 3, 4, 5$, соответствующие устойчивым системам, а на фиг. 7 — характеристическая кривая для $n=4$, соответствующая неустойчивой системе.

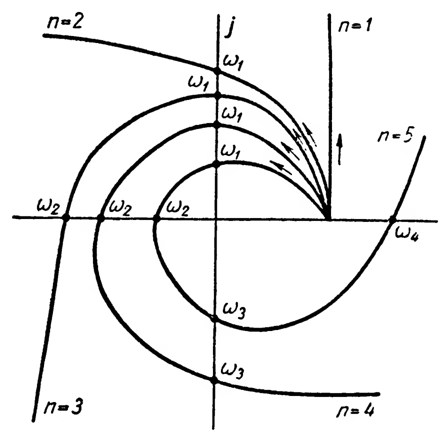
Очевидно, что характеристическая кривая при изменении ω от 0 до ∞ будет обходить n квадрантов в положительном направлении, если $u(0)>0$, $v'(0)>0$ и уравнения

$$u(\omega)=0; \quad v(\omega)=0$$

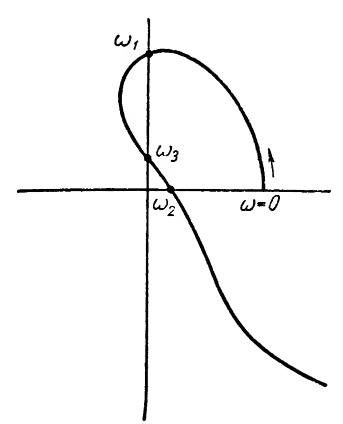
имеют все действительные и перемежающиеся корни, т. е. если между каждыми двумя соседними корнями $v(\omega)=0$ $[u(\omega)=0]$ лежит один

корень $u(\omega)=0$ $[v(\omega)=0]$. Так, например, при $n=4$ случай, графически изображенный на фиг. 8, соответствует устойчивой системе, а на фиг. 9 — неустойчивой системе.

Система будет находиться на границе устойчивости, если характеристическая кривая при некотором значении $\omega=\omega_0$ пересекает начало координат, обходя при этом $(n-1)$ квадрантов.



Фиг. 6. Характеристические кривые устойчивых систем ($n = 1, 2, 3, 4, 5$).



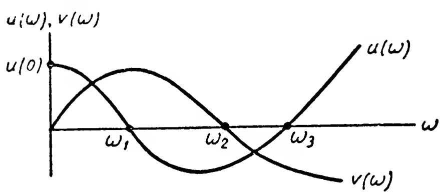
Фиг. 7. Характеристическая кривая ($n = 4$) неустойчивой системы.

В этом случае ω_0 является одновременно корнем уравнений

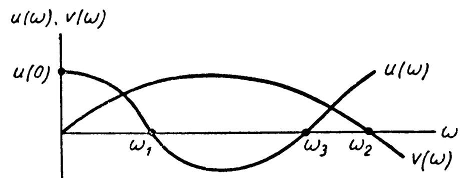
$$u(\omega)=0; \quad v(\omega)=0.$$

Способы построения характеристической кривой могут быть разнообразны.

Характеристическую кривую можно построить по уравнениям (29), задаваясь последовательно значениями ω и вычисляя $u(\omega)$ и $v(\omega)$.



Фиг. 8. Действительная и мнимая части характеристической кривой ($n = 4$) устойчивой системы.



Фиг. 9. Действительная и мнимая части характеристической кривой ($n = 4$) неустойчивой системы.

При этом может оказаться удобной следующая методика вычисления, которая избегает возведения в степени $\omega=\omega_1$.

Представим $D(\lambda)$ в виде

$$D(\lambda)=(\lambda^2+\omega_1^2)D_1(\lambda)+b_{n-1}\lambda+b_n, \tag{30}$$

где $D_1(\lambda)=b_0\lambda^{n-2}+b_1\lambda^{n-3}+\ldots b_{n-3}\lambda+b_{n-2}$ — многочлен степени $n-2$, а $b_{n-1}\lambda+b_n$ — остаток от деления $D(\lambda)$ на $D_1(\lambda)$.

Если в формуле (30) подставить $\lambda = j\omega_1$, то первое слагаемое в правой части обратится в нуль, и

$$D(j\omega_1) = b_{n-1}\omega_1 + b_n,$$

откуда получаем

$$u(\omega_1) = b_n; \quad v(\omega_1) = b_{n-1}\omega_1.$$

Таким образом, вычисление действительной и мнимой части $D(j\omega_1)$ сводится к вычислению коэфициентов b_n и b_{n-1}.

Для этой цели подставим выражения $D(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$ в формулу (30) и приравняем коэфициенты при одинаковых степенях λ. Тогда легко получить выражения, определяющие коэфициенты b_i через a_i и ω_1:

$$b_0 = a_0;$$
$$b_a = a_1;$$
$$b_2 = a_2 - \omega_1^2 b_0;$$
$$b_3 = a_3 - \omega_1^2 b_1;$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$b_{n-1} = a_{n-1} - \omega_1^2 b_{n-3};$$
$$b_n = a_n - \omega_1^2 b_{n-2}.$$

Эти выражения позволяют простейшими арифметическими операциями последовательно определить b_0; b_1, b_2, ... и, наконец, b_{n-1} и b_n.

Практически вычисления удобно производить по расчетной схеме, представленной в виде таблицы.

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
ω_1^2	—	—	$-\omega_1^2 b_0$	...	$-\omega_1^2 b_{n-4}$	$-\omega_1^2 b_{n-3}$	$-\omega_1^2 b_{n-2}$
Σ	b_0	b_1	b_2	...	b_{n-2}	b_{n-1}	b_n
						$b_{n-1}\omega_1 = v(\omega_1)$	$b_n = u(\omega_1)$

Коэфициенты b получаются алгебраическим сложением коэфициентов a_k и $-\omega_1^2 b_{k-2}$ в каждой графе.

Весьма часто удобно строить характеристическую кривую геометрическим способом, использующим специфику характеристических уравнений систем автоматического регулирования.

Характеристическое уравнение можно представить в виде

$$D(\lambda) = D_p(\lambda) + M_p(\lambda) = \prod_{i=1}^{l} d_i(\lambda) + \prod_{i=1}^{l} k_i(\lambda) = 0.$$

Уравнением характеристической кривой в этом случае будет

$$D(j\omega) = D_p(j\omega) + M_p(j\omega) = \prod_{i=1}^{l} d_i(j\omega) + \prod_{i=1}^{l} k_i(j\omega).$$

Годографы $d_i(j\omega)$ и $k_i(j\omega)$ имеют простой вид для типовых звеньев системы регулирования.

Для построения характеристической кривой $D(j\omega)$ нужно:

1) построить характеристическую кривую

$$D_p(j\omega) = \prod_{i=1}^{l} d_i(j\omega)$$

простым перемножением векторов $d_i(j\omega)$ для каждого значения ω;

2) построить характеристическую кривую

$$M_p(j\omega) = \prod_{i=1}^{l} k_i(j\omega)$$

аналогичным образом; эта кривая обычно имеет простой вид;

3) сложить векторы, соответствующие характеристическим кривым, $D_p(j\omega)$ и $M_p(j\omega)$ для каждого значения ω.

Для простейших одноконтурных систем $M_p(j\omega) = K$ постоянно, и поэтому последние два этапа заменяются простым смещением характеристической кривой вправо параллельно мнимой оси на величину K.

Существует еще целый ряд геометрических способов построения характеристической кривой, но мы их здесь не будем касаться.

3. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАУСА И ГУРВИЦА

Как было показано выше, из основного соотношения, определяющего устойчивость системы регулирования,

$$\underset{-\infty \leqslant \omega < \infty}{\Delta \arg} D(j\omega) = n\pi$$

следует, что корни уравнений $u(\omega) = 0$ и $v(\omega) = 0$ должны быть вещественными и должны чередоваться и что значения $u(0)$ и $v'(0)$ должны быть положительными. Условия, при которых это имеет место, можно найти не в виде кривой, как это дает критерий Михайлова, а в аналитической форме, выразив их через коэфициенты характеристического уравнения. Такие критерии устойчивости были предложены Раусом (1875 г.) и Гурвицем (1895 г.).

Наметим путь получения этих критериев и приведем формулировку их.

Предполагая, что степень характеристического уравнения n — четная, запишем действительную и мнимую части $D(j\omega)$ в виде

$$u(\omega) = \pm (a_0\omega^n - a_2\omega^{n-2} + a_4\omega^{n-4} - \ldots + a_n);$$
$$v(\omega) = \mp (a_1\omega^{n-1} - a_3\omega^{n-3} + a_5\omega^{n-5} - \ldots + a_{n-1}\omega).$$

Так как n — четное, то степень действительной части больше на единицу степени мнимой части [1].

[1] Если степень характеристического уравнения нечетная, то можно умножить $D(j\omega)$ на j, и тогда действительная и мнимая части поменяются ролями, причем действительная часть $jD(j\omega)$ изменит знак на обратный. Окончательный результат при этом останется без изменений.

Обозначим

$$u(\omega) = u \quad \text{и} \quad v(\omega) = u_1.$$

Разделим u на u_1 и у остатка u_2 изменим знак, тогда

$$u = u_1 Q_1 - u_2,$$

где Q_1 — некоторый многочлен.

Разделим u_1 на u_2 и у остатка u_3 изменим знак:

$$u_1 = u_2 Q_2 - u_3.$$

Продолжая этот процесс до тех пор, пока u_{n-1} разделится на u_n нацело, получим

$$u_2 = u_3 Q_3 - u_4;$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$u_{n-2} = u_{n-1} Q_{n-1} - u_n;$$

$$u_{n-1} = u_n Q_n{}^{*}.$$

Ряд $u, u_1, u_2, \ldots u_n$ называется обобщенным рядом Штурма.

Можно показать [2], [3], что если степени многочленов этого ряда отличаются на единицу и старшие коэфициенты имеют чередующиеся знаки, то $u(\omega) = 0$ и $v(\omega) = 0$ имеют все вещественные и чередующиеся корни, т. е.

$$\underset{-\infty \leqslant \omega \leqslant \infty}{\Delta \arg} D(j\omega) = n\pi,$$

что эквивалентно устойчивости системы [1].

Произведя указанное деление, получаем

$$u_2 = \pm (c_{13}\omega^{n-2} - c_{23}\omega^{n-4} + c_{33}\omega^{n-6} - \ldots),$$

где

$$c_{13} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}; \quad c_{23} = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}; \quad c_{33} = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \ldots;$$

$$u_3 = \mp (c_{14}\omega^{n-3} - c_{24}\omega^{n-5} + c_{34}\omega^{n-7} - \ldots),$$

где

$$c_{14} = \frac{c_{13} a_3 - a_1 c_{23}}{c_{13}}; \quad c_{24} = \frac{c_{13} a_5 - a_1 c_{33}}{c_{13}}; \quad c_{34} = \frac{c_{13} a_7 - a_1 c_{43}}{c_{13}} \ldots;$$

$$u_4 = \pm (c_{15}\omega^{n-4} - c_{25}\omega^{n-6} + c_{35}\omega^{n-8} - \ldots),$$

где

$$c_{15} = \frac{c_{14} c_{23} - c_{13} c_{24}}{c_{14}}; \quad c_{25} = \frac{c_{14} c_{33} - c_{13} c_{34}}{c_{14}}; \quad c_{35} = \frac{c_{14} c_{43} - c_{13} c_{44}}{c_{14}}$$

и т. д.

Коэфициент $c_{k,i}$ определяется общей формулой

$$c_{k,i} = \frac{c_{1,\, i-1}\, c_{k+1,\, i-2} - c_{1,\, i-2}\, c_{k+1,\, i-1}}{c_{1,\, i-1}}, \tag{31}$$

---

* u_n есть наибольший общий делитель u и u_1. Если u и u_1 взаимно просты, то $u_n = \text{const}$. Далее это предполагается выполненным.

[1] Если n нечетно, то старшие коэфициенты должны иметь одинаковый знак.

или

$$c_{k,\,i} = c_{k+1,\,i-2} - r_{i-1}c_{k+1,\,i-1}, \tag{32}$$

где

$$r_{i-1} = \frac{c_{1,\,i-2}}{c_{1,\,i-1}}. \tag{33}$$

Вычисление этих коэфициентов может быть очень просто осуществлено без фактического выполнения деления, если воспользоваться схемой вычисления, предложенной Раусом в виде следующей таблицы.

	a_0	a_2	a_4	a_6
	a_1	a_3	a_5	a_7
$r_0 = \frac{a_0}{a_1}$	$c_{13} = a_2 - r_0a_3$	$c_{23} = a_4 - r_0a_5$	$c_{33} = a_6 - r_0a_7$	$c_{43} = a_6 - r_0a_7$
$r_1 = \frac{a_1}{c_{13}}$	$c_{14} = a_3 - r_1c_{23}$	$c_{24} = a_5 - r_1c_{33}$	$c_{34} = a_7 - r_1c_{43}$	$c_{44} = a_9 - r_1c_{53}$
$r_2 = \frac{c_{13}}{c_{23}}$	$c_{15} = c_{23} - r_2c_{24}$	$c_{25} = c_{33} - r_2c_{34}$	$c_{35} = c_{43} - r_2c_{44}$	$c_{45} = c_{44} - r_2c_{54}$
.				. . . . . .

В первой и второй строках таблицы выписываются коэфициенты уравнения с четными и нечетными индексами соответственно. Коэфициенты в остальных строках вычисляются по следующему правилу, которое следует из выражений (32) и (33).

Чтобы найти k-й коэфициент i-го ряда таблицы ($c_{k,\,i}$), нужно из ($k+1$)-го коэфициента $i-2$ строки ($c_{k+1,\,i-2}$) вычесть произведение r_{i-1} на ($k+1$)-й коэфициент ($i-1$)-й строки ($c_{k+1,\,i-1}$), где r_{i-1} есть отношение первого коэфициента ($i-2$)-й строки ($c_{1,\,i-2}$) к первому коэфициенту ($i-1$)-й строки ($c_{1,\,i-1}$), постоянное для каждой i-й строки.

На основании свойств ряда Штурма, о котором мы упомянули выше, критерий устойчивости Рауса можно сформулировать следующим образом:

Для того чтобы система была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы все коэфициенты первой графы таблицы Рауса были положительными т. е. $a_0 > 0$; $a_1 > 0$; $c_{13} > 0$; $c_{14} > 0$; ... $c_{1,\,n+1} > 0$.

Критерий Рауса особенно удобен в тех случаях, когда коэфициенты характеристического уравнения заданы численно.

Вычисление коэфициентов таблицы следует производить, начиная с третьей строки, в порядке возрастания их номеров. При этом любую строку можно умножать и делить на любое положительное число.

Пусть задано, например, характеристическое уравнение

$$D(\lambda) = 0{,}104\lambda^7 + 0{,}33\lambda^6 + 5{,}5\lambda^5 + 15{,}5\lambda^4 + 25\lambda^3 + 25\lambda^2 + \\ + 19{,}7\lambda + 9{,}5 = 0.$$

Составляем таблицу Рауса.

	$a_0 = 0{,}104$	$a_2 = 5{,}5$	$a_4 = 25$	$a_6 = 19{,}7$
	$a_1 = 0{,}33$	$a_3 = 15{,}5$	$a_5 = 25$	$a_7 = 9{,}5$
$r_0 = 0{,}315$	0,6	17,1	16,7	0
$r_1 = 0{,}55$	6,0	15,8	9,5	0
$r_2 = 0{,}1$	15,52	15,75	0	0
$r_3 = 0{,}386$	9,7	9,5	0	0
$r_4 = 1{,}6$	0,55	0	0	0
	9,5	0	0	0

Так как все коэфициенты первой графы положительны, то все корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части, и соответствующая система устойчива.

Иная форма критерия устойчивости, наиболее распространенная в технической литературе, известна под названием критерия Гурвица. Критерий Гурвица легко получить из критерия Рауса.

Для этой цели выразим коэфициенты c_{1k} в виде определителей

$$c_{11} = a_0;$$

$$c_{12} = a_1 = \Delta_1;$$

$$c_{13} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1};$$

$$c_{14} = \frac{a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}$$

и в общем случае [1]

$$c_{1k} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_{k-2}}, \tag{34}$$

где $\Delta_k (k = 1, 2, \ldots)$ — определители Гурвица, получаемые из таблицы

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \ldots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \ldots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \ldots \\ a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \ldots \end{array} \tag{35}$$

[1] Это нетрудно показать, применяя метод полной математической индукции.

отчеркиванием строк и граф, причем все коэфициенты с индексами, большими, чем степень уравнения n, заменяются нулями. Эта таблица составляется по простому правилу. По диагонали выписываются коэфициенты характеристического уравнения, начиная с a_1. Строки этой таблицы, начиная с диагонали, заполняются коэфициентами влево по возрастающим, а вправо — по убывающим индексам.

Согласно критерию Рауса необходимым и достаточным условием устойчивости является

$$c_{11} = a_0 > 0; \quad c_{12} = a_1 > 0; \quad c_{13} > 0, \; \dots \; ; \quad c_{1,\, n+1} > 0.$$

Этим неравенствам, как следует из соотношения (34), эквивалентны неравенства

$$a_0 > 0; \quad \Delta_1 > 0; \quad \Delta_2 > 0, \dots ; \quad \Delta_n > 0.$$

Таким образом, критерии Гурвица можно сформулировать так:

Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $a_0 > 0$ и определители Гурвица Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n были положительными.

Для уравнений высоких степеней порядок определителей возрастает, и практическое вычисление их обычным путем становится крайне громоздким.

Иные способы вычисления определителей Гурвица, например сведением предпоследнего определителя к диагональной форме, по существу приводит к схеме вычисления Рауса. Таким образом, критерий Рауса дает весьма простой способ исследования устойчивости систем в тех случаях, когда степень характеристического уравнения высока (например, $n > 5$) и коэфициенты его заданы численно.

Для систем, характеристические уравнения которых имеют низкую степень ($n \leqslant 4$), условия устойчивости можно записать в общей форме в виде простых буквенных неравенств.

Приведем условия устойчивости для систем с характеристическими уравнениями второй, третьей и четвертой степеней; эти условия вытекают из критерия Рауса или Гурвица:

$n = 2$

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \tag{36}$$

$n = 3$

$$\left. \begin{array}{c} a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \end{array} \right\} \tag{37}$$

$n = 4$

$$\left. \begin{array}{c} a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_4 > 0; \\ a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0. \end{array} \right\} \tag{38}$$

Для $n = 2$ условием устойчивости является лишь положительность коэфициентов характеристического уравнения.

Для $n = 3$ и $n = 4$ положительность коэфициентов характеристического уравнения недостаточна.

Кроме этого, коэфициенты должны удовлетворять дополнительным неравенствам.

При $n \geqslant 5$ число подобных дополнительных неравенств возрастает Из структуры построения Δ_n и $c_{1,\, n+1}$ следует, что

$$c_{1,\, n+1} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = a_n \quad \text{и} \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

Если приравнять Δ_n нулю, то мы получим уравнения границ устойчивости

$$a_n = 0; \quad \Delta_{n-1} = 0. \tag{39}$$

Первая граница соответствует наличию у характеристического уравнения нулевого корня ($\lambda_c = 0$). Вторая граница соответствует наличию у характеристического уравнения чисто мнимых корней ($\lambda = \pm j\omega$). Уравнения (39) разбивают пространство параметров на ряд областей. Область, в которой выполняются все остальные неравенства ($\Delta_k > 0$ или $c_{1,\, k} > 0$), соответствует устойчивости, все остальные области соответствуют неустойчивости.

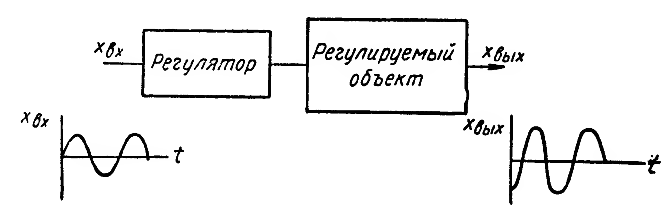
Если система находится на границе устойчивости, так что $\Delta_{n-1} = 0$, то граничная частота может быть найдена по формуле

$$\omega^2 = \frac{a_n \Delta_{n-3}}{\Delta_{n-2}} = \frac{a_n}{c_{1,\, n-1}},$$

где $c_{1,\, n-1}$ — коэфициент, определяемый из таблицы Рауса.

4. ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА — МИХАЙЛОВА

Частотный критерий устойчивости, первоначально разработанный в 1932 г. Найквистом для исследования усилителей с отрицательной обратной связью, был обоснован, обобщен и впервые применен в теории автоматического регулирования А. В. Михайловым [1].



Фиг. 10. К определению амплитудно-фазовой характеристики.

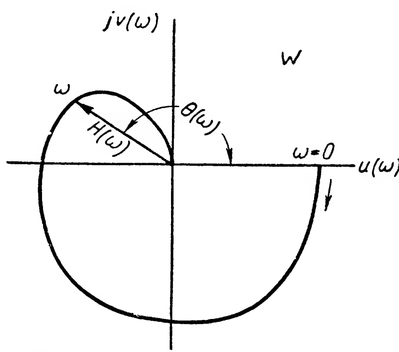
Этот критерий отличается от приведенных выше тем, что он позволяет судить об устойчивости систем по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы, которая может быть получена и экспериментальным путем.

Частотный критерий устойчивости богат физическим содержанием. Он связывает свойства разомкнутой системы со свойствами замкнутой системы.

Разомкнем систему автоматического регулирования и подадим на вход этой системы гармоническое возмущение с частотой ω и постоянной амплитудой $x_{вх}$ (фиг. 10).

Если разомкнутая система устойчива, то с течением времени свободные колебания в ней исчезнут и останутся вынужденные (установившиеся) колебания той же частоты, но с измененной амплитудой и фазой (фиг. 10), которые, естественно, зависят от частоты ω и параметров системы.

Амплитуда и фаза этих установившихся колебаний определяются амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы, которую можно вычислить, исходя из диференциальных уравнений или передаточной функции системы, как это было указано в предыдущих главах. Если передаточная функция разомкнутой системы равна



Фиг. 11. Годограф амплитудно-фазовой характеристики.

$$W(\lambda)=\frac{M_p(\lambda)}{D_p(\lambda)},$$

то, подставляя в нее $\lambda=j\omega$, находим

$$\frac{\overline{x}_{вых}}{\overline{x}_{вх}}=W(j\omega)=\frac{M_p(j\omega)}{D_p(j\omega)}.$$

$W(j\omega)$ можно записать в виде

$$W(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega),$$

если отделить действительную и мнимую части, или

$$W(j\omega)=H(\omega)\,e^{j\theta(\omega)},$$

где

$$H(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}$$

представляет собой модуль, а

$$\theta(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)}$$

фазу.

Выражение $W(j\omega)$ показывает зависимость относительного изменения модуля и фазы выходной величины разомкнутой системы по отношению к модулю и фазе входной величины. Поэтому часто $W(\omega)$ называют амплитудно-фазовой характеристикой. Значения $H(\omega)$ и $\theta(\omega)$ можно отложить в полярной системе координат в виде вектора. Кривая, описываемая концом этого вектора, при изменении ω от 0 до ∞ называется годографом амплитудно-фазовой характеристики (фиг. 11). Годограф амплитудно-фазовой характеристики может быть также изображен в декартовой системе координат $U(\omega)$, $V(\omega)$. Годограф амплитудно-фазовой характеристики совмещает в себе две характеристики: амплитудно-частотную и фазо-частотную. Первая из них называется также резонансной кривой.

Физический смысл критерия устойчивости Найквиста — Михайлова состоит в том, что он позволяет по годографу амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы судить об устойчивости замкнутой системы.

Рассмотрим функцию $\varphi(j\omega)$, связанную с $W(j\omega)$ простым соотношением

$$\varphi(j\omega) = 1 + W(j\omega) = \frac{D_p(j\omega) + M_p(j\omega)}{D_p(j\omega)} = \frac{D(j\omega)}{D_p(j\omega)}.$$

Знаменатель этой функции представляет собой характеристическую кривую разомкнутой системы, а числитель — характеристическую кривую замкнутой системы.

Предположим, что разомкнутая система устойчива. Устойчивость разомкнутой системы часто можно установить без всяких вычислений непосредственно по схеме системы. Так, например, разомкнутая система, состоящая из устойчивых звеньев и не содержащая обратных связей, заведомо устойчива.

Если разомкнутая система устойчива, то изменение аргумента $D_p(j\omega)$ при возрастании ω от 0 до ∞ будет равно

$$\Delta \arg_{0 \leqslant \omega \leqslant \infty} D_p(j\omega) = n\frac{\pi}{2},$$

где n — степень характеристического уравнения разомкнутой системы $D_p(\lambda) = 0$, совпадающая, очевидно, со степенью характеристического уравнения замкнутой системы[1]

$$D(\lambda) = D_p(\lambda) + M_p(\lambda).$$

Изменение аргумента $D(j\omega)$ при возрастании ω от 0 до ∞ в общем случае равно

$$\Delta \arg_{0 \leqslant \omega \leqslant \infty} D(j\omega) = (n - 2m)\frac{\pi}{2},$$

где m — число корней характеристического уравнения $D(\lambda) = 0$, лежащих в правой части комплексной плоскости.

Изменение аргумента

$$\varphi(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{D_p(j\omega)}$$

при возрастании ω от 0 до ∞ равно разности изменений аргумента $D(j\omega)$ и $D_p(j\omega)$, т. е.

$$\Delta \arg_{0 \leqslant \omega \leqslant \infty} \varphi(j\omega) = \Delta \arg_{0 \leqslant \omega \leqslant \infty} D(j\omega) - \Delta \arg_{0 \leqslant \omega \leqslant \infty} D_p(j\omega) =$$

$$= (n - 2m)\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{2} = -m\pi.$$

Система будет устойчива, если $m = 0$, т. е. если

$$\Delta \arg_{0 \leqslant \omega \leqslant \infty} \varphi(j\omega) = 0.$$

Изображая на комплексной плоскости $\varphi(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞, замечаем, что вектор $\varphi(j\omega)$ опишет угол, равный нулю, лишь

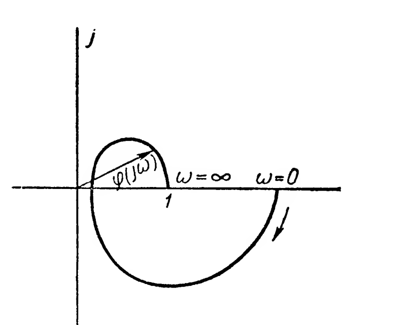
---

[1] Это следует из того, что степень числителя $M_p(\lambda)$ передаточной функции $W(\lambda) = \frac{M_p(\lambda)}{D_p(\lambda)}$ в реальных системах не может превосходить степени знаменателя.

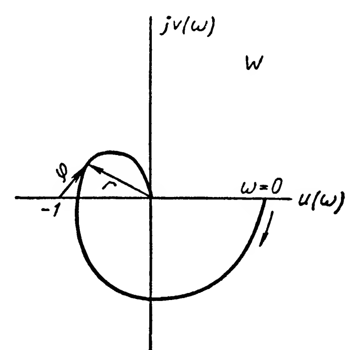
в том случае, когда этот годограф не охватывает начала координат (фиг. 12). Но от годографа $\varphi(j\omega)$ легко перейти к годографу $W(j\omega)$ т. е. к амплитудно-фазовой характеристике (фиг. 13), которая представляет собой ту же кривую, но сдвинутую на единицу влево. В плоскости $W(j\omega)$ начало вектора $\varphi(j\omega)$ находится в точке $-1, j0$, а конец вектора при изменении ω скользит по амплитудно-фазовой характеристике. Изменение аргумента $\varphi(j\omega)$ будет равно нулю, если точка $-1, j0$ будет находиться вне амплитудно-фазовой характеристики. Отсюда и следует формулировка частного критерия устойчивости:

Система автоматического регулирования будет устойчивой, если амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$ *не охватывает точки* $-1, j0$.

При рассмотрении многоконтурных систем или систем, содержащих неустойчивые звенья, разомкнутая система может оказаться неустойчи-



Фиг. 12. К доказательству частотного критерия устойчивости.



Фиг. 13. Амплитудно-фазовая характеристика, соответствующая устойчивой системе.

вой. Естественно, что для такой разомкнутой системы возможность экспериментального определения амплитудно-фазовой характеристики исключена. Однако ее можно вычислить по уравнениям системы и затем по этой характеристике судить об устойчивости системы. В этом случае изменение аргумента $D_p(j\omega)$ при возрастании ω от 0 до ∞ будет равно

$$\Delta \underset{0\leqslant\omega\leqslant\infty}{\arg} D_p(j\omega) = (n - 2P_1)\frac{\pi}{2},$$

где P_1 — число корней характеристического уравнения разомкнутой системы $D_p(\lambda) = 0$, лежащих в правой части плоскости λ.

Если замкнутая система устойчива ($P = 0$), то на основании принципа аргумента

$$\Delta \underset{0\leqslant\omega\leqslant\infty}{\arg} D(j\omega) = n\frac{\pi}{2}$$

и, следовательно,

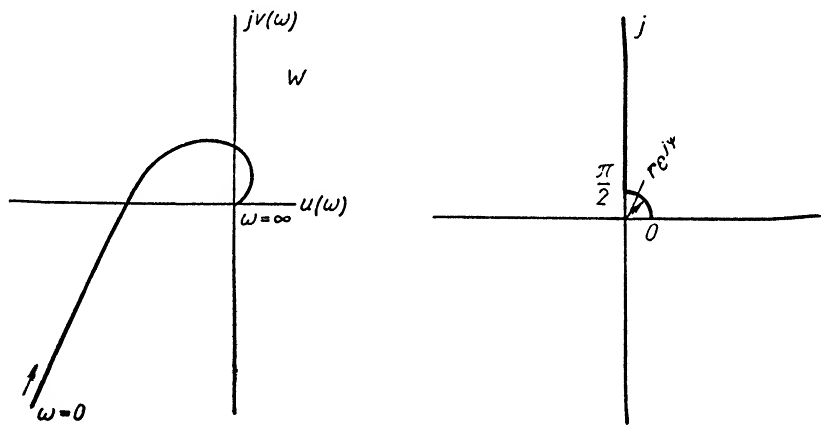
$$\Delta \underset{0\leqslant\omega\leqslant\infty}{\arg} \varphi(j\omega) = \Delta \underset{0\leqslant\omega\leqslant\infty}{\arg} D(j\omega) - \Delta \underset{0\leqslant\omega\leqslant\infty}{\arg} D_p(j\omega) =$$

$$= n\frac{\pi}{2} - (n - 2P_1)\frac{\pi}{2} = P_1\pi = \frac{P_1}{2}2\pi.$$

Продолжая рассуждения, аналогичные приведенным выше, приходим к следующей формулировке критерия устойчивости для этого случая.

Система автоматического регулирования будет устойчивой, если амплитудно-фазовая характеристика охватывает точку $-1, j0$ *в положительном направлении* $\frac{p_1}{2}$ *раз. При* $p_1 = 0$ *получаем прежний результат.*

Рассмотрим еще один важный для приложения случай, когда при $\omega = 0$ амплитудно-фазовая характеристика обращается в ∞ (фиг. 14). Такой частотной характеристикой обладают астатические системы регулирования, следящие системы и вообще системы, содержащие интегрирующие звенья.



Фиг. 14. Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой нейтральной системы ($\nu = 1$).

Фиг. 15. Изменение λ.

Для подобных разомкнутых систем характеристическое уравнение имеет корни, лежащие в начале координат, т. е. корни, равные нулю, и оно может быть записано в виде

$$D_p(\lambda) = D_1(\lambda)\lambda^{\nu},$$

где ν — целое число и $D_1(\lambda) = 0$ не имеет корней, равных нулю.

Характеристическая кривая

$$D(j\omega) = D_1(j\omega)(j\omega)^{\nu}$$

при $\omega = 0$ касается начала координат, и поэтому изменение аргумента $D(j\omega)$ при $\omega = 0$ становится неопределенным. Для того чтобы освободиться от этой неопределенности, будем полагать в многочлене $D_p(\lambda)$ при $\lambda > 0$ $\lambda = j\omega$, а при λ, близком к нулю,

$$\lambda = re^{j\psi}; \quad \left(r \to 0; \ \frac{\pi}{2} \geqslant \psi \geqslant 0\right).$$

Это эквивалентно тому, что λ изменяется вблизи $\lambda = 0$ по дуге бесконечно малого радиуса (лежащей справа), а затем по мнимой оси $\lambda = j\omega$ (как показано на фиг. 15).

При изменении λ изменение аргумента $D_p(\lambda)$ будет таким же, как и в случаях, рассмотренных выше, и формулировка критерия устойчивости останется без изменения.

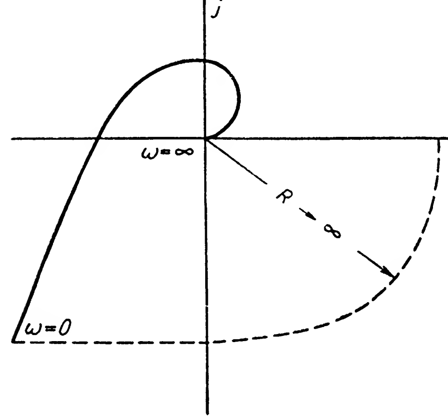
Вид годографа частотной характеристики

$$W(j\omega)=\frac{M_p(j\omega)}{D_1(j\omega)(j\omega)^{\nu}}$$

при изменении λ вдоль мнимой оси, т. е. при изменении ω от 0 до ∞, будет совпадать с фиг. 14. При изменении λ вдоль дуги бесконечно малого радиуса, т. е. малых λ,

$$W(\lambda)=\frac{k}{\lambda^{\nu}}=\frac{k}{r^{\nu}}e^{-j\nu\psi},$$

где k — отношение коэфициентов при нулевой степени в многочленах $M_p(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$.



Фиг. 16. Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой нейтральной системы, дополненная дугой бесконечно большого радиуса.

Следовательно, при $r\to 0$ и $\frac{\pi}{2}\geqslant\psi\geqslant 0$ величина $W(\lambda)$ будет изменяться по дуге бесконечно большого радиуса, описывая угол $\nu\frac{\pi}{2}$ (фиг. 16) (здесь $\nu=1$).

Для устойчивости системы точка $-1, j0$ должна находиться вне амплитудно-фазовой характеристики, дополненной дугой бесконечно большого радиуса $\left(\text{или охватываться } \frac{p_1}{2} \text{ раза}\right)$. Амплитудно-фазовая характеристика, изображенная на фиг. 16, соответствует устойчивой системе, если точка $-1, j0$ лежит вне ее.

Для практического применения удобнее использовать несколько иную формулировку критериев устойчивости, которая позволяет избежать непосредственного подсчета изменения аргумента.

Изменение аргумента $\varphi(j\omega)$ при возрастании ω от 0 до ∞ будет равно нулю, если число переходов $W(j\omega)$ через отрезок действительной оси $(-\infty, -1)$ с верхней полуплоскости в нижнюю и с нижней полуплоскости в верхнюю равны между собой. Это изменение аргумента будет равно $\pm P_1\pi$, если разность между ними равна $\pm\frac{P_1}{2}$.

Называя переход $W(j\omega)$ (с возрастанием ω) через отрезок действительной оси $(-\infty, -1)$ с верхней полуплоскости в нижнюю положительным, а с нижней полуплоскости в верхнюю — отрицательным, установленные выше критерии устойчивости можно сформулировать следующим образом:

Система автоматического регулирования будет устойчивой, если разность между положительными и отрицательными переходами амплитудно-фазовой характеристикой отрезка действительной оси

$(-\infty, -1)$ *равна* $\frac{P_1}{2}$, *где* P_1 — *число корней с положительной действительной частью характеристического уравнения разомкнутой системы* [1].

В частном случае при $P_1 = 0$, что соответствует устойчивой или нейтральной разомкнутой системе, приходим к выводу, что замкнутая система будет устойчива, если разность между положительными и отрицательными переходами амплитудно-фазовой характеристики отрезка действительной оси $(-\infty, -1)$ равна нулю.

Применение критерия в такой формулировке крайне просто. В точках перехода амплитудно-фазовой характеристикой отрезка действительной оси $(-\infty, -1)$ нужно проставить стрелки, направленные в сторону возрастания ω, и подсчитать разность между числом стрелок, направленных вверх и вниз. Так, например, для амплитудно-фазовой характеристики, изображенной на фиг. 17, имеем $2-1=1$, и если разомкнутая система неустойчива и $P_1 = 2$, то замкнутая система будет устойчивой.

Фиг. 17. Иллюстрация ко второй формулировке критерия устойчивости.

В последнее время получил распространение критерий устойчивости, основанный на рассмотрении обратной амплитудно-фазовой характеристики,

$$W^{-1}(j\omega) = \frac{1}{W(j\omega)} = \frac{D_p(j\omega)}{M_p(j\omega)}.$$

Так как обычно степень $D_p(\lambda)$ выше степени $M_p(\lambda)$, то построение обратной амплитудно-фазовой характеристики $W^{-1}(j\omega)$ оказывается проще, чем $W(j\omega)$. Кроме того, обратная амплитудно-фазовая характеристика может быть весьма просто непосредственно использована при анализе качества систем.

Для доказательства критерия устойчивости применительно к обратной амплитудно-фазовой характеристике воспользуемся известным свойством инверсии.

Так как

$$W^{-1}(j\omega) = \frac{1}{W(j\omega)} = \frac{1}{H(\omega)} e^{-j\theta(\omega)},$$

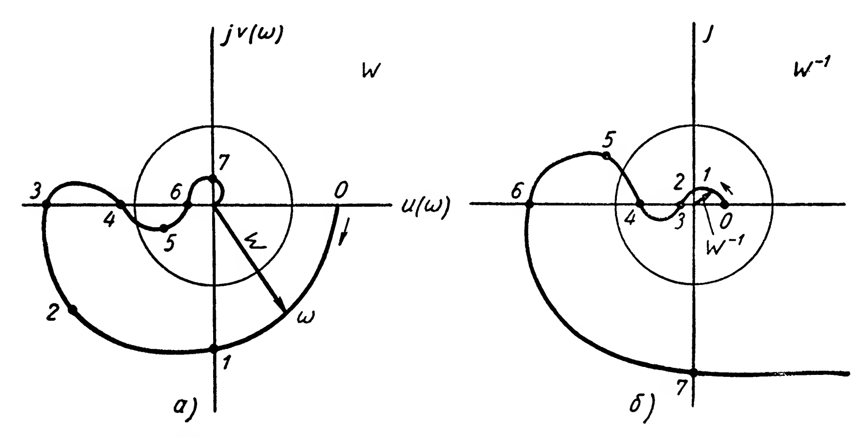
то отсюда следует, что модуль обратной амплитудно-фазовой характеристики равен обратной величине модуля амплитудно-фазовой характе-

[1] Если $W(j\omega)$ при $\omega = 0$ начинается на отрезке действительной оси $(-\infty, -1)$, то будем считать, что $W(j\omega)$ при $\omega = 0$ совершает половину перехода. Это обстоятельство следует учитывать при подсчете числа переходов.

ристики, а фаза обратной амплитудно-фазовой характеристики — фазе амплитудно-фазовой характеристики с обратным знаком.

Следовательно, если на плоскости W провести окружность радиуса 1, то точки соответствующие значениям ω, лежащим внутри (вне) этой окружности на плоскости W^{-1}, будут находиться вне (внутри) окружности радиуса 1, а аргументы этих точек будут отличаться знаком (фиг. 18, *а* и *б*).

Точкам пересечения $W(j\omega)$ с отрезком действительной оси $(-\infty, -1)$ будут соответствовать точки пересечения $W^{-1}(j\omega)$ с отрезком



Фиг. 18. Построение обратной амплитудно-фазовой характеристики.

действительной оси $(0, -1)$, а знак перехода в этих точках, очевидно, будет обратный. Поэтому можно сформулировать следующий критерий устойчивости:

Система автоматического регулирования устойчива, если разность между отрицательными и положительными переходами обратной амплитудно-фазовой характеристики отрезка действительной оси $(0, -1)$ равна P_1, где P_1 — число корней с положительной действительной частью характеристического уравнения разомкнутой системы.

При $P_1 = 0$, что соответствует устойчивой или нейтральной разомкнутой системе, система будет устойчива, если разность между отрицательными и положительными переходами обратной амплитудно-фазовой характеристики $W^{-1}(j\omega)$ равна нулю.

В том случае, когда характеристическое уравнение разомкнутой системы $D(\lambda) = 0$ имеет корни, равные нулю, т. е. $D_p(\lambda) = D_1(\lambda)\lambda^{\nu}$ (здесь ν — целое число), формулировка критерия останется без изменений, если обратную амплитудно-фазовую характеристику дополнить дугой бесконечно малого радиуса, описывающей центральный угол, равный $+\nu\frac{\pi}{2}$.

При построении прямой или обратной амплитудно-фазовых характеристик можно воспользоваться теми же приемами, что и при построе-

нии характеристической кривой, либо строить их по частотным характеристикам отдельных звеньев (см. главу VII).

Следует отметить, что в ряде случаев при построении характеристических кривых и амплитудно-фазовых характеристик оказывается, что модули этих кривых изменяются при изменении ω в очень широких пределах. Это обстоятельство практически затрудняет их графическое изображение. В этих случаях применяют логарифмический масштаб для модулей кривых. Часто амплитудно-фазовую характеристику изображают в логарифмическом масштабе не в полярных, а в декартовых координатах. Метод логарифмических частотных характеристик излагается ниже, в главе XII.

Если пользоваться нормированной амплитудно-фазовой характеристикой

$$\overline{W}(j\omega)=\frac{W(j\omega)}{K},$$

где K — коэфициент, не зависящий от частоты, то все формулировки частотных критериев устойчивости остаются без изменения за исключением того, что роль точки $-1, j0$ теперь будет играть точка $-\frac{1}{K}, j0$ (а для обратной частотной характеристики точка $K, j0$).

5. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ ПО АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ [6]

Выше мы рассмотрели пример применения критерия Рауса. Поясним теперь применение частотного критерия на простейших системах в виде типовых звеньев.

а) Апериодическое звено

Рассмотрим систему, которая в разомкнутом состоянии имеет характеристики устойчивого апериодического звена, и дадим ответ на вопрос о том, будет ли эта система устойчива в замкнутом состоянии.

Амплитудно-фазовая характеристика апериодического звена, определяемая выражением (см. главу VII)

$$W(j\omega)=\frac{K}{Tj\omega+1}, \tag{40}$$

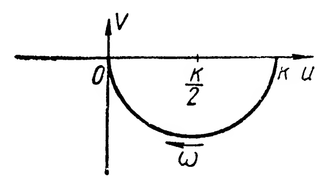
приведена на фиг. 19. Как мы видим, это — окружность с центром на вещественной оси U в точке K, расположенная целиком справа от мнимой оси V.

При увеличении передаточного коэфициента K центр окружности касается мнимой оси, никогда не пересекая ее, как бы ни было велико K. При этих условиях критическая точка $(-1, j0)$ никогда не может попасть внутрь амплитудно-фазовой характеристики, откуда следует, что устойчивое апериодическое звено, охваченное отрицательной обратной связью, остается устойчивым при любых значениях K.

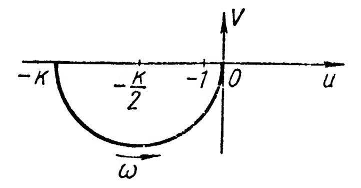
Неустойчивое апериодическое звено амплитудно-фазовой характеристики определяется выражением

$$W(j\omega)=\frac{K}{Tj\omega-1}. \qquad (41)$$

Фиг. 20 показывает, что неустойчивое апериодическое звено, охваченное отрицательной обратной связью, является устойчивой системой при всех $K>1$. Амплитудно-фазовая характеристика, соответствующая уравнению (41) при всех $K>1$ совершает половину положительного



Фиг. 19. Амплитудно-фазовая характеристика устойчивого апериодического звена. Замкнутая система устойчива при всех $K>-0$.

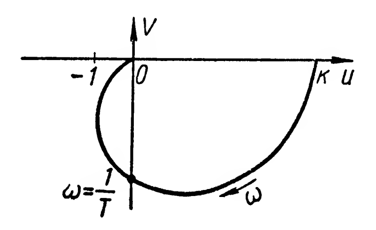


Фиг. 20. Амплитудно-фазовая характеристика неустойчивого апериодического звена. Замкнутая система устойчива при всех $K>1$.

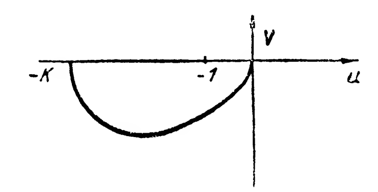
перехода, что (см. выше, п. 4) является необходимым и достаточным условием для устойчивости замкнутой системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет один полюс в правой полуплоскости ($P_1=1$).

б) Колебательное звено

Перейдем к системе, которую в разомкнутом состоянии можно рассматривать как устойчивое колебательное звено. Выражение для



Фиг. 21. Амплитудно-фазовая характеристика устойчивого колебательного звена. Замкнутая система устойчива при всех $K>-1$.



Фиг. 22. Амплитудно-фазовая характеристика неустойчивого колебательного звена $\frac{K}{T^2s^2+2\zeta Ts-1}$. Замкнутая система устойчива при всех $K>1$.

амплитудно-фазовой характеристики в этом случае (см. главу VII) имеет вид

$$W(j\omega)=\frac{K}{1-T^2\omega^2+j2\zeta T\omega}. \qquad (42)$$

Амплитудно-фазовая характеристика вида (42) изображена на фиг. 21. Из этой кривой ясно, что система, состоящая из устойчивого колеба-

тельного звена, охваченного отрицательной обратной связью, устойчива при любых положительных значениях K, ζ, T, так как ни при каких значениях этих параметров критическая точка $(-1, j0)$ не может попасть внутрь амплитудно-фазовой характеристики.

Предположим теперь, что система в разомкнутом состоянии является неустойчивым колебательным звеном с передаточной функцией

$$W_{(s)} = \frac{K}{T^2s^2 + 2\zeta Ts - 1} \qquad (43)$$

и амплитудно-фазовая характеристика вида

$$W(j\omega) = \frac{K}{-T^2\omega^2 - 1 + 2\zeta Tj\omega}, \qquad (44)$$

где $\zeta > 1$.

Амплитудно-фазовая характеристика вида (44) приведена на фиг. 22. Из этой фигуры очевидно, что неустойчивая система, имеющая передаточную функцию вида (43) с одним полюсом, расположенным в правой полуплоскости, при охвате ее отрицательной обратной связью является устойчивой при всех $K > 1$.

Это следует из того (см. выше, п. 4), что ее амплитудно-фазовая характеристика совершает половину положительного перехода, а $P_1 = 1$.

Рассмотрим неустойчивое колебательное звено с передаточной функцией вида

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 - 2\zeta Ts + 1}. \qquad (45)$$

Фиг. 23. Амплитудно-фазовая характеристика неустойчивого колебательного звена $\frac{K}{T^2s^2 - 2\zeta Ts + 1}$.

Соответствующее выражение для амплитудно-фазовой характеристики

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 - T^2\omega^2 - 2\zeta Tj\omega}. \qquad (46)$$

Амплитудно-фазовая характеристика вида (46) приведена на фиг. 23. В противоположность предыдущему случаю неустойчивое колебательное звено вида (45) нельзя стабилизировать при помощи введения отрицательной обратной связи ни при каких K. Действительно, в случае уравнения (46) амплитудно-фазовая характеристика не охватывает точки $(-1, j0)$, между тем как для устойчивости это необходимо, поскольку передаточная функция разомкнутой системы содержит два полюса, расположенные в правой полуплоскости.

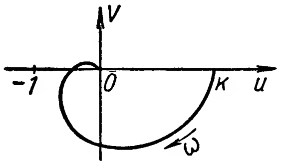
в) Последовательное соединение трех апериодических звеньев

Рассмотрим систему, состоящую в разомкнутом состоянии из трех апериодических звеньев. Выражение для амплитудно-фазовой характеристики имеет вид

$$KW(j\omega) = \frac{K}{(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)(T_3j\omega + 1)}, \qquad (47)$$

и система в замкнутом состоянии может быть устойчивой или неустойчивой в зависимости от выбора параметров K, T_1, T_2, T_3 (фиг. 24).

Найдем критическое значение передаточного коэфициента $K_{кр}$, при котором амплитудно-фазовая характеристика проходит через точку $-1, j0$



Фиг. 24. Амплитудно-фазовая характеристика трех последовательно соединенных звеньев. Замкнутая система устойчива при всех

$$K < 2 + \left(\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_1}{T_3} + \frac{T_2}{T_3} + \frac{T_3}{T_2} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_2}{T_1}\right).$$

и система находится на границе устойчивости. Для этого отделим в уравнении (48) вещественную часть $U(\omega)$ от мнимой $V(\omega)$;

$$U(\omega) = \frac{K\left[1 - (T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1)\,\omega^2\right]}{\left[1 - (T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1)\,\omega^2\right]^2 + \left[(T_1 + T_2 + T_3)\,\omega - T_1T_2T_3\omega^3\right]^2}; \qquad (48)$$

$$V(\omega) = \frac{-K\left[(T_1 + T_2 + T_3)\,\omega - T_1T_2T_3\omega^3\right]}{\left[1 - (T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1)\,\omega^2\right]^2 + \left[(T_1 + T_2 + T_3)\,\omega - T_1T_2T_3\omega^3\right]^2} \qquad (49)$$

и приравняем уравнение (48) единице, а (49) — нулю. Тогда из уравнения (49) получим

$$T_1T_2T_3\omega_{кр}^2 - (T_1 + T_2 + T_3) = 0 \qquad (50)$$

и

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1T_2T_3}}. \qquad (51)$$

Приравнивая уравнение (48) единице и подставив уравнение (49) в (48), получим

$$K_{кр} = 2 + \sum_{\substack{\mu=1\\ \nu=1}}^{3} K_{\mu\nu}, \qquad (52)$$

где

$$K_{\mu\nu} = \frac{T_\mu}{T_\nu}; \quad \mu \neq \nu.$$

Из уравнения (52) легко видеть, что, для того чтобы неустойчивость могла наступить лишь при достаточно больших K, необходимо, чтобы по крайней мере одна из величин $K_{\mu\nu}$ была гораздо больше единицы, т. е. $K_{кр}$ тем выше, чем больше отношение наибольшей из трех постоянных времени T_1, T_2, T_3 к наименьшей.

г) Последовательное соединение интегрирующего и неустойчивого апериодического звена

Определим, является ли система, имеющая в разомкнутом состоянии передаточную функцию вида

$$KW(s) = \frac{K}{s(Ts - 1)}, \qquad (53)$$

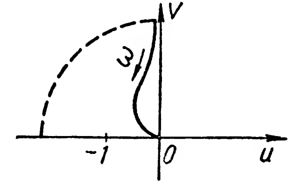
устойчивой в замкнутом состоянии.

Амплитудно-фазовая характеристика системы приведена на фиг. 25, Амплитудно-фазовая характеристика делает половину перехода, но не в положительном, а в отрицательном направлении. Поэтому система в замкнутом состоянии неустойчива при любых K.

Фиг. 25. Амплитудно-фазовая характеристика интегрирующего и неустойчивого апериодического звена

$$KW(s)=\frac{K}{s(Ts-1)}.$$

Замкнутая система неустойчива при любых положительных K и T.

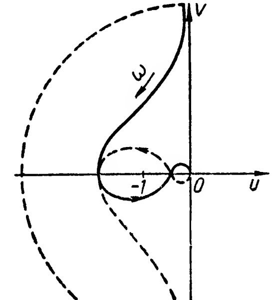


д) Последовательное соединение интегрирующего, колебательного, неустойчивого апериодического и диференцирующего звеньев

Определим, является ли система, имеющая в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$KW(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s(T_k^2s^2+2\zeta T_k+1)(Ts-1)}, \tag{54}$$

устойчивой в замкнутом состоянии, если при выбранных значениях параметров ее амплитудно-фазовая характеристика имеет вид, графически изображенный на фиг. 26.



Фиг. 26. Амплитудно-фазовая характеристика системы, имеющей передаточную функцию

$$KW(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s(Ts-1)\left(T_k^2s^2+2\zeta_kT_ks+1\right)}.$$

Замкнутая система устойчива.

Так как передаточная функция разомкнутой системы имеет один полюс в правой полуплоскости, а амплитудно-фазовая характеристика при изменении ω от $-\omega$ до $+\omega$ делает один оборот вокруг точки -1, $j0$ в положительном направлении, то замкнутая система устойчива или, иначе, амплитудно-фазовая характеристика при изменении ω от 0 до ∞ совершает половину перехода в положительном направлении. Читателю предлагается проверить устойчивость рассмотренных систем при помощи критерия Рауса или Гурвица [неравенства (36)—(38)] или Михайлова.

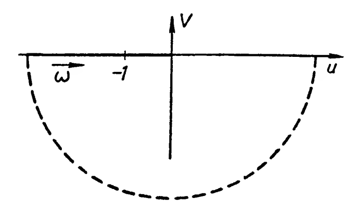
е) Последовательное соединение двух интегрирующих звеньев

Система, состоящая в разомкнутом состоянии из двух последовательно соединенных интегрирующих звеньев, имеет передаточную функцию

$$W(s) = \frac{K}{s^2} \tag{55}$$

и амплитудно-фазовую характеристику

$$W(j\omega) = \frac{K}{\omega^2} e^{-j\pi}. \tag{56}$$



Фиг. 27. Амплитудно-фазовая характеристика системы из двух интегрирующих звеньев. Замкнутая система на границе устойчивости.

Эта система в замкнутом состоянии, как это ясно из фиг. 27, находится на границе устойчивости, так как ее амплитудно-фазовая характеристика проходит через критическую точку.

Важное достоинство частотных критериев устойчивости состоит в следующем. При исследовании устойчивости сложных систем мы иногда не можем написать уравнений некоторых элементов системы. В этих случаях можно экспериментально снять частотные характеристики этих элементов и, применяя их, построить необходимую для исследования устойчивости амплитудно-фазовую характеристику. Иные критерии здесь неприменимы. Кроме того, частотные критерии устойчивости позволяют довольно просто исследовать устойчивость систем с распределенными параметрами [7] и систем с запаздыванием [8] (к этим системам также применим критерий устойчивости Михайлова). Наконец, частотные критерии, точнее, амплитудно-фазовые характеристики, используются для получения сведений относительно характера процесса регулирования (см. далее, главу XV).

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов А. В., „Автоматика и телемеханика“ № 3, 1938.
2. Сушкевич А. С., Курс высшей алгебры, Гостехтеоретиздат, 1946.
3. Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н., Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций, „Труды Математического института им. В. А. Стеклова“, вып. XXVI, АН СССР, 1949.
4. Михайлов А. В., „Журнал технической физики“ № 1, 1939.
5. Цыпкин Я. З., „Журнал технической физики“ № 6, 1946.
6. Солодовников В. В., „Автоматика и телемеханика“ № 1, 1946.
7. Солодовников В. В., „Автоматика и телемеханика“ № 1, 1941.
8. Цыпкин Я. З., „Автоматика и телемеханика“ № 2—3, 1946.

ГЛАВА XI

ВЫДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Критерии устойчивости позволяют выяснить, устойчива ли система, если все ее параметры (все постоянные времени и коэфициенты усиления) заданы. Часто, однако, вопрос ставится иначе: заданы все параметры системы, кроме одного или двух, которые могут изменяться в некоторых пределах; требуется определить, при каких значениях этого одного параметра (или этих двух параметров) система устойчива.

Поставленная таким образом задача может быть решена с помощью критериев устойчивости. Если пользоваться критерием Михайлова или амплитудно-фазовым критерием, то для решения задачи надо, задаваясь разными значениями параметров, каждый раз заново строить соответствующий годограф и определять, устойчива ли система при этих значениях. параметров. Чтобы установить границы области устойчивости, нужно много раз повторять построения годографа Михайлова или амплитудно-фазовой характеристики. Если же воспользоваться критерием Гурвица, то решение задачи окажется связанным с анализом сложных и громоздких выражений, требующим значительного труда, или с построением кривых, определяющих зависимость значений определителей Гурвица от рассматриваемых параметров.

Пусть, например, старший определитель Гурвица Δ зависит от какого-либо параметра μ. Построив в плоскости μ,Δ кривую, определяемую уравнением $\Delta(\mu)=0$, найдем отрезки оси μ, соответствующие таким значениям μ, при которых $\Delta(\mu)>0$. Пусть точка $\mu=\mu_0$ принадлежит одному из таких отрезков и известно, что при $\mu=\mu_0$ система устойчива. Тогда весь этот отрезок принадлежит области устойчивости системы по параметру μ, так как условия устойчивости могут нарушаться лишь если Δ изменит знак [1].

Если уравнение $\Delta(\mu)=0$ не слишком сложно, такой путь часто исчерпывает задачу (см., например, [1]). Но во многих случаях уравнение это сложно и такие построения громоздки.

В таких случаях применяют другие приемы выделения областей устойчивости.

Область устойчивости в плоскости двух действительных параметров системы регулирования была впервые выделена И. А. Вышнеградским.

[1] Обратное утверждение, конечно, неверно. Система может быть неустойчива, хотя $\Delta>0$, если не положительны остальные определители Гурвица.

В последующие годы построение областей устойчивости проводилось для различных частных задач в ряде работ. В работе А. А. Соколова [2] развивался прием построения области устойчивости с помощью отображения в плоскости параметров мнимой оси плоскости корней. Это направление было завершено работой Ю. И. Неймарка, который предложил описываемые далее приемы выделения областей устойчивости и разработал общую точку зрения на разные критерии устойчивости [5], [6].

1. ПОНЯТИЕ О Д-РАЗБИЕНИИ ПРОСТРАНСТВА КОЭФИЦИЕНТОВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим в качестве примера характеристическое уравнение

$$a_0\lambda^n + 5\lambda^{n-1} + \cdots + 8\lambda + a_n = 0, \qquad (57)$$

в котором все коэфициенты, кроме двух (a_0 и a_n), определены.

Положим, что при некоторых фиксированных значениях a_0 и a_n данное уравнение имеет в плоскости корней k корней, лежащих слева, и $n-k$ корней, лежащих справа от мнимой оси. Изменения в определенных пределах значений коэфициентов a_0 и a_n в характеристическом уравнении (57) не вызывают изменения числа корней, расположенных справа и слева от мнимой оси в плоскости корней. Поэтому можно выделить на плоскости a_0, a_n такую область, каждая точка которой определяет многочлен (57), также имеющий k корней, лежащих слева, и $n-k$ корней, лежащих справа от мнимой оси. Эту область обозначим $Д(k)$.

Выше в качестве примера рассматривалось уравнение (57), в котором заданы значения всех коэфициентов, кроме первого и последнего. Совершенно аналогично может быть рассмотрено разбиение на области $Д(k)$ плоскости любых двух коэфициентов этого уравнения, если все остальные коэфициенты — заданные числа.

Число k может иметь любое целое значение $1, 2, \cdots, n$, и, таким образом, в плоскости a_0, a_n можно указать области $Д(k)$, соответствующие разным значениям k. Так, например, если характеристическое уравнение имеет третью степень, т. е. если $n=3$, то в общем случае могут быть указаны области $Д(0)$, $Д(1)$, $Д(2)$ и $Д(3)$. Последняя область и будет собственно областью устойчивости в пространстве коэфициентов.

Если в этом характеристическом уравнении все коэфициенты, кроме двух, — конкретные числа, то плоскость этих двух неопределенных коэфициентов может и не содержать какой-либо из указанных областей. Если, например, не существует области $Д(3)$, то это значит, что при любых значениях этих неопределенных коэфициентов и при заданных значениях остальных коэфициентов уравнение не может иметь трех корней с отрицательной действительной частью слева от мнимой оси, т. е. система не может быть сделана устойчивой.

Если бы в уравнении (57) были неопределенными не два, а три коэфициента, например a_0, a_1 и a_n, то пришлось бы рассмотреть трех-

мерное пространство, откладывая по осям координат a_0, a_1 и a_n, и область $Д(k)$ в этом пространстве выделялась бы некоторой поверхностью.

При большем числе коэфициентов приходится рассматривать соответствующее многомерное пространство коэфициентов, и область $Д(k)$ выделяется гиперповерхностью.

Такое разбиение пространства коэфициентов называется $Д$-разбиением.

Положим, что k корней полинома

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (57')$$

лежат все слева от мнимой оси. Будем плавно изменять значения коэфициентов a. Корни при этом могут перейти в правую полуплоскость, причем, очевидно, переход этот может быть осуществлен только через мнимую ось или через бесконечность, причем корень становится равным бесконечности только при значениях параметров, обращающих в нуль коэфициент a_0.

Переход в пространстве коэфициентов через границу $Д$-разбиения соответствует в плоскости корней переходу корней через мнимую ось. Отсюда следует метод определения границы $Д$-разбиения: она определяется параметрически заменой в исследуемом полиноме λ на $j\omega$ (где ω — переменная величина, а $j=\sqrt{-1}$) и может быть построена изменением значения ω от $-\infty$ до $+\infty$. В этом смысле граница $Д$-разбиения есть отображение мнимой оси плоскости корней на пространство коэфициентов характеристического уравнения.

До сих пор говорилось только о $Д$-разбиении пространства коэфициентов характеристического уравнения. Разумеется, аналогичным образом можно построить $Д$-разбиение пространства любых параметров, от которых зависят коэфициенты характеристического уравнения (например, параметров исследуемой системы: постоянных времени и коэфициентов усиления).

В конечном итоге необходимо выделить только область устойчивости, т. е. область $Д(n)$, но построение всего $Д$-разбиения оказывается часто самым простым путем для построения границы области устойчивости.

2. $Д$-РАЗБИЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ОДНОГО КОМПЛЕКСНОГО ПАРАМЕТРА

Пусть нас интересует влияние какого-либо параметра w. Положим, что можно разрешить уравнение относительно w, т. е. привести его к виду

$$Q(\lambda) + wR(\lambda) = 0$$

или

$$w = -\frac{Q(\lambda)}{R(\lambda)}.$$

Например: для $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ и $w = a_1$

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + a_2 \text{ и } R(\lambda) = \lambda;$$

для $(T_1\lambda+1)(T_2\lambda+1)+1=0$ и $w=I_1$

$$Q(\lambda)=(T_2\lambda+1)+1 \text{ и } R(\lambda)=\lambda(T_2\lambda+1).$$

Представляют интерес только действительные значения w. Временно предположим, однако, что w — комплексное число, и отобразим мнимую ось плоскости корней на плоскость w.

После выделения области устойчивости в плоскости w можно будет рассматривать лишь действительные значения w, т. е. точки действительной оси, лежащие в области устойчивости.

Для этого в

$$w=-\frac{Q(\lambda)}{R(\lambda)}$$

подставим

$$\lambda=j\omega,$$

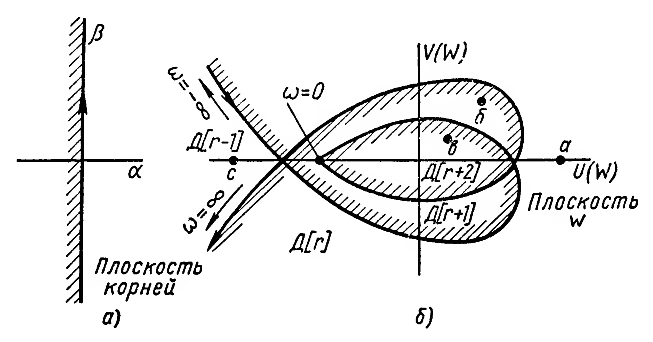
получим

$$w(j\omega)=-\frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)}$$

и отделим мнимую и действительную части

$$w(j\omega)=-\frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)}=U(\omega)+jV(\omega).$$

Задавая ω значения от $-\infty$ до $+\infty$, построим в плоскости U, V (назовем ее плоскостью w) по точкам кривую, отображающую мнимую



Фиг. 28. Отображение мнимой оси плоскости корней на плоскость w.

ось плоскости корней на плоскость w, т. е. границу $Д$-разбиения плоскости w. Эта граница $Д$-разбиения в данном случае симметрична относительно действительной оси, и для построения всей кривой достаточно построить половину ее, соответствующую $0\leqslant\omega<\infty$, а затем дополнить ее зеркальным отображением относительно действительной оси.

Если двигаться в плоскости корней вдоль мнимой оси из $-\infty$ в $+\infty$, то область, где должны располагаться корни для устойчивости процесса, будет все время находиться слева (фиг. 28, *а*).

Идя по граничной кривой $Д$-разбиения в направлении от $\omega=-\infty$ к $\omega=+\infty$, будем штриховать эту кривую слева (фиг. 28, *б*).

Если в плоскости w пересекаем $Д$-кривую, переходя с заштрихованной стороны на незаштрихованную, то в плоскости корней один корень пересекает мнимую ось, переходя с левой полуплоскости на правую полуплоскость.

Выберем в плоскости w произвольную точку, например точку a на фиг. 28, и предположим, что при $w = a$ рассматриваемое уравнение имеет r корней, расположенных слева от мнимой оси, и $n - r$ корней, расположенных справа от нее (число r пока неизвестно). Это значит, что точка a принадлежит области $Д(r)$. Тогда всю область $Д(r)$ составляет совокупность точек плоскости w, в которые можно попасть из точки a, не пересекая границы $Д$-разбиения.

Чтобы из точки a перейти в точку $б$, необходимо пересечь границу $Д$-разбиения 1 раз с незаштрихованной стороны на заштрихованную сторону. При этом в плоскости корней один корень перемещается через мнимую ось справа налево. Следовательно, точка $б$ принадлежит области $Д\ (r+1)$. Этой же области принадлежит любая другая точка плоскости w, в которую можно перейти из точки $б$, не пересекая границы $Д$-разбиения. Рассуждая аналогично, установим, что точка $в$ принадлежит области $Д(r+2)$, и т. д.

Если подобная „разметка областей" выполнена, то сразу же определяется единственный претендент на область устойчивости — им является область с самой большой отметкой, так как областью устойчивости служит область $Д(n)$, а отметка не может быть больше n.

В том случае, когда заранее известно, что существует значение w, при котором система устойчива, работа по определению области устойчивости на этом заканчивается. Если же нельзя заранее утверждать, что такое значение существует, надо проверить, является ли область с самой большой отметкой областью устойчивости. Для этого достаточно проверить, удовлетворяет ли какому-либо критерию устойчивости рассматриваемое уравнение при каком-нибудь одном значении w, принадлежащем этой области.

Предположим, например, что фиг. 28 относится к характеристическому уравнению пятой степени ($n = 5$) и что при $w = U_a$ это уравнение имеет три корня с отрицательной действительной частью. Тогда точка $в$ принадлежит области $Д(3)$, т. е. $r = 3$.

Следовательно, в этом случае $r + 2 = 5$, и область $Д(r+2)$ является областью устойчивости системы. Принадлежащий этой области отрезок действительной оси указывает действительные значения w, при которых система устойчива.

Если бы в этом же случае фиг. 28, $б$ относилась к уравнению не пятой, а шестой степени, то область $(r+2)$ уже не была бы областью устойчивости. Плоскость w в этом случае вообще не содержала бы области устойчивости.

Часто можно вычислить число корней с положительной действительной частью полинома, соответствующего какой-либо точке плоскости w, если пользоваться формулой

$$m = v + \frac{v_0 + n_1}{2} - \frac{\varphi}{2\pi}, \tag{58}$$

где m — число корней полинома, имеющих положительную действительную часть при каком-либо значении $w = w_0$;

v — число корней с положительной действительной частью уравнения $R(\lambda) = 0$;

v_0 — число нулевых и чисто мнимых корней этого же уравнения $R(\lambda) = 0$;

n_1 — разность степеней полиномов $Q(\lambda) + wR(\lambda)$ и $R(\lambda)$;

φ — приращение аргумента вектора, начало которого лежит в точке $w = w_0$, а конец скользит по границе $Д$-разбиения от точки, соответствующей $\omega = -\infty$, до точки, соответствующей $\omega = +\infty$.

Если граница $Д$-разбиения состоит из нескольких ветвей, то φ — сумма приращений аргументов указанного вектора, подсчитанных порознь для каждой из ветвей границы $Д$-разбиения.

Эта формула может быть выведена тем же самым приемом, который использовался в главе X, посвященной критериям устойчивости для доказательства критерия Михайлова.

Построив $Д$-разбиение плоскости w и определив число корней, соответствующее каждой области, остается выяснить, каким из этих областей принадлежат те или иные точки действительной оси.

Приведем несколько примеров построения $Д$-разбиения.

Фиг. 29. Построение области устойчивости в примере 1.

Пример 1. Дано характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + w = 0.$$

Решая его относительно параметра w, получим

$$w = -\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda$$

и, произведя замену $\lambda = j\omega$, найдем

$$w = j\omega^3 + \omega^2 - j\omega = U + jV,$$

где

$$U = \omega^2; \quad V = \omega^3 - \omega.$$

Построим границу $Д$-разбиения в плоскости $U_1 V$ (фиг. 29), заметив что при $\omega = 0$: $U = 0$ и $V = 0$; при $\omega = 1$: $U = 1$ и $V = 0$ и при $\omega \to \infty$: как $U \to \infty$, так и $V \to \infty$.

Заштрихуем кривую слева, идя от $\omega = -\infty$ к $\omega = \infty$. Очевидно, что областью, соответствующей полиномам, имеющим наибольшее число корней слева от мнимой оси, будет область, заштрихованная на фиг. 29.

Чтобы убедиться, что эта область будет областью устойчивости, возьмем граничную точку $w = 0$. При $w = 0$ рассматриваемое уравнение сводится к

$$\lambda(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0.$$

Его корни

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}};$$

т. е. один корень — нулевой, а два лежат слева от мнимой оси.

Внутри рассматриваемой области число корней, расположенных слева от мнимой оси, должно быть на один больше, так как при этом сходим с границы $Д$-разбиения в сторону штриховки. Следовательно, этой области соответствуют полиномы, у которых все три корня лежат слева от мнимой оси.

Существенны только действительные значения w, принадлежащие области устойчивости. Они определяются сразу отрезком оси U, лежащим внутри обла-

сти $Д(3)$. Следовательно, условию устойчивости рассматриваемой системы будут отвечать значения $0 < w < 1$.

Убедиться в этом можно также, воспользовавшись формулой (41). (53)

Действительно, в рассматриваемом случае $R(\lambda) = 1$, и, следовательно, $V = V_0 = 0$, $n_1 = 3$. Выберем точку w_0 на оси U между $U = 0$ и $U = 1$, например $w = \frac{1}{2}$; тогда $\varphi = 3\pi$.

Воспользовавшись формулой (41), получаем

$$m = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0,$$

т. е. точка $w = \frac{1}{2}$ принадлежит области устойчивости.

Пример 2. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + w\lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

Решая его относительно w, найдем

$$w = \frac{-\lambda^3 - \lambda - 1}{\lambda^2}.$$

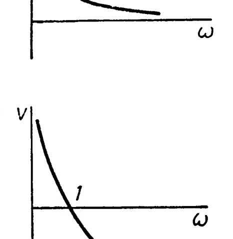
Подставим $\lambda = j\omega$.

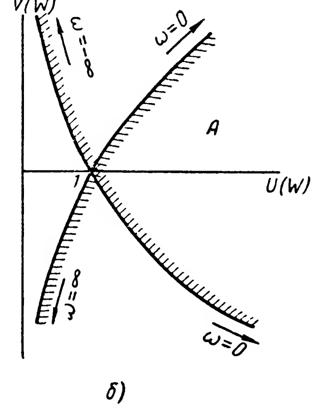
Придавая ω значения от $-\infty$ до $+\infty$, построим предварительно кривые

$$U = \frac{1}{\omega^2} \quad \text{и} \quad V = \frac{1}{\omega} - \omega.$$

Построение показано на фиг. 30, *а*

После этого нетрудно построить границу $Д$-разбиения в плоскости w (фиг. 30) и найти область, соответствующую полиномам с наибольшим числом корней, расположенных слева от мнимой оси. На фиг. 30, *б* эта область обозначена буквой A. Ни в одной точке плоскости, не принадлежащей области A, не может быть такого же или большего числа корней слева от мнимой оси, так как, выходя из области A в эту точку, обязательно нужно пересечь границу $Д$-разбиения с заштрихованной стороны на незаштрихованную сторону.





Фиг. 30. Построение области устойчивости в примере 2.

Определим число корней слева от мнимой оси при $w = 1$. В этом случае характеристическое уравнение сводится к виду

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1) = 0$$

и имеет корни

$$\lambda_1 = -1; \qquad \lambda_{2,3} = \pm j.$$

Таким образом, в точке $w = 1$ один корень расположен слева от мнимой оси, а два корня — на ней. Переходя от точки $w = 1$ к любой точке области A, сходим с кривой в сторону штриховки, причем в точке $w = 1$ кривая заштрихована дважды (через эту точку проходят две ветви границы $Д$-разбиения). Следовательно, область A соответствует случаю, когда все три корня имеют отрицательную действительную часть, т. е. является областью устойчивости [областью $Д$ (3)].

В этом можно также убедиться, воспользовавшись формулой (58). Теперь уже

$$R(\lambda) = \lambda^2,$$

т. е.

$$V = 0; \quad V_0 = 2 \quad \text{и} \quad n_1 = 1.$$

Выберем точку w_0 в области A, тогда для каждой ветви кривой $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ и для всей кривой $\varphi = 3\pi$.

Следовательно,

$$m = \frac{2+1}{2} - \frac{3\pi}{2\pi} = 0,$$

и область A — область устойчивости.

3. СВЯЗЬ Д-РАЗБИЕНИЯ С КРИТЕРИЯМИ УСТОЙЧИВОСТИ

Кривые, которые приходится строить при использовании критерия устойчивости Михайлова и амплитудно-фазового критерия устойчивости, можно рассматривать как границы Д-разбиения по специально подобранным параметрам и, таким образом, выработать общую точку зрения на разные критерии устойчивости.

а) Амплитудно-фазовый критерий устойчивости

Пусть уравнение замкнутой цепи автоматического регулирования записано в виде

$$[D_p(\lambda) + M_p(\lambda)]\, x = 0,$$

тогда характеристическое уравнение системы

$$D_p(\lambda) + M_p(\lambda) = 0. \tag{59}$$

Рассмотрим семейство полиномов

$$wD_p(\lambda) + M_p(\lambda) = 0, \tag{60}$$

где w — комплексное число.

Очевидно, уравнение (59) можно получить из уравнения (60), положив $w = 1$.

Найдем область устойчивости полиномов (60), для чего построим Д-разбиение по параметру w.

Решаем уравнение (60) относительно w:

$$w = -\frac{M_p(\lambda)}{D_p(\lambda)}.$$

Полагаем $\lambda = j\omega$, тогда

$$w = -\frac{M_p(j\omega)}{D_p(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega).$$

Придавая ω значения от $-\infty$ до $+\infty$, построим границу Д-разбиения (фиг. 31). На фиг. 31 кривая построена для случая астатической системы. В этом случае полином $D_p(\lambda)$ содержит множитель λ. Кроме того, по условию степень $D_p(\lambda)$ больше степени $M_p(\lambda)$, поэтому при $\omega \to 0$ кривая уходит в ∞, а при $\omega \to \infty$ кривая подходит к началу координат. Заштриховав кривую, определяем область, которая соответствует полиномам, имеющим больше всего корней слева от мнимой оси (на фиг. 31 она заштрихована вертикальной штриховкой).

Для определения условий, при которых эта область соответствует области устойчивости, возьмем граничную точку $w = \infty$ и соответ-

ствующий ей полином $D_p(\lambda)=0$. Его корни и являются корнями полинома (60) при $w=\infty$.

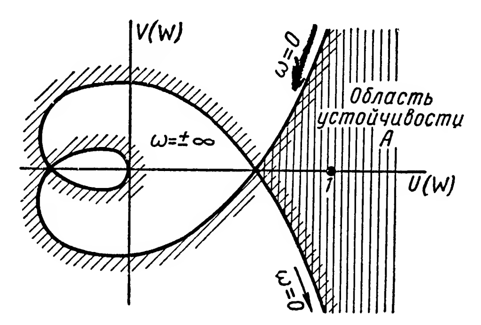
Предположим сначала, что разомкнутая система устойчива, т. е. что все корни уравнения $D_p(\lambda)=0$ расположены слева от мнимой оси, либо предположим, что уравнение $D_p(\lambda)=0$ имеет один нулевой корень, а все остальные его корни расположены слева от мнимой оси. В обоих случаях точке плоскости w, лежащей в бесконечности справа, соответствует полином, у которого в плоскости корней либо все корни лежат слева от мнимой оси, либо же слева от мнимой оси лежат все корни, кроме одного, расположенного на самой мнимой оси. Поэтому в этих двух случаях точке, лежащей в заштрихованной области, соответствует полином (60), у которого все корни лежат слева от мнимой оси, т. е. заштрихованная область является областью устойчивости [1].

На действительной оси выделяется участок, лежащий в этой области устойчивости (на фиг. 31 — участок оси U, расположенный в заштрихованной области).

Очевидно, что если точка $w=1$, соответствующая характеристическому уравнению (59), лежит на этом участке, то система, имеющая характеристическое уравнение

$$D_p(\lambda)+M_p(\lambda)=0,$$

устойчива.



Фиг. 31. Амплитудно-фазовая характеристика системы.

Но для этого необходимо и достаточно, чтобы граница *Д*-разбиения, как раз и являющаяся амплитудно-фазовой характеристикой системы, не охватывала точки [2] $w=1$.

Из фиг. 31 легко получить и обобщение амплитудно-фазового критерия устойчивости на случай, когда характеристическое уравнение разомкнутой системы содержит любое число, например r, корней с положительной действительной частью. В этом случае на плоскости w точке $w=\infty$ соответствует полином, имеющий в плоскости корней r корней справа от мнимой оси, и для того чтобы точка $w=1$ принадлежала области устойчивости, надо, чтобы при передвижении вдоль действительной оси из $w=\infty$ к $w=1$ граница *Д*-разбиения пересекалась r раз в сторону штриховки. Надо помнить лишь, что амплитудно-фазовая характеристика должна быть дополнена ее зеркальным отображением относительно действительной оси.

---

[1] В случае, когда уравнение $D_p(\lambda)=0$ имеет один нулевой корень, ветви границы *Д*-разбиения, уходящие в бесконечность, смыкаются в бесконечности с осью. Поэтому при $w=\infty$ находимся на границе *Д*-разбиения и, переходя в область A (фиг. 31), сходим с этой границы в сторону штриховки.

[2] Здесь критической точкой на плоскости w является точка $w=1$. Однако если вместо семейства полиномов (60) рассматривать семейство полиномов $-wD_p(\lambda)+M_p(\lambda)=0$, то в качестве критической точки получилась бы точка $w=-1$.

б) Критерий А. В. Михайлова

Пусть характеристическое уравнение рассматриваемой системы

$$D(p) = D_p(p) + M_p(p) = 0. \qquad (59')$$

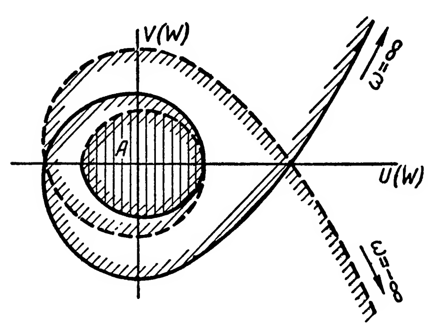
Введем параметр w и рассмотрим более общий класс уравнений

$$D_p(p) + M_p(p) = w, \qquad (61)$$

частным случаем которого (при $w = 0$) является уравнение (59′).

Положим в уравнении (61) $p = j\omega$ и построим $Д$-разбиение по параметру w (фиг. 32).

Единственным претендентом на область устойчивости является область A. заштрихованная на фиг. 32 вертикальной штриховкой. Если точка $w = 0$ лежит внутри этой области и если последняя является областью устойчивости, то полином (61) имеет все корни слева от мнимой оси, и система устойчива.



Фиг. 32. Годограф Михайлова.

Воспользуемся формулой (58). В данном случае $R(\lambda) = 1$ и $V = V_0 = 0$, $n_1 = n$. Чтобы точка A принадлежала области устойчивости, необходимо, чтобы $m = 0$. Поэтому в силу формулы (58) необходимо

$$\frac{n}{2} = \frac{\varphi}{2\pi} \quad \text{или} \quad \varphi = \pi n.$$

Если рассматривать изменение ω не от $-\infty$ до $+\infty$, а только от $\omega = 0$ до $\omega = +\infty$, то получим $\varphi = n\,\frac{\pi}{2}$, как это и требуется критерием Михайлова.

Строя $Д$-разбиение по иным параметрам характеристического уравнения, получим любое число иных критериев устойчивости. Среди всех таких критериев критерий Михайлова удобен тем, что связанные с ним построения наиболее просты. Амплитудно-фазовый критерий удобен тем, что амплитудно-фазовая характеристика может быть не только вычислена, но и снята экспериментально.

4. $Д$-РАЗБИЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ДВУХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ (ДИАГРАММА ВЫШНЕГРАДСКОГО)

Диаграммой Вышнеградского принято теперь называть плоскость каких-либо двух действительных параметров системы с нанесенной на ней линией, отделяющей область устойчивости. Диаграмма Вышнеградского может быть получена, следовательно, построением $Д$-разбиения плоскости двух действительных параметров.

Положим, что в характеристическом уравнении системы

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (62)$$

коэфициенты линейно зависят от двух параметров[1]: μ и δ.

Ограничимся случаем, когда уравнение (62) можно привести к виду

$$\mu S(\lambda) + \delta Q(\lambda) + R(\lambda) = 0.$$

Например, уравнение

$$(\mu\lambda + 1)(5\lambda + 1) + 3\delta = 0$$

можно привести к виду

$$\lambda(5\lambda + 1)\mu + 3\delta + (5\lambda + 1) = 0.$$

Здесь

$$S(\lambda) = 5\lambda^2 + \lambda;$$
$$Q(\lambda) = 3;$$
$$R(\lambda) = 5\lambda + 1.$$

Чтобы отобразить мнимую ось плоскости корней на плоскость μ, δ, надо подставить в рассматриваемое уравнение $\lambda = j\omega$ и для любого $-\infty < \omega < \infty$ найти μ и δ, при которых левая часть уравнения обращается в нуль. Поступим для этого следующим образом. Выполним замену $\lambda = j\omega$ и отделим затем в уравнении действительную и мнимую часть:

$$\mu S(j\omega) + \delta Q(j\omega) + R(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$$

В общем случае обе функции $U(\omega)$ и $V(\omega)$ зависят не только от ω, но и от двух параметров: от μ и от δ.

Для построения границы *Д*-разбиения надо для каждого ω определить μ и δ, при которых левая часть уравнения обращается в нуль, т. е. решить совместно относительно μ и δ два уравнения:

$$U(\omega) = 0$$

и

$$V(\omega) = 0.$$

Отделяя в каждом из них члены, содержащие μ и δ, находим:

$$\left.\begin{aligned} U(\omega) &= \mu S_1(\omega) + \delta Q_1(\omega) + R_1(\omega) = 0; \\ V(\omega) &= \mu S_2(\omega) + \delta Q_2(\omega) + R_2(\omega) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

Решая эту систему из двух уравнений с двумя неизвестными, получаем

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} -R_1 & Q_1 \\ -R_2 & Q_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_1 & Q_1 \\ S_2 & Q_2 \end{vmatrix}} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{\begin{vmatrix} S_1 & -R_1 \\ S_2 & -R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_1 & Q_1 \\ S_2 & Q_2 \end{vmatrix}}.$$

Для каждого ω можно подсчитать Q, S и R, а значит μ и δ, и найти в плоскости $\mu\delta$ точку, соответствующую этому ω. При изменении ω в плоскости $\mu\delta$ прочертится кривая. При этом, если в системе (63)

---

[1] Этими параметрами могут быть, в частности, просто два коэфициента уравнения (45).

первым является уравнение $U(\omega)=0$, а вторым $V(\omega)=0$ и если в обоих уравнениях μ — первое, а δ — второе по начертанию неизвестное, то система координат $\mu\delta$ должна быть правой: ось μ должна служить осью абсцисс с отсчетом положительных значений вправо, а ось δ — осью ординат, с отсчетом положительных значений вверх.

Уравнения $U(\omega)=0$ и $V(\omega)=0$ определяют одно значение μ и δ для каждого ω только в том случае, если они совместны и независимы, а для этого необходимо, чтобы одновременно не были равны нулю определители

$$\Delta=\begin{vmatrix} S_1 & Q_1 \\ S_2 & Q_2 \end{vmatrix} \text{ и } \Delta_1=\begin{vmatrix} -R_1 & Q_1 \\ -R_2 & Q_2 \end{vmatrix} \text{ или } \Delta_2=\begin{vmatrix} S_1 & -R_1 \\ S_2 & -R_2 \end{vmatrix}.$$

В противном случае решения неопределенны, и это свидетельствует о том, что одно уравнение является следствием второго уравнения.

В плоскости μ, δ каждое из уравнений $U(\omega)=0$ и $V(\omega)=0$ при фиксированном $\omega=\omega_1$ определяет прямую. Координаты точки пересечения этих двух прямых и являются решением уравнений $U(\omega)=0$ и $V(w)=0$ относительно μ и δ при $\omega=\omega_1$.

Если одновременно $\Delta=\Delta_1=0$ или $\Delta=\Delta_2=0$, то прямые совпадают. Следовательно, всем значениям ω, при которых указанные определители обращаются в нуль, соответствует в плоскости $\mu\delta$ не точка, а прямая линия.

Любое из уравнений системы (63) при подстановке значения ω, обращающего Δ в нуль, является в данном случае уравнением этой прямой.

Доказывается, что значениям $\omega=0$ и $\omega=\infty$ всегда соответствуют прямые. Их уравнения легче всего получатся, если приравнять нулю свободный член и коэфициент при старшем члене рассматриваемого характеристического уравнения. Если при этом получается выражение вида $\text{const}=0$, то это свидетельствует о том, что соответствующая особая прямая вся лежит в бесконечности и вычерчивать ее не нужно.

Все указанные прямые называются особыми.

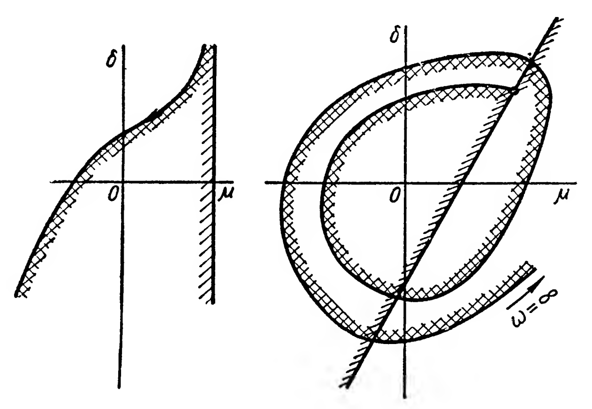
Укажем без доказательств правила штриховки границы *Д*-разбиения и особых прямых.

Граница *Д*-разбиения штрихуется слева в тех точках, для которых $\Delta>0$, и справа в точках, для которых $\Delta<0$. Кривая пробегается дважды: первый раз при изменении ω от 0 до ∞, а второй—при изменении ω от $-\infty$ до 0, но штрихуется оба раза с одной и той же стороны, так как знак Δ меняется при $\omega=0$ или $\omega=\pm\infty$. Через эти точки чаще всего проходят особые прямые. Они штрихуются в этом случае так, как это показано на фиг. 33.

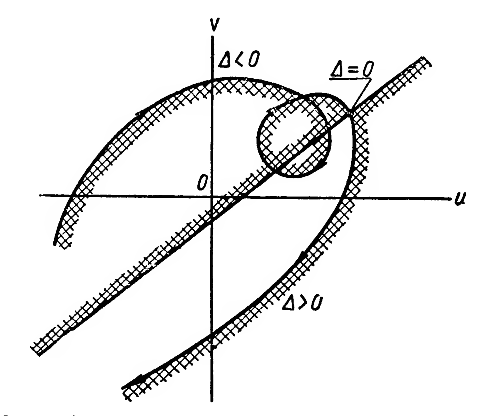
Вблизи точки пересечения кривой и прямой их заштрихованные и незаштрихованные стороны направлены друг к другу. Далее, вдоль прямой направление штриховки не меняется.

Если знак Δ меняется в точке $\omega=\omega_1$ $(0<\omega_1<\infty)$, то через эту точку также всегда проходит особая прямая. В этом случае она штрихуется двойной штриховкой так, как это показано на фиг. 34.

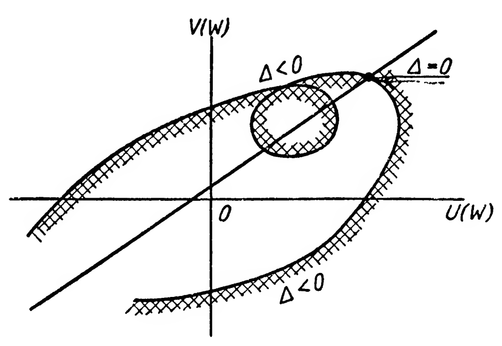
Может случиться, что с ростом ω в точке $\omega=\omega_1$ обращется в нуль определитель Δ, но далее с ростом ω он знака не меняет. Если через точку $\omega=\omega_1$ проходит особая прямая, то в этом случае она не штрихуется (фиг. 35) и может быть из построения удалена.



Фиг. 33. Примеры штриховки особых прямых.



Фиг. 34. Пример штриховки особой прямой.



Фиг. 35. Случай, когда особая прямая не штрихуется.

После того как граница *Д*-разбиения и особые прямые построены и штриховка нанесена, производится разметка областей и область устойчивости выделяется так же, как это было выше показано для случая построения области устойчивости в плоскости одного комплексного параметра.

Пример 1. Рассмотрим классическую задачу от устойчивости прямого регулирования, решенную Вышнеградским. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\lambda^3 + \mu\lambda^2 + \delta\lambda + 1 = 0.$$

Построим *Д*-разбиение плоскости μ, δ, для чего перепишем его в виде

$$\mu\lambda^2 + \delta\lambda + (\lambda^3 + 1) = 0,$$

и подставим

$$\lambda = j\omega;$$

получим

$$-\mu\omega^2 + \delta j\omega + 1 - j\omega^3 = 0, \quad \text{или} \quad (-\mu\omega^2 + 1) + j(\delta\omega - \omega^3) = 0,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} U(\omega) &= \mu(-\omega^2) + \delta\cdot 0 + 1 = 0; \\ V(\omega) &= \mu\cdot 0 + \delta\omega - \omega^2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{vmatrix} = -\omega^3$$

равен нулю только при $\omega = 0$.

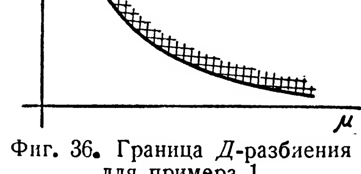
Для любого $\omega \neq 0$

$$\mu = \frac{1}{\omega^2}; \qquad \delta = \omega^2,$$

т. е.

$$\mu = \frac{1}{\delta},$$

и кривая *Д*-разбиения представляет собой равнобокую гиперболу (фиг. 27).



Фиг. 36. Граница *Д*-разбиения для примера 1.

Точка $\omega = 0$ лежит в бесконечности на оси μ, а точки $\omega = \infty$ и $\omega = -\infty$ в бесконечности на оси δ.

Определитель Δ меняет знак в точке $\omega = 0$. Поэтому гипербола штрихуется дважды так, как это показано на фиг. 36.

При $\omega \neq 0$ и $\Delta \neq 0$ свободный член характеристического уравнения и коэфициент при его старшем члене не зависят ни от μ, ни от δ. Следовательно, в данном случае особых прямых нет.

Переход через дважды заштрихованную кривую *Д*-разбиения соответствует изменению знака действительных частей одновременно двух (комплексных сопряженных) корней характеристического уравнения. При $\mu = \delta = 0$ уравнение обращается в $\lambda^3 + 1 = 0$, т. е. имеет один корень слева от мнимой оси и два корня справа. Следовательно, область *A* является областью устойчивости.

Пример 2. Определить постоянные времени и коэфициенты усиления одноемкостных объектов, которые можно устойчиво регулировать регулятором прямого действия, имеющим постоянную времени $T' = 0{,}45$ сек., постоянную времени демпфирования $T_k = 5$ сек. и коэфициент усиления $k = 25$.

Уравнение движения:

объект

$$(T_1\lambda + 1)x_1 = -k_1x_2;$$

регулятор

$$(T'^2\lambda^2 + T_k\lambda + 1)x_2 = k_2x_1.$$

где по условию примера

$$T'^2 = 0{,}45^2 \approx 0{,}2\ ск^2;\quad T_k = 5\ ск;\quad k_2 = 25.$$

Обозначим $\mu = T_1$, $\delta = k_1$. Требуется построить область устойчивости в плоскости μ, δ.

Характеристическое уравнение

$$(\mu\lambda + 1)(0{,}2\lambda^2 + 5\lambda + 1) + 25\delta = 0$$

после замены λ на $j\omega$ сводится к виду

$$-0{,}2\mu j\omega^3 - 5\mu\omega^2 + \mu j\omega - 0{,}2\omega^2 + 5j\omega + 25\delta + 1 = 0.$$

Оно разделяется на два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} -5\omega^2\mu + 25\delta + (1 - 0{,}2\omega^2) &= 0; \\ \omega(1 - 0{,}2\omega^2)\mu + 0\cdot\delta + 5\omega &= 0. \end{aligned}\right\}$$

В данном случае

$$S_1(\omega) = -5\omega^2;\quad Q_1(\omega) = 25;\quad R_1(\omega) = 1 - 0{,}2\omega^2;$$
$$S_2(\omega) = \omega(1 - 0{,}2\omega^2);\quad Q_2(\omega) = 0;\quad R_2(\omega) = 5\omega,$$

поэтому

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5\omega^2 & 25 \\ \omega(1 - 0{,}2\omega^2) & 0 \end{vmatrix} = -25\omega(1 - 0{,}2\omega^2);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -(1 - 0{,}2\omega^2) & 25 \\ -5\omega & 0 \end{vmatrix} = 125\omega;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5\omega^2 & -(1 - 0{,}2\omega^2) \\ \omega(1 - 0{,}2\omega^2) & -5\omega \end{vmatrix} = 25\omega^3 + \omega(1 - 0{,}2\omega^2)^2.$$

Следовательно,

$$\mu = -\frac{5}{1 - 0{,}2\omega^2};$$

$$\delta = \frac{-25\omega^2 - (1 - 0{,}2\omega^2)^2}{25(1 - 0{,}2\omega^2)}.$$

Определитель Δ обращается в нуль, кроме $\omega = 0$, лишь при $\omega = \sqrt{5}$, но при этом ω и $\Delta_1 \neq 0$ и $\Delta_2 \neq 0$. Следовательно, при $\omega \neq 0$ и $\omega \neq \infty$ особых прямых нет.

Приравнивая нулю свободный член и коэфициент при старшем члене характеристического уравнения, получим уравнение двух особых прямых:

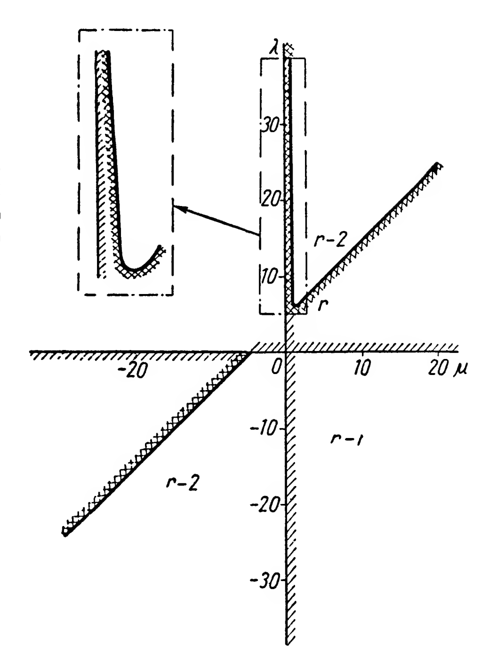
для $\omega = 0$

$$25\delta + 1 = 0,\quad \text{или}\quad \delta = -\frac{1}{25},$$

для $\omega = \infty$

$$0{,}2\mu = 0,\quad \text{или}\quad \mu = 0.$$

Построение показано на фиг. 28 с нанесенной штриховкой по указанным правилам. Область устойчивости на этой фигуре заштрихована. Проверять распределение корней для какой-либо одной точки области нет нужды, так как наличие в плос-



Фиг. 37. Граница Д-разбиения для примера 2.

кости μ, δ области устойчивости не вызывает сомнений. Если бы, однако, была необходимость в такой проверке, то ее можно было бы сделать, например, для точки $\mu = \delta = 0$. В этой точке уравнение имеет один бесконечно большой корень и два корня с отрицательной действительной частью. Сходя с этой точки в заштрихованную область, сходим с особой прямой, соответствующей $\omega = \infty$, в сторону штриховки. В плоскости корней из бесконечности корень перемещается в конечную часть плоскости слева от мнимой оси. Следовательно, каждой точке заштрихованной области соответствуют полиномы, имеющие все три корня с отрицательной частью, т. е. заштрихованная область является областью устойчивости.

Пример 3. Выясним в общем виде протекание области устойчивости в плоскости „постоянная времени чувствительного элемента—постоянная времени демпфера" для обычного изодромного регулятора.

Уравнения движения:

регулируемый объект

$$(T_g p + 1)\, x_g = - K_g x_e;$$

чувствительный элемент

$$\left(T_r'^2 p^2 + T_\kappa p + 1\right) x_r = K_r x_g;$$

сервомотор

$$p x_e = \overline{K}_c (x_r - x_u);$$

изодром

$$(T_u p + 1)\, x_u = T_u p x_e.$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$(T_g\lambda + 1)\left(T_r'^2\lambda^2 + T_\kappa\lambda + 1\right)[T_u\lambda^2 + (\lambda + \overline{K}_c T_u)\,\lambda] + K_g K_r \overline{K}_c (T_u\lambda + 1) = 0.$$

Перепишем это уравнение так:

$$D(\lambda)\left(T_r'^2\lambda^2 + T_\kappa\lambda + 1\right) + K(T_u\lambda + 1) = 0,$$

где

$$D(\lambda) = (T_g\lambda + 1)[T_u\lambda^2 + (1 + \overline{K}_c T_u)\,\lambda];$$

$$K = K_g K_r \overline{K}_c.$$

Пусть

$$D(j\omega) = U + jV,$$

тогда после замены в характеристическом уравнении λ на $j\omega$ получим

$$(U + jV)\left[\left(1 - T_r'^2\,\omega^2\right) + T_\kappa j\omega\right] + KT_u j\omega + 1 = 0$$

или два уравнения

$$U\left(1 - T_r'^2\,\omega^2\right) - V\omega T_\kappa + 1 = 0;$$

$$V\left(1 - T_r'^2\,\omega^2\right) + U\omega T_\kappa + KT_u\omega = 0,$$

которые можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned} -U\omega^2 T_r'^2 - V\omega T_\kappa &= -U - 1; \\ -V\omega^2 T_r'^2 + U\omega T_\kappa &= -KT_u\omega - V. \end{aligned}\right\}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -U\omega^2 & -V\omega \\ -V\omega^2 & U\omega \end{vmatrix} = -U^2\omega^3 - V^2\omega^3 = -\omega^3(U^2 + V^2)$$

обращается в нуль только при $\omega = 0$. Но в силу рассматриваемых уравнений особая прямая, соответствующая $\omega = 0$, вся лежит в бесконечности и не интересует нас.

Значению $\omega = \infty$ соответствует особая прямая $T_r'^2 = 0$, т. е. ось T_κ.

Решая полученную систему, находим:

$$T_r'^2 = \frac{-\omega\,[(U^2+V^2)+(U+KT_u\omega V)]}{-\omega^3(U^2+V^2)};$$

$$T_\kappa = \frac{\omega^2(UKT_u\omega - V)}{-\omega^3(U^2+V^2)}.$$

Обозначим

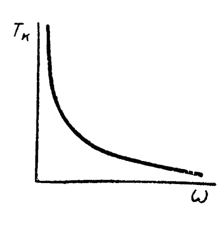
$$U^2+V^2=R^2,$$

тогда

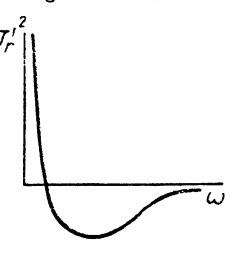
$$\left.\begin{aligned} T_r'^2 &= \frac{1}{\omega^2}+\frac{U+\omega KT_uV}{\omega^2R^2};\\ T_\kappa &= \frac{-\omega KT_uU+V}{\omega R^2}.\end{aligned}\right\}$$

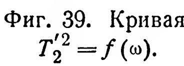
Выше было обозначено

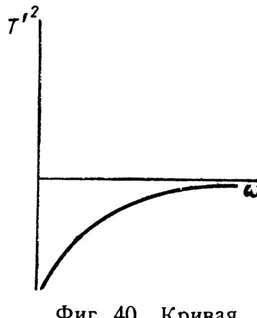
$$D(\lambda)=(T_g\lambda+1)\,[T_u\lambda^2+(1+\overline{K}_cT_u)\,\lambda],$$



Фиг. 38. Кривая $T_k=f(\omega)$.




Фиг. 39. Кривая $T_2'^2=f(\omega)$.



Фиг. 40. Кривая $T_2'^2=f(\omega)$.

следовательно,

$$D(j\omega)=i\omega\,(T_gj\omega+1)\,[T_uj\omega+(1+\overline{K}_cT_u)]$$

или

$$U=-\omega^2\,[T_u+(1+\overline{K}_cT_u)\,T_g];$$

$$V=(1+\overline{k}_cT_u)\,\omega-T_gT_u\omega^3.$$

Подставляя эти значения U и V в вычисленные выражения для $T_r'^2$ и T_κ, найдем

$$T_r'^2=\frac{1}{\omega^2}+\frac{-KT_u^2T_g\omega^2+\left[KT_u+K\overline{K}_cT_u^2-T_u-T_g-\overline{K}_cT_uT_g\right]}{R^2};$$

$$T_\kappa=\frac{\omega^2\,[KT_u\,(T_u+T_\sigma+\overline{K}_cT_uT_g)-T_uT_\sigma]+(1+K_cT_u)}{R^2}.$$

Кривая $T_\kappa=f(\omega)$ показана на фиг. 38.

Если

$$KT_u(1+\overline{K}_cT_u)>T_u+T_g+\overline{K}_cT_uT_g,$$

то $T_r'^2$ с изменением ω изменяется в соответствии с фиг. 39, а при обратном знаке неравенства — в соответствии с фиг. 40.

В соответствии с фиг. 38 и 40 на фиг. 41 построено $Д$-разбиение для случая, когда

$$KT_u(1+\overline{K}_cT_u)<T_u\,(1+\overline{K}_cT_g)+T_g.$$

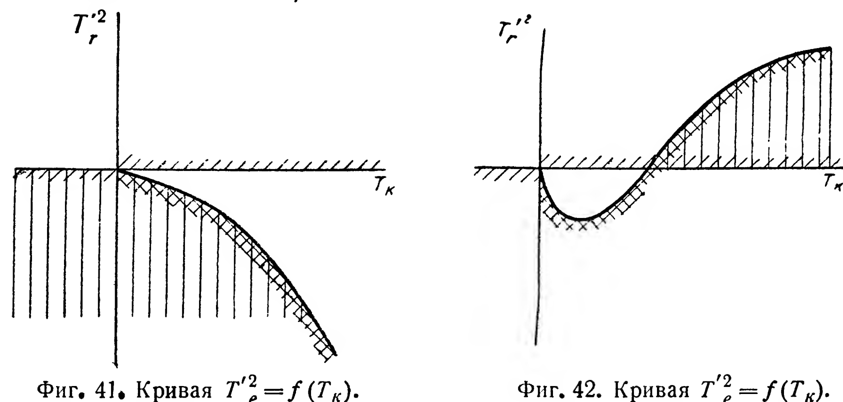
Область, являющаяся претендентом на область устойчивости, выделена вертикальной штриховкой.

В этом случае в первом квадранте $\left(T_r'^2>0;\ T_\kappa>0\right)$ заведомо нет точек, принадлежащих области устойчивости. Если же

$$KT_u(1+K_cT_u)>T_u(1+\overline{K}_cT_g)+T_g,$$

то в соответствии с фиг. 38 и 39 *Д*-разбиение плоскости $T_r'^2$, T_κ имеет вид, графически представленный на фиг. 42.

В этом случае в первом квадранте плоскости $T_r'^2$, T_κ есть точки, принадлежащие области устойчивости. Выбором достаточного трения в чувствительном элементе можно скомпенсировать вредное действие масс чувствительного элемента. Надо лишь, чтобы T_κ было больше некоторого порога, увеличивающегося монотонно с ростом $T_r'^2$.



Фиг. 41. Кривая $T_e'^2=f(T_\kappa)$.

Фиг. 42. Кривая $T_e'^2=f(T_\kappa)$.

5. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

В ряде случаев, применяя построения областей устойчивости, описанные выше, приходят к выводу, что пространство параметров рассматриваемой системы вообще области устойчивости не содержит и что сами построения были проделаны поэтому напрасно.

В некоторых случаях можно по схеме установки или по виду уравнений движения установить, содержит ли пространство параметров системы область устойчивости, и сразу же отбраковать системы, не содержащие областей устойчивости, избегая в таких случаях напрасных построений [1].

Рассмотрим системы, характеристическое уравнение которых сводится к виду

$$D_p(\lambda)+M_p(\lambda)=0,$$

где $D_p(\lambda)$ — произведение любого числа множителей вида

$$T\lambda+1,\ \lambda,\ T\lambda-1,\ T_\kappa^2\lambda^2+2\zeta_\kappa T_\kappa\lambda+1,\ T_\kappa^2\lambda^2+1;$$

$M_p(\lambda)$ — произведение любого числа множителей вида

$$K,\ \tau\lambda+1,\ \tau_d^2\lambda^2+2\zeta_d\tau_d\lambda+1.$$

Здесь T, ζ_κ, T_κ, K, τ, τ_d и ζ_d — независимые друг от други положительные числа (параметры системы).

Введем теперь следующие обозначения: q — число нулевых, а t — правых действительных корней у полинома $D_p(\lambda)$; f — число корней полинома $D_p(\lambda)$, расположенных на мнимой оси и справа от нее; r — целая часть дроби $\frac{1}{2}f$; n и m — соответственно степени полиномов $D_p(\lambda)$ и $M_p(\lambda)$, а $V = n + m$. Тогда условия существования области устойчивости устанавливаются следующей теоремой.

Для того чтобы в пространстве параметров системы, имеющей характеристическое уравнение [1] существовала область устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись два неравенства:

1) неравенство $m \geqslant q + t - 1$;

2) одно из неравенств, приведенных в табл. 1 и выбираемое в зависимости от m и f.

Таблица 1

	$m = 0$	$m > 0$ четно	m нечетно
f четно	$v > 4r$	$v > 4r - 1$	$v > 4r - 2$
f нечетно	$v > 4r$	$v > 4r$	$v > 4r + 1$

Для частного случая одноконтурной системы без воздействий по производным $M_p(\lambda) = K = \text{const}$, следовательно, $m = 0$ и в этом случае условия теоремы сводятся к неравенствам

$$q + t \leqslant 1;$$
$$n > 4 \cdot r.$$

Доказательство сформулированной выше теоремы и перечень литературы по этому вопросу содержатся в работе [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Fraser R. A., Duncan W. I., On the criteria for the stability of small motions, Proc Royal Soc., v. 124, London, 1929, p. 642.

2. Соколов А. А., Критерий устойчивости линейных систем регулирования с распределенными параметрами и его применение, Инженерный сборник, т. II, вып. 2, Изд. АН СССР, 1946.

3. Кабаков И. П., О процессе регулирования давления пара, Инженерный сборник т. II, вып. 2, Изд. АН СССР, 1946.

4. Воробьев Ю. В., Кац А. М., Ремизов В. М., Соколов А. А., Фатеева И. А., Исследования в области регулирования паровых турбин, сборник статей под ред. М. З. Хейфица, Госэнергоиздат, 1950.

5. Неймарк Ю. И., Устойчивость линеаризованных систем, ЛКВВИА, 1949.

6. Неймарк Ю. И., Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива, „Автоматика и телемеханика", т. IX, № 3, 1948.

7. Айзерман М. А. и Гантмахер Ф. Р., Условия существования областей устойчивости у одноконтурных систем автоматического регулирования, содержащих воздействия по производным, „Прикладная математика и механика" № 1, 1954.

ГЛАВА XII

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

В настоящей главе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с применением частотного критерия устойчивости к системам автоматического регулирования. При этом основное внимание уделено методу логарифмических частотных характеристик, существенно упрощающему исследование устойчивости как одноконтурных, так и многоконтурных систем.

1. ТЕРМИНОЛОГИЯ И НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ РАЗОМКНУТЫХ СИСТЕМ

Как это было показано в главе X, об устойчивости систем автоматического регулирования можно судить по виду ее амплитудно-фазовой характеристики $KW(j\omega)$ в разомкнутом состоянии.

Амплитудно-фазовая характеристика представляет собой кривую, описываемую концом характеристического вектора $KW(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$.

Функция $KW(j\omega)$ есть не что иное, как передаточная функция разомкнутой системы $KW(s)$ при часто мнимых значениях аргумента s, т. е. при $s=j\omega$.

Как это мы видели в главе VI, выражение для передаточной функции $KW(s)$ разомкнутой системы удобно записывать, если нужно подчеркнуть порядок ее астатизма, в следующем виде:

$$KW(s)=\frac{KW_0(s)}{s^{\nu}}, \tag{64}$$

где ν — порядок астатизма, равный кратности полюса функции $KW(s)$ при $s=0$;

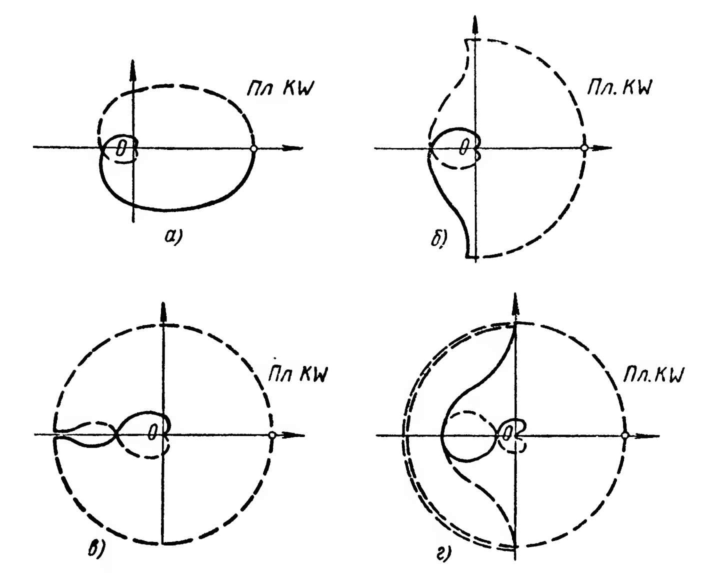
K — передаточный коэфициент.

Передаточный коэфициент K не зависит от s и выбирается таким образом, чтобы имело место равенство $W_0(0)=1$.

Амплитудно-фазовые характеристики статических систем автоматического регулирования в разомкнутом состоянии — замкнутые кривые, исходящие при $\omega=0$ из точки, находящейся на вещественной оси на расстоянии K от начала координат.

Амплитудно-фазовые характеристики астатических систем состоят из двух ветвей, симметричных относительно вещественной оси U и уходящих при $\omega = 0$ в бесконечность под углом $\left(\pm \nu \frac{\pi}{2}\right)$ к положительному направлению U, где ν — порядок астатизма.

На фиг. 43 приведены амплитудно-фазовые характеристики статической и астатических систем с астатизмом первого, второго и третьего порядков.



Фиг. 43. Амплитудно-фазовые характеристики:
а — статической системы; астатических систем с астатизмом; *б* — первого порядка; *в* — второго порядка; *г* — третьего порядка.

Характерной особенностью передаточных функций $KW(s)$ разомкнутых систем автоматического регулирования является то, что они, по крайней мере в случае одноконтурных систем (о многоконтурных системах см. ниже), состоят из простых сомножителей (см. главу VI) и могут быть представлены в виде последовательного соединения некоторого числа типовых звеньев: апериодических, колебательных, интегрирующих и диференцирующих.

В соответствии с этим выражение для амплитудно-фазовой характеристики $KW(jw)$ можно представить в виде произведения

$$KW(j\omega) = K_1 W_1(j\omega) K_2 W_2(j\omega) \ldots K_n W_n(j\omega), \qquad (65)$$

где $K_1 W_1(j\omega)$ — амплитудно-фазовые характеристики отдельных звеньев.

Таким образом, полагая

$$K_1 W_1(j\omega) = K_1 H_1(\omega) e^{j\theta_1};$$
$$K_2 W_2(j\omega) = K_2 H_2(\omega) e^{j\theta_2};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K_n W_n(j\omega) = K_n H_n(\omega) e^{j\theta_n},$$

можем написать:

$$KW(j\omega) = K_1K_2 \dots K_nH_1(\omega)H_2(\omega) \dots H_n(\omega)e^{j[\theta_1(\omega)+\theta_2(\omega)+ \dots \theta_n(\omega)]}. \quad (66)$$

Выражение (66) показывает, что амплитудно-фазовая характеристика $KW(j\omega)$ всей системы может быть получена из амплитудно-фазовых характеристик составляющих ее звеньев при помощи обычного правила умножения векторов. Согласно этому правилу модуль вектора, являющийся произведением нескольких векторов, равен произведению их модулей, а его фаза равна алгебраической сумме фаз перемножаемых векторов.

Мы можем написать:

$$KW(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (67)$$

или

$$KW(j\omega) = KH(\omega)\, e^{j\theta(\omega)}. \quad (67a)$$

Вещественные функции $U(\omega)$, $V(\omega)$, $KH(\omega)$, $\theta(\omega)$ *называются соответственно вещественной, мнимой, амплитудной и фазовой частотными характеристиками разомкнутой системы* и являются непрерывными функциями от ω, если только функция $KW(s)$ не имеет полюсов на мнимой оси.

Функции $U(\omega)$, $H(\omega)$ являются четными, а функции $V(\omega)$, $\theta(\omega)$ — нечетными функциями от ω. Следовательно,

$$KW(-j\omega) = U(\omega) - j\,V(\omega). \quad (68)$$

Сравнивая уравнение (67) с (68), легко видеть, что точки амплитудно-фазовой характеристики, соответствующие равным, но противоположным по знаку значениям ω, располагаются симметрично относительно оси U, вследствие чего амплитудно-фазовая характеристика $KW(j\omega)$ представляет собой кривую, симметричную относительно вещественной оси U в плоскости KW. Поэтому при построении амплитудно-фазовой характеристики можно ограничиться лишь положительными значениями ω.

Интервал положительных частот $(0, \omega_0)$, в котором следует изменять ω, определяется из тех соображений, чтобы модуль функции $KW(j\omega)$ вне этого интервала частот был значительно меньше единицы, т. е. чтобы имело место неравенство

$$|KW(j\omega)| = KH(\omega) \ll 1$$

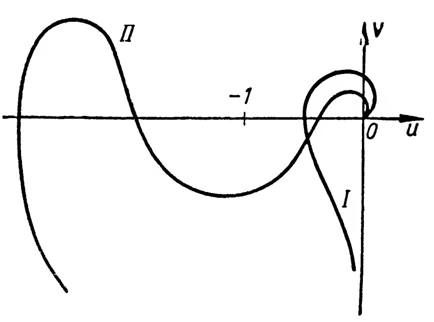
при $\omega \gg \omega_0$.

Критическим значение передаточного коэфициента K назовем то его значение, при котором амплитудно-фазовая характеристика проходит через критическую точку $(-1, j0)$ и система находится на границе устойчивости.

Амплитудно-фазовые характеристики систем в зависимости от расположения точек их пересечения с вещественной осью относительно критической точки к координатами $(-1, j0)$ можно подразделить на два основных типа: на *амплитудно-фазовые характеристики первого рода,* все точки пересечения которых с вещественной осью U, если

таковые имеются, расположены справа от критической точки (кривая *I* на фиг. 44), и на *амплитудно-фазовые характеристики второго рода* точки пересечения которых с вещественной осью *U* расположены как справа, так и слева от критической точки (кривая *II* на фиг. 44).

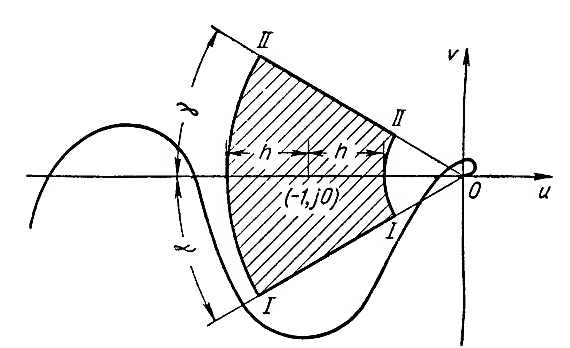
В системах первого типа увеличение передаточного коэфициента *K* выше его критического значения (которое в реальной системе всегда существует) приводит к нарушению устойчивости, а его уменьшение ниже критического значения — к стабилизации системы, между тем как в системах второго типа возможно обратное, т. е. при увеличении передаточного коэфициента выше его критического значения система может превратиться из неустойчивой в устойчивую, а при уменьшении — из устойчивой в неустойчивую.



Фиг. 44. Амплитудно-фазовые характеристики первого и второго рода.

Введем теперь понятие о *запасе устойчивости, применимой для амплитудно-фазовых характеристик как первого, так и второго рода.*

Мы будем считать, что система обладает требуемым запасом устойчивости, если она, удовлетворяя условию устойчивости, имеет при значениях модуля характеристического вектора, отличающихся от единицы не менее чем на заданную величину $\pm h$, *называемую запасом устойчивости по модулю, угол поворота или фазу, отличающуюся от* $-\pi$ *не менее чем на величину* γ, *называемую запасом устойчивости* по углу или по фазе (фиг. 45).



Фиг. 45. К определению понятия о запасе устойчивости.

Легко видеть, что в случае амплитудно-фазовых характеристик первого рода величина $\pi + \theta(\omega)$ при всех значениях модуля $|KW| > 1$ является существенно положительной, между тем как в случае амплитудно-фазовых характеристик второго рода она может быть как положительной, так и отрицательной, причем фаза характеристического вектора должна отличаться от $-\pi$ на величину γ не при всех значениях $|KW| > 1$, а лишь при значениях модуля, превышающих единицу не более чем на h.

Таким образом, амплитудно-фазовые характеристики, обладающие требуемым запасом устойчивости, не должны входить внутрь области *I—I—II—II* на фиг. 45.

2. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Построение амплитудно-фазовых характеристик сложных систем, состоящих из большого числа звеньев, требует значительной затраты времени.

Исследование устойчивости значительно упрощается, если ввести в рассмотрение логарифмические частотные характеристики.

Кроме того, как мы это увидим в дальнейшем, логарифмические частотные характеристики оказываются весьма удобными для синтеза корректирующих устройств систем автоматического регулирования, т. е, для выбора их схем и значений параметров.

Логарифмические частотные характеристики определяются следующим образом.

Рассмотрим выражение для передаточной функции какого-либо элемента системы:

$$W(j\omega) = H(\omega)\, e^{j\theta(\omega)}. \tag{69}$$

Прологарифмировав его, мы получим

$$\ln W(j\omega) = \ln H(\omega) + j\theta(\omega). \tag{70}$$

Кривые, соответствующие выражениям $\ln H(\omega)$ и $\theta(\omega)$, построенные в логарифмическом масштабе частот ($\ln \omega$), называются натуральными логарифмическими частотными амплитудной и фазовой характеристиками элемента.

Введем единицу, применяемую для определения величины числа и называемую *непером*. Непер определяется соотношением

$$1 \text{ непер} = \ln e. \tag{71}$$

Таким образом, если e есть значение в неперах некоторого числа H, то

$$e = \ln H. \tag{72}$$

На основании сказанного ординаты логарифмической амплитудной характеристики можно выражать в неперах.

Нужно, однако, заметить, что на практике более удобной оказалась другая единица измерения числа, принятая в теории связи и называемая децибелом (*дб*). Децибел определяется соотношением

$$1 \text{ децибел} = 20 \lg 10. \tag{73}$$

Таким образом, если L есть значение некоторого числа H, выраженное в децибелах, то

$$L = 20 \lg H. \tag{74}$$

Кривая, соответствующая выражению

$$L(\omega) = 20 \lg H(\omega), \tag{75}$$

отличающемуся от логарифмической частотной характеристики $\ln H(\omega)$, входящей в выражение (70), лишь постоянным множителем, равным $20 \lg e$, т. е.

$$L(\omega) = (20 \lg e) \ln H(\omega) = 20 \cdot 0{,}43429 \ln H(\omega) = 20 \lg H(\omega) \tag{76}$$

построенная в логарифмическом масштабе частот $\lg(\omega)$, называется *логарифмической амплитудной частотной характеристикой*, *или характеристикой затухания элемента.*

В теории связи децибел имеет строго определенный смысл и является отвлеченным числом. В теории регулирования понятию „децибел“ придается более широкое значение. В децибелах выражается 20 десятичных логарифмов отношения амплитуды величины на выходе какого-либо элемента к амплитуде гармонического воздействия на его входе. Таким образом, в децибелах выражается логарифм отношения величин, которые могут иметь разные размерности.

Кривая $\theta(\omega)$, также построенная в логарифмическом масштабе частот ($\lg\omega$), называется *логарифмической фазовой частотной характеристикой элемента.*

Введем еще два термина, которые нам понадобятся в дальнейшем. При двукратном изменении частоты условимся говорить, что частота изменилась на октаву, а при 10-кратном изменении — что частота изменилась на декаду. Число октав, заключенное в интервале частот (ω_2, ω_1), определяется соотношением

$$\frac{\lg\frac{\omega_2}{\omega_1}}{\lg 2} = 3{,}32 \lg\frac{\omega_2}{\omega_1} \text{ октав}, \tag{77}$$

а число декад, соответствующее тому же интервалу частот (ω_2, ω_1), равно

$$\lg\frac{\omega_2}{\omega_1} \text{ декад.}$$

3. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ

Построение логарифмических частотных характеристик элементов, входящих в состав систем автоматического регулирования, существенно упрощается, если пользоваться приближенным способом, основанным на представлении этих характеристик в виде отрезков сопрягающихся друг с другом прямых. Поясним этот способ прежде всего на построении логарифмических характеристик типовых звеньев.

а) Апериодическое звено

Найдем, пользуясь уравнением (40), главы X, логарифмические частотные характеристики апериодического звена, предположив, что $K = 1$. Имеем

$$W(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}} e^{-j \operatorname{arctg} T_1 \omega}, \tag{78}$$

откуда

$$\ln W(j\omega) = -\ln\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1} - j \operatorname{arctg} T_1\omega. \tag{79}$$

Таким образом, логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики апериодического звена определяются выражениями

$$L(\omega) = -20\lg\sqrt{T_1^2\omega^2+1}; \tag{80}$$

$$\theta(\omega) = -\operatorname{arctg} T_1\omega. \tag{81}$$

Рассмотрим формулу (80) для $L(\omega)$.

Пренебрегая величиной $T_1^2\omega^2$ по сравнению с единицей при $\omega \leqslant \frac{1}{T_1}$ и единицей по сравнению с $T_1^2\omega^2$ при $\omega \geqslant \frac{1}{T_1}$, мы приближенно можем написать:

$$\left.\begin{array}{ll} L(\omega) = -20\lg\sqrt{T_1^2\omega^2+1} \approx 0 & \text{при } \omega \leqslant \frac{1}{T_1}; \\ L(\omega) \approx -20\lg T_1\omega & \text{при } \omega \geqslant \frac{1}{T_1}; \\ L(\omega) = -3\ \partial б & \text{при } \omega = \frac{1}{T_1}. \end{array}\right\} \tag{82}$$

Соотношения (82) показывают, что логарифмическая амплитудная характеристика апериодического звена (80) приближенно может быть представлена двумя прямолинейными отрезками (асимптотами):

$$L(\omega) \approx 0$$

при $\omega \leqslant \frac{1}{T_1}$ и

$$L(\omega) = -20\lg T_1\omega$$

при $\omega \geqslant \frac{1}{T_1}$,

сопрягающимися друг с другом при частоте

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1},$$

называемой *сопрягающей* частотой, причем максимальная ошибка, которую мы при этом допускаем, имеет место при сопрягающей частоте ω_1 и равна — 3 *дб*.

Найдем наклон, который имеет асимптота

$$L(\omega) = -20\lg T_1\omega \tag{83}$$

по отношению к оси частот. При каком-либо значении $\omega_i > \omega_1$

$$L(\omega_i) = -20\lg T_1\omega_i,$$

а при $\omega = 2\omega_i$

$$L(2\omega_i) = -20\lg 2T_1\omega_i,$$

и, следовательно,

$$L(2\omega_i) - L(\omega_i) = -20\lg 2 = -6\ \partial б.$$

Итак, мы видим, что при двукратном изменении частоты характеристика затухания $L(\omega)$ уменьшилась на 6 *дб*, или, другими словами, асимптота (83) имеет наклон, равный — 6 *дб* на октаву.

Если изменить частоту ω_i на декаду, т. е. положить в уравнении (83) $\omega = 10\omega_i$, то мы получим

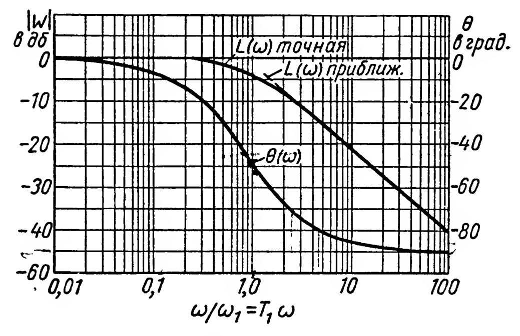
$$L(10\omega_i) = -20 \lg 10 T_1 \omega_i,$$

и, следовательно,

$$L(10\omega_i) - L(\omega_i) = -20 \text{ дб}.$$

Таким образом, наклон (—6 *дб* на октаву) эквивалентен наклону (—20 *дб* на декаду).

На фиг. 46 изображены логарифмические амплитудные характеристики апериодического звена, построенные по точной формуле (80) и по приближенным формулам (82). Легко видеть, что вне интервала, равного двум октавам вправо и влево от сопрягающей частоты, обе характеристики — точная и приближенная — практически не отличаются друг от друга.



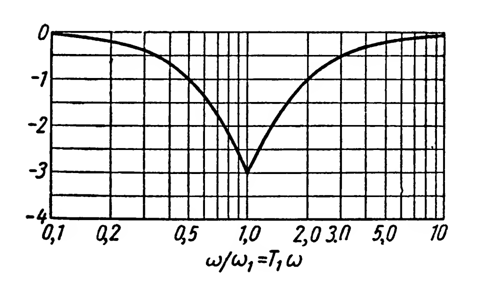
Фиг. 46. Логарифмические амплитудная $L(\omega)$ и фазовая $\theta(\omega)$ частотные характеристики апериодического звена.

Ниже, в табл. 2, приведены значения ошибки δ для различных $\frac{\omega}{\omega_1}$, которые получаются при замене истинной логарифмической амплитудной характеристики (80) двумя сопрягающимися.

Таблица 2

$\frac{\omega}{\omega_1}$	0,1	0,25	0,4	0,5	1,0	2,0	2,5	4,0	10,0
δ	0,04	0,32	0,65	1,0	3,01	1,0	0,65	0,32	0,04

Кривая зависимости ошибки δ от $\frac{\omega}{\omega_1}$ показана на фиг. 47.



Фиг. 47. Кривая поправок для логарифмической амплитудной характеристики апериодического звена в виде двух сопрягающихся асимптот.

Рассмотрим теперь фазовую характеристику $\theta(\omega)$ (см. фиг. 46):

$$\theta(\omega) = -\operatorname{arctg} T_1 \omega;$$

$$\theta(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{\omega_1}. \quad (83')$$

Легко видеть, что в логарифмическом масштабе частот кривая уравнения (83') является кососимметричной относительно точки $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$, в которой $\theta = -45^\circ$. Другими словами, если откладывать вдоль оси

абсцисс величину $\frac{\omega}{\omega_1}$, то в точках $T_1\omega$ и $\frac{1}{T_1\omega}$, симметрично расположенных относительно точки *1* (так как логарифмы от обеих величин равны и противоположны по знаку), значения фазы $\theta\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$ и $\theta\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)$ связаны соотношением

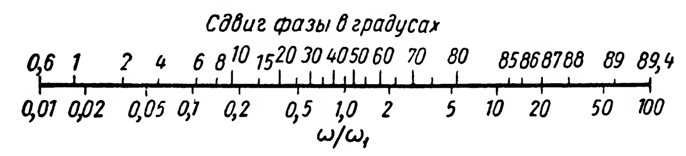
$$\theta\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)=\frac{\pi}{2}-\theta\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right). \quad (84)$$

Действительно,

$$\operatorname{tg}\theta\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)=\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-\theta\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)\right], \quad (85)$$

откуда и следует уравнение (84).

Построение кривой уравнения (83′) можно облегчить, если пользоваться номограммой, изображенной на фиг. 48 [3]. Для того чтобы найти сдвиг фазы при какой-либо частоте ω, связанный с наличием сопря-



Фиг. 48. Номограмма для построения фазовой частотной характеристики апериодического звена.

гающей частоты при ω_1, необходимо лишь совместить точку *1* на нижней шкале номограммы с сопрягающей частотой и произвести отсчет сдвига фазы, соответствующий интересующему нас значению ω по верхней шкале номограммы. При этом, конечно, масштаб вдоль оси частот для кривой выражения (83′) должен совпадать с масштабом для $\frac{\omega}{\omega_1}$ на нижней шкале номограммы.

Если нас интересует сдвиг фазы, соответствующий сопрягающей частоте ω_1 при частотах, находящихся вне интервала

$$0{,}5<\frac{\omega}{\omega_1}<2{,}0,$$

то можно воспользоваться следующими приближенными соотношениями:

$$\theta(\omega)\approx-\frac{\omega}{\omega_1} \quad (86)$$

при $\frac{\omega}{\omega_1}<0{,}5$ и

$$\theta(\omega)\approx-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{\omega_1}\right) \quad (87)$$

при $\frac{\omega}{\omega_1}>2$, полученными при помощи разложения $\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_1}$ в ряд и отбрасывания членов выше первого порядка малости.

Ниже, в табл. 3, приведены значения ошибки δ в определении сдвига фазы по формулам (86) и (87).

Таблица 3

$\frac{\omega}{\omega_1}$	0,25	0,5	1,0	2,0	4,0
δ в °	0,4	2	12,4	2	0,4

Эта таблица показывает, что ошибка при пользовании выражениями (86) и (87) вне интервала $0{,}5 < \frac{\omega}{\omega_1} < 2$ не превышает 0,4°, а внутри этого интервала достигает максимального значения 12,4° при $\omega = \omega_1$.

б) Неустойчивое апериодическое звено

Передаточная функция (54) неустойчивого апериодического звена при $K = 1$ может быть представлена в виде

$$W(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}}\, e^{-(\pi - \operatorname{arctg} T_1\omega)}. \tag{88}$$

Из сравнения формул (78) и (88) ясно, что логарифмическая амплитудная характеристика или характеристика затухания устойчивого и неустойчивого апериодического звена совпадают друг с другом, фазовые же характеристики отличаются друг от друга. В то время как фазовая характеристика устойчивого звена при малых ω стремится к нулю, а при достаточно больших ω — к $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, фазовая характеристика неустойчивого звена при малых ω стремится к $(-\pi)$, а при достаточно больших ω — к $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Изложенные выше соображения о приближенном построении логарифмических характеристик устойчивого апериодического звена без труда могут быть использованы и в случае неустойчивого апериодического звена.

в) Диференцирующее звено первого порядка

Передаточная функция диференцирующего звена первого порядка

$$W(s) = (\tau s + 1),$$

и, следовательно, мы можем написать:

$$W(j\omega) = \sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}\, e^{j \operatorname{arctg} \tau\omega}, \tag{89}$$

откуда

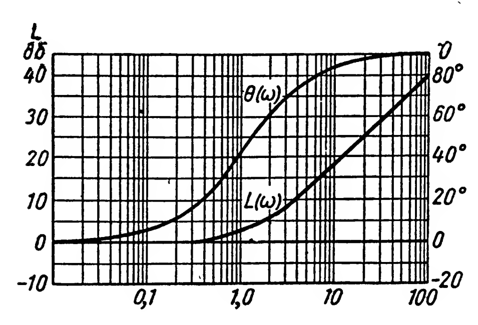
$$L(\omega) = 20 \lg \sqrt{\tau^2\omega^2 + 1} \tag{90}$$

и

$$\theta(\omega) = \operatorname{arctg} \tau\omega. \tag{91}$$

Сравнивая уравнения (90) и (80), легко видеть, что логарифмические характеристики апериодического и диференцирующего звена отличаются друг от друга лишь знаком.

Отсюда следует, что логарифмическая амплитудная характеристика или характеристика затухания диференцирующего звена приближенно может быть представлена в виде двух прямолинейных отрезков:



Фиг. 49. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики диференцирующего звена первого порядка.

$$L(\omega) \approx 0$$

при $\omega \leqslant \frac{1}{\tau}$ и

$$L(\omega) \approx 20 \lg \tau\omega. \qquad (92)$$

при $\omega \geqslant \frac{1}{\tau}$, сопрягающихся при частоте

$$\omega = \frac{1}{\tau},$$

причем прямая, определяемая равенством (92), имеет наклон, равный $+6$ *дб* на октаву или $+20$ *дб* на декаду (фиг. 49).

Для того чтобы пользоваться в случае диференцирующего звена табл. 2 или кривой поправок (фиг. 47), полученных для апериодического звена, необходимо лишь изменить знак поправок.

Все соображения, высказанные выше относительно фазовой характеристики апериодического звена, остаются справедливыми и для фазовой характеристики диференцирующего звена первого порядка, если только учесть перемену знака.

г) Интегрирующее звено

Передаточная функция интегрирующего звена

$$W(s) = \frac{K}{s},$$

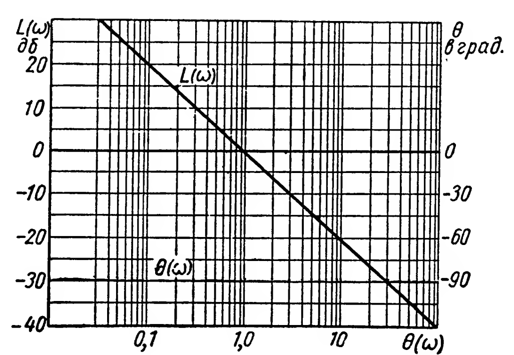
откуда

$$W(j\omega) = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

и, следовательно,

$$L(\omega) = -20 \lg \omega; \qquad (93)$$

$$\theta(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \qquad (94)$$



Фиг. 50. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики интегрирующего звена.

Из уравнения (93) ясно, что логарифмическая амплитудная характеристика затухания интегрирующего звена представляет собой в логарифмическом масштабе частот прямую линию с наклоном (-6 *дб*) на октаву или (-20 *дб*) на декаду, пересекающуюся с осью частот в точке $\omega = 1$ (фиг. 50).

Сдвиг фазы, создаваемый интегрирующим звеном, не зависит от частоты и равен $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

д) Колебательное звено

На основании выражения (42) главы X для амплитудно-фазовой характеристики колебательного звена при $K=1$ мы можем написать:

$$W(j\omega)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-T_k^2\omega^2\right)^2+(2\zeta_k T_k\omega)^2}}\,e^{-j\,\mathrm{arctg}\frac{2\zeta_k T_k\omega}{1-T_k^2\omega^2}}, \tag{95}$$

и, следовательно, логарифмические амплитудные частотные характеристики колебательного звена определяются выражениями

$$L(\omega)=-20\lg\sqrt{\left(1-T_k^2\omega^2\right)^2+(2\zeta_k T_k\omega)^2} \tag{96}$$

и

$$\theta(\omega)=-\mathrm{arctg}\frac{2\zeta_k T_k\omega}{1-T_k^2\omega^2}. \tag{97}$$

Семейство кривых $L(\omega)$ и $\theta(\omega)$ для различных ζ и одного и того же значения T_k приведено на фиг. 51 и 52.

Как это ясно из фиг. 51, кривая $L(\omega)$ может иметь существенный пик при $T_k\omega=1$. Поэтому изображение кривой $L(\omega)$ в виде сопрягающих прямолинейных отрезков в окрестности точки $T_k\omega=1$ может быть недопустимо. Однако при значениях $\omega\ll\frac{1}{T_k}$ и значениях $\omega\gg\frac{1}{T_k}$ характеристики затухания в уравнении (96) могут быть приближенно заменены прямыми линиями. Действительно, на основании формулы (96) мы можем приближенно написать:

$$L(\omega)\approx 0 \tag{98}$$

при $\omega\ll\frac{1}{T_k}$ и

$$L(\omega)\approx -20\lg(T_k\omega)^2 \tag{99}$$

при $\omega\gg\frac{1}{T_k}$.

Из выражений (98) и (99) очевидно, что логарифмическая амплитудная характеристика колебательного звена при малых ω асимптотически стремится к оси частот, т. е. к прямой, имеющей нулевой наклон, а при больших ω асимптотически стремится к прямой, имеющей наклон, равный (—12 *дб*) на октаву или (—40 *дб*) на декаду.

Найдем частоту ω_{I}, определяющую интервал частот $(o,\ \omega_{\mathrm{I}})$, в пределах которого равенство (98) остается справедливым с точностью до ±3 *дб*. Это значение частоты ω_{I} определяется соотношением

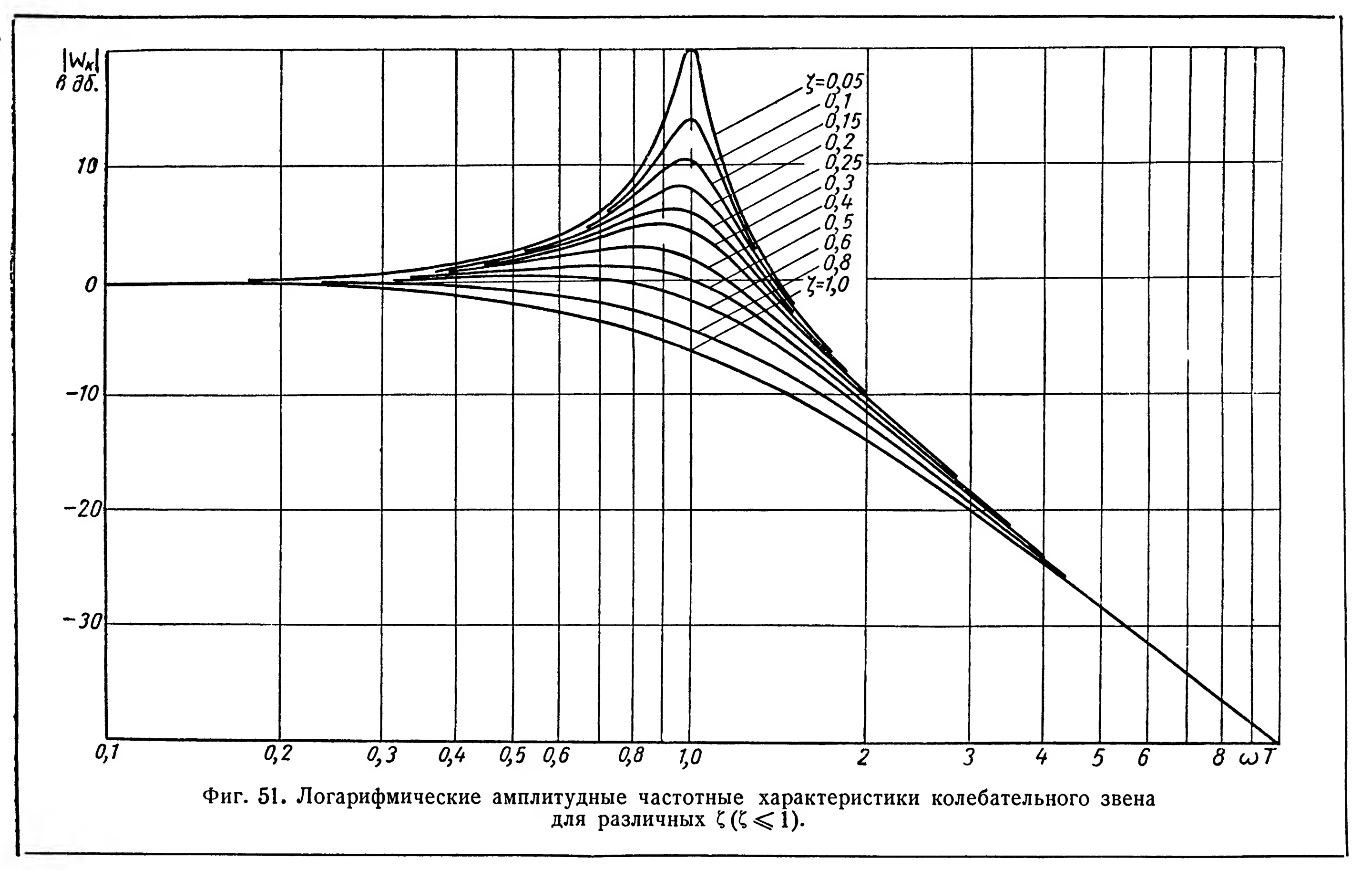
$$-20\lg\sqrt{\left(1-T_k^2\omega_{\mathrm{I}}^2\right)^2+(2\zeta_k T_k\omega_{\mathrm{I}})^2}=\pm3=(\pm20\lg 2),$$

откуда

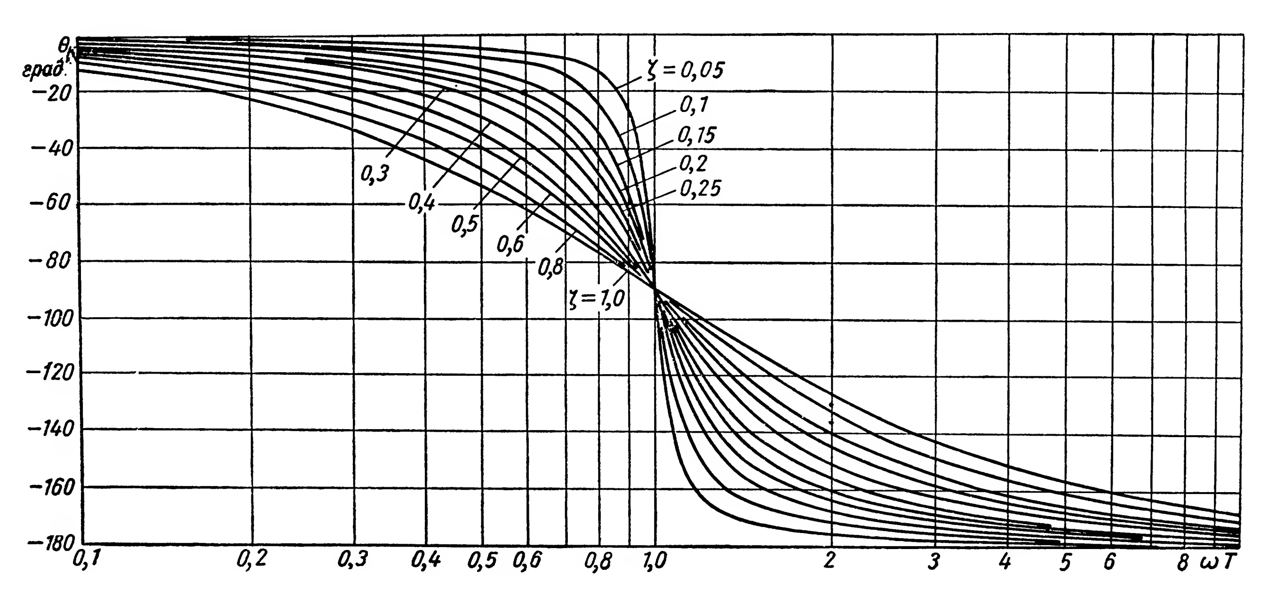
$$\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_k}=\sqrt{\left(1-2\zeta_k^2\right)+\sqrt{\left(1-2\zeta_k^2\right)^2+1{,}0}}, \tag{100}$$

или

$$\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{\omega_k}=\sqrt{1-2\zeta_k^2-\sqrt{\left(1-2\zeta_k^2\right)^2-0{,}5}}, \tag{101}$$



Фиг. 51. Логарифмические амплитудные частотные характеристики колебательного звена для различных ζ ($\zeta \leqslant 1$).



Фиг. 52. Фазовые частотные характеристики колебательного звена для различных значений ζ ($\zeta \leqslant 1$).

причем из двух выражений (100) и (101) для $\frac{\omega_I}{\omega_k}$ следует выбирать то из них, которое при данном ζ_k имеет меньшее вещественное значение.

В приводимой ниже табл. 4 показаны значения $\frac{\omega_I}{\omega_k}$, соответствующие различным ζ_k.

Таблица 4

ζ_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{\omega_I}{\omega_k}$	0,55	0,55	0,58	0,64	0,84	1,0	1,0	1,0	0,87	0,75	0,64

Найдем теперь частоту ω_{II}, определяющую интервал частот (ω_{II}, ∞), в пределах которого равенство (98) остается справедливым с точностью до ± 3 *дб*. Частота ω_{II} может быть найдена из соотношения

$$-20 \lg \sqrt{(1-T_k^2\omega_{II}^2)^2+(2\zeta_k T_k\omega_{II})^2}+20 \lg (T_k\omega_{II})^2=\pm 3. \qquad (102)$$

Решая уравнение (102) относительно ω_{II}, получим

$$\frac{\omega_{II}}{\omega_k}=\sqrt{(2\zeta_k^2-1)+\sqrt{(2\zeta_k^2-1)^2+1}}; \qquad (103)$$

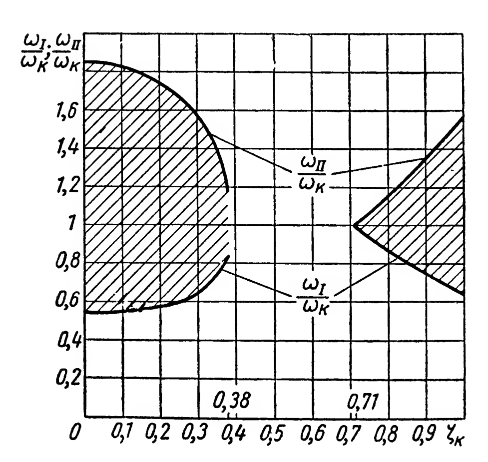
или

$$\frac{\omega_{II}}{\omega_k}=\sqrt{2(1-2\zeta_k^2)+\sqrt{4(1-2\zeta_k^2)-2}}, \qquad (104)$$

причем из двух получившихся выражений (103) и (104) для $\frac{\omega_{II}}{\omega_k}$ следует выбирать то из них, которое при данном ζ_k имеет наибольшее вещественное значение.

В приводимой ниже табл. 5 даны значения $\frac{\omega_{II}}{\omega_k}$, соответствующие различным ζ_k.

На фиг. 53 даны области частот, в которых ошибка при замене логарифмической амплитудной характеристики колебательного звена двумя сопрягающимися прямыми превышает 3 *дб*. Эти области построены на основании табл. 5 и 4.

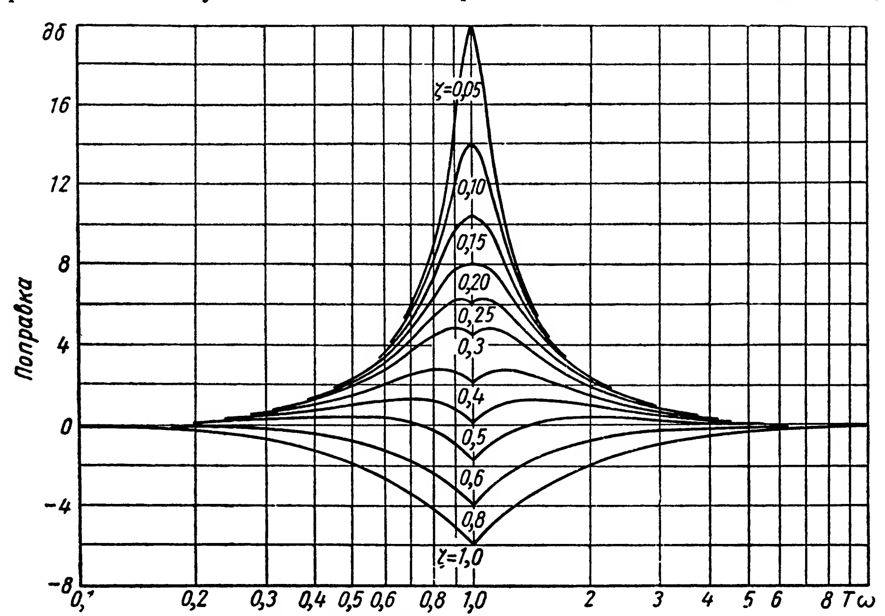


Фиг. 53. Области частот, в которых ошибка при замене логарифмической амплитудной характеристики колебательного звена двумя сопрягающимися прямыми превышает 3 *дб*. В заштрихованных областях ошибка превышает 3 *дб*.

Таблица 5

ζ_k	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{\omega_{II}}{\omega_k}$	1,85	1,83	1,74	1,58	1,19	1,0	1,0	1,0	1,15	1,34	1,55

Для облегчения построения логарифмической амплитудной характеристики колебательных звеньев в интервале частот $\omega_I < \omega < \omega_{II}$, в котором они не могут быть заменены прямолинейными асимптотами, могут



Фиг. 54. Отклонение точных логарифмических амплитудных характеристик колебательного звена от асимптотических.

служить кривые поправок, приведенные на фиг. 54. Эти поправки, выраженные в децибелах, должны учитываться при замене точного выражения (96) для $L(\omega)$ двумя асимптотами уравнений (98) и (99).

Итак, можно предложить следующее правило построения логарифмической амплитудной характеристики или характеристики затухания колебательного звена:

1) отмечаем на оси частот сопрягающую частоту

$$\omega_k = \frac{1}{T_k}$$

и проводим из нее прямую с наклоном (—40 *дб*) на декаду; в результате получаем первое приближение для логарифмической амплитудной характеристики в виде прямолинейных асимптот, сопрягающихся в точке $\omega_k = \frac{1}{T_k}$;

2) определяем при помощи формул (100) и (103) частоты ω_{I}, ω_{II}; если при этом окажется, что $\omega_{I} > \omega_{II}$, то первое приближение, о котором говорится в предыдущем пункте, будет обеспечивать точность, не меньшую 3 *дб* *;

3) если $\omega_{I} < \omega_{II}$, то для уточнения вида логарифмической амплитудной характеристики в интервале частот $\omega_{I} < \omega < \omega_{II}$ пользуемся кривой поправок, которой соответствует значение ζ_k, наименее отличающееся от рассматриваемого; поправки откладываем от сопрягающихся асимптот.

Для вычисления фазы $\theta(\omega)$ часто можно пользоваться вместо точной формулы (97) приближенными формулами

$$\operatorname{arctg} \frac{2\zeta_k T_k \omega}{1 - T_k^2 \omega^2} \approx 2\zeta_k T_k \omega \qquad (105)$$

при $T\omega < 0{,}4$ и

$$\operatorname{arctg} \frac{2\zeta_k T_k \omega}{1 - T_k^2 \omega^2} \approx \pi - \frac{2\zeta_k}{T_k \omega} \qquad (106)$$

при $T\omega > 2{,}5$.

Ошибка в вычислении фазы по этим формулам при любом ζ не превышает 2°.

е) Диференцирующее звено второго порядка

Диференцирующее звено второго порядка (см. главу VII) при $K = 1$ имеет логарифмические частотные характеристики вида

$$L_d(\omega) = 20 \lg \sqrt{(1 - \tau_d^2 \omega^2)^2 + (2\zeta_d \tau_d \omega)^2}; \qquad (107)$$

$$\theta_d(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{2\zeta_d \tau_d \omega}{1 - \tau_d^2 \omega^2}. \qquad (108)$$

Сравнивая формулы (107) и (108) с формулами (96) и (97), легко видеть, что логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики устойчивого колебательного звена и диференцирующего звена при $T_k = \tau_d$, $\zeta = \zeta_{kd}$ отличаются друг от друга лишь знаком. Поэтому кривые $L(\omega)$, $\theta(\omega)$, определяемые формулами (107) и (108), могут быть получены при помощи зеркального отображения кривых, изображенных на фиг. 51 и 52, относительно оси частот. То же утверждение справедливо и для поправочных кривых на фиг. 54.

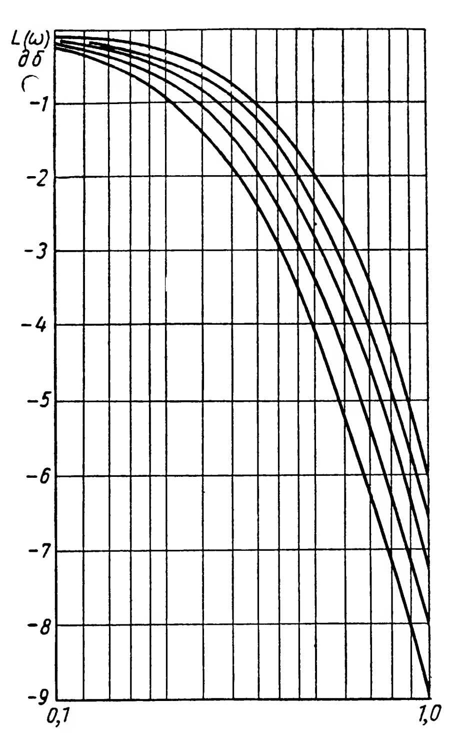
ж) Неустойчивое колебательное звено

В случае неустойчивого колебательного звена, имеющего передаточную функцию вида (43) главы X, выражения для логарифмической амплитудной и фазовой частотных характеристик при $K = 1$ имеют вид

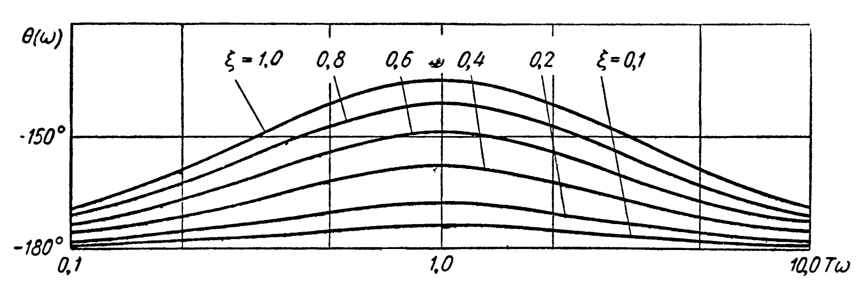
$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1 + T_k^2 \omega^2)^2 + (2\zeta_k T_k \omega)^2} \qquad (109)$$

---

* Заметим, что указанная точность обеспечивается при всех ω для значений ζ_k, заключенных в пределах $0{,}38 \leqslant \zeta_k \leqslant 0{,}7$.



Фиг. 55. Кривые отклонений логарифмических амплитудных частотных характеристик $L(\omega) = -20\lg\sqrt{(1 + T_k^2\omega^2)^2 + (2\zeta_k T_k\omega)^2}$ неустойчивого колебательного звена, имеющего передаточную функцию $W(s) = \frac{1}{T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s - 1}$ от асимптотических.



Фиг. 56. Фазовые частотные характеристики

$$\theta(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{2\zeta T\omega}{1 + T^2\omega^2}.$$

и

$$\theta(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{2\zeta_k T_k \omega}{1 + T_k^2\omega^2}. \qquad (110)$$

Кривые отклонений точных амплитудных характеристик от асимптотических и семейство фазовых характеристик, определяемых формулами (109) и (110), приведены соответственно на фиг. 55 и 56.

В случае неустойчивого колебательного звена, имеющего передаточную функцию вида (45), выражения для логарифмической амплитудной и фазовой частотных характеристик при $K = 1$ имеют вид

$$L_k(\omega) = -20 \lg \sqrt{\left(1 - T_k^2\omega^2\right) + (2\zeta_k T_k \omega)^2}; \qquad (111)$$

$$\theta_k(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{2\zeta_k T_k \omega}{1 - T_k^2\omega^2}. \qquad (112)$$

Сравнивая уравнения (96) и (108) с уравнениями (111) и (112), легко видеть, что характеристики затухания $L(\omega)$ рассматриваемого неустойчивого колебательного звена совпадают с характеристиками затухания устойчивого колебательного звена, а его фазовые характеристики совпадают с фазовыми характеристиками диференцирующего звена второго порядка.

Таким образом, при построении логарифмических амплитудных характеристик (111) мы можем пользоваться фиг. 51, а при построении фазовых характеристик (112) — фиг. 52, зеркально отобразив последние относительно оси ω.

4. ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОКОНТУРНЫХ СИСТЕМ

Выражение для передаточной функции $KW(s)$ разомкнутой одноконтурной системы (устойчивой в разомкнутом состоянии) определяется формулой (335) главы VI. Поэтому общее выражение для логарифмической амплитудной характеристики или характеристики затухания $L(\omega)$ такой системы, если ввести обозначение

$$20 \lg F(\omega) = LmF(\omega),$$

можно представить в следующем виде:

$$L(\omega) = LmK - \nu Lm\omega - \sum_{i=1}^{\rho} Lm \sqrt{T_i^2\omega^2 + 1} -$$

$$- \sum_{i=1}^{\sigma} Lm \sqrt{\left(1 - T_{ik}^2\omega^2\right)^2 + (2\zeta_{ik} T_{ik})^2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\mu} Lm \sqrt{\tau_i^2\omega^2 + 1} + \sum_{i=1}^{\eta} Lm \sqrt{\left(1 - \tau_{id}^2\omega^2\right)^2 + (2\zeta_{id}\tau_{id}\omega)^2}. \qquad (113)$$

Выражение (113) показывает, что логарифмическая амплитудная характеристика или характеристика затухания $L(\omega)$ одноконтурной системы может быть получена в результате простого сложения ординат рассмотренных нами выше характеристик затухания типовых звеньев, входящих в ее состав.

Пример. Построим логарифмические частотные характеристики системы, имеющей передаточную функцию вида

$$KW(s) = \frac{100(1{,}25s+1)^2}{s(5s+1)^2(0{,}02s+1)(0{,}005s+1)}. \qquad (114)$$

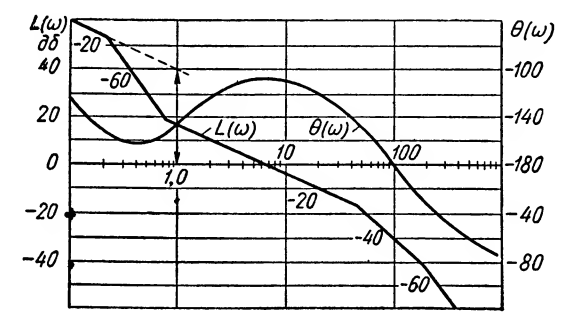
Прежде всего определим сопрягающие частоты, которые обратны по величине коэфициентам при s (постоянным времени) в уравнении (114). Имеем

$$\omega_1 = \frac{1}{5} = 0{,}2;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{0{,}02} = 50;$$

$$\omega_4 = \frac{1}{0{,}005} = 200.$$



Фиг. 57. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики системы с передаточной функцией

$$KW(s) = \frac{100(1{,}25s+1)^2}{s(5s+1)^2(0{,}02s+1)(0{,}005s+1)}.$$

Отметим сопрягающие частоты ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 на оси частот (фиг. 57) и построим характеристики затухания отдельных звеньев системы. Из уравнения (114) ясно, что система состоит из одного интегрирующего, четырех апериодических, двух диференцирующих звеньев первого. порядка (с одинаковыми постоянными времени) и одного усилительного звена.

Характеристика затухания интегрирующего звена представляет прямую с наклоном —20 *дб* на декаду, пересекающую ось частот при $\omega = 1$.

Характеристикой затухания двух апериодических звеньев с одинаковыми постоянными времени $T_1 = 5$ является прямая с наклоном —40 *дб* на декаду, сопрягающаяся с осью частот при $\omega_1 = 0{,}2$. Точно так же характеристиками затухания двух остальных апериодических звеньев являются прямые и с наклоном —20 *дб* на декаду, сопрягающиеся с осью частот при $\omega_3 = 50$ и $\omega_4 = 200$.

Характеристикой затухания двух диференцирующих звеньев с одинаковой постоянной времени $\tau = 1{,}25$ является прямая с наклоном +40 *дб* на декаду, сопрягающаяся с осью частот при $\omega_2 = 0{,}8$. Логарифмическая амплитудная характеристика усилительного звена представляет собой прямую, удаленную от оси частот на расстояние $20 \lg K = 40$.

Произведя алгебраическое сложение ординат логарифмических амплитудных характеристик отдельных звеньев, получим результирующую логарифмическую амплитудную характеристику системы $L(\omega)$ в виде сопрягающихся друг с другом прямолинейных отрезков.

Вид $L(\omega)$ можно уточнить, воспользовавшись кривой поправок на фиг. 47 для каждой из сопрягающих частот. При этом необходимо учитывать, что в случае наличия двух одинаковых постоянных времени ординаты кривой поправок должны удваиваться.

Легко видеть, что логарифмическая амплитудная характеристика системы $L(\omega)$ может быть получена непосредственно по виду передаточной функции $KW(s)$ без необходимости построения логарифмической амплитудной характеристики отдельных звеньев.

Для этого необходимо лишь учесть, что при частотах, меньших первой сопрягающей частоты ω_1, логарифмическая амплитудная характеристика системы $L(\omega)$ — это прямая с наклоном, равным наклону логарифмической амплитудной характеристики интегрирующего звена, т. е. —20 *дб* на декаду, так как логарифмическая амплитудная характеристика всех остальных звеньев при $\omega < \omega_1$ имеет нулевой наклон. Эта прямая должна быть проведена так, чтобы при $\omega = 1$ ее ордината равнялась $20 \lg K = 40$.

При $\omega = \omega_1 = 0{,}2$ на характеристику затухания интегрирующего звена, имеющую наклон —20 *дб* на декаду, накладывается характеристика затухания двух апериодических звеньев с одинаковыми постоянными времени, имеющая наклон — 40 *дб* на декаду. Поэтому $L(\omega)$ в интервале $\omega_1 < \omega < \omega_2$ имеет уже наклон —60 *дб* на декаду.

При $\omega = \omega_2 = 0{,}8$ начинает сказываться эффект двух диференцирующих звеньев с одинаковыми постоянными времени. Благодаря им наклон $L(\omega)$ в интервале $\omega_2 < \omega < \omega_3$ делается равным —20 *дб* на декаду. При $\omega = 50$ наклон вследствие влияния апериодического звена с постоянной времени $T = 0{,}02 = \frac{1}{50}$ возрастает до —40 *дб* на декаду и при $\omega > \omega_4 = 600$ наклон $L(\omega)$ вследствие влияния апериодического звена с постоянной времени $T = 0{,}005 = \frac{1}{200}$ возрастает еще на —20 *дб* на декаду и делается равным —60 *дб* на декаду.

Фазовая характеристика $\theta(\omega)$, изображенная на фиг. 57, получена при помощи сложения ординат фазовых характеристик отдельных звеньев.

Таким образом, можно сформулировать следующее правило построения логарифмической амплитудной характеристики $L(\omega)$ одноконтурной системы.

1. Определяем сопрягающие частоты ω_1, $\omega_2, \ldots$ и отмечаем их вдоль оси частот.

2. Проводим низкочастотную асимптоту логарифмической амплитудной характеристики $L(\omega)$, представляющую собой при $\omega < \omega_1$ прямую с наклоном -20ν *дб* на декаду, где ν — порядок астатизма системы. Эта прямая при $\omega = 1$ должна иметь ординату, равную $20 \lg K$, где K — передаточный коэфициент.

3. После каждой из сопрягающих частот ω_i изменяем наклон характеристики затухания $L(\omega)$ по сравнению с тем наклоном, который она имела до рассматриваемой сопрягающей частоты ω_i, в зависимости от того, какому звену эта сопрягающая частота соответствует.

Наклон изменяется на —20 *дб* на декаду в случае апериодического звена, на —40 *дб* на декаду в случае колебательного звена, на +20 *дб* на декаду в случае диференцирующего звена первого порядка и на +40 *дб* на декаду в случае диференцирующего звена второго порядка.

4. Пользуясь кривыми поправок на фиг. 47 и 54, уточняем вид полученной таким образом характеристики затухания системы $L(\omega)$.

Примечание. Высокочастотная асимптота характеристики затухания $L(\omega)$, т. е. ее часть при частотах, бо́льших наивысшей сопрягающей частоты, должна иметь наклон, равный $-20(n-m)$ *дб* на декаду, где n — порядок знаменателя, а m — порядок числителя передаточной функции $KW(s)$.

Сделаем теперь несколько замечаний относительно фазовых характеристик.

Выражение для фазовой частотной характеристики $\theta(\omega)$, соответствующей логарифмической амплитудной характеристике (113), имеет вид

$$\theta(\omega) = -\nu\frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^{\rho} \operatorname{arctg} T_i\omega - \sum_{i=1}^{\sigma} \operatorname{arctg} \frac{2\zeta_{ik}T_{ik}\omega}{1 - T_{ik}^2\omega^2} + \sum_{i=1}^{\mu} \operatorname{arctg} \tau_i\omega + \sum_{i=1}^{\eta} \operatorname{arctg} \frac{2\zeta_{i\alpha}\tau_i\,\omega}{1 - \tau_{i\alpha}^2\omega^2}. \qquad (115)$$

Выражение (115) показывает, что фазовые характеристики, так же как и логарифмические амплитудные характеристики одноконтурных систем, могут быть получены в результате простого сложения ординат фазовых характеристик типовых звеньев, входящих в их состав.

При построении фазовых характеристик апериодических звеньев и диференцирующих звеньев первого порядка удобно пользоваться номограммой на фиг. 48. Можно также пользоваться шаблоном, изготовленным в соответствии с кривой $\theta(\omega)$ на фиг. 46. Для приближенного построения фазовых характеристик колебательных звеньев и диференцирующих звеньев второго порядка удобно располагать серией номограмм или шаблонов, соответствующих различным значениям ζ.

Часто при вычислении фазовых характеристик полезными оказываются приближенные формулы (86), (87) и (105), (106).

5. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОКОНТУРНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПО ИХ ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Пользуясь критериями устойчивости для обычной амплитудно-фазовой характеристики, данными в главе X, легко сформулировать требования, которым должны удовлетворять логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы для того, чтобы она была устойчива в замкнутом состоянии.

Рассмотрим прежде всего простейший случай, когда амплитудно-фазовая характеристика системы, устойчивой в разомкнутом состоянии, не имеет точек пересечения с отрезком действительной оси $(-\infty, -1)$ (амплитудно-фазовая характеристика первого рода) (см. фиг. 44).

Легко видеть, что в рассматриваемом случае система является устойчивой в том, и только в том, случае, если всем точкам амплитудно-фазовой характеристики вплоть до точки ее пересечения с окружностью единичного радиуса соответствуют значения фазы θ большие, чем $(-\pi)$.

Но точке пересечения амплитудно-фазовой характеристики с окружностью единичного радиуса соответствует точка пересечения логарифмической амплитудной характеристики $L(\omega)$ с осью частот (так как $\lg 1 = 0$). Поэтому можно высказать следующее утверждение:

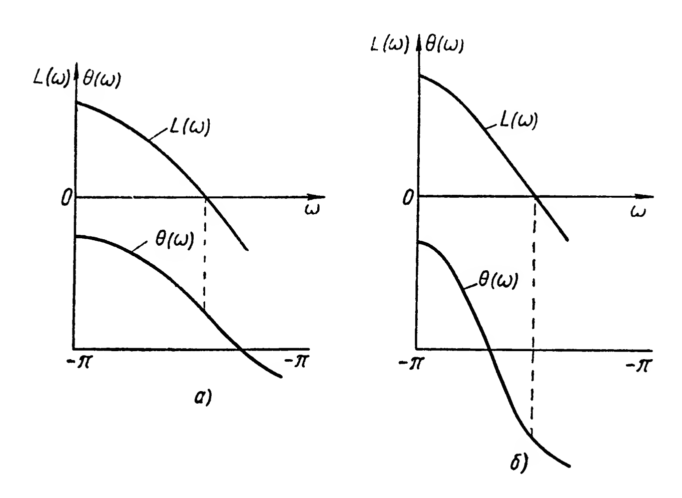
Для того чтобы система, устойчивая в разомкнутом состоянии и имеющая амплитудно-фазовую характеристику первого рода, была устойчива в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы при всех частотах, при которых логарифмическая амплитудная частотная характеристика неотрицательна, т. е. $L(\omega) \geqslant 0$, *значения фазы* $\theta(\omega)$ *превосходили* $(-\pi)$.

Для иллюстрации на фиг. 58, *а* изображены логарифмические характеристики устойчивой, а на фиг. 58, *б* — неустойчивой системы.

Рассмотрим более общий случай, когда амплитудно-фазовая характеристика системы, попрежнему предполагаемой устойчивой в разомкнутом состоянии, имеет точки пересечения с отрезком действительной оси $(-\infty, -1)$ (амплитудно-фазовая характеристика второго рода) (см. фиг. 44).

В данном случае, как это было показано в главе X, система устойчива в замкнутом состоянии в том, и только в том, случае, если разность между числом положительных (сверху вниз) и отрицательных (снизу вверх) переходов амплитудно-фазовой характеристики отрезка $(-\infty, -1)$ равна нулю.

Но в точках пересечения между амплитудно-фазовой характеристикой и отрезком $(-\infty, -1)$ логарифмическая амплитудная характеристика $L(\omega)$ положительна, а фазовая характеристика $\theta(\omega)$ пересекает прямую $(-\pi)$ снизу вверх или сверху вниз в зависимости от того, соответствует ли рассматриваемая точка пересечения положительному или отрицательному переходу. Поэтому если условиться называть точку, в которой



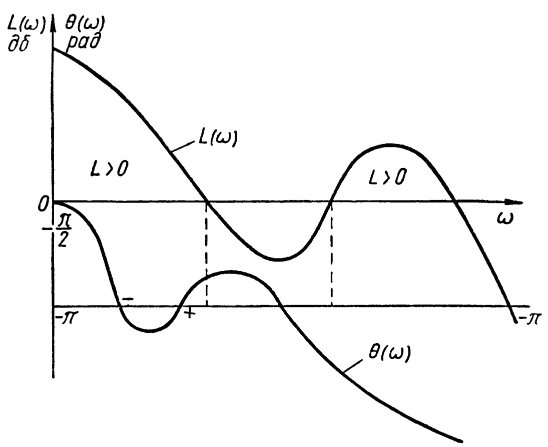
Фиг. 58. Логарифмические характеристики устойчивой и неустойчивой системы.

фазовая характеристика пересекает прямую $(-\pi)$ снизу вверх, положительным переходом, а точку, в которой она пересекает эту прямую сверху вниз, отрицательным переходом, то критерий устойчивости применительно к логарифмическим частотным характеристикам можно сформулировать следующим образом:

Для того чтобы система, устойчивая в разомкнутом состоянии, была устойчива также и в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов между фазовой характеристикой $\theta(\omega)$ *и прямой* $(-\pi)$ *при тех значениях* ω, *при которых логарифмическая амплитудная характеристика* $L(\omega)$ *неотрицательна, равнялась нулю.*

Так, например, если логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы имеют вид, графически изображенный на фиг. 59, и разомкнутая система устойчива (или нейтрально устойчива, т. е. имеет полюс в начале координат), то замкнутая система будет также устойчивой.

Последнее вытекает из того, что при $L(\omega) > 0$ фазовая характеристика имеет, как это ясно из фиг. 59, один положительный и один отрицательный переход.

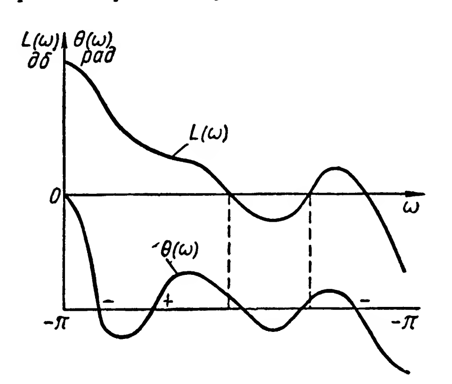


Фиг. 59. Логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы, устойчивой в замкнутом состоянии ($P = 0$).

Теперь остается обобщить этот критерий на более общий случай, когда система в разомкнутом состоянии неустойчива и характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет P корней в правой полуплоскости.

Так как в этом случае условие устойчивости для обычной амплитудно-фазовой характеристики заключается в том, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов амплитудно-фазовой характеристики отрезка $(-\infty, -1)$ равнялась $\frac{P}{2}$, то можно высказать следующее утверждение:

Для того чтобы система, характеристическое уравнение которой в разомкнутом состоянии имеет P корней в правой полуплоскости, была устойчива в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы число положительных переходов между фазовой характеристикой $\theta(\omega)$ и прямой $(-\pi)$ превышало на величину $\frac{P}{2}$ число отрицательных переходов при тех значениях ω, при которых логарифмическая амплитудная частотная характеристика $L(\omega)$ неотрицательна.



Фиг. 60. Логарифмические частотные характеристики неустойчивой разомкнутой системы ($P = 2$), неустойчивой в замкнутом состоянии.

Пример применения критерия приведен на фиг. 60.

Если система должна быть не только устойчивой, но и обладать требуемым запасом устойчивости по модулю и по фазе θ, то, кроме удовлетворения только что сформулированного критерия, требуется выполнение еще следующих дополнительных условий:

1) при тех значениях ω, при которых

$$-\lambda \leqslant L(\omega) \leqslant \lambda,$$

отрицательные значения фазы $\theta(\omega)$ должны удовлетворять неравенству

$$|\pi+\theta(\omega)| \geqslant \gamma;$$

2) при тех значениях ω, при которых

$$-\pi-\gamma \leqslant \theta(\omega) \leqslant -\pi+\gamma,$$

логарифмическая амплитудная характеристика $L(\omega)$ должна удовлетворять одному из неравенств

$$-\lambda \leqslant L(\omega);$$
$$L(\omega) \leqslant -\lambda.$$

Итак для анализа устойчивости по логарифмическим характеристикам следует построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики; найти интервалы частот, в которых логарифмическая амплитудная характеристика $L(\omega) > 0$; сосчитать в найденных таким образом интервалах частот число пересечений фазовой характеристики $\theta(\omega)$ с прямой ($-\pi$) снизу вверх (плюс) и сверху вниз (минус).

Если при этом окажется, что разность между числом точек пересечения, отмеченных знаком плюс, и числом точек пересечения, отмеченных знаком минус, равна $\frac{P}{2}$, то система устойчива, если же по какому-либо другому числу, то система неустойчива.

Заметим, что в случае астатических систем при подсчете числа точек пересечения необходимо учитывать точку пересечения амплитудно-фазовой характеристикой отрезка $(-\infty, -1)$, получающуюся при бесконечно малых значениях ω.

6. УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОКОНТУРНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Причины, по которым системы регулирования имеют не один, а несколько контуров обратной связи, могут быть самыми различными. Так например, кроме обратной связи через чувствительный элемент, в системах регулирования часто имеются внутренние обратные связи, вводимые в усилительные элементы для понижения уровня шумов, уменьшения выходного сопротивления, обеспечения линейности и т. д. Введение внутренних обратных связей является одним из важнейших и наиболее распространенных способов коррекции динамических свойств систем автоматического регулирования (см. главу XVI).

Системы с несколькими регулируемыми величинами также относятся к классу многоконтурных систем регулирования. Наконец, с многоконтурными системами приходится иметь дело при анализе сложных систем автоматического управления, состоящих из нескольких взаимодействующих друг с другом следящих систем и систем стабилизации.

Анализ устойчивости многоконтурных систем обычно значительно более сложен, чем одноконтурных. Одной из основных причин этого является то, что передаточные функции многоконтурных систем с разомкнутой главной обратной связью через чувствительный элемент уже не являются произведением простых сомножителей [см., например, выражения (339) и (344) для передаточных функций, полученных в главе VI].

Часто анализ устойчивости многоконтурных систем можно существенно упростить, преобразовав структурную схему рассматриваемой системы, например, при помощи одного из приемов, рассмотренных в главе VI.

К анализу устойчивости многоконтурных систем можно применить по существу любой из известных критериев устойчивости.

Выбор того или иного критерия в значительной мере зависит от особенностей структурной схемы конкретной системы. Так, например, если система содержит ряд параллельных цепей обратной связи, охватывающих одну и ту же последовательность звеньев (см. фиг. 56 главы VI), может оказаться удобным применение критерия устойчивости для обратной амплитудно-фазовой характеристики. Действительно, в этом случае обратная амплитудно-фазовая характеристика определяется выражением

$$\frac{1}{KW(s)} = \frac{1}{K_1 W_1(s)} + Z_1(s) + Z_2(s) + \ldots + Z_n(s),$$

которое является удобным для оценки влияния на устойчивость каждого из контуров обратной связи в отдельности.

В случае более сложных систем, имеющих, например, структурную схему вида, изображенного на фиг. 57 главы VI, оказывается удобным применение логарифмических частотных характеристик, основанное на методике, рассматриваемой ниже.

Для исследования устойчивости сложных многоконтурных систем с успехом может применяться критерий устойчивости Михайлова. Чтобы воспользоваться этим критерием, предварительно необходимо найти передаточную функцию всей системы (здесь опять-таки весьма полезными окажутся способы преобразования структурных схем, рассмотренные в главе VI) и построить кривую Михайлова, соответствующую знаменателю этой передаточной функции.

7. ОБОБЩЕНИЕ ЧАСТОТНОГО КРИТЕРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НА МНОГОКОНТУРНЫЕ СИСТЕМЫ

В главе X был изложен критерий устойчивости, позволяющий судить об устойчивости системы в замкнутом состоянии по виду ее амплитудно-фазовой характеристики при условии, что число полюсов передаточной функции (или число корней характеристического уравнения) разомкнутой системы, находящееся в правой полуплоскости, известно. Непосредственное применение этого критерия в случае многоконтурных систем может вызвать затруднения, так как передаточные функции таких систем в разомкнутом состоянии (когда разомкнута одна из обратных связей, а все остальные обратные связи замкнуты) не являются произведениями простых сомножителей, и поэтому число полюсов этих функций, находящихся в правой полуплоскости, нельзя рассматривать как заданную величину, а следовательно, нельзя применить и упомянутый частотный критерий. По указанной причине при анализе устойчивости многоконтурных систем частотным методом приходится вначале размыкать все обратные связи, имеющиеся в системе, а затем включать их последовательно одну за другой.

Такого рода подход к анализу устойчивости многоконтурных систем может быть обоснован следующим образом.

Рассмотрим общий случая n-контурной системы автоматического регулирования, имеющей произвольную структуру.

Обозначим левую часть характеристического уравнения системы в том случае, когда все обратные связи разомкнуты, через $D_0(s)$ и предположим для определенности, что все нули функции $D_p(s)$ расположены в левой полуплоскости. Перенумеруем теперь точки, в которых производится сравнение сигнала от обратной связи с входным сигналом, в произвольном, но фиксированном порядке и обозначим левую часть характеристического уравнения системы при включенной первой точке сравнения через $D_1(s)$, при включенной первой и второй точках сравнения через $D_2(s)$ и т. д. и, наконец, через $D(s)$ — левую часть характеристического уравнения всей системы в целом, в которой замкнуты все n цепей обратной связи. Составим теперь отношение $\frac{D(s)}{D_p(s)}$. Очевидно, мы можем написать:

$$\frac{D(s)}{D_p(s)}=\frac{D_1(s)}{D_p(s)}\cdot\frac{D_2(s)}{D_1(s)}\cdot\frac{D_3(s)}{D_2(s)}\cdots\frac{D(s)}{D_{n-1}(s)}, \tag{116}$$

или

$$\frac{D(s)}{D_p(s)}=\left[\frac{D_p(s)+M_1(s)}{D_p(s)}\right]\left[\frac{D_p(s)+M_1(s)+M_2(s)}{D_p(s)+M_1(s)}\right]\cdots$$
$$\cdots\left[\frac{D_p(s)+\sum\limits_{i=1}^{n}M_i(s)}{D_p(s)+\sum\limits_{i=1}^{n-1}M_i(s)}\right], \tag{117}$$

где через $M_1(s)$ обозначен полином, который добавляется к характеристическому уравнению полностью разомкнутой системы при включении первой обратной связи, через $M_2(s)$ — полином, который добавляется к характеристическому уравнению системы с замкнутой первой обратной связью при включении второй обратной связи и т. д., или

$$\frac{D(s)}{D_p(s)}=[1+K_1W_1(s)]\,[1+K_2W_2(s)]\,\ldots\,[1+K_nW_n(s)], \tag{118}$$

где

$$K_1W_1(s)=\frac{M_1(s)}{D_p(s)};$$
$$K_2W_2(s)=\frac{M_2(s)}{D_1(s)}; \tag{119}$$
$$K_nW_n(s)=KW(s)=\frac{M_n(s)}{D_{n-1}(s)}.$$

Учитывая, что согласно предположению функция $D_p(s)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости, легко видеть, что число нулей функции $D(s)$ в правой полуплоскости равно числу оборотов $\sum$ век-

тора $\frac{D(j\omega)}{D_p(j\omega)}$ вокруг начала координат при изменении ω от $+\infty$ до $-\infty$. Но полное число оборотов $\sum$ вектора $\frac{D(j\omega)}{D_p(j\omega)}$, очевидно, равно сумме чисел оборотов векторов $\frac{D_1}{D_p}, \frac{D_2}{D_1}, \ldots \frac{D}{D_{n-1}}$, а число оборотов каждого из этих векторов равно разности между числом нулей и полюсов соответствующей функции $\frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)}$ в правой полуплоскости, т. е.

$$\sum = (N_1 - P_1) + (N_2 - P_2) + \ldots + (N_n - P_n), \qquad (120)$$

причем условие устойчивости заключается в том, чтобы $\sum = 0$. Заметим, что в формуле (120) $P_1 = 0$ согласно предположению, число же нулей N_1 можно определить, сосчитав число оборотов вектора $K_1 W_1 (j\omega)$ относительно точки $(-1, j0)$. Определим теперь разность $N_2 - P_2$.

Легко видеть, что $P_2 = N_1$, так как знаменатель функции $\frac{D_2(s)}{D_1(s)}$ представляет собой числитель функции $\frac{D_1(s)}{D_p(s)}$, число же нулей N_2 можно определить, сосчитав число оборотов вектора $K_2 W_2(s)$ относительно точки $(-1, j0)$. Точно так же, сосчитав число оборотов вектора $K_3 W_3(s)$ относительно точки $(-1, j0)$, мы можем определить N_3 и, имея в виду, что $P_3 = N_2$, найти $N_3 - P_3$ и т. д.

Определив указанным способом каждое из чисел $N_1 - P_1$, $N_2 - P_2, \ldots N_n - P_n$, входящих в уравнение (120), и найдя их сумму $\sum$, мы установим, является ли система устойчивой или нет, в зависимости от того, будет ли эта сумма $\sum$ равна нулю или будет отличаться от нуля. При помощи аналогичных рассуждений легко показать, что если характеристическое уравнение полностью разомкнутой системы

$$D_p(\lambda) = 0$$

имеет P корней в правой полуплоскости, то полностью замкнутая система будет устойчива лишь в том случае, если сумма полного числа оборотов $\sum$ всех амплитудно-фазовых характеристик будет равна $-P$.

Таким образом, можно сформулировать следующий критерий устойчивости многоконтурных систем:

Для того чтобы многоконтурная система автоматического регулирования, характеристическое уравнение которой в полностью разомкнутом состоянии содержит P корней в правой полуплоскости, была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы полное число оборотов в отрицательном направлении вокруг критической точки $(-1, j0)$ всех амплитудно-фазовых характеристик, получаемых при последующем включении каждой из цепей обратной связи в произвольном порядке, за исключением какой-либо одной из них, при изменении ω от $+\infty$ до $-\infty$ равнялось P. Если разомкнутая система устойчива и $P = 0$, то указанное число оборотов также должно равняться нулю.

Важно заметить, что обратные связи могут включаться последовательно одна за другой в самом различном порядке. Если система

содержит n точек сравнения, то последующее включение обратных связей можно произвести $n!$ различными способами.

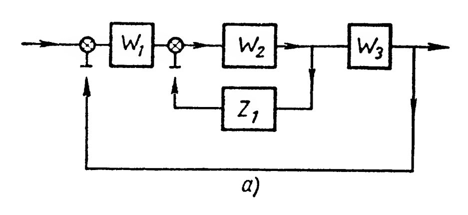
Необходимо также подчеркнуть, что вполне возможны случаи, когда $N_n = 0$ и в то же время

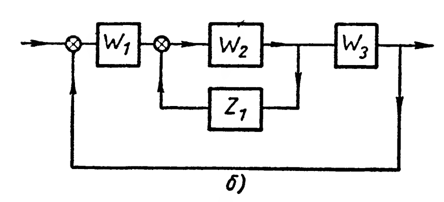
$$(N_1 - P_1) + (N_2 - P_2) + \ldots + (N_k - P_k) \neq 0$$

при некотором $k < n$. Это означает, что система может быть устойчивой в своем окончательном рабочем состоянии и неустойчивой, когда некоторые из ее внутренних обратных связей разомкнуты.

8. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКОНТУРНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Практическое применение критерия устойчивости многоконтурных систем, сформулированного выше, значительно упрощается, если вместо амплитудно-фазовых частотных характеристик пользоваться логарифмическими частотными характеристиками.





Фиг. 61. Двухконтурная система автоматического регулирования.

Применительно к логарифмическим характеристикам этот критерий может быть, очевидно, сформулирован следующим образом:

Для того чтобы многоконтурная система, характеристическое уравнение которой в полностью разомкнутом состоянии содержит P корней в правой полуплоскости, была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных пересечений прямой $(-\pi)$ всеми фазовыми частотными характеристиками, получаемыми при последующем включении каждой из цепей обратной связи, для положительных значений соответствующих логарифмических частотных характеристик равнялась $\frac{P}{2}$.

В качестве примера рассмотрим систему на фиг. 61 и предположим, что эта система является устойчивой в разомнутом состоянии (фиг. 61, *а*).

Для того чтобы проверить устойчивость этой системы в замкнутом состоянии, построим логарифмические характеристики, соответствующие произведению $W_2(j\omega) Z_1(j\omega)$, и сосчитаем разность между числом положительных и отрицательных пересечений прямой $(-\pi)$ фазовой характеристикой

$$\arg [W_2(j\omega) Z_1(j\omega)]$$

при положительных значениях соответствующей логарифмической амплитудной частотной характеристики

$$Lm\,|W_2Z_1| > 0.$$

Пусть эта разность равна (-2). Затем построим и сосчитаем разность между числом положительных и отрицательных пересечений прямой $(-\pi)$ фазовой характеристикой

$$\arg\left[\frac{W_1W_2W_3}{1+W_2Z_1}\right]$$

при положительных значениях соответствующей логарифмической амплитудной характеристики

$$L\,m\left|\frac{W_1W_2W_3}{1+W_2Z_1}\right|.$$

Пусть эта разность равна $(+2)$. Тогда согласно приведенному выше критерию система на фиг. 61, *б* является устойчивой.

Из рассмотренного примера ясно, что при исследовании устойчивости многоконтурных систем необходимо уметь быстро определять логарифмические частотные характеристики, соответствующие выражению

$$\frac{W_i(j\omega)}{1+W_i(j\omega)Z_i(j\omega)} = \frac{1}{Z_1(j\omega)}\left[\frac{Z_i(j\omega)\,W_i(j\omega)}{1+Z_i(j\omega)\,W_i(j\omega)}\right]. \tag{121}$$

Этой цели могут служить специальные номограммы, позволяющие определять логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики выражения

$$\Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \tag{122}$$

по логарифмическим характеристикам, соответствующим $W(j\omega)$.

Заметим, что выражение в квадратных скобках в уравнении (121) можно привести к виду (122), положив

$$W(j\omega) = W_i(j\omega)\,Z_i(j\omega).$$

Рассмотрим способ построения указанных номограмм. Пусть

$$W(j\omega) = H(\omega)\,e^{j\theta(\omega)}$$

и

$$\Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} = A(\omega)\,e^{j\varphi(\omega)}.$$

Имеем

$$Ae^{j\varphi} = \frac{He^{j\theta}}{1+He^{j\theta}},$$

или

$$He^{j\theta} = \frac{Ae^{j\varphi}}{1-Ae^{j\varphi}} = \frac{1}{\frac{1}{A}e^{-j\varphi}-1},$$

или

$$He^{j\theta} = \frac{1}{\frac{\cos\varphi}{A}-1-j\,\frac{\sin\varphi}{A}},$$

откуда

$$\frac{1}{H}e^{-j\theta}=\frac{\cos\varphi-A}{A}-j\frac{\sin\varphi}{A},$$

следовательно,

$$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2\cos\varphi}{A}+\frac{1}{A^2}}} \qquad (123)$$

и

$$\theta(\omega)=\operatorname{arctg}\left[\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi-A}\right]. \qquad (124)$$

Пользуясь уравнениями (123) и (124), мы можем, задаваясь различными значениями A и φ, находить соответствующие значения H и θ. Если теперь условиться откладывать по оси ординат значения LmH, вдоль оси абсцисс значения θ в градусах и соединить точки, которым соответствуют одни и те же значения A, а также одни и те же значения φ, плавными кривыми, то в результате мы получим интересующую нас номограмму. На фиг. 62а, 62б и 62в изображена требуемая номограмма (см. [3]) для определения амплитудной $A(\omega)$ и фазовой $\varphi(\omega)$ частотных характеристик, соответствующих передаточной функции

$$\Phi(j\omega)=\frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}$$

по амплитудной $Lm|W|$ и фазовой $\theta(\omega)$ частотным характеристикам, соответствующим передаточной функции $W(j\omega)$; значения модуля $|\Phi|$ в *дб* даны без скобок, а в относительных единицах — в скобках.

Значения LmA и φ, для которых построены кривые, составляющие номограмму, отмечены на фиг. 62 соответствующими цифрами, называемыми индексами.

Пользоваться номограммой можно следующим образом.

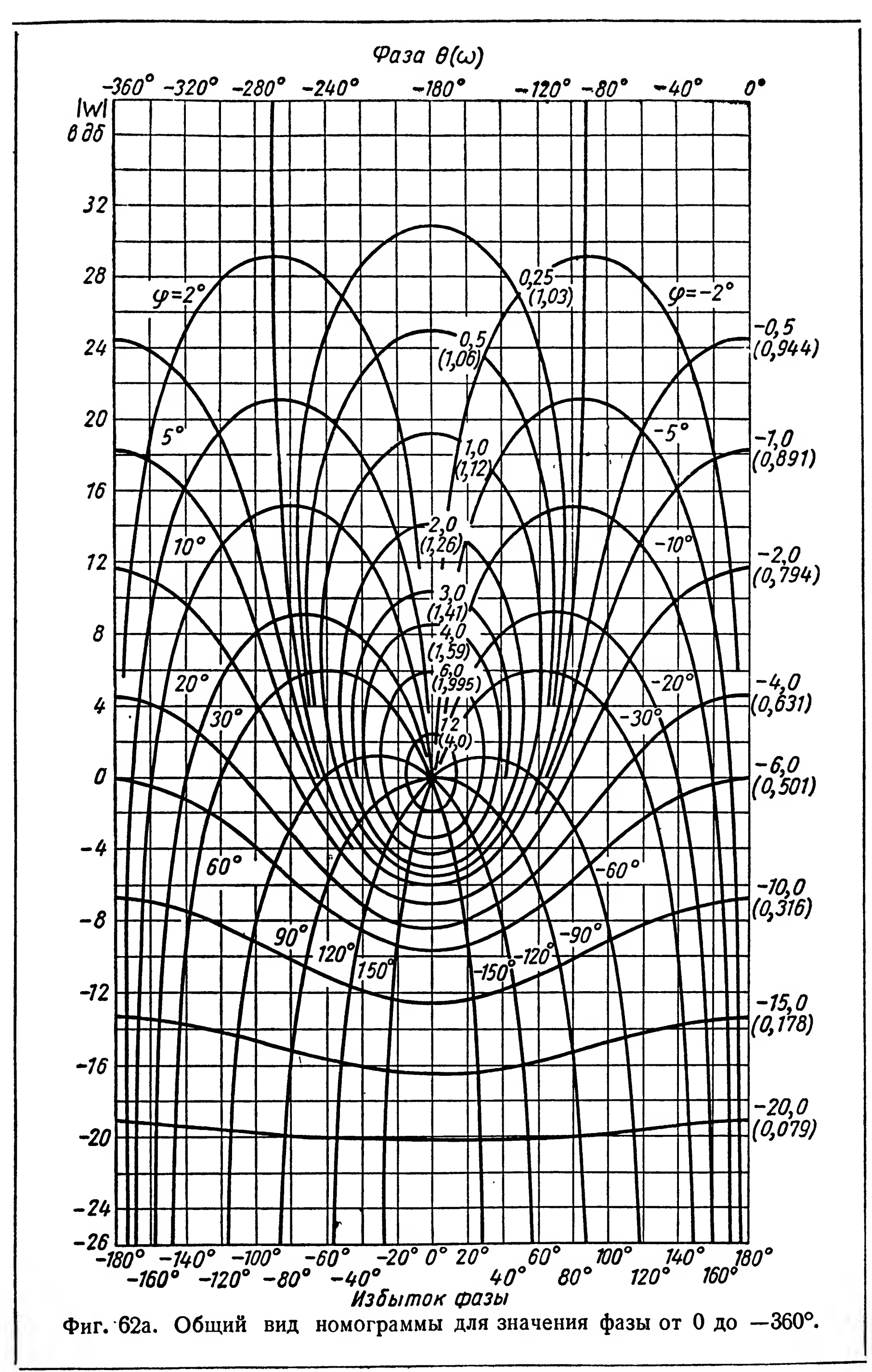
Построим в координатах логарифм модуля — фаза, в которых построена номограмма, кривую $L(\theta)$, представляющую зависимость $L(\omega)= = Lm|W(j\omega)|$ от $\theta(\omega)=\arg[W(j\omega]$ для исследуемой системы, рассматривая угловую частоту ω как параметр и отмечая значения ω вдоль кривой $L(\theta)$.

Если кривая $L(\theta)$ пересекает одну из кривых номограммы, имеющую индекс $N_1=LmA_1$ при некотором значении $\omega=\omega_1$, то отсюда следует, что при этом значении ω логарифмическая амплитудная частотная характеристика $A(\omega)$, соответствующая выражению (122), имеет значение, равное N_1.

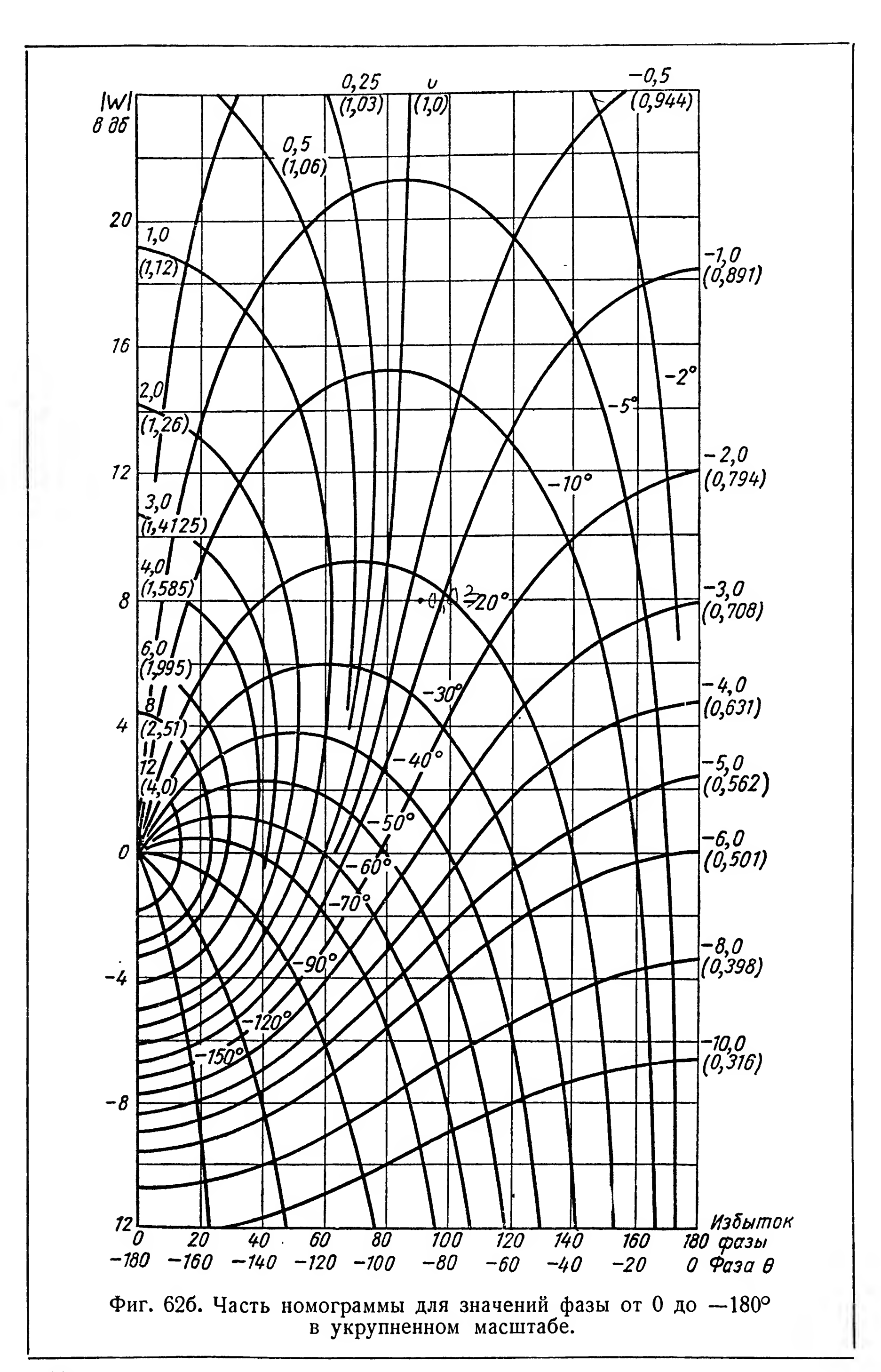
Точно так же если при $\omega=\omega_1$ кривая $L(\theta)$ пересекает одну из кривых номограммы, имеющую индекс φ_1, то из этого следует, что при $\omega=\omega_1$ фазовая частотная характеристика $\varphi(\omega)$, соответствующая выражению (122) имеет значение, равное φ_1.

Таким образом, логарифмические характеристики $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ могут быть построены, если вдоль оси частот откладывать значения ω, соответствующие точкам пересечения кривой $L(\theta)$ с кривыми, из которых состоит номограмма, а вдоль оси ординат — значения индексов для указанных точек пересечения.

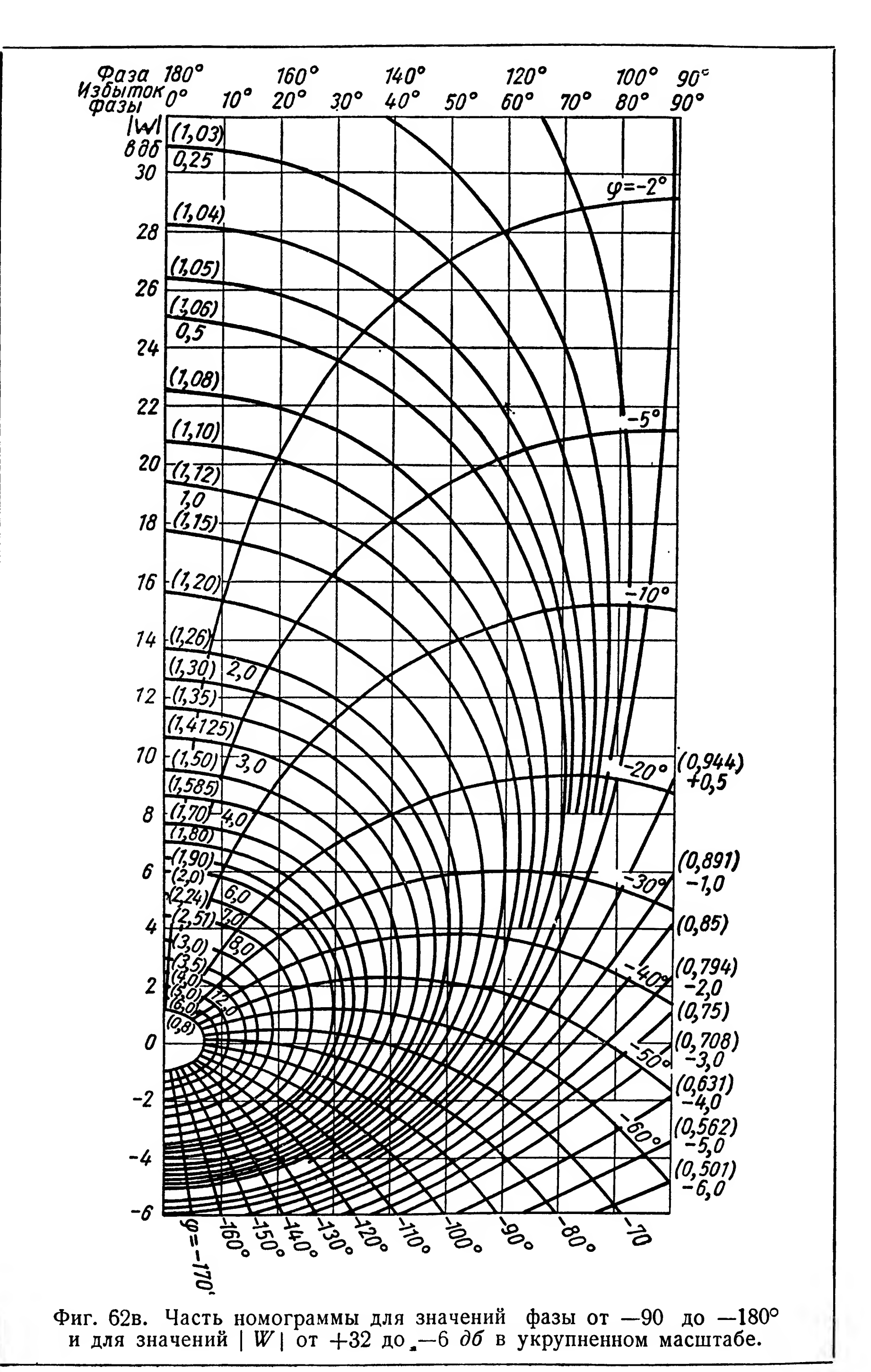
Предположим, например, что логарифмические характеристики для $W(j\omega)$ имеют вид, графически изображенный на фиг. 63.



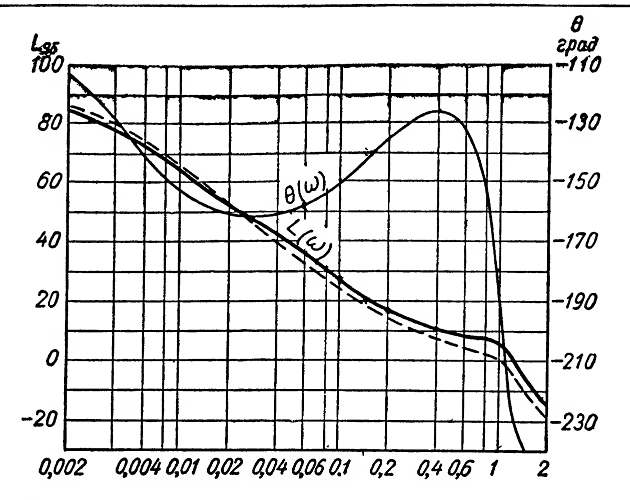
Фиг. 62а. Общий вид номограммы для значения фазы от 0 до —360°.



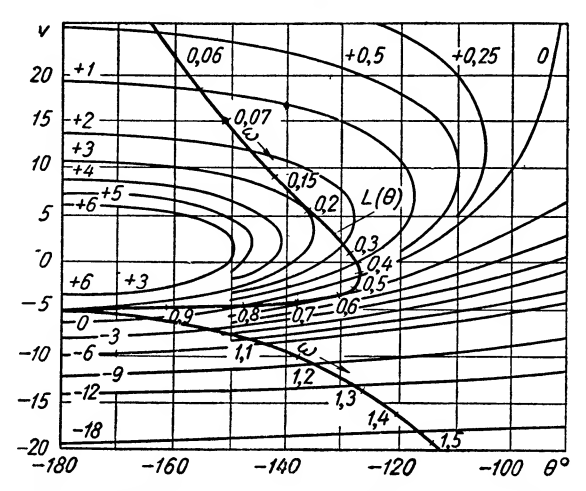
Фиг. 62б. Часть номограммы для значений фазы от 0 до —180° в укрупненном масштабе.



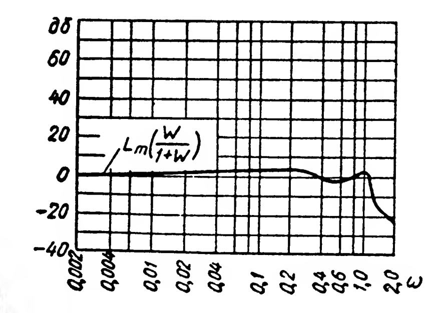
Фиг. 62в. Часть номограммы для значений фазы от —90 до —180° и для значений | *W* | от +32 до —6 *дб* в укрупненном масштабе.



Фиг. 63. Логарифмические характеристики $L(\omega)$ и $\theta(\omega)$.



Фиг. 64. Кривая $L(\theta)$, соответствующая фиг. 63.



Фиг. 65. Логарифмическая амплитудная характеристика $Lm\left|\frac{W}{1+W}\right|$, соответствующая логарифмическим характеристикам $L(\omega)$ и $\theta(\omega)$ на фиг. 63.

Кривая $L(\theta)$, соответствующая этим характеристикам, изображена на фиг. 64, а логарифмическая характеристика $Lm\left|\frac{W}{1+W}\right|$, найденная изложенным способом, — на фиг. 65.

Заметим, что номограммой на фиг. 62 обычно следует пользоваться лишь при значениях $Lm|W|$, лежащих в пределах

$$-20 \leqq Lm|W| \leqq 20,$$

так как с точностью до 1 *дб*

$$Lm\left|\frac{W}{1+W}\right| \approx 0$$

при $Lm|W| \geqq 20$ и

$$Lm\left|\frac{W}{1+W}\right| \approx Lm|W|$$

при $Lm|W| \leqq -20$.

Итак, располагая номограммой, изображенной на фиг. 62, логарифмические частотные характеристики выражения (122) можно найти следующим образом:

1) строим обычным методом, изложенным выше, логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики, соответствующие передаточной функции $Z_l(j\omega)$ и произведению передаточных функций $W_l(j\omega)$, $Z_l(j\omega)$;

2) откладывая на номограмме фиг. 62 вдоль оси ординат значения $Lm|W_lZ_l|$, а вдоль оси абсцисс значения $\arg(W_lZ_l)$, находим изложенным выше способом характеристики

$$Lm\left|\frac{W_lZ_l}{1+W_lZ_l}\right| \text{ и } \arg\left[\frac{W_lZ_l}{1+W_lZ_l}\right];$$

3) вычитая из ординат кривых

$$Lm\left|\frac{W_lZ_l}{1+W_lZ_l}\right|, \arg\left[\frac{W_lZ_l}{1+W_lZ_l}\right]$$

соответствующие ординаты кривых $Lm|Z_l|$ и $\arg(Z_l)$, получим искомые логарифмические частотные характеристики для выражения.

Примеры анализа устойчивости многоконтурных систем приведены в главе XIII.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солодовников В. В., Применение метода логарифмических частотных характеристик к исследованию устойчивости и оценки качества следящих и регулируемых систем, „Автоматика и телемеханика" № 2, 1948.

2. Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р., Теория следящих систем, ИИЛ, 1951.

3. Chestnut, Mayer, Servomechanisms and regulating system design. J. Wiley, N. Y. 1951.

ГЛАВА XIII

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Динамические свойства систем автоматического регулирования иногда существенным образом зависят не только от сосредоточенных, но и распределенных параметров, и поэтому при исследовании устойчивости и переходных процессов приходится прибегать к математическому аппарату диференциальных уравнений не только в полных, но и в частных производных [1], [2], [3].

С точки зрения анализа устойчивости своеобразие систем автоматического регулирования с распределенными параметрами заключается в том, что левая часть характеристического уравнения представляет не полином, а трансцендентную функцию от комплексного переменного s, имеющую не конечное, а бесконечное число корней.

Исследование устойчивости систем регулирования с распределенными параметрами, так же как и с сосредоточенными параметрами, сводится к определению знаков корней характеристического уравнения.

В математической литературе по этому вопросу сравнительно недавно были опубликованы существенные материалы, но, к сожалению, при решении технических задач они не всегда оказываются эффективными.

Практически гораздо более удобными здесь оказываются не аналитические, а графо-аналитические методы исследования, основанные на частотных представлениях [1], [4], [5].

Простейшим классом систем регулирования, имеющим характеристические уравнения в виде трансцендентных функций от s, являются системы с так называемым запаздыванием. Анализу систем с запаздыванием посвящен ряд работ Я. З. Цыпкина.

К понятию запаздывания часто прибегают в тех случаях, когда требуется хотя бы грубо, в первом приближении оценить влияние волновых явлений в трубопроводах и линиях передачи, а также других сложных явлений, строгое математическое описание которых затруднительно.

Мы не ставим здесь задачу дать полное изложение вопроса об анализе устойчивости систем с распределенными параметрами и ограничимся лишь показом того, каким образом частотный метод анализа устойчивости и метод выделения областей устойчивости могут быть применены к анализу простейшего класса систем с распределенными параметрами, т. е. к системам с постоянным запаздыванием.

1. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

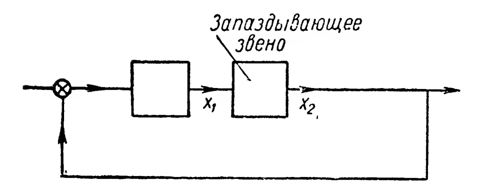
Рассмотрим систему, в состав которой входит звено с постоянным запаздыванием (фиг. 66).

Запаздывающим звеном называется элемент системы регулирования, в котором величина на выходе воспроизводит без искажений (фиг. 67) *изменения величины на входе, но с некоторым постоянным запаздыванием* τ.

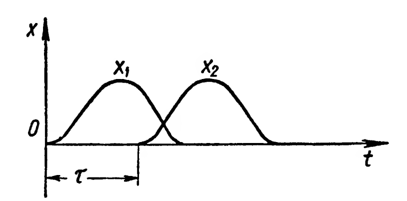
Согласно данному определению между величиной на входе x_1 и величиной на выходе x_2 запаздывающего звена существует соотношение

$$x_2(t) = x_1(t - \tau), \tag{125}$$

где τ — постоянная величина, называемая запаздыванием.



Фиг. 66. Структурная схема системы с постоянным запаздыванием.



Фиг. 67. Характеристика звена с постоянным запаздыванием.

Применяя к обеим частям равенства (125) преобразование Лапласа, получим

$$L[x_2(t)] = e^{-\tau s} L[x_1(t)], \tag{126}$$

и, следовательно, передаточная функция запаздывающего звена имеет вид

$$W_\tau(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = e^{-\tau s}. \tag{127}$$

Обозначим передаточную функцию всей остальной части системы, за исключением запаздывающего звена, через

$$K_1 W(s) = \frac{M_p(s)}{D_p(s)}. \tag{128}$$

Передаточная функция $KW(s)$ всей системы в разомкнутом состоянии может быть получена в результате перемножения левых и правых частей равенств (127) и (128):

$$KW(s) = e^{-\tau s} \frac{M_p(s)}{D_p(s)}. \tag{129}$$

Для передаточной функции замкнутой системы получим

$$\Phi(s) = \frac{KW(s)}{1 + KW(s)} = \frac{e^{-\tau s} M_p(s)}{D_p(s) + e^{-\tau s} M_p(s)}. \tag{130}$$

Выражение для амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы можно найти из уравнения (129), заменив s через $j\omega$:

$$KW(j\omega) = e^{-\tau j\omega} \frac{M_p(j\omega)}{D_p(j\omega)}; \tag{131}$$

полагая

$$KW(j\omega) = KH(\omega) e^{+j\theta(\omega)}, \tag{132}$$

можем также написать:

$$KW(j\omega) = KH(\omega)\, e^{j[\theta(\omega) - \tau\omega]}. \tag{133}$$

Рассмотрение амплитудно-фазовой характеристики $KH(j\omega)$ приводит к заключению, что амплитуда установившихся колебаний $KH(\omega)$ на выходе системы с запаздыванием равна амплитуде системы без запаздывающего звена, а фаза установившихся колебаний получает дополнительный сдвиг на угол $\tau\omega$ по сравнению с системой без запаздывающего звена.

Следует подчеркнуть, что системы с запаздыванием не относятся к числу минимально-фазовых систем. Системы, отличающиеся друг от друга лишь величиной запаздывания, имеют, как это ясно из формулы (133), одинаковые амплитудные и различные фазовые характеристики. Следовательно, в таких системах не существует однозначной связи между амплитудными и фазовыми частотными характеристиками.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Характеристическое уравнение системы с запаздыванием

$$D_p(s) + M_p(s)\, e^{-\tau s} = 0 \tag{134}$$

определяет корни λ_i системы с постоянным запаздыванием.

Свободные колебания в системе определяются формулой

$$x_1(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{\lambda_i t}, \tag{135}$$

где c_i — постоянные, определяемые из начальных условий.

Свободные колебания затухают и система устойчива в том случае, если при $t \to \infty$ выражение (135) стремится к 0.

Последнее, очевидно, имеет место тогда, когда все корни характеристического уравнения обладают отрицательной действительной частью.

Таким образом, необходимым и достаточным условием устойчивости, так же как и в случае отсутствия запаздывания, является требование, чтобы вещественные части всех корней уравнения (135) были отрицательными, т. е.

$$R_e(\lambda_i) < 0. \tag{136}$$

Заметим, что при $\tau = 0$, $\lambda = \bar{\lambda}_i$, где $\bar{\lambda}_i$ — корни характеристического уравнения системы без запаздывания,

$$D_p(s) + M_p(s) = 0. \tag{137}$$

Характеристическое уравнение (134) системы с постоянным запаздыванием отличается от характеристического уравнения системы без запаздывания тем, что левая его часть является не полиномом, а трансцендентной функцией от s.

В случае системы без запаздывания устойчивость системы может быть определена обычными способами и, в частности, при помощи определителей Гурвица. При наличии запаздывающего звена уравнение (134) трансцендентно, и для него определение устойчивости с помощью определителей Гурвица практически не применимо.

Наиболее целесообразно в этом случае воспользоваться частотным критерием устойчивости, применимым к системам с распределенными параметрами и, в частности, к системам с постоянным запаздыванием.

Доказательство частотного критерия устойчивости для систем с запаздыванием может быть сделано при помощи принципа аргумента (см., например, [4] и [5]) и по существу ничем не отличается от доказательства аналогичного критерия для систем без запаздывания.

Остается прежней также и формулировка критерия, а именно:

Для того чтобы система с постоянным запаздыванием, устойчивая в разомкнутом состоянии, была устойчивой также и в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика $KW(j\omega)$ не охватывала точку -1, $j0$.

Как было указано выше, фаза вектора системы с запаздыванием по сравнению с системой без запаздывающего звена имеет отрицательное приращение, пропорциональное частоте ω. Коэфициентом пропорциональности является время запаздывания τ.

Благодаря увеличению отрицательного приращения фазы в системе с возрастанием ω возможно нарушение устойчивости системы, устойчивой при $\tau = 0$.

Если амплитудно-фазовая характеристика, проходя через точку (-1, $j0$) не охватывает ее, то характеристическое уравнение будет иметь два корня, действительная часть которых равна нулю. Остальные корни будут иметь отрицательные действительные части.

Назовем времена запаздывания τ_{0i} и соответствующие им частоты ω_{0i}, при которых амплитудно-фазовая характеристика проходит через точку (-1, $j0$), критическими.

Критические времена запаздывания и частоты определяются равенствами ([4], [5])

$$\left.\begin{aligned} |KW(j\omega)| &= 1; \\ \theta(\omega) - \tau\omega &= +\pi(2n-1). \end{aligned}\right\} \tag{138}$$

Определяя из уравнения (138) ω_{0i}, легко определить критические времена запаздывания τ_{0i}.

Действительно, если определено ω_{0i} на основании уравнения (138), критическое время запаздывания равно

$$\tau_{0i} = \frac{\theta_i}{\omega_{0i}}. \tag{139}$$

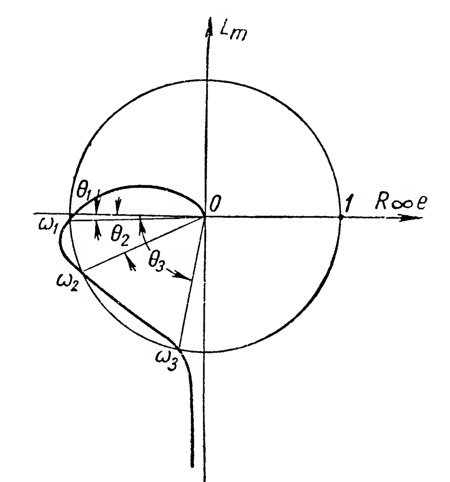
Указанное решение весьма просто выполнить графически (фиг. 68).

Условие $|KW(j\omega)=1|$ легко найти путем пресечения годографа $KW(j\omega)$ единичной окружностью с центром в начале координат. Точка пересечения определит одновременно ω_{0i} и угол $\theta(\omega_0)$, который, будучи разделен на ω_0, даст критическое время запаздывания τ_{0i}.

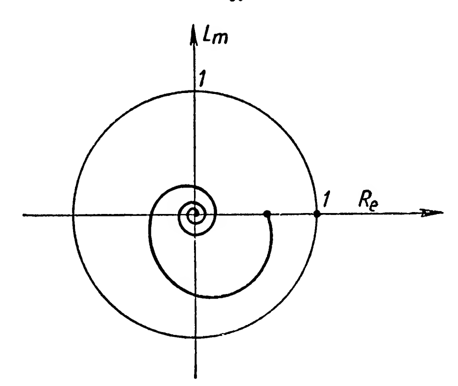
Рассмотрим ряд случаев, вытекающих из рассмотрения указанного приема:

1) пусть $KW(\omega) < 1$ при $0 \leqslant \omega \leqslant \infty$; в этом случае критические частоты отсутствуют, и система будет устойчива при любом τ (фиг. 69);

2) пусть $KW(j\omega) > 1$ (фиг. 68) в некотором диапазоне частот; в этом случае имеется несколько критических частот ω_{0i}.



Фиг. 68. Определение критического времени запаздывания на плоскости к $W(j\omega)$.



Фиг. 69. Амплитудно-фазовая характеристика абсолютно устойчивой системы.

Рассмотрим в порядке убывания последовательно критические частоты ω_{0i}.

Очевидно, для частоты ω_1 угол θ_1 будет наименьшим. Следовательно, начиная с $\tau_1 = \frac{\theta}{\omega_1}$, система с временем запаздывания $\tau\,(\tau > \tau_1)$ будет неустойчивой.

Система с постоянным запаздыванием $\tau > \tau_1$ будет неустойчивой до тех пор, пока величина $\frac{\theta}{\omega}$ не будет превышать величину τ_2:

$$\tau_2 = \frac{\theta_2}{\omega_2}.$$

При значениях τ_1, равных и больших τ_2, система автоматического регулирования с запаздыванием будет устойчивой, ибо в диапазоне частот $\omega_2 + \omega_3$ амплитудно-фазовая характеристика по модулю будет меньше 1. Очевидно, что при любых значениях τ в пределах $\tau_2 \leqslant \tau \leqslant \tau_3$, где $\tau_3 = \frac{\theta_3}{\omega_3}$, система (с запаздыванием τ) будет устойчивой. В дальнейшем при $\tau > \tau_3$ система становится опять неустойчивой. Чередование явлений устойчивости и неустойчивости системы при непрерывном из-

менении τ, а также других параметров является характерной особенностью многих систем с постоянным запаздыванием.

Если система автоматического регулирования с запаздыванием неустойчива, то возникающие в ней колебания могут иметь частоты определяющиеся частотами амплитудно-фазовой характеристики, лежащими вне единичной окружности.

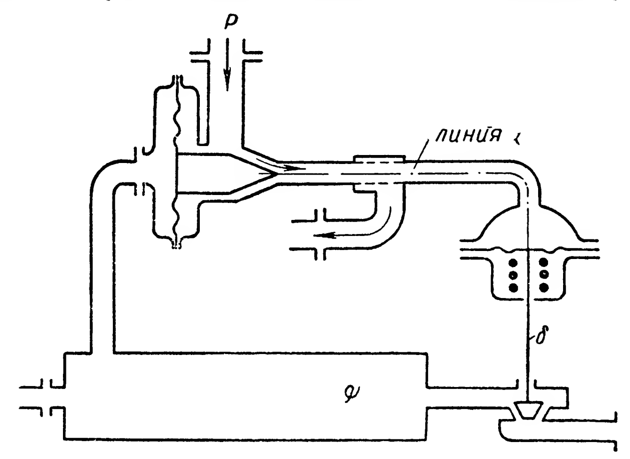
В заключение необходимо сделать следующие замечания:

1) в системах автоматического регулирования в целях увеличения быстродействия и точности время запаздывания τ стремятся уменьшить, поэтому часто критерий устойчивости формулируется лишь для минимального времени запаздывания;

2) система автоматического регулирования устойчива, если время запаздывания τ меньше минимального граничного времени запаздывания $\tau_{0\,\min}$.

Пример. *Устойчивость системы автоматического регулирования давления, содержащей длинную линию* [4], [5].

Рассмотрим систему автоматического регулирования давления, содержащую длинную линию от чувствительного элемента к исполнительному механизму



Фиг. 70. Принципиальная схема регулирования давления.

(фиг. 70). Длинная линия, передающая импульс к исполнительному механизму, вносит заметное запаздывание в реагировании сервомотора на подаваемый импульс.

Система регулирования состоит из датчика давления в виде мембранного чувствительного элемента, управляющего дросселированием сжатого воздуха, подаваемого из внешней сети. Воздух после дросселирования подается по длинной пневматической линии к мембранному сервомотору, перемещающемуся пропорционально величине давления в пневматической сети. Перемещение мембранного сервомотора δ вызывает перекладку клапана на выходном трубопроводе из объекта регулирования и тем самым изменение в нем давления.

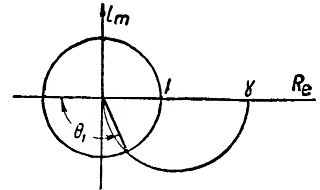
Пусть из-за наличия длинной линии перемещение регулирующего органа совершается с запаздыванием τ. Если передаточный коэфициент регулятора обозначить через $a = \text{const}$*, время запаздывания — через τ, перемещение

* Инерционностью регулятора в данном рассмотрении пренебрегаем.

регулирующей заслонки — через δ и давление — через φ, то уравнения процесса регулирования получаются следующими:

$$\left.\begin{aligned}&\text{уравнение объекта регулирования}\\&\qquad (T_a s + Z_1)\,\varphi(s) = -\delta(s);\\&\text{уравнение регулятора}\\&\qquad \delta(s) = ae^{-\tau s}\varphi(s).\end{aligned}\right\} \tag{140}$$

Амплитудно-фазовая характеристика рассматриваемой системы $KW(j\omega)$ принимает вид



Фиг. 71. Амплитудно-фазовая характеристика системы, имеющей критическое время запаздывания.

$$KW(j\omega) = \frac{a}{T_a j\omega + Z_1} e^{-j\tau\omega}. \tag{141}$$

Переходя к безразмерной частоте $\varkappa$

$$\varkappa = \omega \frac{T_a}{Z_1} \tag{142}$$

и обозначая статический коэфициент передачи γ

$$\gamma = \frac{a}{Z_1}, \tag{143}$$

можно представить амплитудно-фазовую характеристику в виде [4] и [5]

$$KW(j\varkappa) = \frac{\gamma}{j\varkappa + 1} e^{-j\tau\omega} \tag{144}$$

или окончательно в виде

$$KW(j\varkappa) = \frac{\gamma}{\sqrt{\varkappa^2 + 1}} e^{-j[\operatorname{arctg}\varkappa + \tau\omega]} = K_1 W(j\varkappa)\, e^{-j\tau\omega}, \tag{145}$$

где

$$K_1 W(j\varkappa) = \frac{\gamma}{\sqrt{\varkappa^2 + 1}} e^{-j\operatorname{arctg}\varkappa}. \tag{146}$$

Исследование влияния параметров системы на устойчивость процесса регулирования особенно наглядно произвести указанным выше графическим способом.

Заметим, что годограф $K_1 W(j\varkappa)$ представляет полуокружность. Для определения критической частоты $\varkappa_0$ и критического времени запаздывания τ_0 имеем следующее выражение:

$$\tau_0 = \frac{\theta_i(\omega_i)}{\omega_i} + \frac{2\pi(n-1)}{\omega_i}, \tag{147}$$

или для безразмерной величины T_0, соответствующей τ_0,

$$T_0 = \tau_0 \frac{Z}{T_a} = \frac{\theta_i}{\omega_i : \dfrac{Z_1}{T_a}} + \frac{(2n+1)\pi}{\omega_i : \dfrac{Z_1}{T_a}} = \frac{\theta_i}{\varkappa} + \frac{(2n-1)}{\varkappa}\pi.$$

Найдем пересечение этой полуокружности с единичным кругом и проследим влияние параметров T и γ на устойчивость системы (фиг. 71). Величина $\frac{\theta_i}{\varkappa_i}$ определяет критическое время запаздывания T_0. Для данной системы регулирования это единственное значение критической постоянной времени запаздывания. Таким образом, если время запаздывания системы $T < T_0$, процесс регулирования устойчив, в противном случае $(T > T_0)$ неустойчив.

Влияние параметра γ — статического передаточного коэфициента — на устойчивость системы легко установить из того факта, что при $\gamma \leqslant 1$ весь годограф

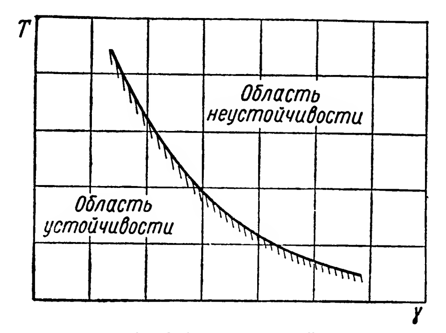
$K_1 W(j\varkappa)$ располагается внутри единичной окружности и пересечения с ней не имеет Следовательно, если $\gamma \leqslant 1$, то система будет устойчивой при любом времени запаздывания τ. При $\gamma > 1$ система будет устойчивой, если постоянная времени запаздывания $T < T_0$. Из построения фиг. 71 легко видеть, что чем больше статический коэфициент передачи, тем при меньшей постоянной запаздывания система теряет устойчивость. В случае нахождения системы на границе устойчивости ($T = T_0$) в системе возникнут колебания частотой

$$\omega = \varkappa_0 \frac{T_a}{Z}.$$

Построим границу устойчивости в областях параметров T и γ (фиг. 72).

Значения критических частот $\varkappa_0$ и времени запаздывания T_0 определяются по формуле

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_0 &= \sqrt{\gamma^2 - 1}; \\ T_0 &= \frac{\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}. \end{aligned}\right\} \qquad (148)$$



Фиг. 72 Область устойчивости в параметрах T, γ.

На фиг. 72 представлена граница устойчивости в области параметров T и γ. Область, лежащая ниже этой границы, соответствует параметрам устойчивой системы, так как при неизменном граничном значении статического коэфициента передачи постоянная времени системы для данной области всегда меньше граничного времени запаздывания.

3. РАЗБИЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Как было указано ранее, при наличии запаздывания характеристическое уравнение систем автоматического регулирования имеет вид

$$D_p(s) + KM_p(s)\, e^{-\tau s} = 0.$$

Д-разбиение по одному комплексному или паре действительных параметров строится аналогично правилам, изложенным ранее (см. главу XI). Особенности *Д*-разбиения в случае систем с запаздыванием разберем на следующих случаях [6].

Рассмотрим *Д*-разбиение по передаточному коэфициенту K.

Уравнение для построения кривой *Д*-разбиения, которую мы будем обозначать через N, в параметрической форме имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} K &= \left|\frac{M(j\omega)}{D(j\omega)}\right|; \\ \operatorname{arc} K &= \operatorname{arc}\left\{-\frac{M(j\omega)}{D(j\omega)}\right\} + \tau\omega. \end{aligned}\right\} \qquad (149)$$

При пробегании ω от 0 до ∞ переход корней уравнения (134) через мнимую ось слева направо соответствует переходу точки K через кривую N.

Правило штриховки кривой N остается прежним (штрихуем левую сторону кривой N). Переход корня через мнимую ось слева направо

соответствует в плоскости K переходу через N с левой стороны кривой на правую. Особенность кривой $Д$-разбиения по K в данном случае состоит в том, что кривая N с изменением ω от $-\infty$ до $+\infty$ содержит участок, в котором она сматывается с некоторой окружности, а потом вновь на нее наматывается (фиг. 73).

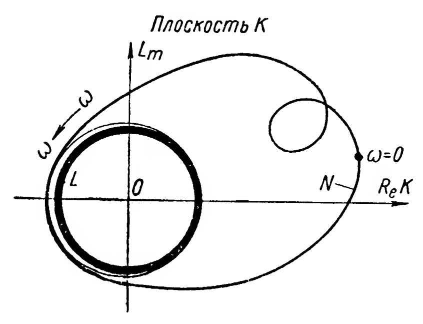
Уравнение указанной окружности получается, если приравнять нулю коэфициенты при старших степенях уравнения (149):

$$|K| = R = \lim_{s \to \infty} \left| \frac{M(s)}{D(s)} \right| = \frac{m_n}{q_n}, \tag{150}$$

где n — наибольшая из степеней полиномов M и D;

m_n и q_n — коэфициенты при n-й степени s у этих полиномов.

Области $Д$-разбиения здесь соответствуют разбиению на области с разным числом корней на правой полуплоскости. Внутренность окружности R соответствует наличию бесконечного числа корней справа от мнимой оси, ее внешняя область будет представлять области $Д$.



Фиг. 73. $Д$-разбиение плоскости K.

Для определения значения K, при котором система устойчива, следует сперва найти область, в которой определяется, сколько корней справа имеет соответствующее ей уравнение

$$D(s) + KM(s)e^{-s\tau} = 0. \tag{151}$$

Для этого используют точку $\omega = \infty$, т. е. полином $D(s)$, и, если известно, $Д$-разбиение для системы без запаздывания ($\tau = 0$).

Рассмотрим $Д$-разбиение плоскости двух параметров: ν и времени запаздывания τ, представляющих существенный интерес.

Несмотря на нелинейность вхождения параметра τ, уравнения границ $Д$-разбиения получаются относительно простыми.

Характеристическое уравнение представим в следующем виде:

$$M(s) + \nu D(s) e^{\tau s} = 0. \tag{152}$$

Уравнения границ $Д$-разбиения:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\omega}\left\{\operatorname{arc}\frac{M(j\omega)}{D(j\omega)} + 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}\right\}; \\ \nu &= \pm\left|\frac{M(j\omega)}{D(j\omega)}\right|; \end{aligned}\right\} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots). \tag{153}$$

Штриховка на кривой N наносится согласно общим правилам; она определяется знаком выражения $-\omega\tau$.

Кроме кривой N, следует нанести три прямые, соответствующие особому значению $\omega = 0$:

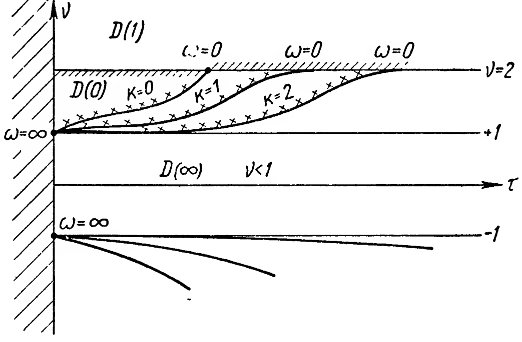
$$\left.\begin{aligned} \nu &= -\left\{\frac{M}{D}\right\}_{\omega=0}; \\ \nu &= \pm \lim_{\omega \to \infty} \left|\frac{M}{D}\right| = R. \end{aligned}\right\} \quad (154)$$

и $\omega = \infty$:

Последние две прямые выделяют область τ, ν, соответствующую бесконечному числу корней с положительной действительной частью.

Для определения областей τ, ν, для которых может быть известно число корней с положительной действительной частью, следует, как и ранее, перейти к предельной системе ($\tau=0$), для которой уже по обычным правилам следует найти точки, соответствующие определенному числу корней с положительной действительной частью.

Область устойчивости D (0) тогда находится по числу переходов через кривую N.



Фиг. 74. *Д*-разбиение плоскости ν, τ.

Пример. Пусть характеристический полином системы имеет вид

$$\nu(s-1)e^{\tau s} - s + 2.$$

Уравнения кривой N:

$$\nu = \pm\sqrt{\frac{\omega^2+4}{\omega^2+1}}; \quad \tau = \frac{1}{\omega}\left\{\operatorname{arctg}\frac{\omega^2}{2+\omega^2} + 2k\pi + \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Уравнения прямых:

$$\nu = 2; \quad \nu = \pm 1.$$

Штриховка кривой N определяется знаком $-\omega\nu$.

Для определения области *Д* (0) определим вначале область $Д_i$ с известным числом корней справа от мнимой оси. Точка $\tau = 0$, $\nu = \infty$ соответствует области *Д* (1). Тогда область *Д* (0) определяется одним переходом через границу N (фиг. 74).

ЛИТЕРАТУРА

1. Солодовников В. В., „Автоматика и телемеханика" № 1, 1941.
2. Соколов А. А., „Инженерный сборник", т. II, вып. 2, 1946.
3. Кабаков И. П., „Инженерный сборник", т. II, вып. 2, 1946.
4. Цыпкин Я. З., „Автоматика и телемеханика" № 2—3, 1946.
5. Цыпкин Я. З., „Автоматика и телемеханика" № 3, 1947.
6. Неймарк Ю. И., „Автоматика и телемеханика" № 3, 1948.

ГЛАВА XIV

ПРИМЕРЫ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В главе XII был изложен метод анализа устойчивости одноконтурных и многоконтурных систем, основанный на использовании логарифмических частотных характеристик. В этой главе даются конкретные числовые примеры применения указанного метода.

В качестве примеров взяты системы автоматического регулирования, рассмотренные в главе III. Диференциальные уравнения и передаточные функции этих систем были составлены в главе VIII.

1. СИСТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СКОРОСТИ ГИДРОТУРБИНЫ

Передаточная функция разомкнутой системы автоматического регулирования скорости гидротурбины в соответствии с формулами (438) и (441) (см. главу VIII) может быть записана в виде

$$KW(s)=\frac{\dfrac{k_1k_2k_3k_4}{s(T_as+1)(T_2s+1)(T_3s+1)\left(T_1^2s^2+2\xi_1T_1s+1\right)}}{1+\dfrac{k_2k_3k_4k_5(T_5s+1)}{s(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}}, \qquad (155)$$

или

$$KW(s)=\frac{K_eW_e(s)}{1+K_aW_a(s)},$$

где

$$K_eW_e(s)=\frac{k_1k_2k_3k_4}{s(T_as+1)(T_2s+1)(T_3s+1)\left(T_1^2s^2+2\xi_1T_1s+1\right)}$$

и

$$K_aW_a(s)=\frac{k_2k_3k_4k_5(T_5s+1)}{s(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}.$$

Примем, что передаточные коэфициенты и постоянные времени, входящие в формулы (154) и (155), имеют следующие значения:

$$k_1=15;\ T_1=0{,}5\ \text{сек.}=\frac{1}{2}\ \text{сек.};$$

$$k_2=1{,}0;\ T_2=0{,}25\ \text{сек.}=\frac{1}{4}\ \text{сек.};$$

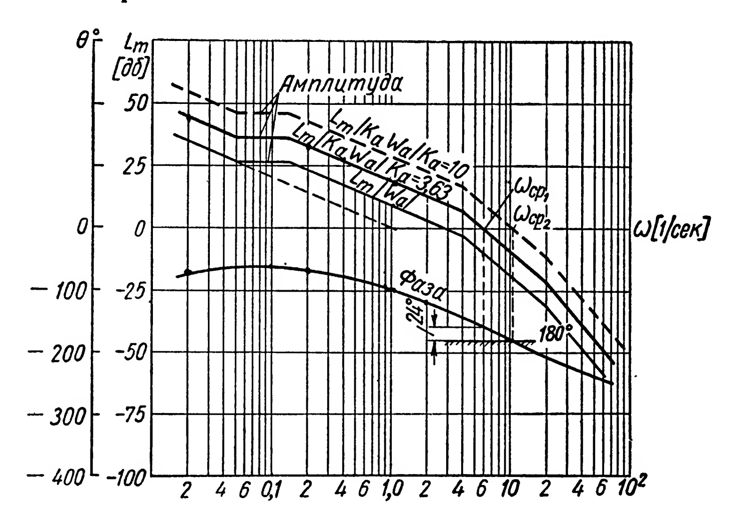
$$k_3 = 0{,}75;\ T_3 = 0{,}05\ \text{сек.} = \frac{1}{20}\ \text{сек.};$$

$$k_4 = 5{,}0;\ T_4 = 7{,}0\ \text{сек.} = \frac{1}{0{,}143}\ \text{сек.};$$

$$k_5 = 0{,}97;\ T_5 = 20{,}0\ \text{сек.} = \frac{1}{0{,}05}\ \text{сек.};$$

$$\xi = 1{,}25;\ T_a = 8{,}0\ \text{сек.} = \frac{1}{0{,}125}\ \text{сек.}$$

Для того чтобы произвести анализ устойчивости этой системы, построим прежде всего способом, изложенным в предыдущей главе, логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики, соответствующие передаточной функции $K_a W_a(s)$. Эти характеристики изображены на фиг. 75.



Фиг. 75. Логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики разомкнутого внутреннего контура системы автоматического регулирования скорости гидротурбины $[K_a W_a(j\omega)]$.

Так как передаточный коэфициент $k_a = k_2 k_3 k_4 k_5$ равен 3,63 или 11,0 *дб*, то логарифмическая амплитудная частотная характеристика $Lm|K_a W_a|$ получается из $Lm|W_a|$ путем переноса ее вверх на 11,0 *дб*.

Фазовая частотная характеристика разомкнутого внутреннего контура определяется по формуле

$$\theta_a(\omega)\ [\text{град}] = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\omega}{0{,}05} - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{0{,}143} - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{4} - \\ - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{20}, \tag{156}$$

из которой ясно, что $\theta_a(\omega)$ изменяется от $-90°$ при $\omega = 0$, до $-270°$ при $\omega = \infty$. Фазовая частотная характеристика $\theta_a(\omega)$ построена на фиг. 75. Как видно из этой фигуры, сдвиг фазы при частоте среза $\omega_{cp1} = 6{,}0$ 1/сек,

т. е. при частоте, соответствующей точке пересечения $Lm|K_a W_a|$ с осью частот, составляет -156°. Это означает, что внутренний контур системы в замкнутом состоянии устойчив и обладает запасом устойчивости по фазе или избытком фазы, равным 24°. При увеличении передаточного коэфициента внутреннего контура $k_2 k_3 k_4 k_5$ с 3,63 до 10 возрастает частота среза $\omega_{cp2} = 11{,}0$ 1/сек², и так как избыток фазы при этом примерно равен 0°, то внутренний контур в замкнутом состоянии при значении $k_2 k_3 k_4 k_5 = 10$ оказывается на границе устойчивости.

Чтобы обеспечить надежную работу системы автоматического регулирования, необходимо иметь некоторый положительный избыток фазы в частоте среза (иначе говоря, запас устойчивости внутреннего контура по фазе). На практике обычно принято брать для внутренних контуров избыток фазы при относительно небольших частотах среза, не превышающих 20 1/сек, не менее 15°. Как мы видим, для $k_2 k_3 k_4 k_5 = 3{,}63$ и выбранных постоянных времени это условие получения требуемого запаса устойчивости соблюдается. На устойчивость внутреннего контура влияет не только передаточный коэфициент, но и постоянные времени. Так, при уменьшении постоянных времени сервомоторов T_2 и T_3 увеличивается частота среза, соответственно с этим уменьшается запас устойчивости внутреннего контура по фазе.

Установив, что внутренний контур системы устойчив, перейдем к анализу устойчивости всей системы автоматического регулирования, имеющей передаточную функцию KW, определяемую формулой (155). Для этого построим логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики в соответствии с этой формулой.

Мы можем написать:

$$Lm|KW(j\omega)| = Lm|K_в W_в(j\omega)| + Lm\left|\frac{1}{1 + K_a W_a(j\omega)}\right| \qquad (157)$$

и

$$\arg KW(j\omega) = \arg K_в W_в(j\omega) + \arg\left[\frac{1}{1 + K_a W_a(j\omega)}\right]. \qquad (158)$$

Как видно из формул (157) и (158), необходимо построить отдельно логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики для функций $K_в W_в(j\omega)$ и $\frac{1}{1 + K_a W_a(j\omega)}$, и только произведя их алгебраическое сложение, мы получим результирующие характеристики для функции $KW(j\omega)$.

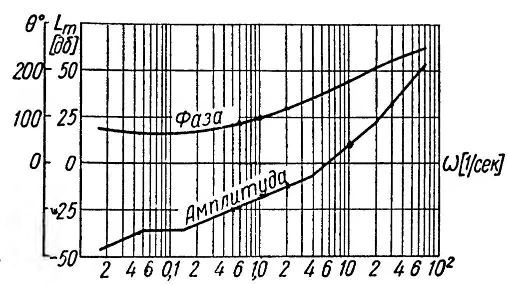
Для построения логарифмических амплитудной и фазовой частотных характеристик $Lm\left|\frac{1}{1 + K_a W_a(j\omega)}\right|$ и $\arg\left[\frac{1}{1 + K_a W_a(j\omega)}\right]$ воспользуемся номограммой, приведенной на фиг. 62 главы XII. Для этого необходимо выражение $\frac{1}{1 + K_a W_a(j\omega)}$ преобразовать к виду

$$\Phi(j\omega) = \frac{KW(j\omega)}{1 + KW(j\omega)}.$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{1 + K_a W_a(j\omega)} = \frac{\frac{1}{K_a W_a(j\omega)}}{1 + \frac{1}{K_a W_a(j\omega)}}. \qquad (159)$$

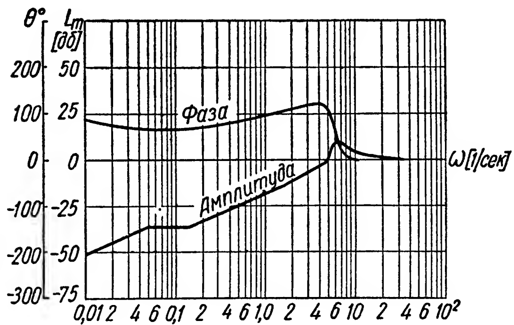
Таким образом, для получения логарифмических характеристик, соответствующих уравнению (159), необходимо наносить на указанную выше номограмму зависимость логарифма амплитуды и фазы не для передаточной функции $K_a W_a (j\omega)$, а для обратной ей, т. е. $\frac{1}{K_a W_a (j\omega)}$. Логарифмические частотные характеристики для обратной передаточной функции $\frac{1}{K_a W_a (j\omega)}$ получаются путем одновременного изменения знаков ординат логарифмических амплитудной и фазовой частотных характеристик, соответствующих функции $K_a W_a (j\omega)$. Другими словами, обратные логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики представляют собой зеркальное отображение относительно оси абсцисс обычных логарифмических частотных характеристик.



Фиг. 76. Обратные логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики разомкнутого внутреннего контура системы автоматического регулирования скорости гидротурбины $\left[\frac{1}{K_a W_a (j\omega)}\right]$.

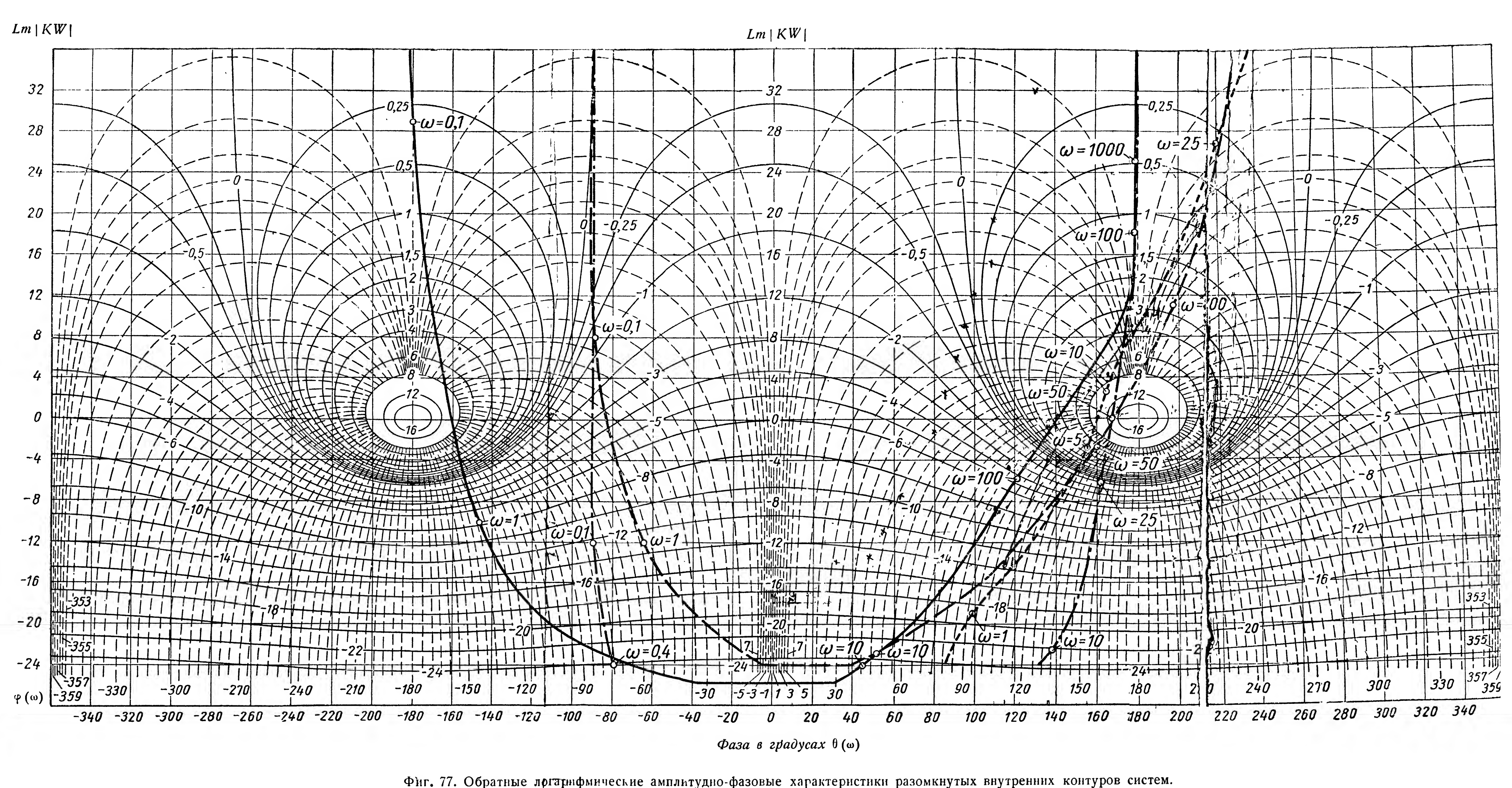
Обратные логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики, полученные изложенным способом, приведены на фиг. 76.

Воспользуемся теперь указанной выше номограммой. Беря значения амплитуды и фазы функции $\frac{1}{K_a W_a (j\omega)}$ из фиг. 76, перенесем их в виде точек на номограмму, как это показано на фиг. 77. Соединяя эти точки плавной линией, получим обратную логарифмическую амплитудно-фазовую частотную характеристику для внутреннего разомкнутого контура, которая показана штрихами на фиг. 77. По точкам пересечения этой кривой со сплошными кривыми номограммы можно найти значения амплитудной характеристики замкнутого контура.



Фиг. 78. Обратные логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики замкнутого внутреннего контура системы автоматического регулирования скорости гидротурбины $\left[\frac{1}{1 + K_a W_a (j\omega)}\right]$.

Перенеся эти значения на полулогарифмическую сетку, получим логарифмическую частотную характеристику для функции $\frac{1}{1 + K_a W_a (j\omega)}$. Это построение выполнено на фиг. 78. По точкам пересечения характеристики $\frac{1}{K_a W_a (j\omega)}$ с пунктирными кривыми на фиг. 77 можно найти значения фазовых углов для замкнутого контура.

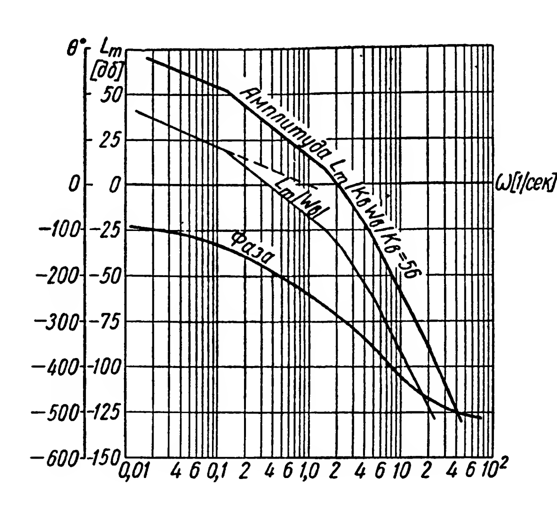


Фиг. 77. Обратные логарифмические амплитудно-фазовые характеристики разомкнутых внутренних контуров систем.

– – – – система автоматического регулирования скорости гидротурбины
— — — — следящая система копировально-фрезерного станка
— · — · — электронный регулятор напряжения
———— следящая система СЦР-584

Фазовая частотная характеристика, соответствующая функции $\frac{1}{1+K_aW_a(j\omega)}$, также приведена на фиг. 78.

Из построенных на фиг. 78 амплитудной и фазовой частотных характеристик функции $\frac{1}{1+K_aW_a(j\omega)}$ легко видеть, что при больших значениях амплитуды (свыше 16—18 *дб*) эти характеристики совпадают с амплитудными и фазовыми характеристиками функции $\frac{1}{K_aW_a(j\omega)}$.



Фиг. 79. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики, соответствующие функции $K_вW_в(j\omega)$

При малых значениях амплитуды (порядка 2—8 *дб*) эти характеристики сильно отличаются друг от друга.

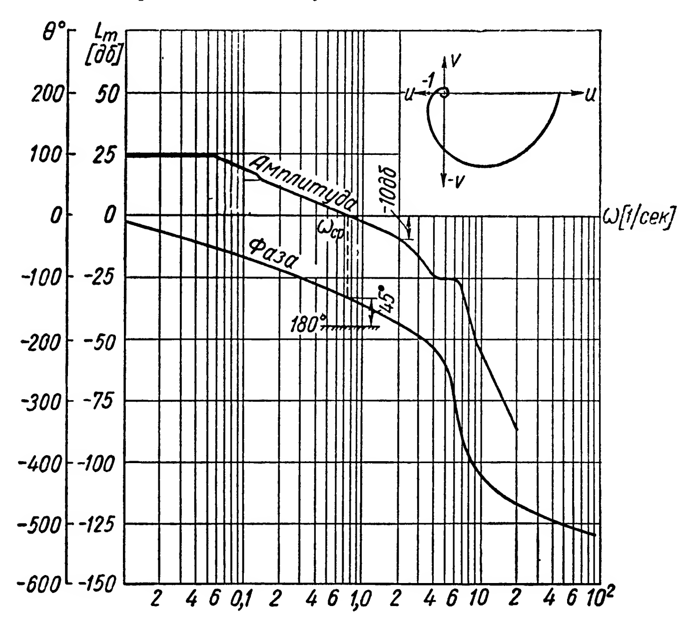
В передаточной функции $K_вW_в(j\omega)$ трехчлен $0{,}25s^2 + 1{,}025s + 1$ имеет $\xi_1 > 1$ и распадается на два двучлена вида $(0{,}4s+1)$ и $(0{,}625s+1)$. Положив, как обычно, $s = j\omega$, построим логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики для передаточной функции $K_вW_в(j\omega)$. Это построение выполнено на фиг. 79.

Произведя алгебраическое сложение ординат амплитуд и фаз для функций $K_вW_в(j\omega)$ и $\frac{1}{1+K_aW_a(j\omega)}$, получим амплитудную и фазовую частотные характеристики для функции $KW(j\omega)$. Результирующие логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики построены на фиг. 80. Здесь же для сравнения вверху приведена обычная амплитудно-фазовая характеристика системы. Как видно из этих кривых, при частоте среза $\omega_{ср} = 0{,}73$ 1/сек избыток фазы равен 45°. Такой положительный избыток фазы является достаточно большим для системы автоматического регулирования, и при изменениях параметров, вызванных производственными допусками, система будет всегда устойчива.

Из фиг. 80 видно, что рассматриваемая система имеет запас устойчивости по модулю — 10 *дб*. Рассмотрим, как влияют некоторые параметры системы на ее устойчивость. При увеличении передаточного коэфициента k_1 запас устойчивости системы уменьшается, так как возрастает частота среза амплитудной характеристики, причем фазовая характеристика системы не изменяется. При $k_1 = 79\,дб$ избыток фазы уменьшается до 30°, и дальнейшее увеличение коэфициента k_1 нецеле-

сообразно. Необходимо также иметь в виду, что при увеличении k_1 происходит уменьшение положительного запаса устойчивости системы по модулю.

Для того чтобы не изменился запас устойчивости системы по модулю, необходимо одновременно с увеличением коэфициента k_1 увеличить передаточный коэфициент обратной связи. Уменьшение постоянных времени объекта регулирования и гидравлических сервомоторов позволяет увеличить частоту среза системы без ухудшения условий устойчивости системы по фазе и по модулю.



Фиг. 80. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики для разомкнутой системы автоматического регулирования скорости гидротурбины $[KW(j\omega)]$.

2. ЭЛЕКТРОННЫЙ РЕГУЛЯТОР НАПРЯЖЕНИЯ

В главе VIII была получена передаточная функция для электронного регулятора напряжения в разомкнутом состоянии [см. главу VIII, формулу (455)].

Эта передаточная функция, так же как и в предыдущем примере, может быть приведена к виду

$$KW(s) = \frac{K_в W_в(s)}{1 + K_a W_a(s)}, \tag{160}$$

где

$$K_a W_a(s) = \frac{k_3 k_4 k_5 T_c \beta s}{\left(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1\right)(T_c s + 1)} \tag{161}$$

и

$$K_в W_в(s) = \frac{k_{T_1} k_2 k_3 k_4 k_5 c}{\left(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1\right)(T_f s + 1)(T_г s + 1)}. \tag{162}$$

Допустим, что числовые значения параметров, входящих в уравнения (161) и (162), имеют следующие значения:

$$k_{T_1} = 1{,}26; \quad T_c = 0{,}5 \text{ сек.} = \frac{1}{2} \text{ сек.};$$

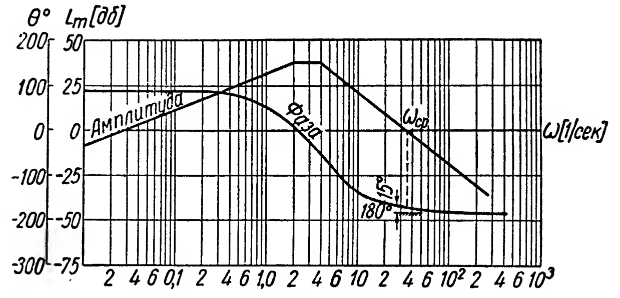
$$k_2 = 2{,}0; \quad T_г = 0{,}4 \text{ сек.} = \frac{1}{2{,}5} \text{ сек.};$$

$$k_3 = 20; \quad T_0 = 0{,}25 \text{ сек.} = \frac{1}{4} \text{ сек.};$$

$$k_4 k_5 = 5{,}0; \quad T_f = 0{,}07 \text{ сек.} = \frac{1}{14{,}3} \text{ сек.};$$

$$\beta = 0{,}8; \xi = 0{,}7; c = 1{,}0.$$

Рассмотрим условия устойчивости внутреннего контура электронного регулятора напряжения (см. фиг. 76), т. е. условия, при которых функция $KW(s)$ не имеет полюсов и, следовательно, функция $1 + K_a W_a(s)$



Фиг. 81. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики разомкнутого внутреннего контура электронного регулятора напряжения $[K_a W_a(j\omega)]$.

не имеет нулей в правой полуплоскости. Для этого необходимо построить логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики, соответствующие передаточной функции $K_a W_a(j\omega)$. Эти характеристики приведены на фиг. 81. При передаточном коэфициенте $K_a = k_3 k_4 k_5 T_c \beta = 39{,}8$ (32 *дб*), внутренний контур в замкнутом состоянии будет устойчив, так как избыток фазы на высокой частоте среза $\omega_{ср} = 36$ 1/сек немного больше 15°. При увеличении передаточного коэфициента K_a за счет увеличения β или возрастании коэфициента усиления электронного усилителя частота среза увеличивается и избыток фазы понижается.

Заметим, что уменьшение постоянных времени обмоток возбуждения генератора переменного тока и возбудителя позволяет несколько увеличить частоту среза при почти неизменяющемся избытке фазы внутреннего контура.

Уменьшение же постоянной времени корректирующего устройства T_c, с одной стороны, увеличивает сопрягающую частоту амплитудной характеристики, а с другой — уменьшает передаточный коэфициент K_a, что в свою очередь приводит к уменьшению частоты среза. Однако влияние увеличения сопрягающей частоты на частоту среза будет

большим, а следовательно, при уменьшении T_c запас устойчивости внутреннего контура уменьшается.

Проведя анализ устойчивости внутреннего контура, перейдем к анализу устойчивости всей системы. По аналогии с рассмотренным ранее первым примером построим обратные логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики. На фиг. 82 приведены логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики для функции $\frac{1}{K_a W_a (j\omega)}$.

Откладывая значения фазовых углов по оси абсцисс и значения амплитуд по оси ординат номограммы, построим амплитудно-фазовую характеристику для функции $\frac{1}{K_a W_a (j\omega)}$. Последняя построена штрих-пунктиром на фиг. 77.

На фиг. 83 построены логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики для функции $\frac{1}{1 + K_a W_a (j\omega)}$, найденные при помощи номограммы на фиг. 77.

Как видно из графиков на фиг. 77, внутренний контур имеет избыток фазы на частоте среза порядка 15° при максимальном затухании, приблизительно равном 14 *дб*.

На фиг. 84 построены логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики для функции $K_в W_в (j\omega)$ при передаточном коэфициенте $k_{T_1} k_2 k_3 k_4 k_5 c = 252$, т. е. 48 *дб*. Логарифмическая амплитудная и фазовая частотные характеристики для всей разомкнутой системы (см. фиг. 85) определяются путем алгебраического сложения ординат амплитудной и фазовой характеристик для функции $K_в W_в(j\omega)$ с ординатами амплитудной и фазовой характеристик для функции $\frac{1}{1 + K_a W_a (j\omega)}$.

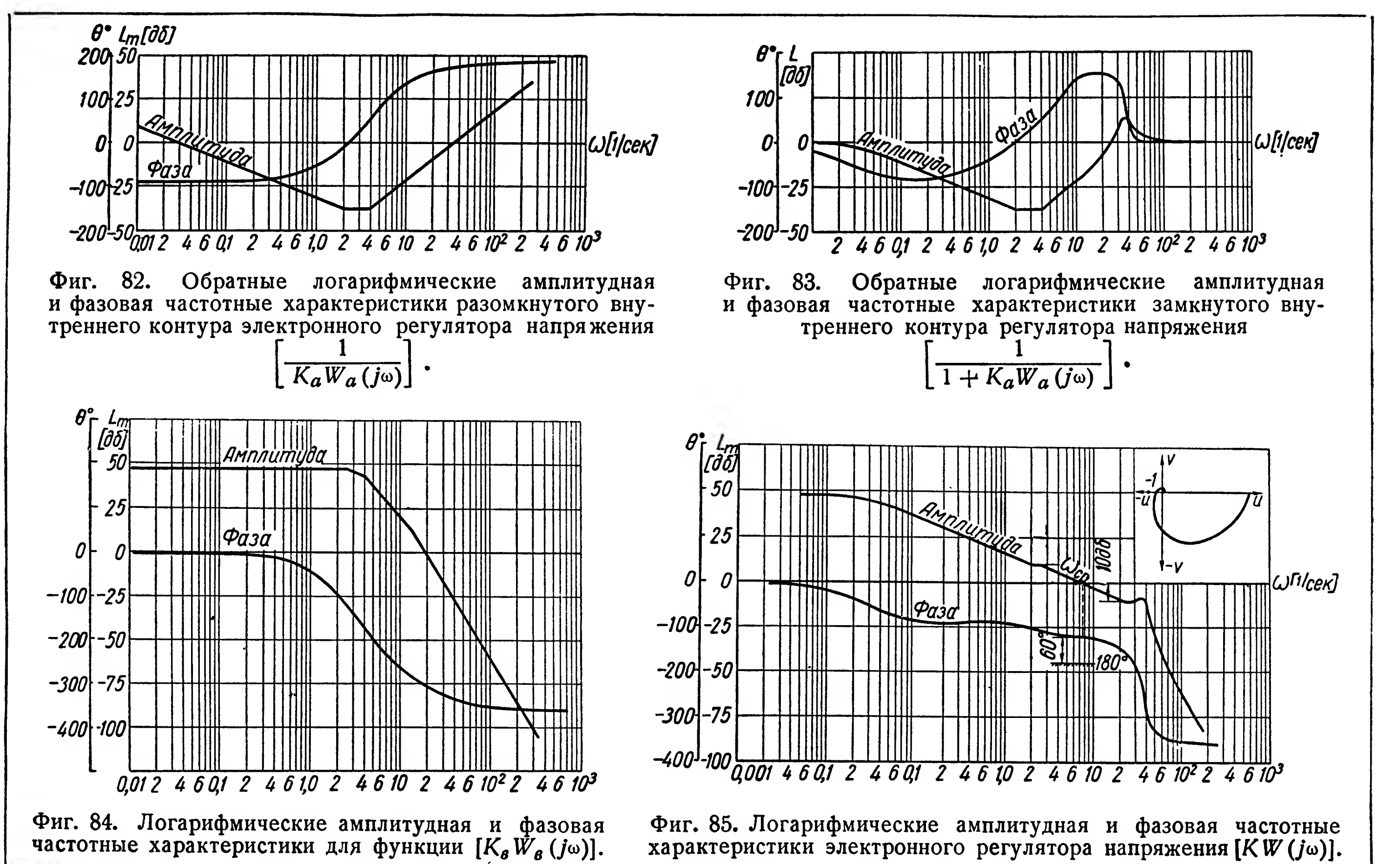
Из фиг. 85 видно, что частота среза системы $\omega_{ср} \approx 8$ 1/сек, а избыток фазы в частоте среза составляет 60°. Следовательно, электронный регулятор напряжения является системой с большим запасом устойчивости по фазе. Небольшие изменения передаточных коэфициентов элементов системы k_2, k_3, k_4 и k_5 почти не влияют на запас устойчивости системы по фазе, так как в частоте среза фазовая характеристика имеет горизонтальный участок в интервале от $\omega = 5$ 1/сек до $\omega = 10$ 1/сек.

При увеличении коэфициента усиления k_{T_1} до 3 частота среза возрастает до $\omega_{ср} = 30$ 1/сек, а избыток фазы падает до 0°, и система становится практически неустойчивой.

3. СЛЕДЯЩАЯ СИСТЕМА КОПИРОВАЛЬНО-ФРЕЗЕРНОГО СТАНКА

Передаточная функция (485) (см. главу VIII) следящей системы копировально-фрезерного станка с разомкнутой главной обратной связью может быть представлена в виде

$$KW(s) = \frac{K_в W_в (s) [1 + K_c W_c (s)]}{1 + K_a W_a (s)}, \tag{163}$$



Фиг. 82. Обратные логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики разомкнутого внутреннего контура электронного регулятора напряжения $\left[\frac{1}{K_a W_a(j\omega)}\right]$.

Фиг. 83. Обратные логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики замкнутого внутреннего контура регулятора напряжения $\left[\frac{1}{1+K_a W_a(j\omega)}\right]$.

Фиг. 84. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики для функции $[K_в W_в(j\omega)]$.

Фиг. 85. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики электронного регулятора напряжения $[KW(j\omega)]$.

где

$$\left.\begin{aligned} K_a W_a(s) &= \frac{k_3k_4k_5k_6k_7k_8k_nT_cs}{(T_fs+1)(T_ks+1)(T_{\partial в}s+1)(T_cs+1)};\\ K_в W_в(s) &= \frac{k_1k_2k_3k_4k_5k_6k_7k_8k_9}{s(T_fs+1)(T_ks+1)(T_{\partial в}s+1)};\\ K_c W_c(s) &= \frac{T_ms}{(T_es+\quad k_9}. \end{aligned}\right\} \qquad (164)$$

Предположим, что[1] $T_c = 0{,}25$ сек., $T_{\partial в} = 0{,}11$ сек., $T_m = 1\cdot10^{-5}$ сек., $k_1k_2 = 771$ *в/см*; $k_3 = 1{,}0$; $k_4k_5k_6k_7 = 100$; $T_k = 0{,}038$ сек.; $T_e = 0{,}166$ сек., $T_f = 0{,}008$ сек., $k_8 = 9{,}6$ *об/в·мин*; $k_9 = 4\cdot10^{-4}$ *см·мин/сек·об*, $k_n = 0{,}0156$ *в·мин/об*.

Для того чтобы исследовать устойчивость рассматриваемой системы в замкнутом состоянии, предварительно определим, является ли она устойчивой в разомкнутом состоянии. Последнее будет иметь место, если функция $1 + K_aW_a(s)$ не имеет нулей в правой полуплоскости или, другими словами, если устойчив внутренний контур следящей системы. Для исследования устойчивости внутреннего контура построим логарифмические амплитудную $Lm\,|K_aW_a|$ и фазовую $\arg K_aW_a$ частотные характеристики (фиг. 86).

Как видно из этих графиков, при передаточном коэфициенте обратной связи $K_a = k_3k_4k_5k_6k_7k_8k_nT_c = 4{,}5$ или 13,6 *дб* второй внутренний контур в замкнутом состоянии устойчив, так как избыток фазы при частоте среза составляет 20°. При увеличении коэфициента K_a до 9 или 19 *дб* внутренний контур в замкнутом состоянии теряет устойчивость (см. пунктирную кривую на фиг. 86). При этом значении K_a избыток фазы при частоте среза становится отрицательным (примерно равным —20°).

Теперь можно перейти к анализу устойчивости всей системы. Для этого необходимо построить ее логарифмические характеристики, определяемые согласно уравнению (163) выражениями

$$Lm\,|KW(j\omega)| = Lm\,|K_вW_в(j\omega)| + Lm\,|1 + K_cW_c(j\omega)| + Lm\left|\frac{1}{1 + K_aW_a(j\omega)}\right| \qquad (165)$$

и

$$\arg KW(j\omega) = \arg K_вW_в(j\omega) + \arg\,[1 + K_cW_c(j\omega)] + \arg\left[\frac{1}{1 + K_aW_a(j\omega)}\right]. \qquad (166)$$

Логарифмические характеристики, определяемые последними членами в правой части формул (165) и (166), найдем при помощи номограммы.

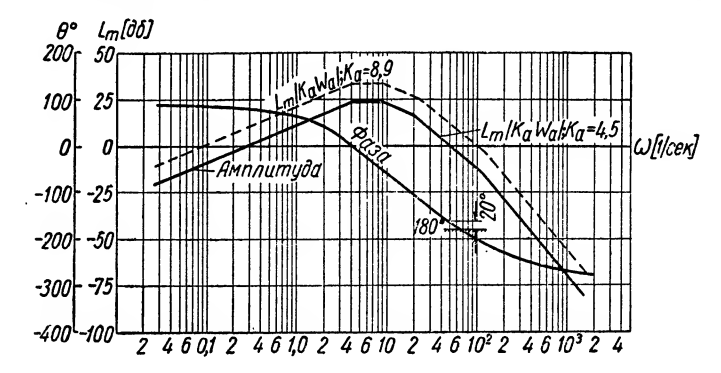
---

[1] Основные передаточные коэфициенты и постоянные времени элементов следящей системы взяты из книги лауреатов Сталинской премии Т. Н. Соколова, И. А. Дружинина, И. И. Верина, А. И. Разыграева и А. Г. Назарова „Электрокопировально-фрезерный полуавтомат, модель 6441А системы Т. Н. Соколова", Машгиз, 1951.

Для этого предварительно, так же как и в предыдущем примере, преобразуем выражение $[1+K_aW_a(j\omega)]^{-1}$ к виду

$$\frac{1}{1+K_aW_a(j\omega)}=\frac{[K_aW_a(j\omega)]^{-1}}{1+[K_aW_a(j\omega)]^{-1}}.$$

Обратные логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики для функции $\frac{1}{K_aW_a(j\omega)}$ приведены на фиг. 88, а соответствующая амплитудно-фазовая характеристика нанесена на номограмму



Фиг. 86. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики второго контура следящей системы копировально-фрезерного станка $[K_aW_a(j\omega)]$.

фиг. 77 пунктиром. Логарифмическая амплитудная и фазовая частотные характеристики для функции $\frac{1}{1+K_aW_a(j\omega)}$, найденные при помощи фиг. 77, приведены на фиг. 88.

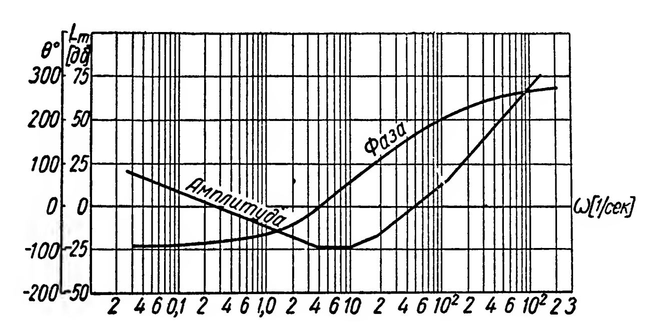
Логарифмические характеристики, соответствующие выражению $[1+K_cW_c(j\omega)]$, могли бы быть определены аналогичным образом. Однако ввиду того что в рассматриваемом примере функция $K_cW_c(s)$ имеет весьма простой вид, удобнее поступить следующим образом. Принимая во внимание последнюю из формул (164), мы можем написать:

$$1+K_cW_c(s)=\frac{\frac{k_9T_e+T_m}{k_9}s+1}{T_es+1}. \qquad (167)$$

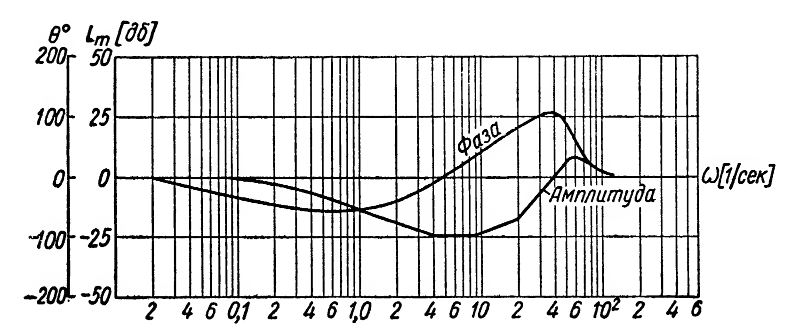
Логарифмические характеристики, соответствующие формуле (167), изображены на фиг. 89.

Логарифимические характеристики $Lm|K_вW_в|$ и $\arg K_вW_в(j\omega)$, построенные обычным способом при помощи второй из формул (164), приведены на фиг. 90.

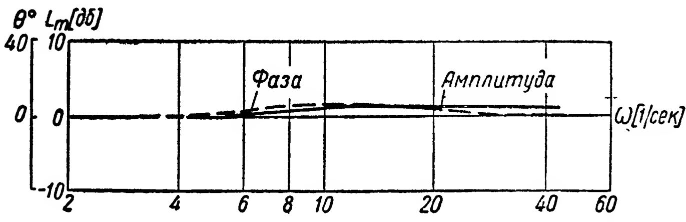
Логарифмические амплитудная $Lm|KW|$ и фазовая $\theta(\omega)$ частотные характеристики для всей системы в разомкнутом состоянии, вычисленные по формулам (165) и (166), представлены графиками на фиг. 91.



Фиг. 87. Обратные логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики разомкнутого второго контура следящей системы копировально-фрезерного станка $\left[\frac{1}{K_a W_a(j\omega)}\right]$.

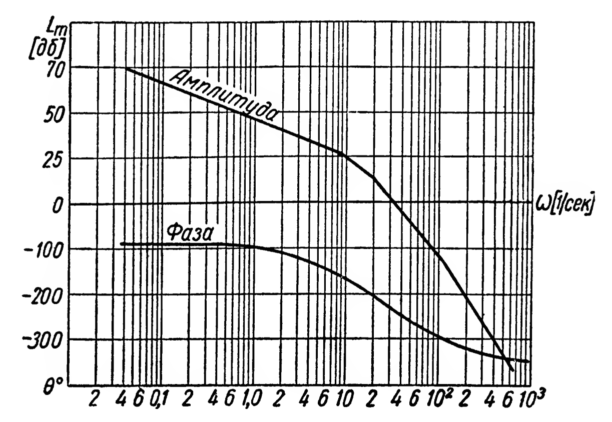


Фиг. 88. Обратные логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики второго замкнутого контура следящей системы $\left[\frac{1}{1+K_a W_a(j\omega)}\right]$.



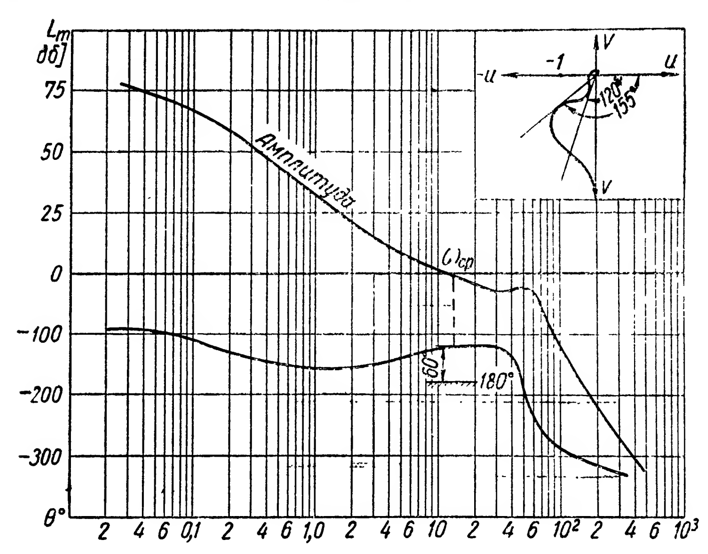
Фиг. 89. Логарифмические частотные характеристики функции $[1 + K_c\, W_c(j\omega)]$.

Как видно из последней фигуры, замкнутая система электрокопировального фрезерного станка является устойчивой, так как избыток фазы при частоте среза составляет 60°. Запас устойчивости по модулю



Фиг. 90. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики для функции $K_в W_в(j\omega)$ следящей системы копировально-фрезерного станка.

равен — 10 *дб*. Фиг. 91 позволяет исследовать поведение системы в случае изменения некоторых ее параметров. Относительно небольшое изменение коэфициентов усиления элементов системы, хотя



Фиг. 91. Логарифмические амплитудно-фазовые частотные характеристики разомкнутой следящей системы копировально-фрезерного станка [$KW(j\omega)$].

и приводит к увеличению или уменьшению частоты ее среза, однако вследствие пологости фазовой характеристики в области частоты среза не оказывает существенного влияния на избыток фазы. Это указывает на высокую стабильность следящей системы при выбранных параметрах.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ АНТЕННОЙ (СЦР-584)

Как было ранее показано (глава VIII), передаточная функция разомкнутой следящей системы для управления антенной может быть представлена в виде

$$KW(s) = \frac{K_в W_в(s)}{1 + K_a W_a(s)}, \qquad (168)$$

где $K_в W_в(s)$ и $K_a W_a(s)$ передаточные функции, определяемые формулами

$$K_в W_в(s) = \frac{K_в}{s(T_3 s + 1)\left(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1\right)(T_f s + 1)(T_k s + 1)(T_{дв} s + 1)}, \qquad (169)$$

где

$$K_в = k_r k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 k_9$$

и

$$K_a W_a(s) =$$

$$= \frac{k_a \frac{T_n}{T_L}\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 (T_L s + 1)(T_{дв_0} s + 1)}{(T_f s + 1)(T_k s + 1)(T_{дв} s + 1)(T_x s + 1)(T_n s + 1)\left[\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi_n \frac{s}{\omega_n} + 1\right]}. \qquad (170)$$

Здесь $K_a = k_r k_y k_s k_5 k_6 k_7 k_8$ — передаточный коэфициент обратной связи системы.

Числовые значения параметров системы приведены ниже [2]:

$T_n = 0{,}558$ сек. $= \frac{1}{1{,}8}$ сек.; $T_f = 0{,}002$ сек. $= \frac{1}{500}$ сек.;

$T_L = 0{,}253$ сек. $= \frac{1}{3{,}9}$ сек.; $T_x = 0{,}0017$ сек. $= \frac{1}{590}$ сек.;

$T_{дв} = 0{,}11$ сек. $= \frac{1}{9{,}0}$ сек.; $T_{дв_0} = 0{,}022$ сек. $= \frac{1}{45}$ сек.;

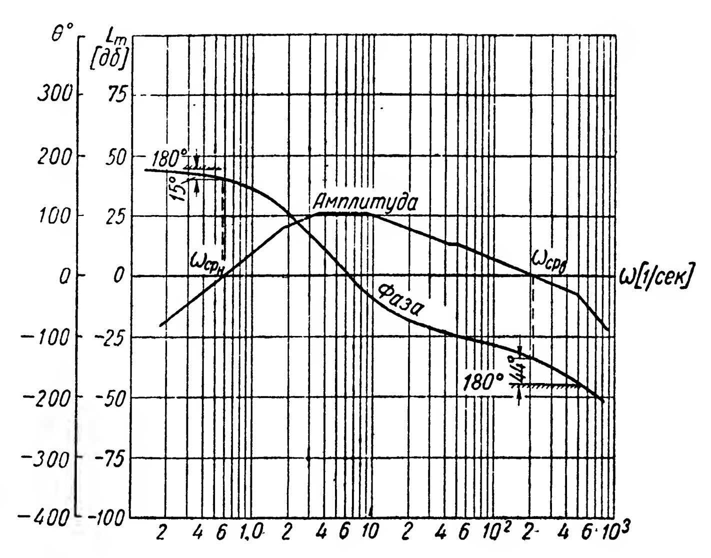
$T_к = 0{,}02$ сек. $= \frac{1}{50}$ сек.; $T_3 = 0{,}013$ сек. $= \frac{1}{77}$ сек.;

$T_0 = 0{,}01$ сек. $= \frac{1}{100}$ сек.; $\omega_n = 3{,}8$ рад/сек;

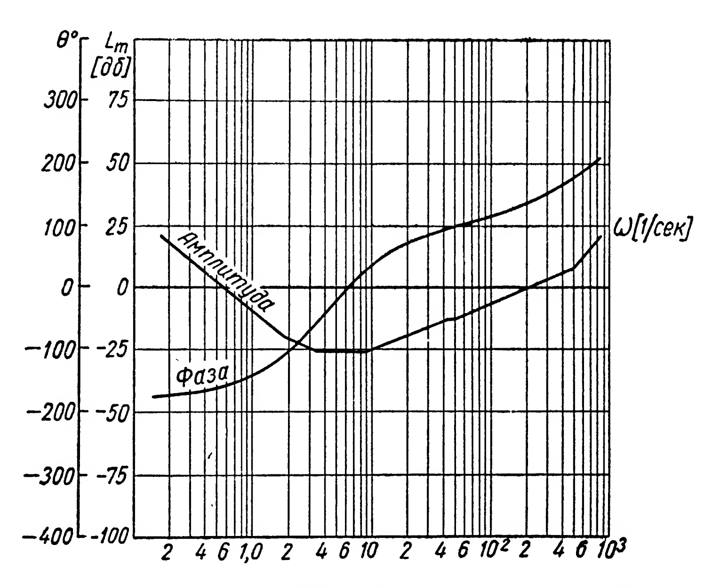
$K_в = 200$ 1/сек; $k_a = 20$;
$\xi_0 = 0{,}35$; $\xi_n = 0{,}608$.

Найдем логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики $L_m|K_a W_a(j\omega)|$, $L_m|K_в W_в(j\omega)|$, $\arg[K_a W_a(j\omega)]$ [град] и $\arg[K_в W_в(j\omega)]$ [град].

Логарифмические характеристики $L_m|K_a W_a|$, $\arg[(K_a W_a(j\omega)]$, позволяющие исследовать устойчивость внутреннего контура следящей системы, приведены на фиг. 92, где видно, что избыток фазы в нижней частоте среза $\omega_{ср\,н} = 0{,}57$ 1/сек составляет немного больше 15°. Следовательно, внутренний контур в замкнутом состоянии является устой-



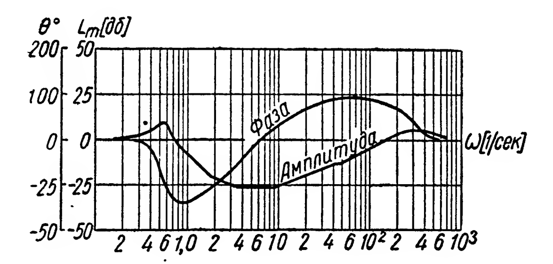
Фиг. 92. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики разомкнутого внутреннего контура следящей системы $[K_a W_a(j\omega)]$.



Фиг. 93. Обратные логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики разомкнутого внутреннего контура следящей системы $\left[\frac{1}{K_a W_a(j\omega)}\right]$.

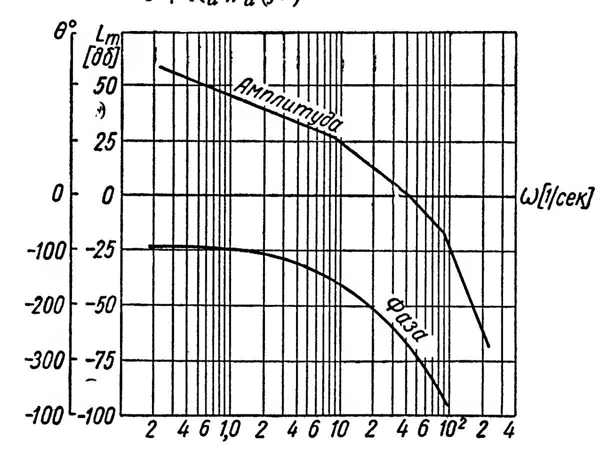
чивым. При увеличении передаточного коэфициента обратной связи K_a до 53 *дб* избыток фазы в частоте среза становится отрицательным, и контур в замкнутом состоянии становится неустойчивым.

На фиг. 93 построены обратные логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики разомкнутого внутреннего контура $\left[\frac{1}{K_a W_a (j\omega)}\right]$.



Фиг. 94. Обратные логарифмические амплитудно-фазовые частотные характеристики замкнутого внутреннего контура следящей системы $\left[\frac{1}{1 + K_a W_a (j\omega)}\right]$.

Построив по этим характеристикам на номограмме (фиг. 77) сплошной линией логарифмическую амплитудно-фазовую характеристику для функции $\frac{1}{K_a W_a (j\omega)}$, можно определить логарифмические характеристики, соответствующие функции $\frac{1}{1 + K_a W_a (j\omega)}$ (фиг. 94).



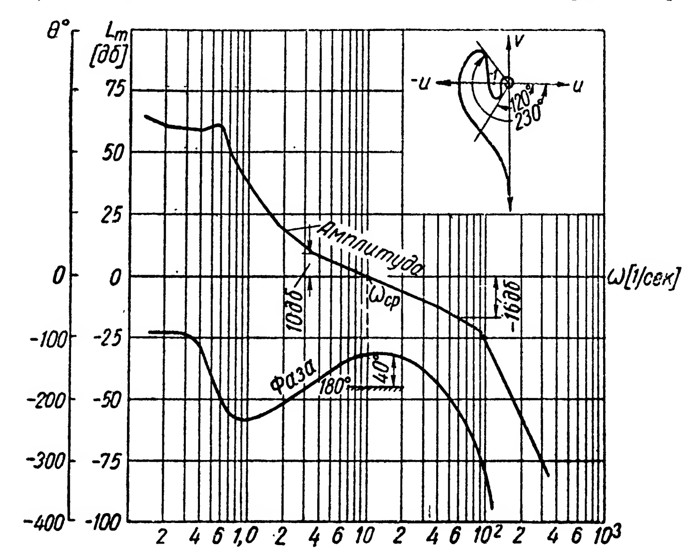
Фиг. 95. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики, соответствующие функции $K_в W_в (j\omega)$ для следящей системы.

Теперь построим логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики для функции $K_в W_в (j\omega)$ при $K_в = 200$. Соответствующее построение выполнено на графиках фиг. 95. Результирующие логариф-

мические частотные характеристики всей разомкнутой системы получаются при помощи алгебраического сложения ординат кривых, приведенных на фиг. 94 и 95.

На фиг. 96 приведены частотные характеристики, соответствующие функции $KW(j\omega)$.

Как видно из кривых, изображенных на этой фигуре, в частоте среза $\omega_{cp} = 10$ 1/сек следящая система обладает избытком фазы порядка 40°.



Фиг. 96. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики разомкнутой следящей системы $KW(j\omega)$.

При небольших изменениях передаточных коэфициентов и постоянных времени элементов системы избыток фазы остается почти неизменным.

Заметим, что увеличение коэфициента $K_в$ приводит к увеличению частоты среза и уменьшению запаса устойчивости системы по фазе. При одновременном увеличении коэфициентов $K_в$ и K_a в одинаковом отношении запас устойчивости системы по фазе не изменяется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солодовников В. В., Применение метода логарифмических частотных характеристик к исследованию устойчивости и оценки качества следящих и регулируемых систем, „Автоматика и телемеханика" № 2, 1948.

2. Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р., Теория следящих систем, ИИЛ, 1951.

РАЗДЕЛ III

АНАЛИЗ КАЧЕСТВА И СИНТЕЗ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИМПУЛЬСНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Системы автоматического регулирования обычно находятся под влиянием воздействий двух типов: управляющих, определяющих требуемые законы изменения регулируемых величин, и возмущающих, мешающих осуществлению этих законов.

Характерная черта этих воздействий заключается в том, что обычно заранее нельзя предугадать с полной определенностью закон их изменения во времени. Поэтому вопрос о правильном учете и выборе воздействий при анализе и расчете систем автоматического регулирования следует решать, исходя из рассмотрения реальных условий их работы.

Методы, излагаемые в настоящем разделе, исходят из предположения, что среди всего многообразия воздействий оказалось возможным выбрать такое, которое являлось бы типичным для реальных условий работы системы.

Кроме того, ниже предполагается, что воздействия можно рассматривать как заданные функции времени, вызывающие переход системы из одного установившегося состояния в другое или в прежнее.

Таким образом, методы настоящего раздела направлены на решение проблемы анализа, расчета и синтеза систем автоматического регулирования при определенных требованиях к характеристикам переходного процесса, вызываемого воздействием в виде заданной функции времени. Эту проблему мы условимся называть проблемой качества. *Проблему анализа качества можно охарактеризовать как проблему приближенного определения или установления верхних границ для тех или иных характеристик переходного процесса, называемых показателями качества, при помощи исследования свойств некоторых функций или характеристик (косвенных характеристик качества), которые могут быть найдены из уравнений системы без необходимости их непосредственного решения.*

Показатели качества, характеризующие процесс, должны выбираться в зависимости от требований, предъявляемых к системе, и свойств рассматриваемого класса воздействий.

Наиболее часто применяемые показатели качества были рассмотрены в главе II.

Решение проблемы качества в приведенной постановке, после того как выбрано типовое воздействие, требует ответа на следующие вопросы.

1. Каким образом выбрать косвенные характеристики качества так, чтобы их определение было связано со значительно меньшимн трудностями, чем непосредственное решение диференциальных уравнений системы?

2. Каким образом установить связь между косвенными характеристиками качества и самими показателями качества, с одной стороны, и косвенными характеристиками качества и интересующими нас параметрами системы, с другой?

В настоящем разделе излагаются три основных метода решения проблемы качества, получившие в настоящее время существенное развитие и форму, пригодную для практических расчетов, но в основном лишь применительно к системам автоматического регулирования, описываемым линейными диференциальными уравнениями.

Этими методами являются:

1) частотный метод, излагаемый в главе XV;

2) метод распределения полюсов и нулей передаточной функции, излагаемый в главе XIX;

3) метод интегральных оценок, излагаемый в главе XX.

Содержание перечисленных глав не ограниченно лишь изложением методов анализа, в них уделено также значительное внимание и вопросу о выборе параметров систем регулирования по заданным требованиям к качеству.

Одним из важнейших вопросов теории автоматического регулирования является вопрос о синтезе корректирующих устройств. Этому вопросу посвящены главы XVI — XVIII. В главе XVI рассматриваются некоторые из наиболее широко применяемых методов коррекции динамических свойств систем автоматического регулирования. В главе XVII излагается метод синтеза корректирующих устройств, основанный главным образом на частотных представлениях. Примеры применения этого метода приведены в главе XVIII.

Наконец, в главе XXI, являющейся последней главой раздела, даны основы теории систем импульсного регулирования, представляющей собой своего рода аналог теории непрерывного регулирования, которой в основном было посвящено содержание предыдущих глав книги. В главе показано, каким образом идеи и методы, связанные с решением вопросов устойчивости и качества систем регулирования непрерывного действия, могут быть с помощью преобразования Лапласа для ступенчатых функций использованы, развиты и применены для решения аналогичных вопросов в случае систем импульсного регулирования.

ГЛАВА XV

ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА КАЧЕСТВА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Математической основой частотного метода анализа качества систем автоматического регулирования является преобразование Фурье.

Преобразование Фурье позволяет получить на основании диференциальных уравнений с учетом начальных условий и приложенных к системе воздействий или на основании экспериментальных данных некоторые вещественные функции, называемые *обобщенными частотными характеристиками*.

Обобщенная частотная характеристика переходного процесса, сводящаяся в простейшем случае (см. далее) к обычным частотным характеристикам системы, так же как и преобразование Лапласа для искомого переходного процесса, полностью его определяет.

Одно из основных различий между прямым методом анализа качества, основанным на обратном преобразовании Лапласа, и частотным методом анализа качества заключается в том, что первый является аналитическим, требующим вычисления корней характеристического уравнения системы, а второй (так же как и частотный метод анализа устойчивости) является графо-аналитическим, не требующим вычисления корней.

Существенная особенность частотного метода анализа качества, составляющая одно из его основных преимуществ, заключается в том, что исходными данными для него могут служить те же самые частотные характеристики, которые применяются при анализе устойчивости.

Таким образом, частотный метод анализа качества [2] — [7] представляет собой естественное продолжение и развитие частотного метода анализа устойчивости [1] и образует вместе с ним единый метод анализа динамики систем автоматического регулирования в отличие, например, от алгебраических методов анализа устойчивости, не требующих вычисления корней и имеющих мало общего с прямым методом анализа качества, требующим знания корней.

Метод применим к системам, содержащим не только сосредоточенные, но и распределенные параметры [2], [3].

Следует подчеркнуть, что хотя общие частотные представления заимствованы теорией регулирования из теории электрических цепей, однако их развитие в теории регулирования пошло своим собственным путем. Это объясняется тем, что в теории электрических цепей вплоть

до сравнительно недавнего времени частотными представлениями пользовались в основном лишь для анализа установившихся, а не переходных режимов, а также и тем, что постановка задач анализа и синтеза в теории регулирования существенно отличается от постановки аналогичных задач в теории цепей.

Одной из характерных особенностей частотного метода анализа качества систем автоматического регулирования является то, что он, в отличие от методов расчета электрических цепей, основывается на рассмотрении главным образом вещественной, а не амплитудной и фазовой частотных характеристик.

Основная причина, объясняющая предпочтение, оказываемое в обычных методах расчета электрических цепей амплитудной и фазовой частотным характеристикам по сравнению с вещественной и мнимой частотными характеристиками, заключается в том, что первые имеют более простой физический смысл и обычно легко могут быть определены экспериментально. Вследствие указанного обстоятельства анализ установившихся процессов, несомненно, удобнее производить при помощи амплитудной и фазовой частотных характеристик, чем при помощи вещественной и мнимой. Однако при анализе переходных процессов, основанном на первой паре характеристик, мы сталкиваемся с известными трудностями. Эти трудности заключаются в том, что оказывается невозможным в общем случае представить в достаточно удобной для анализа форме связь между переходным процессом и одной из частотных характеристик, амплитудной или фазовой, а необходимо одновременное введение в рассмотрение обеих характеристик.

В то же время, если пользоваться вещественной и мнимой частотными характеристиками, то переходный процесс можно представить только через одну из них.

Действительно, рассмотрим, например, выражение для импульсной переходной функции (см. главу V) в виде интеграла Фурье:

$$k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega, \tag{а}$$

где

$$Y(j\omega) = A_y(\omega)\, e^{j\varphi_y(\omega)}.$$

Интеграл (а) легко преобразовать к следующей вещественной форме:

$$k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A_y(\omega)\cos[\omega t + \varphi_y(\omega)]\, d\omega. \tag{б}$$

В то же время, если положить, что

$$Y(j\omega) = P_y(\omega) + jQ_y(\omega),$$

то вместо формулы (а), как это показано ниже, можно написать:

$$k(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_y(\omega)\cos t\omega\, d\omega \tag{в}$$

или

$$k(t) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q_y(\omega)\sin t\omega\, d\omega. \qquad (г)$$

Мы видим, что в выражение (б) входят одновременно как амплитудная, так и фазовая частотные характеристики, между тем как каждое из выражений (в) и (г) содержит только одну частотную характеристику — вещественную или мнимую — и является более удобным для анализа, чем выражение (б). Кроме того, нужно иметь в виду следующее. При исследовании устойчивости систем автоматического регулирования обычно исходят из их частотных характеристик в разомкнутом состоянии. Вследствие этого обстоятельства оказывается удобным, как это мы увидим ниже, при полном анализе динамических свойств систем автоматического регулирования в качестве исходных данных пользоваться амплитудной и фазовой частотными характеристиками разомкнутой системы, а для проверки результатов, получающихся при том или ином выборе указанных характеристик, пользоваться вещественной частотной характеристикой замкнутой системы. Таким образом, мы получаем возможность, с одной стороны, в качестве исходных данных пользоваться частотными характеристиками, имеющими наиболее простой физический смысл и легко определимыми экспериментально, и, с другой — применять формулы, наиболее удобные для исследования связи между свойствами частотных характеристик и переходных процессов.

1. ОБОБЩЕННЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ОБОБЩЕННЫМИ ЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ И ПЕРЕХОДНЫМ ПРОЦЕССОМ [4], [5]

Рассмотрим выражение для переходного процесса $x(t)$ в виде интеграла

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)\, e^{st} ds, \qquad (1)$$

где

$$X(s) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-st} x(t)\, dt$$

и c — абсцисса абсолютной сходимости функции $x(t)$ (см. главу V).

Представим функцию $X(s)$ в виде суммы из двух слагаемых. Одно из этих слагаемых $X_r(s)$, содержащее все полюсы $X(s)$, расположенные в левой полуплоскости, назовем регулярной частью функции $X(s)$. Второе из слагаемых $X_n(s)$, содержащее все полюсы $X(s)$, расположенные в правой полуплоскости и на мнимой оси, назовем нерегулярной частью функции $X(s)$. Итак,

$$X(s) = X_r(s) + X_n(s). \qquad (2)$$

Подставляя формулу (2) в (1), получим

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_r(s)\,e^{st}ds+\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_n(s)\,e^{st}\,ds. \quad (3)$$

Заметим, что в первом интеграле в правой части уравнения (3) можно положить $c=0$, так как все полюсы функции $X_r(s)$ расположены в левой полуплоскости.

Введем обозначения

$$x_r(t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{-j\infty}^{+j\infty} X_r(s)\,e^{st}ds \quad (4)$$

и

$$x_n(t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_n(s)\,e^{st}\,ds. \quad (5)$$

На основании равенств (3)—(5) мы можем написать:

$$x(t)=x_r(t)+x_n(t). \quad (6)$$

Регулярная часть $x_r(t)$ функции $x(t)$ в силу того, что все полюсы ее преобразования Лапласа $X_r(s)$ расположены в левой полуплоскости, является затухающей функцией от t:

$$\lim_{t\to\infty} x_r(t)=0. \quad (7)$$

Наоборот, нерегулярная часть $x_n(t)$ функции $x(t)$ является при $t\to\infty$ либо расходящейся, либо периодической функцией, либо, наконец, постоянной величиной.

Предположим, что все полюсы $X_n(s)$ нам известны и что, следовательно, функция $x_n(t)$ может быть найдена способом, изложенным в главе V. Полюсы же функции $X_r(s)$ мы будем считать неизвестными, но, как уже об этом говорилось, расположенными в левой полуплоскости.

Преобразуем выражение (4) для $x_r(t)$ к виду, имеющему основное значение для всего дальнейшего изложения.

Полагая в уравнении (4) $s=j\omega$, найдем

$$x_r(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} X_r(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega. \quad (8)$$

Отделим в выражении для $X_r(j\omega)$ вещественную часть от мнимой:

$$X_r(j\omega)=R_r(\omega)+jS_r(\omega) \quad (9)$$

и назовем $R_r(\omega)$ *обобщенной вещественной*, а $S_r(\omega)$ — *обобщенной мнимой частотными характеристиками процесса.*

Подставляя выражение (9) в (8), найдем

$$x_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R_r(\omega) \cos \omega t - S_r(\omega) \sin \omega t]\, d\omega +$$

$$+ \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R_r(\omega) \sin \omega t + S_r(\omega) \cos \omega t]\, d\omega. \qquad (10)$$

Так как выражение

$$R_r(\omega) \sin \omega t + S_r(\omega) \cos \omega t$$

представляет нечетную функцию от ω, то второй интеграл в правой части уравнения (10) равен нулю, и мы можем написать:

$$x_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R_r(\omega) \cos \omega t - S_r(\omega) \sin \omega t]\, d\omega. \qquad (11)$$

Если воздействие приложено в момент времени $t = 0$, то

$$x_r(t) = 0; \quad t < 0, \qquad (12)$$

и выражение (11) упрощается.

Действительно, учитывая равенство (12), получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R_r(\omega) \cos \omega t - S_r(\omega) \sin \omega t]\, d\omega = 0; \; t < 0. \qquad (13)$$

Заменяя в уравнении (13) t через $-t$, получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R_r(\omega) \cos (\omega)\, t + S_r(\omega) \sin \omega t]\, d\omega = 0. \qquad (14)$$

Складывая уравнение (11) с (14), будем иметь

$$x_r(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_r(\omega) \cos \omega t d\omega,$$

или

$$x_r(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} R_r(\omega) \cos \omega t\, d\omega. \qquad (15)$$

Вычитая уравнение (14) из (11), найдем

$$x_r(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_r(\omega) \sin \omega t\, d\omega =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} S_r(\omega) \sin \omega t\, d\omega. \qquad (16)$$

Таким образом, на основании уравнений (6), (15) и (16) можем написать:

$$x(t) = x_n(t) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R_r(\omega)\cos\omega t d\omega, \tag{17}$$

или

$$x(t) = x_n(t) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty S_r(\omega)\sin\omega t d\omega. \tag{18}$$

Выражения (17) и (18) определяют изменение обобщенной координаты $x(t)$ для широкого класса воздействий как при нулевых, так и при ненулевых начальных условиях.

Рассмотрим, какой вид принимают формулы (17) и (18) в нескольких практически наиболее часто встречающихся случаях.

2. СЛУЧАЙ, КОГДА ФУНКЦИЯ $X(s)$ НЕ СОДЕРЖИТ ОСОБЕННОСТЕЙ ВО ВСЕЙ ПРАВОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ И НА МНИМОЙ ОСИ

В этом случае

$$\lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \tag{19}$$

и функция $X(s)$ имеет только регулярную часть, откуда следует, что обобщенная частотная характеристика $R_r(\omega)$ совпадает с вещественной частью $R(\omega)$ выражения $X(j\omega)$. Поэтому выражения (17) и (18) сводятся к виду

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R(\omega)\cos\omega t d\omega; \quad t > 0, \tag{20}$$

или

$$x(t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty S(\omega)\sin\omega t\, d\omega. \tag{21}$$

Например, если $x(t)$ представляет отклонение регулируемой величины и необходимо учесть эффект управляющего воздействия и начальных условий, то согласно главе V

$$X(s) = \Phi(s)G(s) + Y_н(s). \tag{22}$$

В этом случае функции $R(\omega)$, $S(\omega)$, входящие в уравнения (20) и (21), можно найти следующим образом.

Пусть

$$G(j\omega) = P_g(\omega) + jQ_g(\omega)$$

и

$$Y_н(j\omega) = P_н(\omega) + jQ_н(\omega). \tag{23}$$

Функции $P_g(\omega)$ и $Q_g(\omega)$ мы будем называть соответственно вещественной и мнимой частотными характеристиками воздействия, а функ-

ции $P_н(\omega)$ и $Q_н(\omega)$ — вещественной и мнимой частотными характеристиками начальных условий.

Полагая в уравнении (22) $s=j\omega$ и учитывая равенства (23), получим

$$R(\omega)=P(\omega)P_g(\omega)-Q(\omega)Q_g(\omega)+P_н(\omega);$$
$$S(\omega)=P(\omega)Q_g(\omega)+Q(\omega)P_g(\omega)+Q_н(\omega). \quad (24)$$

3. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ И ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИЕЙ

Посмотрим, какой вид принимают формулы (20) и (21), если воздействием является дельта-функция и начальные условия нулевые.

Полагая в равенстве (22)

$$G(s)=1;$$
$$Y_н(s)=0,$$

найдем

$$X_r(s)=X(s)=\Phi(s),$$

и, следовательно, в рассматриваемом случае

$$R_r(\omega)=R(\omega)=P(\omega);$$
$$S_r(\omega)=S(\omega)=Q(\omega), \quad (25)$$

т. е. обобщенные частотные характеристики процесса $R_r(\omega)$, $S_r(\omega)$ совпадают с собственными частотными характеристиками системы

На основании равенства (25) выражения (20) и (21) принимают вид

$$k(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty P(\omega)\cos\omega t d\omega;\ t>0; \quad (26)$$

$$k(t)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Q(\omega)\sin\omega t d\omega;\ t>0. \quad (27)$$

Формулы (26) и (27) имеют существенное значение, так как они устанавливают связь между импульсной переходной функцией $k(t)$ и собственными частотными характеристиками системы $P(\omega)$, $Q(\omega)$.

4. СЛУЧАЙ, КОГДА ФУНКЦИЯ $X(s)$ МОЖЕТ ИМЕТЬ ПОЛЮС В НАЧАЛЕ КООРДИНАТ [7]

Найдем, какой вид приобретают общие формулы (17) и (18) в том случае, когда функция $X(s)$ может иметь простой полюс в начале координат. Этот же вид формул остается справедливым и в только что рассмотренном менее общем случае, когда такого полюса не имеется.

Итак, предположим, что функция $X(s)$ не имеет никаких особенностей во всей правой полуплоскости и на мнимой оси за исключением

может быть простого полюса в начале координат, т. е. что она может быть представлена в виде

$$X(s)=\frac{X_0(s)}{s}, \tag{28}$$

где функция $X_0(s)$ не имеет особенностей во всей правой полуплоскости и на мнимой оси, включая начало координат.

В этом случае

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=\lim_{s\to 0} sX(s)=\lim_{s\to 0} X_0(s)=X_0(0), \tag{29}$$

и функция $x(t)$ при достаточно больших значениях t стремится к нулю или к постоянной величине, отличной от нуля, в зависимости от того, имеет или нет функция $X_0(s)$ нуль в начале координат.

В случае наличия полюса при $s=0$ функция $X(s)$ имеет нерегулярную часть $X_n(s)$, которая определяется формулой

$$X_n(s)=\frac{X_0(0)}{s} \tag{30}$$

[если полюса при $s=0$ не имеется, то очевидно, что $X_n(s)=0$].

Подставляя уравнение (30) в формулу (2), для регулярной части $X_r(s)$ получим

$$X_r(s)=\frac{X_0(s)-X_0(0)}{s}. \tag{31}$$

Пусть

$$X_0(j\omega)=R_0(\omega)+jS_0(\omega). \tag{32}$$

Полагая в уравнении (31) $s=j\omega$, найдем

$$R_r(\omega)+jS_r(\omega)=\frac{S_0(\omega)}{\omega}+j\frac{R_0(0)-R_0(\omega)}{\omega}. \tag{33}$$

Итак, в рассматриваемом случае обобщенные вещественная и мнимая частотные характеристики $R_r(\omega)$, $S_r(\omega)$ определяются соотношениями

$$R_r(\omega)=\frac{S_0(\omega)}{\omega};$$

$$S_r(\omega)=\frac{R_0(0)-R_0(\omega)}{\omega}. \tag{34}$$

Подставляя найденные выражения для $R_r(\omega)$, $S_r(\omega)$ в уравнения (17) и (18) и учитывая, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2};\ t>0,$$

получим следующие формулы для вычисления переходного процесса $x(t)$:

$$x(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{R_0(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega;\ t>0 \tag{35}$$

или

$$x(t) = R_0(0) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{S_0(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega; \quad t > 0. \tag{36}$$

Легко видеть, что если функция $X(s)$ не имеет полюса при $s = 0$, то формулы (35) и (36) сводятся к формулам (20) и (21).

Действительно, в этом случае

$$X_0(0) = R_0(0) = 0;$$

$$X_n(s) = 0;$$

$$X_r(s) = X(s) = \frac{X_0(s)}{s}$$

и

$$X(j\omega) = R(\omega) + jS(\omega) = -j\frac{R_0(\omega)}{\omega} + \frac{S_0(\omega)}{\omega},$$

т. е.

$$R(\omega) = \frac{S_0(\omega)}{\omega};$$

$$S(\omega) = -\frac{R_0(\omega)}{\omega}. \tag{37}$$

Подставляя соотношения (37) в (35) и (36) и учитывая, что $R_0(0) = 0$, получим уравнения (20) и (21).

Итак, формулы (35) и (36) можно рассматривать как более общую форму выражений (20) и (21), справедливую не только в тех случаях, когда функция $X(s)$ имеет полюс при $s = 0$ и

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \text{const} \neq 0,$$

но и в тех случаях, когда такого полюса нет и

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

5. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ И ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИЕЙ [2], [3], [5]

Простейшим воздействием, приводящим к формулам вида уравнений (35) и (36), является единичное ступенчатое воздействие.

Действительно, предположим, что

$$g(t) = [1]$$

и начальные условия нулевые. Тогда преобразование Лапласа $X(s)$ для переходной функции $x(t)$, характеризующей изменение во времени отклонения регулируемой величины $x(t)$, в рассматриваемом случае сводится к виду

$$X(s) = \frac{\Phi(s)}{s}. \tag{38}$$

Сравнивая уравнения (38) с (28), мы видим, что в данном случае

$$X_0(s) = \Phi(s), \tag{39}$$

и, следовательно, функциями $R_0(\omega), S_0(\omega)$, входящими в формулы (35) и (36), являются собственные частотные характеристики системы $P(\omega)$, $Q(\omega)$.

Таким образом, для отклонения регулируемой величины при единичном ступенчатом управляющем воздействии формулы (35) и (36) принимают вид

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{P(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega; \quad t > 0 \tag{40}$$

или

$$x(t) = P(0) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Q(\omega)}{\omega}\cos\omega t d\omega; \quad t > 0. \tag{41}$$

Если рассматривается не управляющее воздействие $g(t)$, а возмущающее воздействие $f(t)$:

$$f(t) = [1],$$

то выражения (38) и (39) принимают вид

$$X(s) = \frac{Y(s)}{s}; \tag{42}$$

$$X_0(s) = Y(s), \tag{43}$$

и функции $P(\omega)$, $Q(\omega)$ в равенствах (40) и (41) необходимо заменить функциями $P_y(\omega)$, $Q_y(\omega)$, представляющими соответственно вещественную и мнимую части передаточной функции $Y(j\omega)$:

$$Y(j\omega) = P_y(\omega) + jQ_y(\omega).$$

Итак, для отклонения регулируемой величины при единичном ступенчатом возмущающем воздействии получим

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{P_y(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega \tag{44}$$

или

$$x(t) = P_y(0) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Q_y(\omega)}{\omega}\cos\omega t d\omega. \tag{45}$$

Наконец, если нас интересует ошибка $\varepsilon(t)$, а не отклонение $x(t)$ при единичном ступенчатом управляющем воздействии, то в формулах (40) и (41) функции $P(\omega)$, $Q(\omega)$ необходимо заменить функциями $P_\varepsilon(\omega)$,

$Q_\varepsilon(\omega)$, являющимися соответственно вещественной и мнимой частями передаточной функции ошибки (см. главу VI):

$$\Phi_\varepsilon(j\omega) = P_\varepsilon(\omega) + jQ_\varepsilon(\omega).$$

Итак, для ошибки $\varepsilon(t)$ при единичном ступенчатом управляющем воздействии получим

$$\varepsilon(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{P_\varepsilon(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega \qquad (46)$$

или

$$\varepsilon(t) = P_\varepsilon(0) + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{Q_\varepsilon(\omega)}{\omega}\cos\omega t d\omega\,. \qquad (47)$$

Напомним, что передаточные функции $Y(s)$ систем астатических по отношению к возмущающим воздействиям имеют нуль в начале координат, и, следовательно, для них

$$P_y(0) = 0.$$

Точно так же имеют нуль в начале координат передаточные функции $\Phi_\varepsilon(s)$ систем астатических по отношению к управляющим воздействиям, и, следовательно, для них

$$\Phi_\varepsilon(0) = 0.$$

Однако все приведенные выше формулы остаются, конечно, справедливыми как для статических, так и для астатических систем.

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ И МНИМОЙ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ПО ЕЕ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ В РАЗОМКНУТОМ СОСТОЯНИИ [5], [6]

Первый шаг при вычислении переходного процесса по любой из приведенных выше формул, очевидно, должен заключаться в нахождении функций $P(\omega)$, $Q(\omega)$ *.

Эти функции, конечно, всегда могут быть определены путем отделения вещественной части от мнимой в выражении для передаточной функции замкнутой системы.

Однако обычно определение функций $P(\omega)$, $Q(\omega)$ в виде аналитических выражений излишне, так как вычисление интегралов (17) и (18) в общем виде оказывается нисколько не проще, чем вычисление $x(t)$ при помощи общей формулы (1).

Преимущество введения формул (17) и (18) по сравнению с (1), по крайней мере поскольку дело касается определения вида функции $x(t)$, заключается, как это мы увидим, в удобстве использования этих

---

* Заметим, что во всех тех случаях, когда функция $G(j\omega)$ имеет либо только вещественную, либо только мнимую часть для определения переходного процесса, достаточно найти только одну из функций $P(\omega)$ или $Q(\omega)$.

формул для приближенного нахождения картины переходного процесса графо-аналическим методом, требующим задания лишь графиков функций $P(\omega)$, $Q(\omega)$.

Ниже излагается способ определения графиков функций $P(\omega)$, $Q(\omega)$, основанный на использовании амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы, построение которой, как мы видели, необходимо при исследовании устойчивости.

Графический способ нахождения частотных характеристик замкнутой системы по амплитудно-фазовой характеристике может быть основан на том, что в плоскости характеристического вектора $KW(j\omega)$ строится сетка кривых, позволяющая привести в соответствие каждой точке этой плоскости (в случае прохождения через нее амплитудно-фазовой характеристики) определенное значение той или иной частотной характеристики замкнутой системы.

Рассмотрим прежде всего способ построения сетки кривых, позволяющей найти по амплитудно-фазовой характеристике вещественную частотную характеристику $P(\omega)$ замкнутой системы. Эту сетку кривых мы условимся называть *вещественной круговой диаграммой*.

Для получения правила построения вещественной круговой диаграммы найдем на плоскости $KW(j\omega)$ геометрическое место точек, соответствующее заданному значению P_c вещественной частотной характеристики:

$$P(\omega) = P_c \tag{48}$$

замкнутой системы. Уравнение этой кривой может быть найдено при помощи соотношения

$$\Phi(j\omega) = \frac{KW(j\omega)}{1 + KW(j\omega)}, \tag{49}$$

связывающего (см. главу VI) передаточную функцию $\Phi(j\omega)$ замкнутой системы (относительно управляющего воздействия) и передаточную функцию $KW(j\omega)$ разомкнутой системы.

Отделяя в уравнении (49) справа и слева вещественные части от мнимых, получим

$$P(\omega) = \frac{KU(\omega)[1 + KU(\omega)] + K^2U^2(\omega)}{[1 + KU(\omega)]^2 + K^2V^2(\omega)}; \tag{50}$$

$$Q(\omega) = \frac{KV(\omega)}{[1 + KU(\omega)]^2 + K^2V^2(\omega)},$$

и, таким образом, уравнение кривой (48) принимает вид

$$\frac{KU(1 + KU) + K^2V^2}{(1 + KU)^2 + K^2V^2} = P_c. \tag{51}$$

После несложных преобразований на основании формулы (51) получим

$$\left[KU + \frac{1 - 2P_c}{2(1 - P_c)}\right]^2 + K^2V^2 = \frac{1}{4(1 - P_c)^2}. \tag{52}$$

Это — уравнение окружности в прямоугольных координатах KU, KV с центром, расположенным на расстоянии

$$d = -\frac{1-2P_c}{2(1-P_c)} \tag{53}$$

от начала координат, и радиусом

$$r = \frac{1}{2|1-P_c|}. \tag{54}$$

Построим семейство окружностей (52), задаваясь различными значениями P_c.

Это семейство окружностей (фиг. 1) мы и условимся называть вещественной круговой диаграммой. Значения P_c, отмеченные на вещественной круговой диаграмме, называются в дальнейшем индексами.

Предположим теперь, что построена амплитудно-фазовая характеристика $KW(j\omega)$ исследуемой системы в тех же координатах KU, KV, и рассмотрим какую-либо точку A (фиг. 2), находящуюся на амплитудно-фазовой характеристике $KW(j\omega)$ и в то же время принадлежащую окружности вещественной круговой диаграммы с индексом P_c (в данном случае $P_c = 0{,}6$).

Для того чтобы найти $P(\omega)$ при ω, соответствующем точке A на $KW(j\omega)$, не располагая вещественной круговой диаграммой, нужно было бы подставить значения прямоугольных координат KU, KV этой точки в формулу (50) и произвести соответствующие вычисления. Но для всех точек рассматриваемой окружности результат этих вычислений уже известен и равен ее индексу P_c. Отсюда ясно, что если амплитудно-фазовая характеристика пересекает при некоторой частоте ω_A одну из кривых (52) вещественной круговой диаграммы, то это означает, что ордината частотной характеристики $P(\omega)$ при этой частоте равна тому значению индекса P_c в формуле (52), которому эта кривая соответствует.

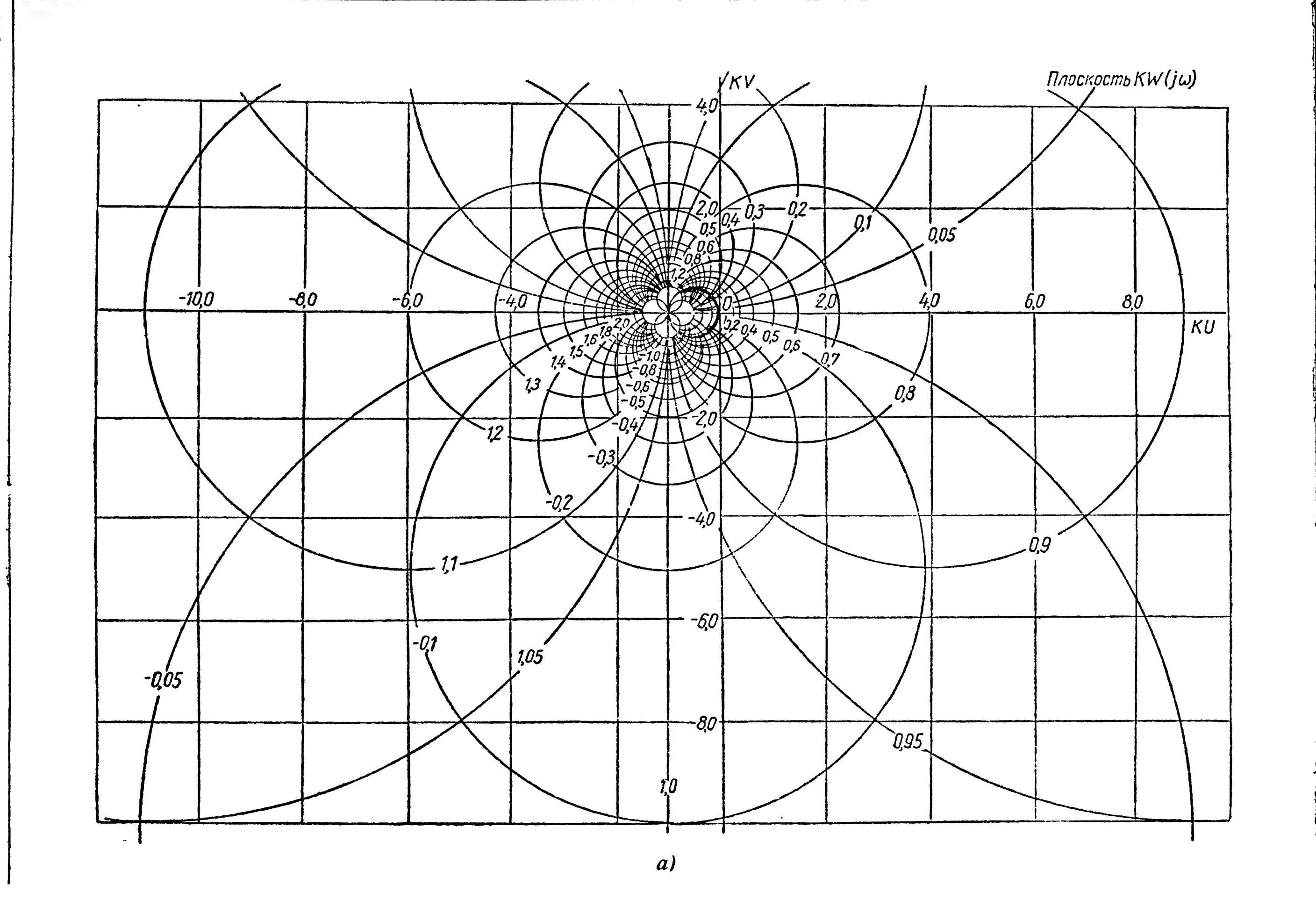
В этом и заключается простое правило построения вещественной частотной характеристики замкнутой системы по амплитудно-фазовой характеристике.

Заметим, что все окружности (52) пересекают вещественную ось KU в критической точке $(-1, j0)$, причем прямая, в которую они вырождаются при $P_c = 1$, проходящая через эту точку параллельно оси ординат (она отмечена на фиг. 1 жирной линией), делит всю плоскость KW на две области, из которых правая область соответствует значениям P_c, меньшим единицы, а левая — значениям P_c, большим единицы.

Область, в которой индексы P_c являются отрицательными, ограничивается окружностью, проходящей через начало координат и критическую точку $(-1, j0)$. Уравнение этой окружности, для которой $P_c = 0$, очевидно, имеет вид

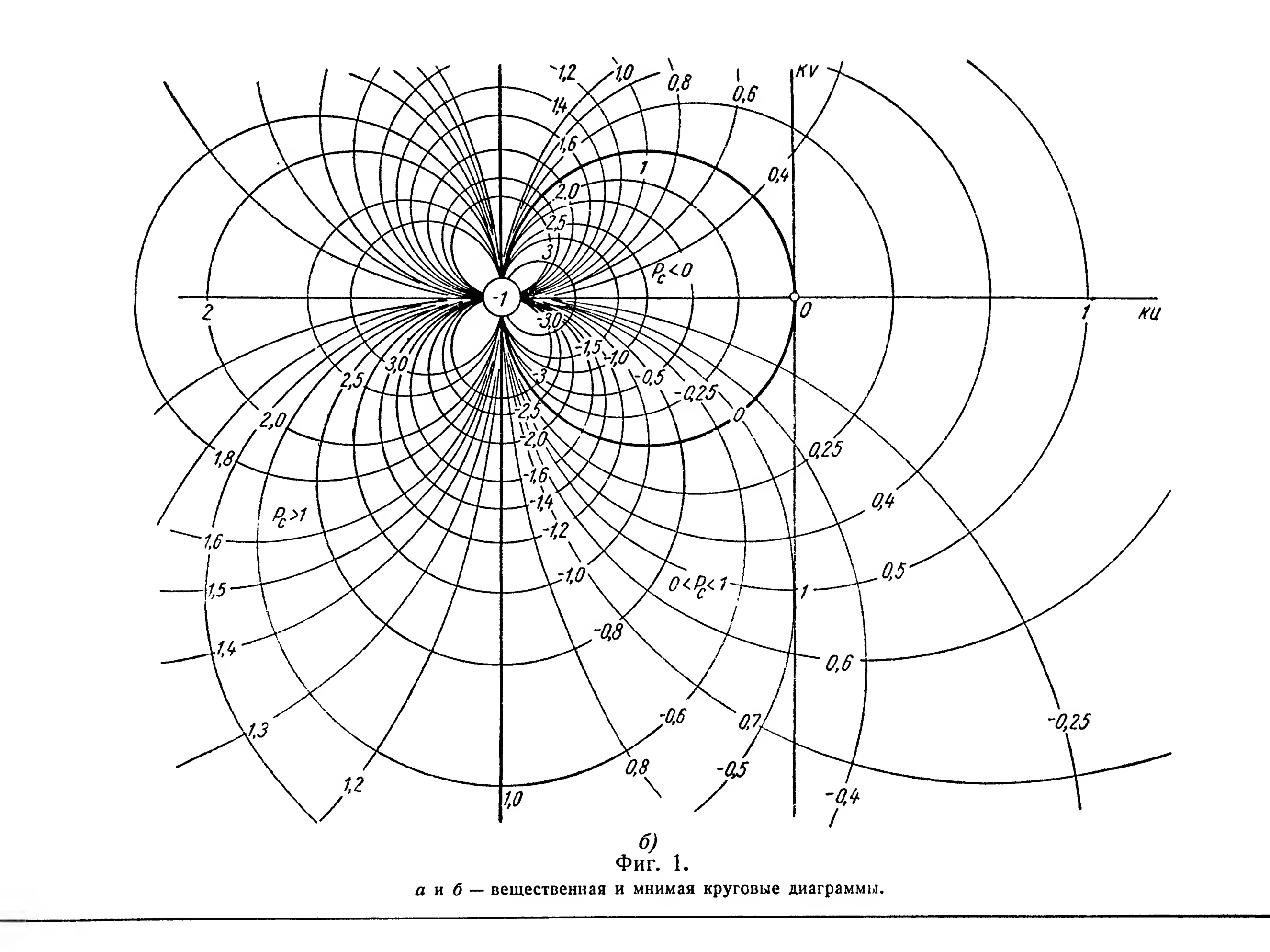
$$\left(KU + \frac{1}{2}\right)^2 + K^2V^2 = \frac{1}{4}.$$

Эта окружность отмечена на фиг. 1 жирной линией.



Плоскость KW(jω)
jKV
KU
-10,0
-8,0
-6,0
-4,0
2,0
4,0
6,0
8,0
-2,0
-6,0
-8,0
0,05
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0,95
1,0
1,05
1,1
1,2
1,3
1,4
1,5
1,6
1,8
-0,05
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
-0,5
-0,6
-0,8
-1,0

a)

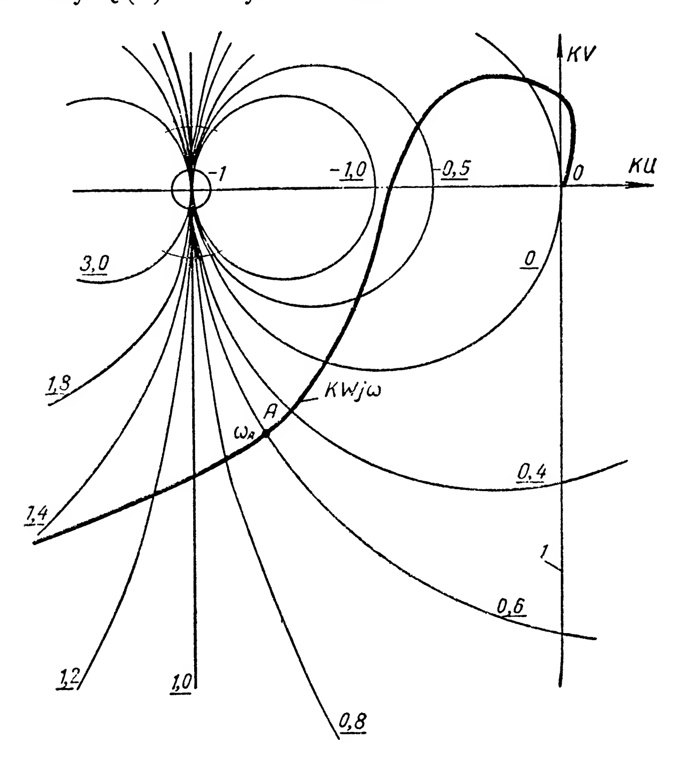


б)

Фиг. 1.

а и *б* — вещественная и мнимая круговые диаграммы.

Аналогичным образом может быть найдена сетка кривых, позволяющая определить по амплитудно-фазовой характеристике мнимую частотную характеристику $Q(\omega)$ замкнутой системы.



Фиг. 2. Определение вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ по амплитудно-фазовой характеристике $KW(j\omega)$ при помощи вещественной круговой диаграммы.

Для получения правила построения этой сетки кривых найдем на плоскости KW геометрическое место точек, соответствующее заданному значению мнимой частотной характеристики замкнутой системы:

$$Q(\omega) = Q_c.$$

Уравнение этой кривой, имеющее вид

$$\frac{KV}{(1+KU)^2+K^2V^2} = Q_c,$$

после несложных преобразований можно привести к виду

$$(1+KU)^2 + \left(KV - \frac{1}{2Q_c}\right)^2 = \frac{1}{4Q_c^2}. \qquad (55)$$

Это — уравнение окружностей с центрами, расположенными на прямой, параллельной мнимой оси KV, проходящей через критическую точку $(-1, j0)$. Центры окружностей, имеющих радиус

$$r = \frac{1}{2|Q_c|}, \tag{56}$$

располагаются вдоль этой прямой на расстоянии

$$d = -\frac{1}{2Q_c} \tag{57}$$

от вещественной оси KU.

Сетка окружностей, соответствующая равенству (55) и изображенная на фиг. 1, может быть названа мнимой круговой диаграммой.

Значения Q_c, для которых построены окружности мнимой круговой диаграммы, условимся называть индексами этой диаграммы.

Построив на листе прозрачной бумаги рассмотренные выше круговые диаграммы и наложив его на амплитудно-фазовую характеристику, легко найти собственные частотные характеристики замкнутой системы $P(\omega)$ и $Q(\omega)$.

7. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННОЙ И МНИМОЙ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПО ОБРАТНОЙ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ [3], [4]

В главе X был изложен критерий устойчивости систем регулирования, основанный на построении обратной амплитудно-фазовой характеристики.

Согласно уравнению (49) связь между функцией $\Phi(j\omega)$ и функцией $\frac{1}{KW(j\omega)}$ имеется вид

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{KW(j\omega)}}. \tag{58}$$

Полагая

$$\frac{1}{KW(j\omega)} = \frac{1}{K}u(\omega) + j\frac{1}{K}v(\omega), \tag{59}$$

подставляя уравнение (59) в (58) и отделяя вещественную часть от мнимой, получим выражения

$$P(\omega) = \frac{1 + \frac{1}{K}u(\omega)}{\left[1 + \frac{1}{K}u(\omega)\right]^2 + \frac{1}{K^2}v^2(\omega)};$$

$$Q(\omega) = \frac{-\frac{1}{K}v(\omega)}{\left[1 + \frac{1}{K}u(\omega)\right]^2 + \frac{1}{K^2}v^2(\omega)}, \tag{60}$$

определяющие вещественную и мнимую частотные характеристики замкнутой системы по ее вещественной и мнимой обратным частотным характеристикам $\frac{1}{K} u(\omega)$ и $\frac{1}{K} v(\omega)$ в разомкнутом состоянии.

Рассуждая так же, как и выше, легко показать, что геометрическое место точек на плоскости обратного характеристического вектора $\frac{1}{KW(j\omega)}$, соответствующее заданному постоянному значению P_c вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ замкнутой системы, определяется уравнением

$$\left[\frac{1}{K} u(\omega) + \frac{2P_c - 1}{2P_c}\right]^2 + \frac{1}{K^2} v^2(\omega) = \frac{1}{4P_c^2}, \tag{61}$$

являющимся уравнением окружности с центром, расположенным на расстоянии

$$d = -\frac{2P_c - 1}{2P_c} \tag{62}$$

от начала координат, и с радиусом

$$r = \frac{1}{2|P_c|}. \tag{63}$$

Сетка такого рода окружностей изображена на фиг. 3.

Точно так же геометрическое место точек на плоскости $\frac{1}{KW(j\omega)}$, соответствующее заданному постоянному значению Q_c мнимой частотной характеристики замкнутой системы, определяется уравнением

$$\left[\frac{1}{K} u(\omega) + 1\right]^2 + \left[\frac{1}{K} v(\omega) + \frac{1}{2Q_c}\right]^2 = \frac{1}{4Q_c^2}, \tag{64}$$

представляющим уравнение окружности с центром, расположенным в точке с координатами

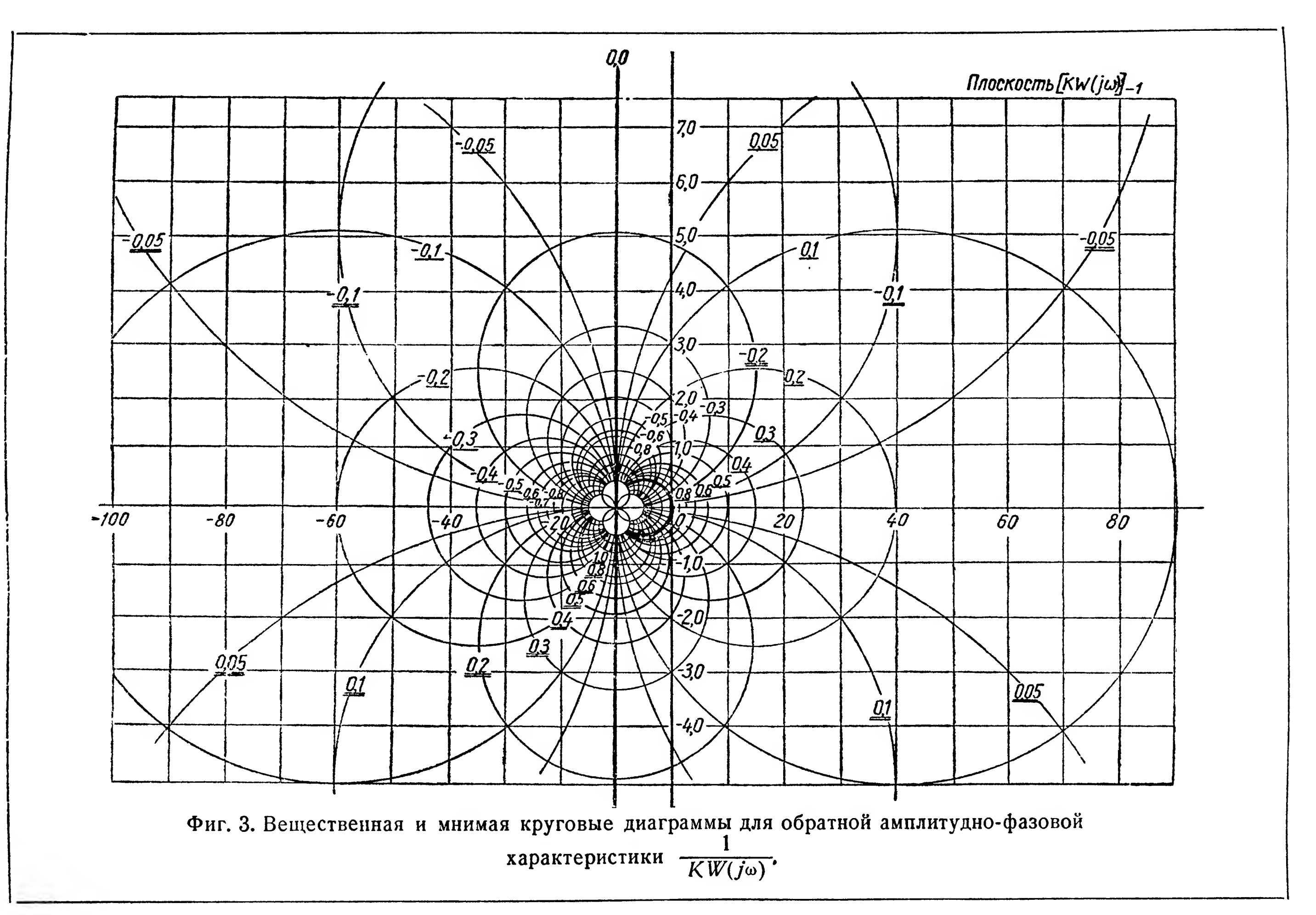
$$\left(-1, \ -j\frac{1}{2Q_c}\right)$$

и с радиусом

$$r = \frac{1}{2|Q_c|}.$$

Отметим здесь весьма простое правило построения вещественной и мнимой круговых диаграмм на плоскости $\frac{1}{KW(j\omega)}$ соответственно по вещественной и мнимой круговым диаграммам на плоскости $KW(j\omega)$ (фиг. 1).

Для того чтобы найти вещественную круговую диаграмму на плоскости $\frac{1}{KW(j\omega)}$ *по вещественной круговой диаграмме на плоскости* $KW(j\omega)$, *необходимо лишь, не изменяя вида самой диаграммы, заменить отмеченные на ней значения индексов* P_c *индексами, равными* $1 - P_c$.



Фиг. 3. Вещественная и мнимая круговые диаграммы для обратной амплитудно-фазовой характеристики $\frac{1}{KW(j\omega)}$.

Мнимая круговая диаграмма на плоскости $\frac{1}{KW(j\omega)}$ *может быть получена из мнимой круговой диаграммы на плоскости* $KW(j\omega)$ *при помощи простого изменения знака индексов.*

Это следует из сравнения выражений (52), (55) и (61), (64). Действительно, легко видеть, что выражение (52) сводится к уравнению (61), если в нем заменить KU, KV через $\frac{1}{K}u$, $\frac{1}{K}v$ и величину P_c через $1-P_c$.

Точно так же уравнение (55) сводится к формуле (64), если KU, KV заменить через $\frac{1}{K}u$, $\frac{1}{K}v$, а Q_c заменить через $-Q_c$.

8. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ $P(\omega)$, $Q(\omega)$ ПО ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Ранее мы видели, что при исследовании устойчивости часто удобно пользоваться не амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы (прямой или обратной), а логарифмическими частотными характеристиками разомкнутой системы.

Ниже дается способ построения диаграммы, позволяющей находить функции $P(\omega)$, $Q(\omega)$ по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы [9].

Полагая

$$KW(j\omega) = KH(\omega)\, e^{j\theta(\omega)} \tag{65}$$

и подставляя уравнение (65) в (49), получим

$$\Phi(j\omega) = \frac{KH\cos\theta + jKH\sin\theta}{1 + KH\cos\theta + jKH\sin\theta}. \tag{66}$$

Отделяя в правой части выражения (66) вещественную часть $P(\omega)$ от мнимой $Q(\omega)$, будем иметь

$$P(\omega) = \frac{K^2H^2 + KH\cos\theta}{K^2H^2 + 2KH\cos\theta + 1} \tag{67а}$$

и

$$Q(\omega) = \frac{KH\cos\theta}{K^2H^2 + 2KH\cos\theta + 1}, \tag{67б}$$

Геометрическое место точек

$$P(\omega) = \text{const} = P_c$$

дается уравнением

$$\frac{K^2H^2 + KH\cos\theta}{K^2H^2 + 2KH\cos\theta + 1} = P_c,$$

или

$$KH\cos\theta\,(1 - 2P_c) = K^2H^2(P_c - 1) + P_c. \tag{68}$$

Точно так же геометрическое место точек

$$Q(\omega) = \text{const} = Q_c$$

дается уравнением

$$\frac{KH}{K^2H^2 + 2KH\cos\theta + 1} = Q_c. \tag{69}$$

Пользуясь формулами (68) и (69), можно построить искомые диаграммы следующим образом.

Условимся откладывать вдоль оси ординат значения

$$L(\omega) = 20\lg KH(\omega),$$

а вдоль оси абсцисс значения $\theta(\omega)$. Тогда, задаваясь, например, фиксированным значением θ и беря различные значения P_c, Q_c, можно вычислить, пользуясь уравнениями (68) и (69), значения L в соответствующих точках прямой, параллельной оси абсцисс.

Повторив такого рода вычисления для ряда значений P_c, Q_c и соединив точки, соответствующие одним и тем же значениям индексов P_c, Q_c, плавными кривыми, получим искомую сетку кривых (фиг. 4), позволяющую найти вещественную $P(\omega)$ и мнимую $Q(\omega)$ частотные характеристики замкнутой системы по ее логарифмической $L(\omega)$ и фазовой $\theta(\omega)$ частотным характеристикам в разомкнутом состоянии.

Общее представление о структуре диаграммы для определения $P(\omega)$ можно получить, задавшись в выражении (68) некоторыми значениями P_c.

Если $P_c = \frac{1}{2}$, то $KH = 1$ для всех θ; если $P_c \neq \frac{1}{2}$, то

$$\cos\theta = \frac{K^2H^2(P_c - 1) + P_c}{KH(1 - 2P_c)}. \tag{70}$$

Наконец, если

$$P_c = \frac{1}{2} + C,$$

то

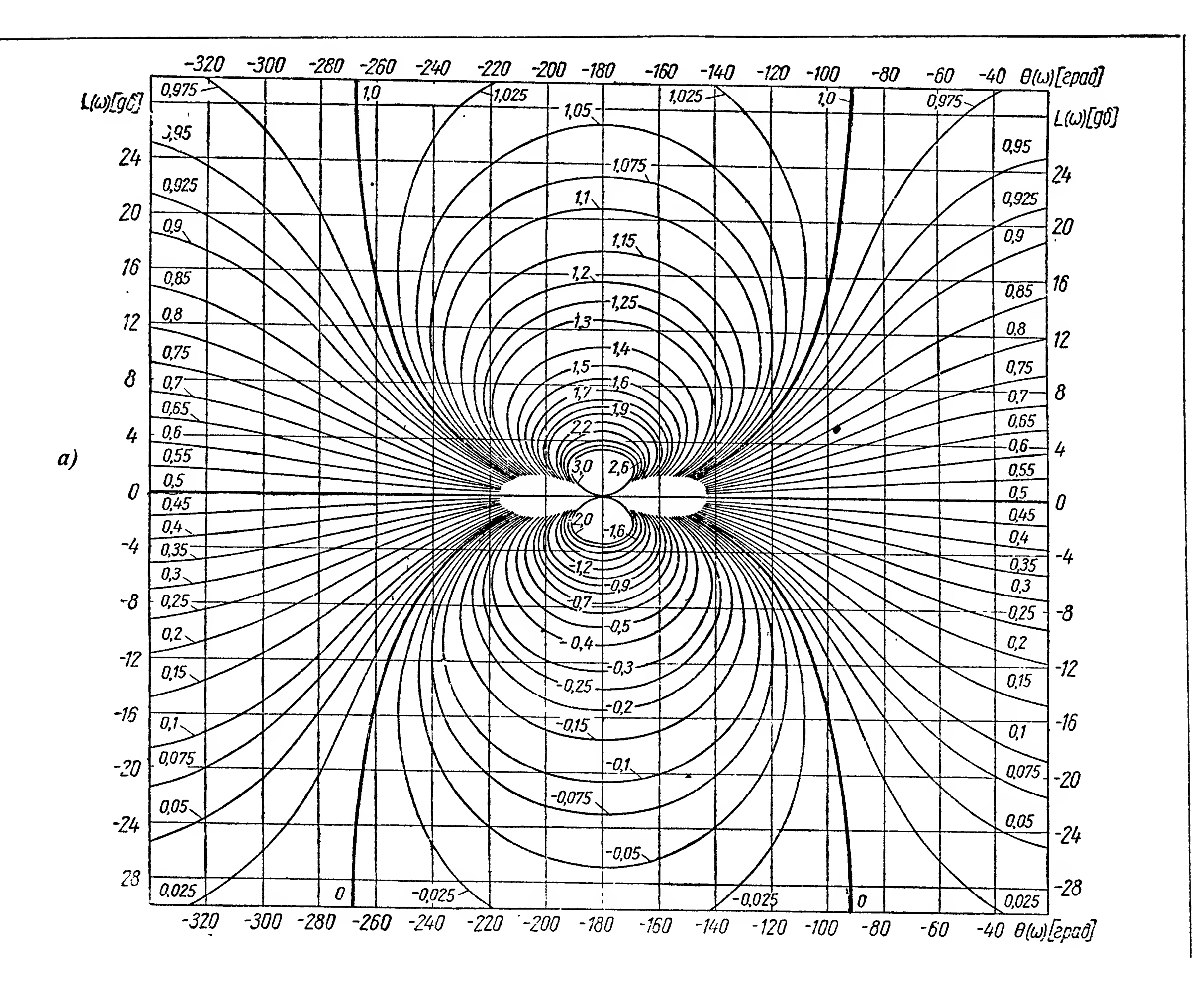
$$\cos\theta = \frac{K^2H^2\left(C - \frac{1}{2}\right) + \left(C + \frac{1}{2}\right)}{-2KHC}. \tag{71}$$

Заменим в равенствах (70) и (71) KH через $\frac{1}{KH}$ и C через $-C$. В результате получим

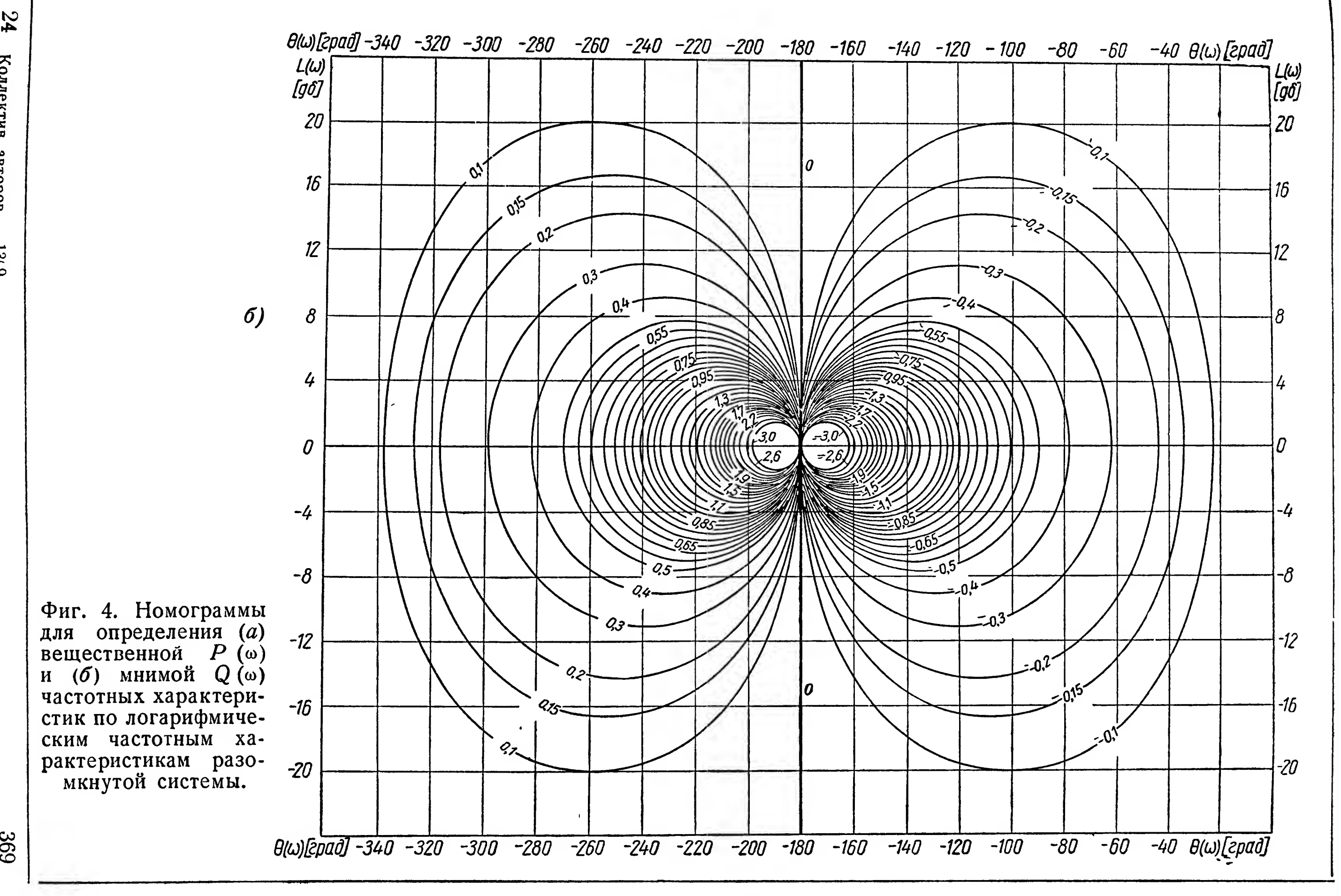
$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{K^2H^2}\left(-C - \frac{1}{2}\right) + \left(-C + \frac{1}{2}\right)}{2\frac{1}{KH}C},$$

или

$$\cos\theta = \frac{K^2H^2\left(C - \frac{1}{2}\right) + \left(C + \frac{1}{2}\right)}{-2KHC}. \tag{72}$$



а)



Фиг. 4. Номограммы для определения (*а*) вещественной $P(\omega)$ и (*б*) мнимой $Q(\omega)$ частотных характеристик по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы.

Из выражений (71) и (72) следует, что если вдоль оси абсцисс откладывать значения $\theta(\omega)$, а вдоль оси ординат значения $L(\omega)$, то геометрические места точек на плоскости (L, θ), соответствующие различным значениям P_c, будут симметричны относительно линии, соответствующей $L=0$.

9. ДИАГРАММЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУДНОЙ И ФАЗОВОЙ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ПО АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Иногда, например при исследовании резонансных свойств системы, а также при изучении многоконтурных систем, представляет интерес задача определения амплитудной $A(\omega)$ и фазовой $\varphi(\omega)$ частотных характеристик замкнутой системы

$$\Phi(j\omega) = A(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)}$$

по ее прямой или обратной амплитудно-фазовой характеристике.

Правила построения этих диаграмм могут быть получены при помощи рассуждений, аналогичных тем, которыми мы пользовались при выводе правил построения вещественной и мнимой круговых диаграмм.

Пусть

$$A(\omega) = \text{const} = A_c; \tag{73}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \text{const} = N_c, \tag{74}$$

тогда можно показать, что геометрические места точек, соответствующие равенствам (73) и (74) на плоскостях $KW(j\omega)$ и $\frac{1}{KW(j\omega)}$, определяются данными, приведенными ниже, на стр. 372.

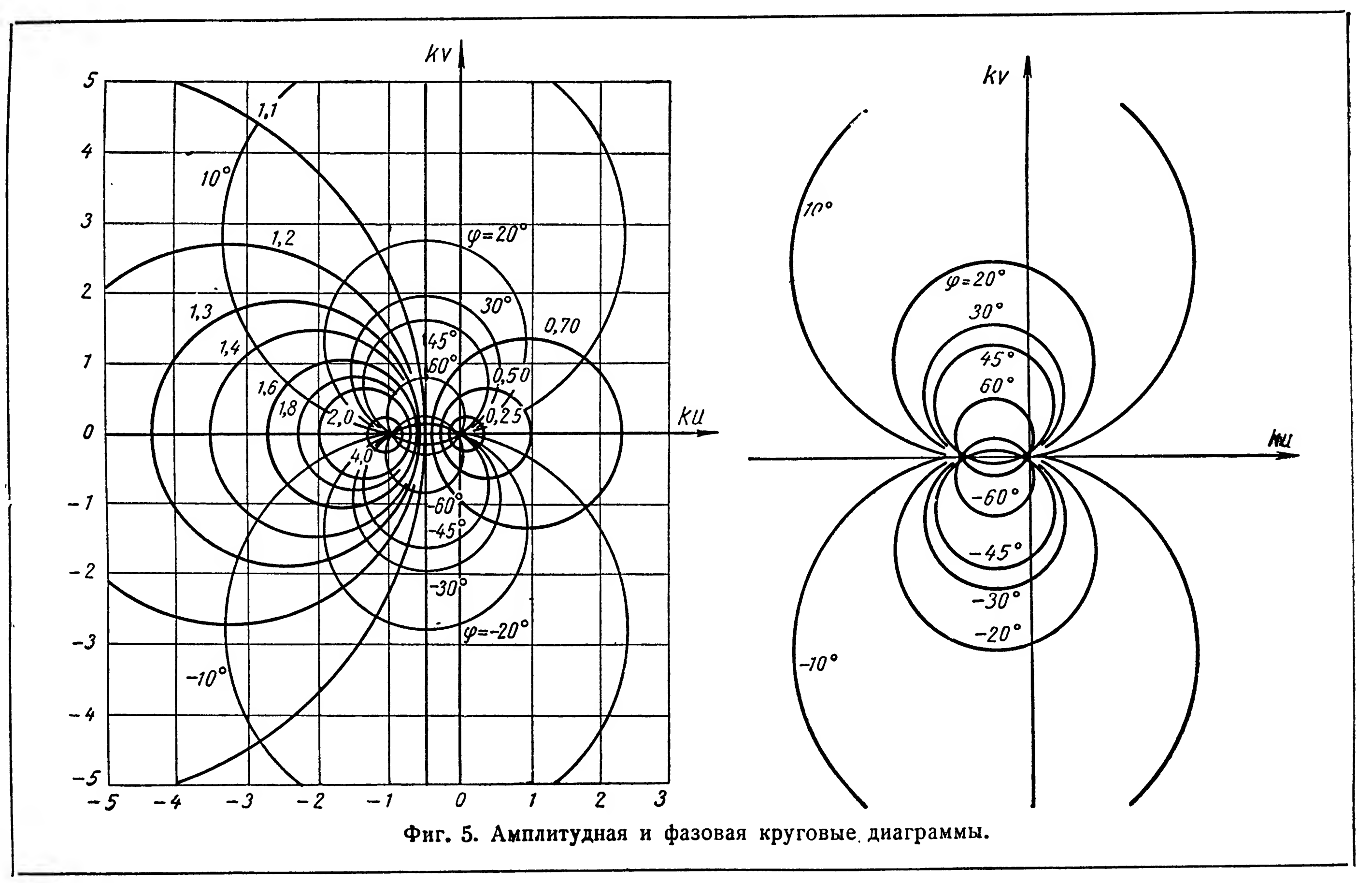
Диаграмма для определения $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ по логарифмической амплитудной $L(\omega)$ и фазовой $\theta(\omega)$ частотным характеристикам разомкнутой системы была рассмотрена в главе XII.

10. ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НОМОГРАММ В БОЛЕЕ ОБЩИХ СЛУЧАЯХ [3]

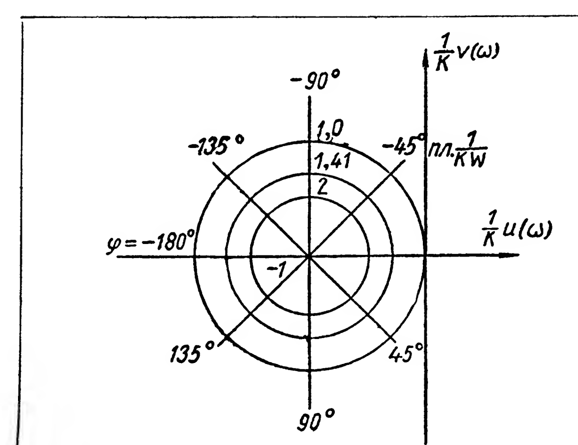
Выше нами был изложен способ определения частотных характеристик замкнутой системы $P(\omega)$, $Q(\omega)$ по частотным характеристикам системы в разомкнутом состоянии, в основе которого лежит формула (49), устанавливающая связь между передаточными функциями системы в замкнутом и разомкнутом состоянии.

Необходимо, однако, напомнить, что формула (49) справедлива лишь в том случае, когда в качестве передаточной функции замкнутой системы рассматривается отношение преобразования Лапласа $X(s)$ для отклонения регулируемой величины к преобразованию Лапласа $G(s)$ для управляющего воздействия, обозначаемое нами через $\Phi(s)$.

Управляющее воздействие, как мы знаем, характеризуется тем, что оно прикладывается к чувствительному элементу системы автоматического регулирования. В более же общем случае, когда представляет интерес эффект возмущающего воздействия $f(t)$, которое может быть прило-



Фиг. 5. Амплитудная и фазовая круговые диаграммы.



Фиг. 6. Амплитудная и фазовая круговые диаграммы для обратной амплитудно-фазовой характеристики.

Плоскость $KW(j\omega)$	Плоскость $\frac{1}{KW(j\omega)}$
A_c — контуры представляют собой окружности $\left(KU+\frac{A_c^2}{A_c^2-1}\right)^2+K^2V^2=\frac{A_c^2}{(A_c^2-1)^2}$ с центрами в точках (фиг. 5) $\left(-\frac{A_c^2}{A_c^2-1};\ j0\right)$, с радиусами $\left\|\frac{A_c}{A_c^2-1}\right\|$, пересекающими ось KU вблизи начала координат в точке $-\frac{A_c}{A_c-1}$.	A_c — контуры представляют собой концентрические окружности $(KU+1)^2+K^2V^2=\frac{1}{A_c^2}$ с центрами в точках $(-1;\ j0)$, с радиусами $\frac{1}{A_c}$, пересекающими ось $\frac{1}{KU}$ вблизи начала координат в точке $\frac{1-A_c}{A_c}$.
N_c — контуры представляют собой окружности $\left(KU+\frac{1}{2}\right)^2+\left(KV-\frac{1}{2N_c}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{N_c^2+1}{N_c^2}\right)$ с центрами в точках $\left(-\frac{1}{2};\ j\frac{1}{2N_c}\right)$, с радиусом $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{N_c^2+1}}{N_c}$.	N_c — контуры представляют собой прямые линии, проходящие через критическую точку $(-1;\ j0)$ и пересекающие ось $\frac{1}{KV}$ в точке, расположенной на расстоянии N_c от начала координат (фиг. 6).

жено к любой точке системы, связь между передаточными функциями замкнутой $Y(s)$ и разомкнутой $KW(s)$ системы выражается уже не формулой (49), а формулой

$$Y(s)=\frac{V(s)}{1+KW(s)} \tag{75}$$

(см. главу VI).

Однако и в этом случае приведенные выше диаграммы оказываются полезными.

Предположим, например, что необходимо найти графики вещественной $P_y(\omega)$ и мнимой $Q_y(\omega)$ частотных характеристик замкнутой системы, определяемых выражением

$$Y(j\omega)=P_y(\omega)+jQ_y(\omega).$$

Представим функцию $Y(j\omega)$ в виде произведения двух множителей: $V(j\omega)$ и $[1+KW(j\omega)]^{-1}$. Тогда амплитудную и фазовую частотные характеристики, соответствующие функции $Y(j\omega)$, можно найти по логарифмическим характеристикам для $V(j\omega)$ и $KW(j\omega)$, представив выражение $[1+KW(j\omega)]^{-1}$ в виде

$$\frac{1}{1+KW(j\omega)}=\frac{[KW(j\omega)]^{-1}}{1+[KW(j\omega)]^{-1}} \tag{76}$$

и воспользовавшись номограммой на фиг. 62, гл. XII.

Располагая амплитудной $A_y(\omega)$ и фазовой $\varphi_y(\omega)$ характеристиками, легко найти вещественную $P_y(\omega)$ и мнимую $Q_y(\omega)$ частотные характеристики.

Можно также воспользоваться номограммой на фиг. 4 для определения вещественной $P_\varepsilon(\omega)$ и мнимой $Q_\varepsilon(\omega)$ части выражения (76) и затем найти искомые частотные характеристики $P_y(\omega)$ и $Q_y(\omega)$ при помощи формул

$$P_y(\omega)=P_v(\omega)P_\varepsilon(\omega)-Q_v(\omega)Q_\varepsilon(\omega)$$

и

$$Q_y(\omega)=P_v(\omega)Q_\varepsilon(\omega)+Q_v(\omega)P_\varepsilon(\omega), \tag{77}$$

где через $P_v(\omega)$, $Q_v(\omega)$ обозначены соответственно вещественная и мнимая части выражения $V(j\omega)$.

Заметим, что преобразование Лапласа для ошибки

$$E(s)=\frac{G(s)}{1+KW(s)} \tag{78}$$

(см. главу VI), преобразование Лапласа для свободных колебаний при ненулевых начальных условиях

$$X(s)=\frac{Y_н(s)}{1+KW(s)}, \tag{79}$$

(см. там же) и преобразование Лапласа для отклонения регулируемой величины, вызываемого возмущающим воздействием,

$$X(s)=\frac{V(s)F(s)}{1+KW(s)} \tag{80}$$

(см. там же) имеют такой же вид, как и формула (75). Поэтому способы определения вещественной и мнимой частотных характеристик для уравнения (75) остаются справедливыми и для обобщенных частотных характеристик, соответствующих всем трем последним формулам.

Наконец, укажем на возможность использования номограмм для построения частотных характеристик замкнутой системы по заданной границе области устойчивости в плоскости любого параметра [1].

Положим в формуле (49)

$$KW(j\omega) = \frac{M(j\omega)}{D(j\omega)}. \tag{81}$$

Подставляя формулу (81) в (49), получим

$$\Phi(j\omega) = \frac{M(j\omega)}{D(j\omega) + M(j\omega)}. \tag{82}$$

Предположим теперь, что мы интересуемся некоторым параметром τ, входящим линейно в знаменатель передаточной функции $\Phi(j\omega)$ и не входящим в ее числитель, так что вместо уравнения (82) можно написать

$$\Phi(j\omega) = \frac{M(j\omega)}{D_1(j\omega) + \tau M_1(j\omega)} = \frac{\dfrac{M(j\omega)}{D_1(j\omega)}}{1 + \tau\dfrac{M_1(j\omega)}{D_1(j\omega)}}. \tag{82а}$$

Но уравнение границы области устойчивости по параметру τ имеет вид (см. главу XI)

$$\tau^*(j\omega) = -\frac{M_1(j\omega)}{D_1(j\omega)}. \tag{83}$$

Подставляя формулу (83) в (82а), найдем:

$$\Phi(j\omega) = \frac{\dfrac{M(j\omega)}{D_1(j\omega)}}{1 + \tau[-\tau^*(j\omega)]}. \tag{82б}$$

Из формулы (82б) вытекает следующий способ использования заданной границы области устойчивости для определения вещественной и мнимой частотных характеристик замкнутой системы:

1) зеркально отображаем кривую (83) границы области устойчивости относительно мнимой оси и изменяем ее масштаб в τ раз;

2) используя вещественную и мнимую круговые диаграммы для обратной амплитудно-фазовой характеристики (см. п. 7), находим вещественную $P_\tau(\omega)$ и мнимую $Q_\tau(\omega)$ части выражения

$$\frac{1}{1 + \tau[-\tau^*(j\omega)]} = P_\tau(\omega) + jQ_\tau(\omega);$$

---

[1] На возможность построения частотных характеристик замкнутой системы по заданной границе области устойчивости обратил внимание М. В. Мееров. Им же был предложен способ такого построения, не требующий применения номограмм (см. [10]).

3) полагаем

$$\frac{M(j\omega)}{D_1(j\omega)} = P_1(\omega) + jQ_1(\omega)$$

и находим $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ при помощи формул

$$P(\omega) = P_1(\omega) P_\tau(\omega) - Q_1(\omega) Q_\tau(\omega);$$

$$Q(\omega) = P_1(\omega) Q_\tau(\omega) + Q_1(\omega) P_\tau(\omega).$$

11. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КАРТИНЫ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ПРИ ПОМОЩИ ТИПОВЫХ ТРАПЕЦОИДАЛЬНЫХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК [5], [8]

Рассмотрев способы построения собственных и обобщенных частотных характеристик, перейдем к изложению графо-аналитического метода вычисления переходных процессов, основанного на формуле

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{R_0(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega; \quad t > 0. \tag{35a}$$

Формула (35), как это мы видели выше, применима для вычисления переходных процессов, стремящихся при достаточно больших значениях времени t к постоянной величине, которая в частном случае может быть нулем, а также для вычисления регулярной (затухающей) части любых неустановившихся процессов.

Если

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x(\infty) \neq 0, \tag{84}$$

то для определения $R_0(\omega)$ в формуле (35a) по преобразованию Лапласа $X(s)$ для $x(t)$, не имеющему никаких особенностей в правой полуплоскости и на мнимой оси за исключением полюса в начале координат, необходимо (см. п. 4) найти вещественную часть выражения $j\omega X(j\omega)$:

$$R_0(\omega) = Re\,[j\omega X(j\omega)]. \tag{85}$$

Если

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \tag{86}$$

то для определения $R_0(\omega)$ в формуле (35a) по преобразованию Лапласа $X(s)$ для $x(t)$, не имеющему никаких особенностей в правой полуплоскости и на мнимой оси, включая начало координат, необходимо найти (см. п. 4) мнимую часть выражения $j\omega X(j\omega)$ *:

$$R_0(\omega) = Jm\,[j\omega X(j\omega)], \tag{85a}$$

Идея метода состоит в том, чтобы представить функцию $R_0(\omega)$ в виде конечного числа членов $r_i(\omega)$

$$R_0(\omega)=\sum_{i=1}^{n} r_i(\omega)$$

так, чтобы при вычислении интегралов

$$h_i(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{r_i(\omega)}{\omega}\sin\omega t\,d\omega \qquad (87)$$

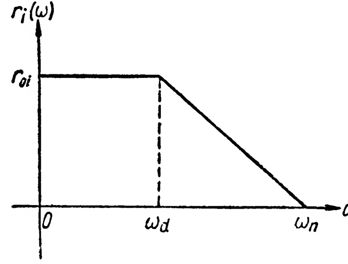
можно было пользоваться таблицами и, таким образом, свести определение переходного процесса $x(t)$ к суммированию табличных функций $h_i(t)$:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n} h_i(t).$$

Ниже предполагается, что каждая из функций $r_i(\omega)$ определяется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} r_i(\omega)&=r_{0i}, && 0<\omega<\omega_d,\\ r_i(\omega)&=r_{0i}\frac{\omega_n-\omega}{\omega_n-\omega_d}, && \omega_d<\omega<\omega_n,\\ r_i(\omega)&=0, && \omega_n<\omega, \end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

т. е. имеет вид трапеции (фиг. 7). Функцию $r_i(\omega)$, определяемую формулой (88), условимся называть трапецоидальной частотной характеристикой.



Фиг. 7. Трапецоидальная частотная характеристика.

Всякая кривая $R_0(\omega)$ может быть представлена в виде совокупности из некоторого числа трапецоидальных частотных характеристик (88) следующим образом.

Заменим кривую $R_0(\omega)$ достаточно мало отличающейся от нее кривой $\overline{R}_0(\omega)$, состоящей из сопрягающихся друг с другом прямолинейных отрезков, и проведем через каждую из точек сопряжения прямую линию, параллельную оси ω.

Легко видеть, что в результате указанного приема кривая $\overline{R}_0(\omega)$ может быть заменена некоторым числом трапецоидальных характеристик $r_i(\omega)$. Так, например, кривая $\overline{R}_0(\omega)$ на фиг. 8 может быть заменена четырьмя такими характеристиками. Итак,

$$R_0(\omega)\approx\overline{R}_0(\omega)=\sum_{i=1}^{n} r_i(\omega). \qquad (89)$$

* Обобщение формулы (35) на случай, определяемый формулой (86), при помощи указанного приема было предложено В. В. Имидадзе.

Подставляя формулу (89) в (35), получим

$$x(t) \approx \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} \frac{r_i(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \tag{90}$$

Из формулы (90) ясно, что приближенное вычисление $x(t)$ сводится к определению переходных функций $h_i(t)$, соответствующих трапецоидальным частотным характеристикам, определяемым формулой (88)

Функции $h_i(t)$ могут быть найдены следующим образом. Подставляя формулу (88) в (87), получим

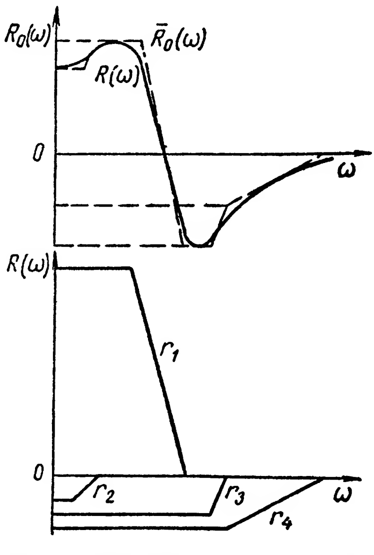
$$h_i(t) = \frac{2}{\pi} r_{0i} \left[\int_0^{\omega_d} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \int_{\omega_d}^{\omega_n} \frac{\omega_n - \omega}{\omega_n - \omega_d} \cdot \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \right], \tag{91}$$

откуда после несложных преобразований, пользуясь обычным обозначением интегрального синуса

$$Si(\omega_k t) = \int_0^{\omega_k} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega,$$

получим

$$h_i(t) = \frac{2r_{0i}}{\pi} \left\{ Si(\omega_d t) + \frac{\omega_n}{\omega_n - \omega_d} [Si(\omega_n t) - Si(\omega_d t)] + \frac{1}{\omega_n - \omega_d} \left(\frac{\cos \omega_n t - \cos \omega_d t}{t} \right) \right\}. \tag{92}$$



Фиг. 8. Разложение вещественной частотной характеристики $R_0(\omega)$ на трапецоидальные частотные характеристики $r_i(\omega)$.

Функции $h_i(t)$, определяемые формулой (92), так же как соответствующие им трапецоидальные характеристики вида (88), зависят от трех параметров: r_{0i}, ω_n, ω_d или r_{0i}, ω_n, $\varkappa$, где $\varkappa$ — величина, называемая коэфициентом наклона:

$$\varkappa = \frac{\omega_d}{\omega_n}; \tag{93}$$

поэтому, чтобы табулировать функции $h_i(t)$, введем в рассмотрение единичные трапецоидальные частотные характеристики, для которых $r_{0i} = 1$; $\omega_n = 1$, а коэфициент наклона $\varkappa$ может быть любым в пределах от 0 до 1.

Согласно формуле (92) этим характеристикам соответствуют переходные функции

$$h_\varkappa(t) = \frac{2}{\pi}\left\{Si(\varkappa t) + \frac{1}{1-\varkappa}\left[Si(t) - Si(\varkappa t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\cos t - \cos \varkappa t}{t}\right]\right\}. \qquad (94)$$

Функции (94) зависят только от одного параметра $\varkappa$ и могут быть табулированы.

В приложении приведена таблица h-функций, вычисленных по формуле (94) для значений $\varkappa$: 0; 0,05; 0,10, ..., 0,95; 1,00.

При помощи этой таблицы можно приближенно определить переходную функцию $h_i(t)$, соответствующую трапецоидальной характеристике с любыми значениями ее трех параметров r_{0i}, ω_n, $\varkappa$. Следовательно, этой же таблицей можно пользоваться для приближенного вычисления переходных процессов по формуле (35).

Для того чтобы пояснить правила пользования таблицей, необходимо предварительно доказать теорему, которую можно назвать теоремой подобия или теоремой изменения масштаба. Эта теорема заключается в следующем.

Пусть

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{R_0(\omega)}{\omega}\sin \omega t\, d\omega, \qquad (95)$$

тогда

$$x\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{R(n\omega)}{\omega}\sin \omega t\, d\omega, \qquad (96)$$

т. е. при увеличении (уменьшении) масштаба кривой $R_0(\omega)$ вдоль оси ω в n раз масштаб кривой $x(t)$ вдоль оси уменьшается (увеличивается) в то же число раз.

Доказательство теоремы весьма просто. Заменяя в формуле (95) t через $\frac{t}{n}$, получим

$$x\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{R_0(\omega)}{\omega}\sin \frac{t\omega}{n}\, d\omega. \qquad (97)$$

Произведем в интеграле (97) замену переменной, положив $\omega' = \frac{\omega}{n}$, тогда

$$x\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{R_0(n\omega')}{\omega'}\sin t\omega'\, d\omega',$$

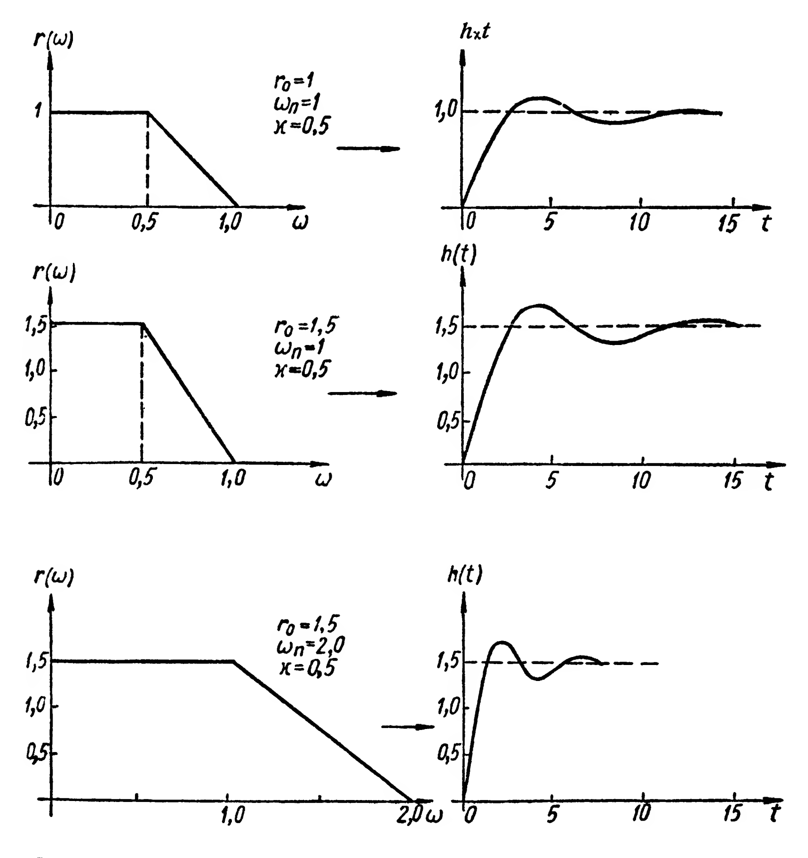
откуда сразу же следует формула (96), если заменить ω' через ω.

На основании теоремы изменения масштаба можно сделать следующий вывод.

Для того чтобы найти переходную функцию $h_i(t)$, соответствующую трапецоидальной характеристике, с параметрами r_{0i}, ω_n, $\varkappa$, зная переходную функцию $h_\varkappa(t)$, соответствующую единичной трапецоидальной характеристике с тем же коэфициентом наклона $\varkappa$, необходимо (фиг. 9):

1) увеличить ординаты функции $h_\varkappa(t)$ в r_{0i} раз:

2) значения аргумента t, приведенные в таблице, разделить на ω_n.



Фиг. 9. Трапецоидальные частотные характеристики с различными параметрами r_0, ω_n и соответствующие им переходные функции $h(t)$.

Таким образом, мы приходим к следующему основанному на формуле (35) правилу приближенного построения картины переходного процесса по заданному графику функции $R_0(\omega)$:

1) разлагаем $R_0(\omega)$ на трапецоидальные частотные характеристики;

2) находим соответствующие им переходные функции, пользуясь таблицей, при помощи только что изложенного правила;

3) производим алгебраическое сложение ординат кривых, соответствующих переходным функциям $h_i(t)$. Полученная кривая и будет представлять искомую картину переходного процесса.

Заметим, что при $\varkappa = 1$ трапеция на фиг. 7 вырождается в прямоугольник и формула (94) принимает вид

$$h_{\varkappa=1}(t) = \frac{2}{\pi} Si(t), \tag{94а}$$

из которой следует, что h-функция при $\varkappa = 1$ с точностью до множителя $\frac{2}{\pi}$ совпадает с выражением для интегрального синуса

$$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta.$$

Имея в виду, что для интегрального синуса имеются очень подробные таблицы, в некоторых случаях может оказаться удобным для построения переходного процесса разлагать кривую $R_0(\omega)$ не на трапеции, а на прямоугольники, пользуясь в остальном теми же соображениями, которые только что были изложены для более общего случая разложения на трапеции.

Очевидно, что разложение на прямоугольники в принципе всегда возможно, но удобно лишь в том случае, если кривая $R_0(\omega)$ приближенно может быть представлена небольшим числом горизонтальных и вертикальных сопрягающихся прямолинейных отрезков.

Кривые $R_0(\omega)$ или $P(\omega)$ можно разлагать, как это было указано А. А. Вороновым, не только на трапеции, но и на треугольники [12].

Ясно, что трапеция на фиг. 7 преобразуется в треугольник при $\varkappa = 0$, и формула (94) для этого случая принимает вид:

$$h_{\varkappa=0}(t) = \frac{2}{\pi}\left[Si(t) - \frac{1-\cos t}{t}\right]. \tag{94б}$$

h-функция (94б) является первой в таблице h-функций (см. приложение в конце книги).

Разложение на треугольники удобно, если, пользуясь формулой (94б), составить подробные таблицы нулевой h-функции (94б) и если кривая $R_0(\omega)$ [или $P(\omega)$] представляет собой пологую кривую.

12. СВЯЗЬ МЕЖДУ СВОЙСТВАМИ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И КАЧЕСТВОМ [3], [5]

Рассмотрим некоторые свойства выражения

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{P(\omega)}{\omega} \sin\omega t\, d\omega; \quad t > 0, \tag{98}$$

определяющего переходный процесс в системе, вызванный единичным ступенчатым воздействием. Как мы увидим, эти свойства часто позволяют судить о характере переходного процесса $x(t)$ непосредственно по виду вещественной частотной характеристики системы $P(\omega)$ без необходимости вычисления интеграла (98).

Очевидно, что рассматриваемые ниже свойства относятся и к более общему случаю формулы (35), когда воздействие отличается от единич-

ного и начальные условия ненулевые. При этом необходимо лишь вместо функции $P(\omega)$ рассматривать функцию $R_0(\omega)$, определяемую формулой (85) или (85а).

Свойство линейности. Если вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ может быть представлена в виде суммы вещественных частотных характеристик $P_i(\omega)$, т. е.

$$P(\omega)=\sum_{i=1}^{n} P_i(\omega),$$

причем

$$h_i(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{P_i(\omega)}{\omega}\sin\omega t\,d\omega,$$

то переходная функция $x(t)$ может быть представлена в виде суммы

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n} h_i(t).$$

Действительно,

$$x(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty \frac{P_i(\omega)}{\omega}\sin\omega t\,d\omega=\sum_{i=1}^{n} h_i(t).$$

Значение этого свойства заключается в том, что если нам удалось представить рассматриваемую вещественную частотную характеристику $P(\omega)$ в виде суммы каких-либо элементарных вещественных частотных характеристик $P_i(\omega)$, для каждой из которых переходная функция $h_i(t)$ известна или может быть легко определена, то переходная функция $x(t)$ может быть найдена путем простого сложения ординат кривых $h_i(t)$. Как мы видели, это свойство лежит в основе приближенного метода построения картины переходного процесса при помощи типовых трапецоидальных характеристик.

Изменение масштаба вдоль оси ординат. Если изменить масштаб вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ вдоль оси ординат в n раз, то масштаб кривой $x(t)$ изменится вдоль оси ординат в то же число раз (фиг. 9).

Это свойство вытекает непосредственно из формулы (98), если умножить обе ее части на n.

Изменение масштаба вдоль оси абсцисс. Если увеличить (уменьшить) масштаб вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ вдоль оси в n раз, то масштаб кривой $x(t)$ уменьшится (увеличится) в то же число раз (фиг. 9).

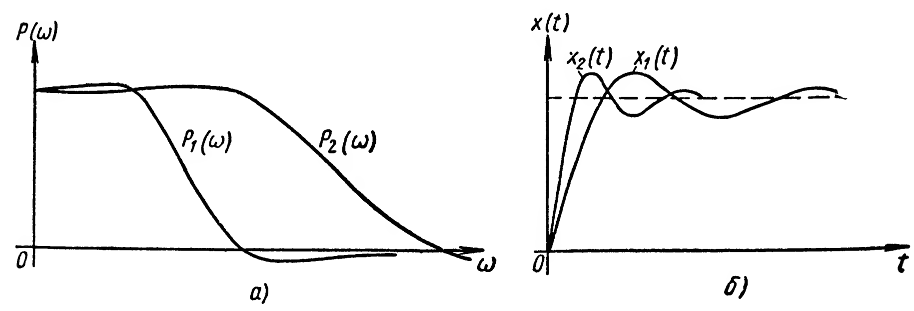
Другими словами, если вещественной частотной характеристике $P(\omega)$ согласно формуле (98) соответствует переходная функция $x(t)$, то вещественной частотной характеристике $P(n\omega)$ соответствует переходная функция $x\left(\frac{t}{n}\right)$, т. е.

$$x\left(\frac{t}{n}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{P(n\omega)}{\omega}\sin\omega t\,d\omega. \tag{99}$$

Из рассмотренного свойства следует, что если мы будем „растягивать" (сжимать) вещественную частотную характеристику вдоль оси частот, сохраняя ее подобной первоначальной кривой, то кривая переходного процесса будет „сжиматься" („растягиваться") вдоль оси времени, сохраняя свою форму.

Другими словами, чем „шире" вещественная частотная характеристика, тем при прочих равных условиях „у́же" переходный процесс, т. е. тем быстрее он протекает.

Например, на фиг. 10, *а* вещественная частотная характеристика $P_2(\omega)$ в 2 раза „шире" вещественной частотной характеристики $P_1(\omega)$, т. е. $P_1(\omega)$ можно совместить с $P_2(\omega)$, увеличив в 2 раза абсциссы всех ее



Фиг. 10. Вещественные частотные характеристики и соответствующие им переходные функции.

точек. Это означает, что переходный процесс $x_2(t)$, соответствующий $P_2(\omega)$, заканчивается в 2 раза быстрее, чем переходный процесс $x_1(t)$, соответствующий $P_1(\omega)$ (фиг. 10, *б*).

Определение конечного значения переходной функции по вещественной частотной характеристике. Конечное значение $x(\infty)$ переходной функции равно начальному значению $P(0)$ вещественной частотной характеристики

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{\omega \to 0} P(\omega),$$

или

$$x(\infty) = P(0). \qquad (100)$$

Действительно, согласно теореме о конечном значении (см. главу V)

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

или, если заменить s через $j\omega$,

$$x(\infty) = \lim_{\omega \to 0} j\omega X(j\omega).$$

В рассматриваемом нами случае единичного ступенчатого управляющего воздействия

$$X(j\omega) = \frac{\Phi(j\omega)}{j\omega} \qquad (101)$$

и

$$x(\infty)=\lim_{\omega\to 0}\Phi(j\omega).$$

Но

$$\lim_{\omega\to 0}\Phi(j\omega)=\lim_{\omega\to 0}[P(\omega)+jQ(\omega)]=\lim_{\omega\to 0}P(\omega)=P(0), \qquad (102)$$

поскольку нечетная функция $Q(\omega)$ содержит ω в виде множителя и обращается в нуль при $\omega=0$.

Итак,

$$x(\infty)=P(0),$$

и, следовательно, формула (100) доказана.

Из формулы (100) вытекает, что переходная функция $x(t)$ стремится с течением времени к нулю или постоянному значению в зависимости от того, равно нулю или отлично от нуля начальное значение вещественной частотной характеристики $P(0)$. Этот вывод, конечно, остается справедливым и для вещественной частотной характеристики $P_y(\omega)$, соответствующей передаточной функции $Y(j\omega)$.

Так, например, вещественной частотной характеристике $P_{1y}(\omega)$ на фиг. 11 соответствует переходная функция $x_1(t)$ с отличным от нуля конечным значением, а вещественной частотной характеристике $P_{2y}(\omega)$ соответствует переходная функция $x_2(t)$ с равным нулю конечным значением.

Отсюда следует, что если вещественная частотная характеристика $P_y(\omega)$, соответствующая передаточной функции $Y(j\omega)$ относительно возмущающего воздействия, имеет отличное от нуля начальное значение, то система является статической по отношению к этому воздействию, если же эта вещественная частотная характеристика имеет равное нулю начальное значение, то система является астатической.

Действительно, в первом случае переходный процесс, вызванный единичным ступенчатым воздействием, стремится к отличному от нуля установившемуся значению, и, следовательно, согласно определению (см. главу II) система является статической.

Во втором случае переходный процесс, вызванный тем же воздействием, стремится к нулевому установившемуся значению, и, следовательно, согласно определению система является астатической.

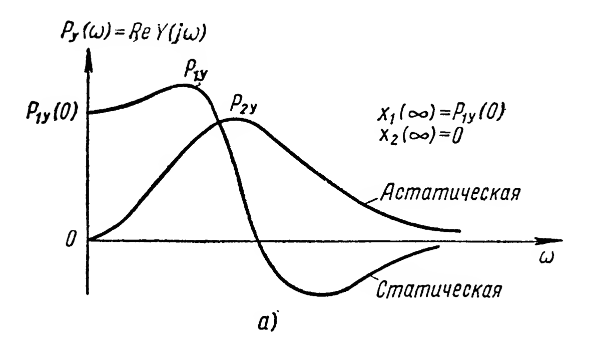
Так, например, на фиг. 11, *а* вещественная частотная характеристика $P_{1y}(\omega)$ соответствует статической, а вещественная частотная характеристика $P_{2y}(\omega)$ — астатической системе.

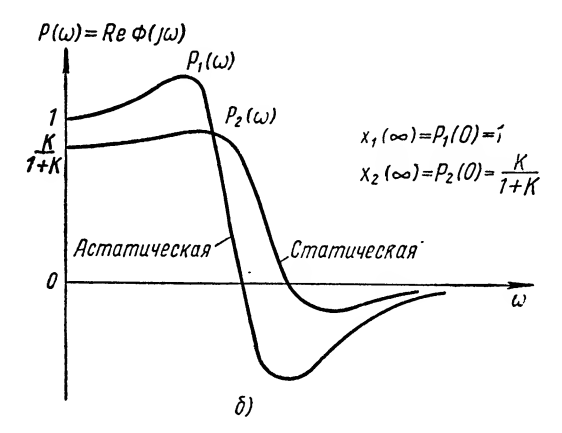
Заметим, что передаточной функции $\Phi(j\omega)$ относительно управляющего воздействия всегда соответствует вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ с неравным нулю начальным значением, причем если система статическая, то (фиг. 11, *б*)

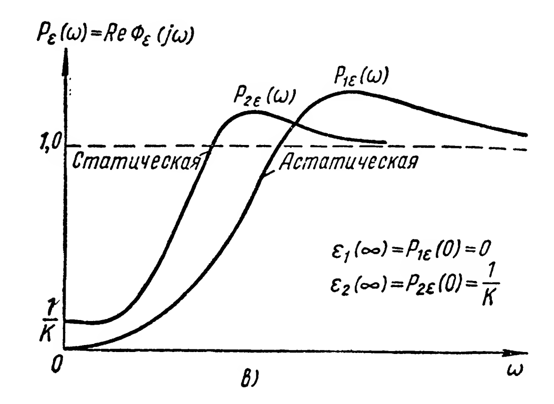
$$P(0)=\frac{K}{1+K}, \qquad (103)$$

а если астатическая, то

$$P(0)=1. \qquad (104)$$







Фиг. 11. Вещественные частотные характеристики статических и астатических систем:

а — по отношению к возмущающему воздействию; *б* и *в* — по отношению к управляющему воздействию.

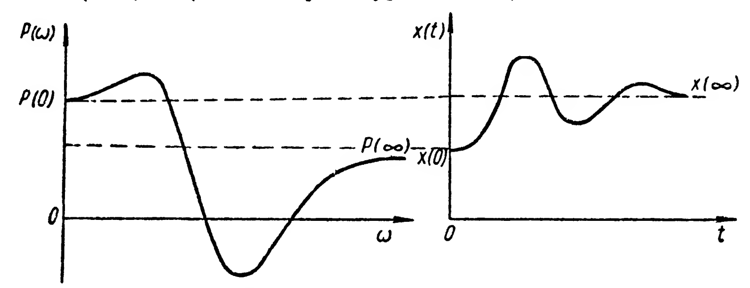
Действительно, если предположить, что система имеет порядок астатизма относительно управляющего воздействия, равный ν, то (см. главу VI)

$$KW(j\omega)=\frac{KW_0(j\omega)}{(j\omega)^\nu}, \tag{105}$$

и на основании формулы (49) мы можем написать:

$$\Phi(j\omega)=\frac{KW_0(j\omega)}{(j\omega)^\nu+KW_0(j\omega)}. \tag{106}$$

Предположим, что порядок астатизма $\nu=0$, т. е. система является статической, тогда согласно равенствам (102) и (106) получим уравнение (103), если же $\nu\neq 0$ и система является астатической, то согласно равенствам (102) и (106) получим уравнение (104).



Фиг. 12. Соответствие между начальным и конечным значениями вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ и переходной функции $x(t)$.

Точно так же легко показать, что система является статической по отношению к управляющему воздействию, если $P_\varepsilon(0)\neq 0$, и астатической, если $P_\varepsilon(0)=0$ (фиг. 11, *в*).

Определение начального значения переходной функции по вещественной частотной характеристике. Начальное значение переходной функции $x(0)$ равно конечному значению $P(\infty)$ вещественной частотной характеристики (фиг. 12), т. е.

$$\lim_{t\to 0} x(t)=\lim_{\omega\to\infty} P(\omega), \tag{107}$$

или сокращенно

$$x(0)=P(\infty).$$

Действительно, согласно теореме о начальном значении (см. главу V)

$$x(0)=\lim_{\omega\to\infty} j\omega X(j\omega),$$

откуда, учитывая равенство (101), получим

$$x(0)=\lim_{\omega\to\infty}\Phi(j\omega);$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\Phi(j\omega)=\lim_{\omega\to\infty}[P(\omega)+jQ(\omega)]=\lim_{\omega\to\infty}P(\omega),$$

и, следовательно, формула (107) доказана.

Во всех тех случаях, когда порядок числителя $\Phi(j\omega)$ меньше порядка знаменателя,

$$\lim_{\omega \to \infty} P(\omega) = 0,$$

и, следовательно, переходный процесс начинается из начала координат, если же порядок числителя равен порядку знаменателя, то

$$\lim_{\omega \to \infty} P(\omega) = P(\infty) \neq 0,$$

и начальное значение переходной функции отлично от нуля.

Заметим, что порядок числителя передаточной функции ошибки $\Phi_\varepsilon(s)$ всегда равен порядку знаменателя, и

$$\lim_{\omega \to \infty} P_\varepsilon(\omega) = 1. \qquad (108)$$

Действительно, пусть

$$KW(s) = \frac{M(s)}{D(s)}, \qquad (109)$$

но

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + KW(s)}. \qquad (110)$$

Подставляя формулу (109) в (110), получим

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{D(s)}{D(s) + M(s)},$$

и, следовательно, если только порядок $M(s)$ меньше порядка $D(s)$, то имеет место формула (108).

Разрывы непрерывности и пики в вещественной частотной характеристике. Если при некотором значении $\omega = \omega_i$, отличном от нуля в вещественной частотной характеристике $P(\omega)$, имеется разрыв непрерывности и она обращается в бесконечность [фиг. 13, кривая $P_1(\omega)$], то это означает, что система находится на границе колебательной неустойчивости и в ней происходят незатухающие гармонические колебания с частотой ω_i.

Действительно, если

$$[P(\omega)]_{\omega=\omega_i} = \infty, \qquad (111)$$

то это означает, что

$$[\Phi(j\omega)]_{\omega=\omega_i} = \infty, \qquad (112)$$

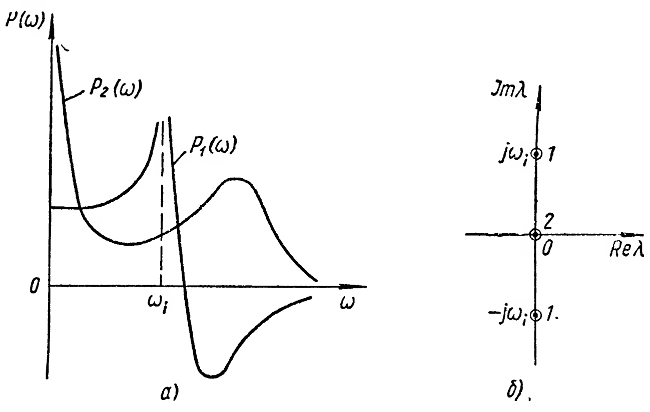
равенство же (112) означает, что величина $j\omega_i$ является нулем знаменателя передаточной функции $\Phi(j\omega)$, или, другими словами, характеристическое уравнение системы имеет чисто мнимый корень $j\omega_i$, что и доказывает высказанное выше утверждение.

Если же $P(\omega)$ обращается в бесконечность при $\omega = 0$ [фиг. 13, кривая $P_2(\omega)$], то при помощи аналогичных рассуждений легко показать, что характеристическое уравнение системы имеет нулевой корень

и, следовательно, система находится на границе апериодической неустойчивости, или, как иногда говорят, является нейтрально устойчивой.

Из сказанного следует, что наличие больших пиков в вещественной частотной характеристике свидетельствует о близости системы к границе устойчивости, о ее склонности к колебаниям и поэтому является весьма нежелательным.

Необходимо, однако, подчеркнуть, что хотя наличие существенных пиков в вещественной частотной характеристике и указывает на близость одного из корней характеристического уравнения к границе устойчивости, но не позволяет судить о том, с какой стороны от границы



Фиг. 13.

а и *б* — вещественные частотные характеристики и соответствующее им расположение корней характеристического уравнения, находящихся на границе устойчивости.

устойчивости он расположен. Поэтому анализ качества систем автоматического регулирования, имеющий смысл лишь в случае устойчивых систем, можно производить по вещественной частотной характеристике только в том случае, если нам заранее известно, что система устойчива.

Условия, при которых перерегулирования не могут быть велики. Мы только что видели, что наличие значительных по абсолютной величине пиков или экстремумов в вещественной частотной характеристике указывает на склонность системы к колебаниям с частотами, близкими к частотам, при которых имеют место экстремумы.

Покажем теперь, что отсутствие экстремумов в функции $P(\omega)$, наоборот, указывает на то, что переходный процесс $x(t)$ происходит либо с незначительными колебаниями, либо вообще без колебаний.

Для этого докажем следующую теорему.

Для того чтобы при единичном ступенчатом воздействии величина перерегулирования не превышала 18%, достаточно, чтобы вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ представляла собой положительную невозрастающую функцию от ω, т. е. чтобы удовлетворялись условия

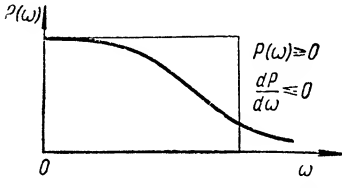
$$P(\omega) \geqslant 0; \quad \frac{dP}{d\omega} \leqslant 0 \tag{113}$$

при всех ω (фиг. 14).

Доказательство этого критерия заключается в следующем. Представим интеграл (98) в виде

$$x(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{nt}{\pi}}^{\frac{(n+1)\pi}{t}}\frac{P(\omega)}{\omega}\sin\omega t\,d\omega. \tag{114}$$

Так как функция $P(\omega)$ невозрастающая, то функция $\frac{P(\omega)}{\omega}$ также невозрастающая. Отсюда легко видеть, что правая часть равенства (114) представляет знакопеременный ряд с невозрастающими по абсолютной величине членами. Следовательно, его сумма неотрицательна, т. е. $x(t)\geqslant 0$ при всех $t>0$.



Фиг. 14. Положительные невозрастающие вещественные частотные характеристики.

Кроме того, сумма ряда (114) не может превышать величины его первого члена, т. е.

$$x(t)\leqslant\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{t}}\frac{P(\omega)}{\omega}\sin\omega t\,d\omega$$

или

$$x(t)\leqslant\frac{2}{\pi}P(0)\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{t}}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,d\omega,$$

или

$$x(t)\leqslant\frac{2}{\pi}P(0)\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin\zeta}{\zeta}\,d\zeta. \tag{115}$$

Принимая теперь во внимание, что

$$P(0)=x(\infty)$$

и

$$\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin\zeta}{\zeta}\,d\zeta\approx 1{,}85,$$

вместо неравенства (115) можно написать:

$$x(t)\leqslant 1{,}18x(\infty) \tag{116}$$

при всех $t>0$, и, следовательно, теорема доказана.

Очевидно, для того чтобы условия выполнения критерия (116) имели место, функции $P(\omega)$ и $\frac{dP}{d\omega}$ не должны обращаться в нуль при вещественных значениях ω, и, следовательно, проверка удовлетворения

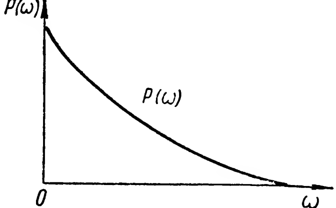
критерия может быть сведена к известным способам проверки отсутствия вещественных корней уравнений

$$P(\omega)=0;$$

$$\frac{dP}{d\omega}=0.$$

В удовлетворении критерия можно также убедиться, построив функцию $P(\omega)$ в виде кривой.

Заметим, что примером вещественной частотной характеристики, удовлетворяющим сформулированному критерию, могут служить трапецоидальные частотные характеристики, являющиеся положительными невозрастающими функциями от ω. При этом для вещественной частотной характеристики, имеющей вид прямоугольника (фиг. 14), неравенство (116) для значения $t=\frac{\pi}{\omega_n}$ переходит в равенство, т. е. в этом случае перерегулирование как раз равно $18^0/_0$.



Фиг. 15. Вещественная частотная характеристика, которой соответствует монотонная переходная функция.

Условия монотонного протекания переходного процесса. Рассмотрим достаточные (но не необходимые) условия для того, чтобы переходный процесс, определяемый формулой (98), протекал монотонно и, следовательно, вообще без колебаний. Эти условия определяются следующей теоремой.

Для того чтобы переходный процесс, определяемый выражением (98), протекал монотонно, достаточно, чтобы вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ представляла непрерывную, положительную функцию от ω с отрицательной и монотонно возрастающей (убывающей по абсолютной величине) производной $\frac{dP}{d\omega}$ (фиг. 15).

Для доказательства представим вещественную частотную характеристику в виде суммы достаточно большого числа прямолинейных наклонных характеристик $P_i(\omega)$ (фиг. 16):

$$P_i(\omega)=P_i(0)\left(1-\frac{\omega}{\omega_{0i}}\right);\quad 0<\omega<\omega_{0i}. \tag{117}$$

Это можно сделать, заменив рассматриваемую вещественную частотную характеристику прямолинейными сопрягающимися отрезками и продолжив каждый из них до оси ординат так, как это показано на фиг. 16.

Из фиг. 16 легко видеть, что интервал частот ω_0, занимаемый каждой предыдущей характеристикой $P_i(\omega)$, меньше, чем для последующей $P_{i+1}(\omega)$.

Итак,

$$P(\omega)=\sum_{i=1}^{n}P_i(\omega), \tag{118}$$

причем

$$0<\omega_{01}<\omega_{02}<\ldots<\omega_{0i}<\ldots<\omega_{0n}.$$

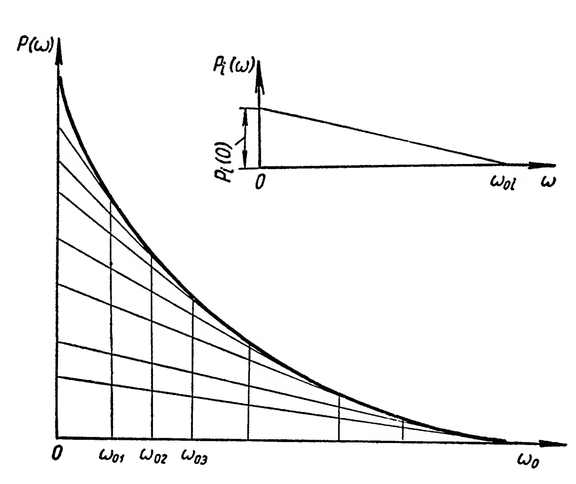
Введем теперь в рассмотрение переходные функции

$$h_i(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{P_i(\omega)}{\omega}\sin\omega t\, d\omega, \qquad (119)$$

соответствующие прямолинейным наклонным характеристикам $P_i(\omega)$.

Подставляя формулу (117) в (119), получим

$$h_i(t) = \frac{2}{\pi}P_{0i}(0)\left[Si(\omega_{0i}t) + \frac{\cos\omega_{0i}t - 1}{\omega_{0i}t}\right]. \qquad (120)$$



Фиг. 16. Разложение монотонно убывающей вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ на сумму прямолинейных наклонных характеристик $P_i(\omega)$.

Диференцируя формулу (120), найдем

$$\frac{dh_i}{dt} = \frac{2}{\pi t^2\omega_{0i}}(1 - \cos\omega_{0i}t), \qquad (121)$$

и, следовательно,

$$\frac{dh_i}{dt} \geqslant 0 \qquad (122)$$

при всех t, причем $\frac{dh_i}{dt} = 0$ при $t = 2\pi k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$).

Из неравенства (122) и из того, что согласно теореме о конечном значении

$$\lim_{t\to\infty} h_i(t) = P_i(0),$$

функция $h_i(t)$ монотонно возрастает и асимптотически стремится к своему предельному значению $P_i(0)$.

Но согласно формулам (98) и (118)

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty \frac{P_i(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega$$

или

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t),$$

где функции $h_i(t)$ определяются выражением (120) и, следовательно, функция $x(t)$, представляющая сумму монотонно возрастающих функций, является также монотонно возрастающей, асимптотически стремящейся к своему предельному значению $x(\infty)$.

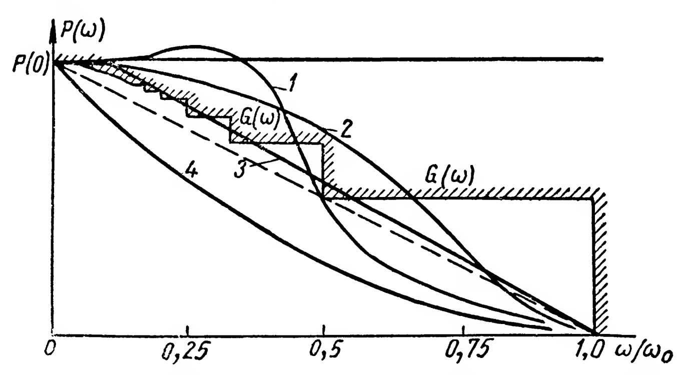
Необходимые условия для монотонности. Приведем необходимые (но не достаточные) условия для монотонности переходного процесса, вытекающие из свойств преобразования Фурье [5], [7],

Необходимые условия для монотонности переходного процесса, вызванного единичным ступенчатым воздействием, заключаются в следующем.

1. Значения, которые принимает вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ при всех $\omega > 0$, не должны быть больше, чем ее начальное значение при $\omega = 0$, т. е.

$$P(0) \geqslant |P(\omega)|. \tag{123}$$

Из формулы (123) следует, что кривой *1* на фиг. 17 соответствует заведомо немонотонный процесс.



Фиг. 17. Вещественные частотные характеристики и необходимые условия для монотонности.

2. Удвоенная площадь, ограничиваемая кривой $P(\omega)$ и осью частот при $\omega > 0$, не должна превышать площади прямоугольника с основанием, равным интервалу частот ω_0, на котором $P(\omega) \neq 0$, и высотой, равной начальной ординате $P(0)$:

$$\omega_0 P(0) \geqslant 2\int_0^{\omega_0} |P(\omega)|\, d\omega. \tag{124}$$

Условию (124) не удовлетворяет, например, кривая *2* на фиг. 17, и, следовательно, соответствующий ей переходный процесс является немонотонным.

3. Вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ не должна выходить из пределов области, ограничиваемой графиком функции $G(\omega)$ вида

$$G(\omega) = P(0)\cos\frac{\pi}{\left[\frac{\omega_0}{\omega}\right] + 1}, \tag{125}$$

где $\left[\frac{\omega_0}{\omega}\right]$ при данном ω означает наименьшее из целых чисел, превышающее величину $\frac{\omega_0}{\omega}$, т. е. должно иметь место неравенство

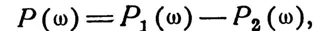
$$G(\omega) \geqslant |P(\omega)|. \tag{126}$$

График ступенчатой функции $G(\omega)$ изображен на фиг. 17. Кривой *3* соответствует немонотонный процесс, так как она не удовлетворяет

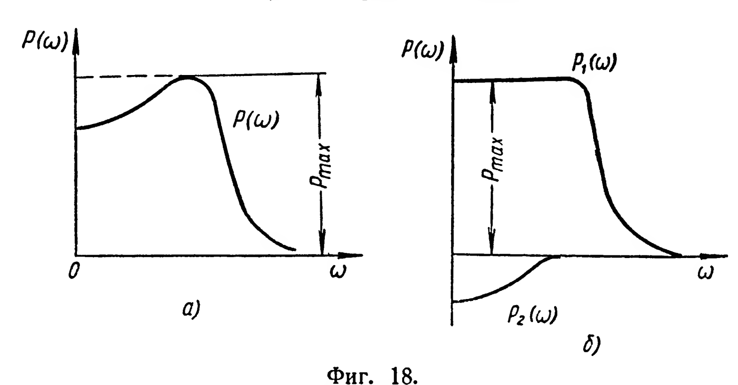
условию (126). Кривая 4 удовлетворяет всем перечисленным условиям, и, как мы знаем, ей соответствует монотонный переходный процесс.

Определение верхнего предела для величины перерегулирования при наличии максимума в вещественной частотной характеристике. Предположим, что вещественная частотная характеристика имеет максимум, отношение которого к начальной ординате равно $\frac{P_{max}}{P(0)}$ (фиг. 18, *а*).

Мы можем написать:



$$P(\omega) = P_1(\omega) - P_2(\omega),$$



Фиг. 18.

а и *б* — вещественная частотная характеристика $P(\omega)$, имеющая максимум.

где функции $P_1(\omega)$ и $P_2(\omega)$ являются невозрастающими положительными непрерывными функциями (фиг. 18, *б*), причем функция $P_1(\omega)$ может быть выбрана так, чтобы

$$P_1(0) = P_{max}.$$

Имеем

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{P_1(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{P_2(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega. \qquad (127)$$

Так как второй интеграл в формуле (127) положителен при всех $t > 0$, то

$$x(t) < \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{P_1(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega,$$

откуда, пользуясь критерием, доказанным выше, получим

$$\frac{x(t)}{x(\infty)} < 1{,}18\,\frac{P_{max}}{P(0)}$$

при всех $t > 0$, т. е. мы приходим к следующему выводу.

Если вещественная частотная характеристика имеет максимум, равный P_{max}, то величина перерегулирований имеет значение меньшее, чем $1{,}18 \frac{P_{max} - P(0)}{P(0)}$, т. е. имеет место неравенство

$$\sigma\% < 1{,}18 \frac{P_{max} - P(0)}{P(0)} 100\%. \qquad (128)$$

Так, например, если $\frac{P_{max}}{P(0)} = 1{,}25$, то величина перерегулирования во всяком случае не превышает 48%.

Из соотношения

$$P(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega)$$

следует, что максимумы вещественной частотной характеристики не превышают максимумов амплитудной частотной характеристики.

Кроме того, если амплитудная частотная характеристика имеет только один максимум, равный A_{max}, а фазовая характеристика представляет монотонно убывающую функцию, меньшую по абсолютной величине $\frac{\pi}{2}$ в интервале существенных частот, то вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ также имеет только один максимум.

Следовательно, при указанных условиях величина перерегулирований во всяком случае меньше, чем $\frac{A_{max} - A(0)}{A(0)}$.

Полученный результат можно рассматривать как некоторое обоснование иногда применяемого косвенного критерия качества [9], согласно которому необходимо, чтобы

$$\frac{A_{max}}{A(0)} \leqslant 1{,}2 \div 1{,}3. \qquad (129)$$

Действительно, при удовлетворении условия (129) величина перерегулирований будет во всяком случае меньше $40-50\%$.

Оценка времени переходного процесса T и величины перерегулирования в случае вещественной частотной характеристики, мало отличающейся от трапецоидальных. В случае невозрастающей непрерывной вещественной частотной характеристики $P(\omega)$, которая приближенно может быть представлена при помощи трапецоидальной частотной характеристики с интервалом частот $\omega_0 = \omega_n$ и с коэфициентом наклона $\varkappa$, время переходного процесса заключено в пределах

$$\frac{\pi}{\omega_n} < T < \frac{4\pi}{\omega_n} \qquad (130)$$

и приближенно может быть оценено при помощи кривой I на фиг. 19.

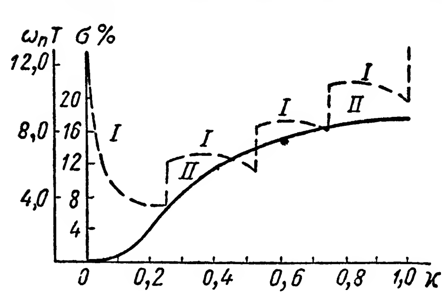
Величина перерегулирования σ может быть оценена при помощи кривой II на фиг. 19.

Кривые I и II на фиг. 19 получены при помощи непосредственного определения величин T и σ по графикам переходных функций, соответствующих трапецоидальным частотным характеристикам.

Оценка нижнего предела для времени переходного процесса T по величине интервала положительности ω_n. Если вещественная частотная характеристика имеет интервал положительности, равный ω_n, то время переходного процесса T во всяком случае больше, чем $\frac{\pi}{\omega_n}$, т. е.

$$T > \frac{\pi}{\omega_n}. \tag{131}$$

Действительно, из всех вещественных частотных характеристик $P(\omega)$ с одинаковым интервалом положительности, обращающихся в нуль вне этого интервала, время переходного процесса (фиг. 19) не может быть меньше, чем $\sim\frac{\pi}{\omega_n}$, наличие же интервала частот $\omega > \omega_n$ вне интервала положительности, в котором вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ отличается от нуля, может привести лишь к увеличению, но не к уменьшению указанной оценки.



Фиг. 19. Зависимость времени переходного процесса T_0 и величины перерегулирования $\tau\%$ от коэфициента наклона $\varkappa$ для трапецоидальных характеристик.

Если вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ является положительной монотонно убывающей функцией вида, изображенного на фиг. 17 (кривая *4*), то время переходного процесса во всяком случае больше, чем $\frac{4\pi}{\omega_n}$, т. е.

$$T > \frac{4\pi}{\omega_n}. \tag{132}$$

Действительно, вещественная частотная характеристика рассматриваемого вида имеет время переходного процесса T большее, чем время переходного процесса для прямолинейной наклонной характеристики, равное $\frac{4\pi}{\omega_n}$.

13. ОЦЕНКА АБСОЛЮТНОГО ЗНАЧЕНИЯ РАЗНОСТИ МЕЖДУ ПЕРЕХОДНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ПО СООТВЕТСТВУЮЩИМ ИМ ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Для анализа качества систем автоматического регулирования методом частотных характеристик и, в частности, для использования с этой целью рассмотренных выше свойств вещественной частотой характеристики $P(\omega)$ весьма важно уметь оценивать достижимую точность в определении переходного процесса в зависимости от точности определения или тех, или иных упрощений частотной характеристики рассматриваемой системы.

Ниже дается способ оценки погрешности между переходными функциями по соответствующим им вещественным частотным характеристикам.

Рассмотрим две вещественные частотные характеристики $P_1(\omega)$ и $P_2(\omega)$ (фиг. 20) и предположим, что разностная частотная характеристика

$$\rho(\omega) = P_1(\omega) - P_2(\omega)$$

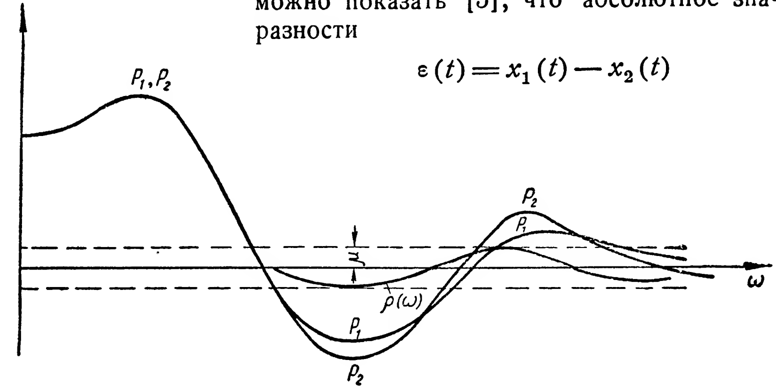
удовлетворяет следующим условиям:

$$\rho(\omega) = 0; \; 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_l;$$

$$|\rho(\omega)| \leqslant \mu; \; \omega_l \leqslant \omega \leqslant \omega_k, \tag{133}$$

причем функция $\rho(\omega)$ имеет N экстремумов в интервале $\omega_l < \omega < \omega_k$ и является не возрастающей по абсолютному значению при $\omega \geqslant \omega_k$. Тогда можно показать [5], что абсолютное значение разности

$$\varepsilon(t) = x_1(t) - x_2(t)$$



Фиг. 20. Вещественные частотные характеристики $P_1(\omega)$, $P_2(\omega)$ и разностная частотная характеристика $\rho(\omega)$.

между переходными функциями $x_1(t)$, $x_2(t)$, соответствующими вещественным частотным характеристикам $P_1(\omega)$ и $P_2(\omega)$, определяется интегралом

$$|\varepsilon(t)| \leqslant \frac{2}{\pi}\mu \int_{\omega_l t}^{(k+N)\pi} \left|\frac{\sin\omega}{\omega}\right| d\omega, \tag{134}$$

где k — наименьшее из целых чисел удовлетворяющих неравенству

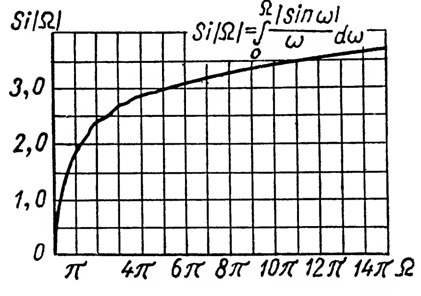
$$k \geqslant \frac{\omega_l t}{\pi}. \tag{135}$$

Для того чтобы пользоваться формулой (134), необходимо уметь быстро вычислять входящий в нее интеграл. Этой цели может служить график функции

$$Si|\Omega| = \int_0^{\Omega} \left|\frac{\sin\omega}{\omega}\right| d\omega, \tag{136}$$

изображенной на фиг. 21, и прилагаемая табл. 1. Величина Δ в табл. 1 представляет собой разность между значениями функции $Si|\Omega|$ для двух последующих значений Ω, приведенных в таблице.

Для того чтобы определить при помощи графика на фиг. 21 значение интеграла, входящего в правую часть неравенства (134), необходимо лишь найти разность ординат кривой на фиг. 21, соответствующих абсциссам, равным верхнему и нижнему пределам интегрирования в уравнении (134).



Фиг. 21. График функции $Si\,(\Omega)$.

Если $N=1$, то

$$|\varepsilon(t)| \leqslant \mu \int_{\omega_l t}^{(1+k)\pi} \left|\frac{\sin\omega}{\omega}\right| d\omega. \quad (137)$$

Формулой (137) можно пользоваться для оценки влияния на переходный процесс любой части вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ между двумя последующими точками пересечения оси частот, из которых первая имеет место при $\omega=\omega_l$.

Из формулы (137) вытекает ряд следствий. Так, например:

1) правая часть формулы (137), определяющая верхний предел абсолютного значения разности $|\varepsilon(t)|$, является монотонно убывающей функцией от времени t;

Таблица 1

Значения функции $Si|\Omega|$

Ω	$Si\,|\Omega|$	Δ	Ω	$Si\,|\Omega|$	Δ
0	0	—	8π	3,165	0,085
π	1,852	1,852	9π	3,240	0,075
2π	2,282	0,433	10π	3,306	0,066
3π	2,541	0,256	11π	3,366	0,060
4π	2,724	0,183	12π	3,421	0,055
5π	2,866	0,142	13π	3,471	0,050
6π	2,982	0,116	14π	3,517	0,046
7π	3,080	0,098	15π	3,560	0,043

2) при оценке времени переходного процесса T и величины перерегулирования σ обычно представляют интерес лишь значения времени $t \geqslant \frac{\pi}{\omega_n}$, поэтому при анализе качества, определяемого величинами T и σ, в формуле (137) значение t, входящее в нижний предел интегрирования, следует брать не меньшим, чем $\frac{\pi}{\omega_n}$;

3) величина верхнего предела для $|\varepsilon(t)|$ тем меньше, чем больше значение ω_l, т. е. чем больше частоты, при которых появляется расхождение между частотными характеристиками, и чем меньше верхний предел абсолютного значения разности между ними.

14. СВЯЗЬ МЕЖДУ СВОЙСТВАМИ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ И КАЧЕСТВОМ [6]

Выше было показано, каким образом, зная амплитудно-фазовую характеристику $KW(j\omega)$ или соответствующие частотные характеристики разомкнутой системы, можно найти частотные характеристики замкнутой системы $P(\omega)$, $Q(\omega)$. Но мы видели также, что при заданных частотных характеристиках управляющего воздействия переходный процесс полностью определяется вещественной $P(\omega)$ и мнимой $Q(\omega)$ частотными характеристиками замкнутой системы.

Отсюда следует, что амплитудно-фазовая характеристика или соответствующие ей частотные характеристики разомкнутой системы определяют не только устойчивость, но и качество систем автоматического регулирования.

Так, например, заменяя в формуле (98) функцию $P(\omega)$ выражением (50) или (67), мы можем написать:

$$x(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{KU(1+KU)+K^2V^2}{(1+KU)^2+K^2V^2}\right\}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,d\omega \tag{138}$$

или

$$x(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{K^2H^2+KH\cos\theta}{K^2H^2+2KH\cos\theta+1}\right\}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,d\omega. \tag{139}$$

Формулы (138) и (139) определяют переходную функцию, а следовательно, и качество регулирования при единичном ступенчатом воздействии через частотные характеристики, или, что по существу то же самое, через амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы.

Этот результат наталкивает на мысль, что предварительный анализ качества системы автоматического регулирования можно, повидимому, производить непосредственно по виду амплитудно-фазовой характеристики, не только не вычисляя интеграла (98), но и входящей в него функции $P(\omega)$. И, действительно, пользуясь вещественной круговой диаграммой, нетрудно найти свойства амплитудно-фазовой характеристики, эквивалентные свойствам вещественной частотной характеристики $P(\omega)$, что дает возможность установить непосредственную связь между формой амплитудно-фазовой характеристики и качеством.

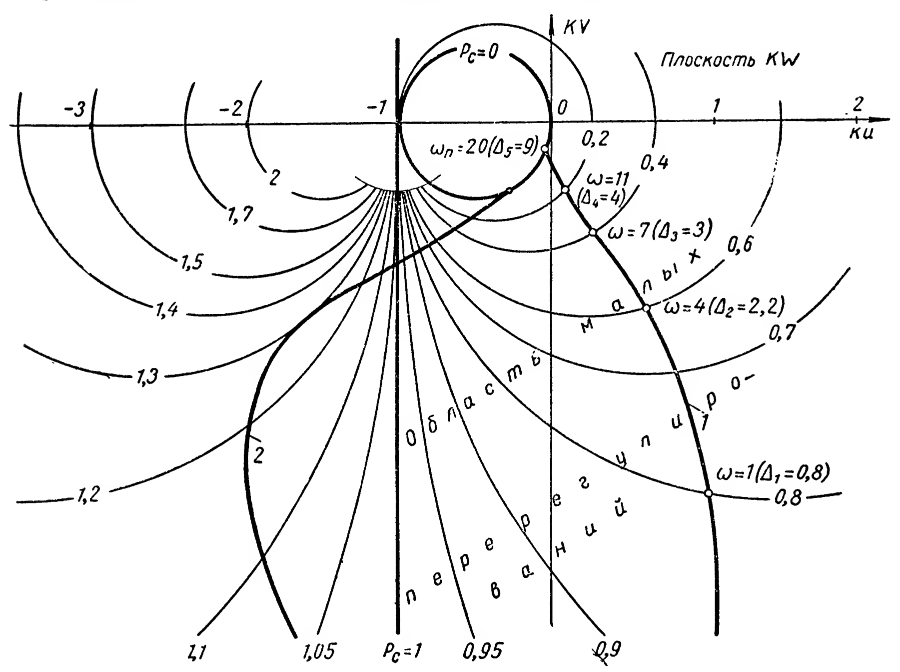
Некоторые из этих свойств заключаются в следующем.

1. Для того чтобы

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=x(\infty)=P(0)\;(<1)$$

(статическая система), амплитудно-фазовая характеристика должна исходить при $\omega=0$ из точки плоскости KW с координатами $\left(\frac{x(\infty)}{1-x(\infty)};\ j0\right)$.

В том случае, когда $x(\infty)=P(0)=1$ (астатическая система), нулевому значению ω на плоскости KW соответствует бесконечно удаленная точка, расположенная под углом $\left(-\nu\frac{\pi}{2}\right)$ к положительному направлению оси KU, где ν — порядок астатизма системы.



Фиг. 22. Анализ качества по амплитудно-фазовой характеристике.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь астатических систем, имея в виду, что обобщение формулируемых ниже положений на случай статических систем не представляет каких-либо затруднений.

2. Для того чтобы перерегулирования не превышали 18%, достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика не выходила из области на плоскости KW, ограниченной слева вертикальной прямой, проходящей через критическую точку, и окружностью вещественной круговой диаграммы с нулевым индексом (фиг. 22), а также имела со всеми окружностями вещественной круговой диаграммы по одной точке пересечения. Указанная часть плоскости KW может быть названа областью малых перерегулирований.

3. Для того чтобы переходная функция $x(t)$ представляла монотонную функцию (а следовательно, и для того, чтобы перерегулирования отсутствовали), достаточно, чтобы амплитудно-фазовая харак-

теристика не выходила из области плоскости KW, соответствующей значениям индексов P_c, заключенным в пределах $0 < P_c < 1$, имела со всеми окружностями вещественной круговой диаграммы по одной точке пересечения и имела такое распределение частот, при котором приращение частоты $\Delta\omega$ между точками пересечения амплитудно-фазовой характеристики с последующими окружностями вещественной круговой диаграммы, имеющими индексы $1;\ 1-\Delta P_c;\ 1-2\Delta P_c;\ 1-3\Delta P_c,\ \ldots,\ 0$ (при условии, что величина ΔP_c имеет фиксированное значение), непрерывно возрастало. Так, например, амплитудно-фазовая характеристика, отмеченная на фиг. 22 цифрой *1*, удовлетворяет всем этим требованиям. Поэтому соответствующая ей переходная функция является монотонной.

4. Для того чтобы переходная функция $x(t)$ монотонно стремилась к значению $x(\infty)$, необходимо (но недостаточно), чтобы амплитудно-фазовая характеристика была целиком расположена справа от вертикальной прямой, проходящей через критическую точку. Отсюда возникает следствие, заключающееся в том, что амплитудно-фазовым характеристикам второго рода, т. е. пересекающим вещественную ось KU слева от критической точки, не могут соответствовать переходные процессы, протекающие монотонно.

Кроме того, отсюда же следует вывод, что в следящих системах, обладающих астатизмом выше первого порядка, переходный процесс в случае управляющего воздействия $g(t)$ в виде единичной функции и нулевых начальных условий не может протекать строго монотонно (однако отступление от условия монотонности в обоих случаях может быть сколь угодно малым).

5. В случае амплитудно-фазовой характеристики, удовлетворяющей условиям, изложенным в п. 4, время переходного процесса T больше, чем $\frac{4\pi}{\omega_n}$ (так, например, для кривой *1* на фиг. 22 $T > 0{,}63$).

6. Всякой амплитудно-фазовой характеристике, впервые пересекающей окружность с нулевым индексом при частоте ω_n, соответствует переходная функция с временем переходного процесса $T > \frac{\pi}{\omega_n}$.

7. Если при возрастании частоты амплитудно-фазовая характеристика пересекает окружности вещественной круговой диаграммы с непрерывно возрастающими значениями индексов P_c до тех пор, пока она не коснется окружности с индексом $P_{c\,\max}$, а затем при дальнейшем возрастании частоты пересекает окружности вещественной круговой диаграммы с непрерывно убывающими значениями индексов, не попадая, однако, в область отрицательных значений индексов (кривая *2* на фиг. 22), то перерегулирование заведомо меньше, чем $(1{,}18P_{c\,\max}-1)$.

Так, например, если при удовлетворении только что сформулированных условий индекс $P_{c\,\max}=1{,}3$, то перерегулирования во всяком случае меньше $\sim 50\%$.

8. Две амплитудно-фазовые характеристики мало отличаются друг от друга, если одинаковым значениям частоты ω соответствуют точки обеих кривых, расположенные на окружностях вещественной круговой диаграммы с мало отличающимися значениями индексов.

Мало отличающимся друг от друга амплитудно-фазовым характеристикам соответствуют мало отличающиеся переходные процессы, вызванные единичным ступенчатым воздействием.

9. Критерий, уточняющий условия, при которых две амплитудно-фазовые характеристики можно считать мало отличающимися друг от друга, заключается в следующем.

Если две амплитудно-фазовые характеристики в интервале частот $0 < \omega < \omega_a$ совпадают друг с другом или находятся вне окружности радиуса $\frac{1}{\Delta}, \Delta \ll 1$, а при $\omega > \omega_a$ пересекаются N раз, причем μ есть наибольшая разность в значениях индексов вещественной круговой диаграммы для обеих кривых при одинаковых значениях ω, то переходные процессы, вызванные единичным ступенчатым воздействием при $t > t_1$, будут отличаться друг от друга не более, чем на величину интеграла (134).

10. Если при $\omega > \omega_n$ амплитудно-фазовая характеристика остается в пределах области, ограничиваемой окружностями вещественной круговой диаграммы со значениями индексов, изменяющихся в пределах $-0{,}2 < P_c < 0{,}2$, то обычно при оценке качества вид амплитудно-фазовой характеристики при $\omega > \omega_n$ может не приниматься во внимание.

11. Если амплитудно-фазовая характеристика в интервале частот $0 < \omega < \omega_d$ не выходит из пределов области, ограничиваемой окружностями вещественной круговой диаграммы с индексами $P_c = 0{,}95$ и $P_c = 1{,}05$, а при дальнейшем повышении частоты стремится к границе области отрицательных значений индексов, подходя к ней при частоте ω_n и пересекая окружности вещественной круговой диаграммы с индексами $P_c (0 < P_c < 1)$ при значениях частоты

$$\omega \approx \omega_n + (\omega_d - \omega_n) P_c,$$

то соответствующая характеристика $P(\omega)$ мало отличается от трапецоидальной с коэфициентом наклона $\varkappa = \frac{\omega_d}{\omega_n}$, и поэтому величину перерегулирования, а также время переходного процесса можно оценить при помощи кривых на фиг. 19.

15. ТРЕБОВАНИЯ К ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ ВЫСОКУЮ ТОЧНОСТЬ В СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМАХ [5]

Предположим, что преобразование Лапласа для управляющего воздействия $g(t)$ имеет вид

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{s},$$

где функция $G_0(s)$ не имеет полюсов во всей правой полуплоскости, включая мнимую ось, и пусть

$$G_0(j\omega) = P_{0g}(\omega) + jQ_{0g}(\omega). \tag{140}$$

Переходный процесс $x(t)$, вызываемый воздействием $g(t)$, в этом случае может быть представлен в виде формулы (35), причем обобщенная частотная характеристика $R_0(\omega)$ в рассматриваемом случае имеет вид

$$R(\omega) = P(\omega) P_g(\omega) - Q(\omega) Q_g(\omega). \tag{141}$$

Таким образом, для ошибки $\varepsilon(t)$ мы можем написать:

$$\varepsilon(t) = g(t) - x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{P_{0g}(\omega) - [P(\omega) P_{0g}(\omega) - \\ - Q(\omega) Q_{0g}(\omega)]\} \frac{\sin t\omega}{\omega} d\omega. \tag{142}$$

Из уравнения (142) ясно, что ошибка $\varepsilon(t)$ имеет тем меньшую величину, чем точнее удовлетворяются равенства

$$\left.\begin{aligned} P(\omega) \approx 1 \\ Q(\omega) \approx 0 \end{aligned}\right\} 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_g, \tag{143}$$

по крайней мере в том интервале частот $(0, \omega_a)$, в котором частотные характеристики воздействия еще заметно отличаются от нуля.

Действительно, если предположить, что при $\omega < \omega_a$ характеристики $P_g(\omega)$, $Q_g(\omega)$ являются любыми заданными функциями, удовлетворяющими ограничению, наложенному выше на функцию $G_0(s)$, а при $\omega > \omega_g$

$$P_g(\omega) \approx Q_g(\omega) \approx 0, \tag{144}$$

то при удовлетворении формулы (143) мы согласно формуле (142) будем иметь $\varepsilon(t) \approx 0$.

Оценка верхней границы для абсолютного значения ошибки, получающейся из-за невозможности точного удовлетворения равенств (3) в интервале $(0, \omega_g)$, может быть дана при помощи метода, изложенного выше.

Таким образом, ясно, что интервал частот $(0, \omega_a)$, занимаемый частотными характеристиками $P_g(\omega)$, $Q_g(\omega)$ воздействия, должен быть гораздо меньшим, чем интервал частот $(0, \omega_0)$, занимаемый частотными характеристиками системы, так как лишь в этом случае можно говорить хотя бы только о приближенном удовлетворении равенств (143).

Рассмотрим, при каких требованиях, предъявленных к частотным характеристикам разомкнутой системы, можно обеспечить удовлетворение этих равенств с заданной степенью точности.

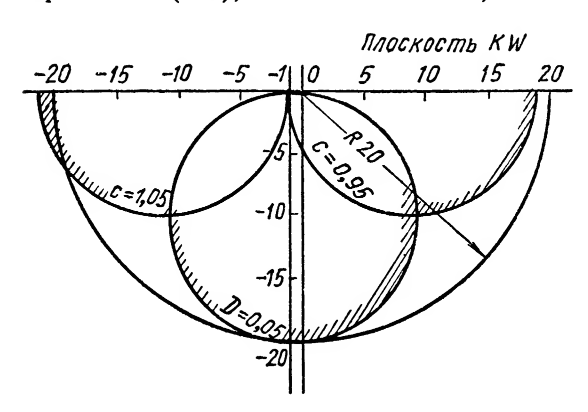
Для этого воспользуемся вещественной и мнимой круговыми диаграммами и найдем на плоскости KW область (фиг. 23), внутрь которой не должна попадать амплитудно-фазовая характеристика системы в интервале частот $0 < \omega < \omega_a$, для того чтобы в том же интервале частот имели место неравенства

$$|1 - P(\omega)| \leqslant \Delta; \tag{145}$$
$$|Q(\omega)| \leqslant \Delta,$$

где Δ — заданная малая постоянная величина.

Из уравнений (54) и (56) легко видеть, что эта область ограничивается четырьмя окружностями (фиг. 23), попарно касающимися и пересекающимися друг с другом в точке (—1; $j0$) и имеющими один и тот же диаметр, равный $\frac{1}{\Delta}$.

Из сказанного следует, что условие, достаточное для удовлетворения неравенства (145), заключается в том, чтобы амплитудно-фазовая характеристика в интервале частот $0 < \omega < \omega_a$ не попадала внутрь окружности радиуса $\frac{1}{\Delta}$, имеющей центр в точке (—1; $j0$). Очевидно, что при малых Δ ($\Delta \ll 1$) можно без сколько-нибудь значительного изменения результатов передвинуть центр этой окружности в начало координат, оставив ее радиус попрежнему равным $\frac{1}{\Delta}$.



Фиг. 23. Область, в которую амплитудно-фазовая характеристика не должна попадать при низких частотах.

Таким образом, мы приходим к следующему выводу.

Для удовлетворения неравенств (145) в интервале частот $0 < \omega < \omega_a$ достаточно, чтобы в этом интервале частот логарифмическая амплитудная характеристика системы удовлетворяла неравенству

$$Lm\,|KW| \geqslant 20\lg\left(\frac{1}{\Delta}\right), \tag{146}$$

а фазовая характеристика была какой угодно.

16. СВЯЗЬ МЕЖДУ СВОЙСТВАМИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ АМПЛИТУДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ И КАЧЕСТВОМ [5]

В главе XII было показано удобство применения логарифмических частотных характеристик для анализа устойчивости систем автоматического регулирования. Поэтому установление связи между свойствами логарифмической амплитудной частотной характеристики разомкнутой системы

$$L(\omega) = Lm\,|KW(j\omega)| \tag{147}$$

и качеством представляет большой интерес.

Эта связь может быть установлена на основании свойств вещественной частотной характеристики замкнутой системы $P(\omega)$, при помощи номограммы на фиг. 4, дающей линии постоянных значений функции $P(\omega)$ в координатах L, θ.

Логарифмическая амплитудно-фазовая характеристика $L(\theta)$, построенная в указанной прямоугольной системе координат, при достаточно

малых значениях ω и достаточно больших значениях модуля KW асимптотически стремится к вертикальной прямой, имеющей отметку $-\nu\frac{\pi}{2}$, где ν — порядок астатизма.

При достаточно больших ω и достаточно малых значениях модуля KW кривая $L(\theta)$ асимптотически стремится к вертикальной прямой, имеющей отметку $-\frac{\pi}{2}(n-m)$, где m — порядок числителя, а n — порядок знаменателя передаточной функции $KW(s)$.

Таким образом, логарифмические амплитудно-фазовые характеристики $L(\theta)$ при возрастании ω идут сверху от вертикальной прямой $-\nu\frac{\pi}{2}$ вниз к вертикальной прямой $-(n-m)\frac{\pi}{2}$, пересекая при этом то или иное число раз прямую $L=0$, или, другими словами, уровень нулевого затухания.

Заметим, что точкам пересечения логарифмической амплитудно-фазовой характеристики $L(\theta)$ с уровнем нулевого затухания $L=0$ соответствуют значения вещественной частотной характеристики $P(\omega)=0{,}5$, что непосредственно следует из выражения (67а). Действительно, если в нем положить $KH=1$, т. е. $L=0$, то мы получим уравнение (147) вне зависимости от значения ω.

Приведем теперь в соответствие при помощи номограммы (см. фиг. 4) области низких, средних и высоких частот вещественной частотной характеристики замкнутой системы $P(\omega)$ и логарифмической амплитудной характеристики разомкнутой системы $L(\omega)$.

Область низких частот, в которой имеют место неравенства (145), определяет в значительной мере точность воспроизведения медленно изменяющихся воздействий, причем для удовлетворения неравенств (145) достаточно, чтобы

$$|KW| \geqslant \frac{1}{\Delta},$$

а сдвиг фазы может быть любым.

Отсюда следует, что область низких частот для логарифмической частотной характеристики $L(\omega)$, определяющей ширину частотного спектра управляющих воздействий, пропускаемого системой с малыми искажениями, является область $0<\omega<\omega_a$, в которой имеет место неравенство (146).

Так, например, если $\Delta=0{,}05$, то мы должны иметь

$$L(\omega) \geqslant 26; \; 0<\omega<\omega_a,$$

если $\Delta=0{,}02$, то мы должны иметь

$$L(\omega) \geqslant 34; \; 0<\omega<\omega_a.$$

Областью высоких частот, или областью малых параметров вещественной частотной характеристики $P(\omega)$, является область $\omega_0<\omega<\infty$, в которой

$$|P(\omega)| \leqslant \Delta_0, \tag{148}$$

где величина Δ_0 может быть положена равной 0,1—0,2.

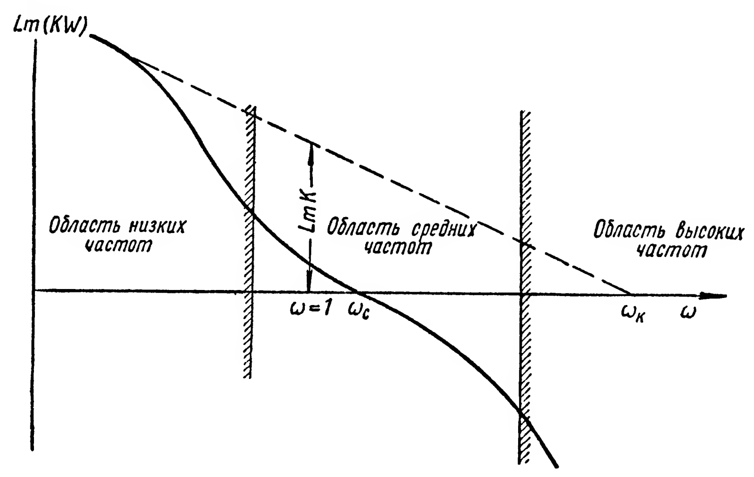
Из номограммы (см. фиг. 4) непосредственно ясно, что неравенство (148) при $\Delta_0 \approx 0,2$ имеет место, если $L(\omega) \leqslant (-16)$.

Итак, при рассмотрении логарифмической амплитудной характеристики разомкнутой системы целесообразно выделять следующие три интервала частот (фиг. 24).

Интервал низких частот $(0, \omega_a)$. Этот интервал определяется неравенством

$$L(\omega) \geqslant Lm\frac{1}{\Delta}.$$

Вид логарифмической амплитудной характеристики в этой области определяет порядок астатизма и статическую точность системы. Ширина



Фиг. 24. Область низких, средних и высоких частот логарифмической амплитудной частотной характеристики $Lm(KW)$.

интервала определяет ширину спектра частот управляющих воздействий, воспроизводимых системой без сколько-нибудь значительных искажений, и позволяет судить о том, какие воздействия для рассматриваемой системы можно считать медленно изменяющимися.

Интервал средних частот (ω_a, ω_0). Вид логарифмической амплитудной характеристики в этом интервале частот определяет запас устойчивости и в значительной мере качество системы при воздействиях типа единичной ступенчатой функции. В этом интервале находится частота среза ω_c, определяющая порядок времени переходного процесса при достаточных запасах устойчивости.

Интервал высоких частот (ω_0, ∞). Этот интервал может быть также назван интервалом малых параметров. Он содержит лишь те сопрягающие частоты, пренебрежение которыми не оказывает существенного влияния на вид логарифмических характеристик в интервале средних частот.

17. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПЕРЕДАТОЧНОГО КОЭФИЦИЕНТА ИЛИ ДОБРОТНОСТИ ПО ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ АМПЛИТУДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Как мы видели (см. главу VI), передаточная функция системы автоматического регулирования в разомкнутом состоянии, обладающей астатизмом ν-го порядка по отношению к управляющему воздействию, может быть представлена в виде

$$KW(s) = \frac{K}{s^{\nu}} W_0(s), \tag{149}$$

и, следовательно, выражение для логарифмической амплитудной частотной характеристики может быть представлено в виде

$$L(\omega) = LmK - \nu Lm\omega + Lm\,|W_0(j\omega)|. \tag{150}$$

При значениях ω, меньших первой сопрягающей частоты $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$, мы можем приближенно написать:

$$L(\omega) \approx LmK - \nu Lm\omega;\ 0 < \omega < \omega_1. \tag{151}$$

Прямая (151), называемая *низкочастотной асимптотой* логарифмической амплитудной характеристики $L(\omega)$, дает простой способ определения передаточного коэфициента K при любом порядке астатизма ν. Действительно, при $\omega = 1$ выражение (151) сводится к виду

$$[L(\omega)]_{\omega=1} = LmK, \tag{152}$$

из которого следует:

Величина передаточного коэфициента K, выраженная в децибелах, определяется ординатой логарифмической характеристики $L(\omega)$ при значении угловой частоты ω, равном единице.

Итак, если мы располагаем логарифмической амплитудной характеристикой $L(\omega)$, то для определения передаточного коэфициента или добротности K необходимо продолжить низкочастотную асимптоту (фиг. 24) до значения $\omega = 1$, тогда ордината этой асимптоты при $\omega = 1$ и будет являться значением K, выраженным в децибелах.

Заметим, что в случае статических систем выражение (151) для низкочастотной асимптоты принимает вид

$$L(\omega) \approx LmK;\ 0 < \omega < \omega_1, \tag{153}$$

из которого следует, что в этом случае продолжение низкочастотной асимптоты до значения $\omega = 1$ оказывается излишним, так как асимптота представляет прямую, параллельную оси частот, и значение K в децибелах равно расстоянию этой прямой от оси частот ω.

Другой способ определения K заключается в следующем. Продолжим низкочастотную асимптоту (151) до пересечения с осью частот (см. фиг. 24).

В точке пересечения $\omega = \omega_k$

$$[L(\omega)]_{\omega=\omega_k} = 0,$$

и, следовательно,

$$LmK = \nu Lm\omega_k, \tag{154}$$

или

$$K = \omega_k^{\nu}. \tag{155}$$

Отсюда следует, что значение коэфициента K равно значению угловой частоты ω_k в точке пересечения низкочастотной асимптоты с осью частот в степени, равной порядку астатизма системы ν.

18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ОШИБКИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ УПРАВЛЯЮЩЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ ПО ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ АМПЛИТУДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Предположим, что на вход системы автоматического регулирования подано гармоническое управляющее воздействие

$$g(t) = g_a \cos \omega_a t,$$

тогда, как это ясно из главы V, ошибка $\varepsilon(t)$ будет также представлять собой гармоническую функцию вида

$$\varepsilon_{уст}(t) = g_a A_\varepsilon(\omega_a) \cos[\omega_a t + \varphi_\varepsilon(\omega_a)], \tag{156}$$

где через $A_\varepsilon(\omega_a)$ и $\varphi_\varepsilon(\omega_a)$ обозначены относительные амплитуда и фаза, соответствующие передаточной функции ошибки $\Phi_\varepsilon(j\omega)$ при данном $\omega = \omega_a$, т. е.

$$\Phi_\varepsilon(j\omega_a) = \frac{1}{1 + KW(j\omega_a)} = A_\varepsilon(\omega_a) e^{j\varphi_\varepsilon(\omega_a)}. \tag{157}$$

Вместо выражения (157) мы можем написать:

$$A_\varepsilon(\omega_a)\, e^{j\varphi_\varepsilon(\omega_a)} = \frac{[KW(j\omega_a)]^{-1}}{1 + [KW(j\omega_a)]^{-1}}, \tag{158}$$

и, следовательно, $A_\varepsilon(\omega_a)$ и $\varphi_\varepsilon(\omega_a)$ можно определить, воспользовавшись номограммой на фиг. 62 гл. XII.

Действительно, пусть при $\omega = \omega_a$

$$L(\omega_a) = -L_a;$$

$$\theta(\omega_a) = -\theta_a,$$

тогда $A_\varepsilon(\omega_a)$ и $\varphi_\varepsilon(\omega_a)$ будут равны индексам кривых номограммы на фиг. 62 (гл. XII), проходящим через точку с координатами $(-L_a, -\theta_a)$.

При значениях ω, меньших первой сопрягающей частоты ω_1, величины $A_\varepsilon(\omega_a)$ и $\varphi_\varepsilon(\omega_a)$ могут быть определены непосредственно по логарифмическим характеристикам $L(\omega)$, $\theta(\omega)$.

Действительно, при $\omega < \omega_1$

$$KW(j\omega) \approx \frac{K}{\omega^{\nu}} e^{-j\nu\frac{\pi}{2}}$$

и

$$\Phi_\varepsilon(j\omega) \approx \frac{\omega^{\nu}}{K} e^{j\nu\frac{\pi}{2}}, \tag{159}$$

где ν — порядок астатизма.

Поэтому при $\omega \ll \omega_1$ выражение (156) сводится к виду

$$\varepsilon(t) \approx \frac{g_a \omega_a^{\nu}}{K} \cos\left(\omega_a t + \nu \frac{\pi}{2}\right), \tag{160}$$

и, следовательно, амплитудное значение ошибки ε_a при $\omega \ll \omega_1$

$$\varepsilon_a \approx \frac{g_a \omega_a^{\nu}}{K}. \tag{161}$$

Для астатической системы первого порядка при $\omega \ll \omega_1$

$$\varepsilon_a \approx \frac{g_a \omega_a}{K}, \tag{162}$$

причем ошибка в определении ε_a по формуле (162) не превышает $3^0/_0$, если $\omega \leqslant 0{,}5\omega_1$.

Для астатической системы второго порядка при $\omega \ll \omega_1$

$$\varepsilon_a \approx \frac{g_a \omega_a^2}{K}, \tag{163}$$

причем ошибка в определении ε_a по формуле (163) не превышает $3^0/_0$, если $\omega \leqslant 0{,}35\omega_1$.

Выше нами был рассмотрен способ определения по логарифмическим характеристикам разомкнутой системы амплитуды и фазы вынужденных установившихся колебаний ошибки $\varepsilon(t)$, вызванных гармоническим управляющим воздействием $g(t)$.

Покажем теперь, каким образом, пользуясь логарифмическими характеристиками, можно определить амплитуду и фазу вынужденных установившихся колебаний отклонения $x(t)$ регулируемой величины, вызванных гармоническим возмущающим воздействием $f(t)$.

Итак, предположим, что к системе автоматического регулирования приложено гармоническое возмущающее воздействие

$$f(t) = f_0 \cos \omega_0 t,$$

тогда установившиеся колебания отклонения $x(t)$ регулируемой величины будут иметь вид

$$x_{уст}(t) = f_0 A_y(\omega_0) \cos[\omega_0 t + \varphi_y(\omega_0)], \tag{164}$$

через $A_y(\omega_0)$ и $\varphi_y(\omega_0)$ обозначены относительные амплитуда и фаза, соответствующие заданному значению угловой частоты ω_0.

Относительные амплитуда $A_y(\omega_0)$ и фаза $\varphi_y(\omega_0)$ могут быть определены, если известна передаточная функция системы $Y(j\omega)$, так как

$$Y(j\omega_0) = A_y(\omega_0)\, e^{j\varphi_y(\omega_0)}. \tag{165}$$

Но (см. главу VI)

$$Y(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{1 + KW(j\omega)} = V(j\omega) \frac{[KW(j\omega)]^{-1}}{1 + [KW(j\omega)]^{-1}}, \tag{166}$$

и, следовательно,

$$A_y(\omega) = A_v(\omega) A_\varepsilon(\omega) \tag{167}$$

и

$$\varphi_y(\omega) = \varphi_v(\omega) + \varphi_\varepsilon(\omega), \tag{168}$$

где через $A_v(\omega)$ и $\varphi_v(\omega)$ обозначены амплитудная и фазовая частотные характеристики, соответствующие передаточной функции $V(j\omega)$.

Выражения (167) и (168) показывают, что для определения амплитуды и фазы вынужденных колебаний отклонения $x(t)$ регулируемой величины по логарифмическим характеристикам разомкнутой системы необходимо предварительно найти величины $A_\varepsilon(\omega_0)$, $\varphi_\varepsilon(\omega_0)$ так, как это было изложено выше, а затем воспользоваться формулами (167) и (168).

19. ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ КАРТИНЫ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ПО ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ АМПЛИТУДНОЙ И ФАЗОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКАМ МЕТОДОМ ТРАПЕЦОИДАЛЬНЫХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Если заданы логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики разомкнутой системы, то переходный процесс в замкнутой системе может быть найден обычным методом трапецоидальных частотных характеристик.

Для построения переходного процесса необходимо прежде всего, пользуясь номограммой на фиг. 4, найти соответствующую вещественную частотную характеристику замкнутой системы (собственную или обобщенную) так, как это было изложено выше, а затем уже воспользоваться методом трапеций.

20. ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ПО СОПРЯГАЮЩИМ ЧАСТОТАМ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ АМПЛИТУДНОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ [9]

Покажем теперь, каким образом по виду логарифмической амплитудной частотной характеристики можно найти приближенное выражение преобразования Лапласа для ошибки $E(s)$ (см. главу VI), позволяющее установить непосредственную связь между переходным процессом и постоянными времени системы.

Рассмотрим преобразование Лапласа для ошибки

$$E(s) = \frac{G(s)}{1 + KW(s)}. \tag{169}$$

На основании уравнения (169), заменяя s через $j\omega$, можно написать:

$$\frac{G(j\omega)}{E(j\omega)} = 1 + KW(j\omega). \tag{170}$$

Обозначим через ω_c частоту среза логарифмической амплитудной характеристики, т. е. частоту, при которой

$$Lm\,|KW(j\omega)| = 0,$$

тогда в случае часто встречающихся логарифмических амплитудных характеристик, имеющих прямолинейный участок с наклоном (—20 *дб/дек*) в окрестности частоты среза ω_c и обладающих достаточным запасом устойчивости приближенно можно положить

$$\left|\frac{G(j\omega)}{E(j\omega)}\right| \approx |KW(j\omega)|, \qquad (171)$$

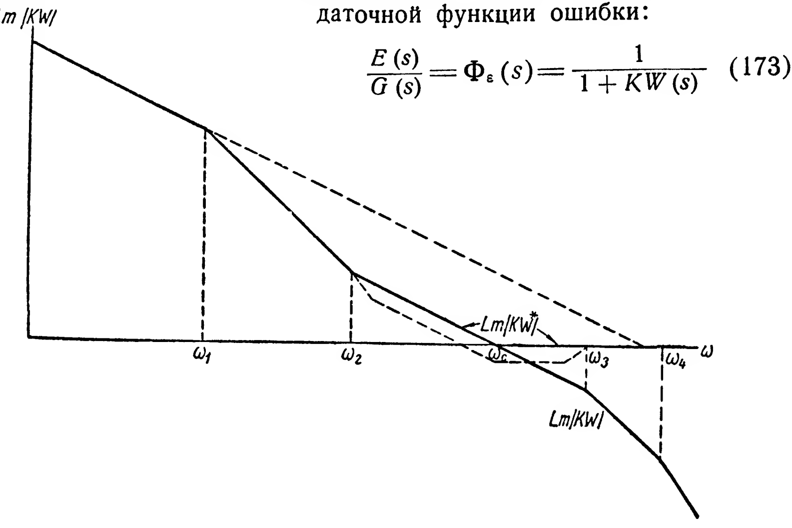
при $\omega \ll \omega_c$ и

$$\left|\frac{G(j\omega)}{E(j\omega)}\right| \approx 1 \qquad (172)$$

при $\omega \gg \omega_c$.

Выражения (171) и (172) дают простой способ определения передаточной функции ошибки:

$$\frac{E(s)}{G(s)} = \Phi_\varepsilon(s) = \frac{1}{1+KW(s)} \qquad (173)$$



Фиг. 25. Приближенный способ определения передаточной функции ошибки $\Phi(s)$ по логарифмической амплитудной характеристике $Lm(KW)$:

$$Lm|\Phi_\varepsilon(j\omega)| = -Lm|K\hat{W}(j\omega)|.$$

по виду логарифмических амплитудных характеристик $Lm|KW|$. Действительно, полагая, что при $\omega < \omega_c$ имеет место равенство (171), а при $\omega > \omega_c$ равенство (172), мы получим приближенный вид логарифмической амплитудной характеристики $Lm|\Phi_\varepsilon|$, соответствующей выражению (173), положив, что

$$Lm\left|\frac{G(j\omega)}{E(j\omega)}\right| \approx Lm|KW(j\omega)| \qquad (174)$$

при $\omega < \omega_c$ и

$$Lm\left|\frac{G(j\omega)}{E(j\omega)}\right| \approx 0 \qquad (175)$$

при $\omega > \omega_c$ (фиг. 25).

На основании сказанного ясно: 1) что все сопрягающие частоты логарифмических амплитудных характеристик $Lm(KW)$ при $\omega<\omega_c$ одновременно являются сопрягающими частотами и для логарифмических амплитудных характеристик $Lm\left|\frac{G}{E}\right|$ при $\omega<\omega_c$; 2) что все сопрягающие частоты для логарифмических амплитудных характеристик $Lm|KW|$ при $\omega>\omega_c$ заменяются в случае логарифмических амплитудных характеристик $Lm\left|\frac{G}{E}\right|$ одной единственной сопрягающей частотой при $\omega=\omega_c$.

Таким образом, мы приходим к следующему простому правилу: *для того чтобы получить приближенную формулу для функции* $\frac{G(s)}{E(s)}=\frac{1}{\Phi_\varepsilon(s)}$, *необходимо приравнять ее выражению для передаточной функции разомкнутой системы $KW(s)$, оставив в нем все множители в числителе и знаменателе, соответствующие сопрягающим частотам, меньшим частоты среза ω_c, и заменив все остальные множители, входящие в $KW(s)$, одним единственным множителем* $\left(1+\frac{s}{\omega_c}\right)$ *в числителе.*

Преобразованную указанным способом функцию $KW(s)$ обозначим через $K\widehat{W}(s)$.

Получив этим способом приближенное выражение для $\Phi_\varepsilon(s)$, которое мы обозначим через $\widehat{\Phi}_\varepsilon(s)$, изменение ошибки $\varepsilon(t)$ во времени можно представить при помощи выражения

$$\widehat{\varepsilon}(t)\approx\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}\widehat{\Phi}_\varepsilon^*(s)\,G(s)\,e^{st}\,ds. \tag{176}$$

Для некоторого уточнения результатов найдем отношение точного значения модуля функции $\Phi_\varepsilon(s)$ к приближенному его значению $\widehat{\Phi}_\varepsilon^*(s)$ при $s=j\omega_c$.

Имеем

$$\Phi_\varepsilon(j\omega_c)=\frac{1}{1+KW(j\omega_c)} \tag{177}$$

и

$$\widehat{\Phi}_\varepsilon^*(j\omega_c)=\frac{1}{K\widehat{W}^*(j\omega_c)}. \tag{178}$$

Итак,

$$\rho=\left|\frac{\Phi_\varepsilon(j\omega_c)}{\widehat{\Phi}_\varepsilon^*(j\omega_c)}\right|=\left|\frac{K\widehat{W}^*(j\omega_c)}{1+KW(j\omega_c)}\right| \tag{179}$$

и

$$\left|\Phi_\varepsilon(j\omega_c)\right|=\rho\left|\widehat{\Phi}_\varepsilon^*(j\omega_c)\right|. \tag{180}$$

В первом приближении обычно можно предположить, что соотношение (179) между действительным значением модуля $|\Phi_\varepsilon(j\omega)|$ и приближенным его значеннем $\left|\widehat{\Phi}_\varepsilon^*(j\omega)\right|$ имеет вид формулы (179) не только

при $\omega = \omega_c$, но и на всем интервале частот между сопрягающими частотами (ω_2, ω_3), ближайшими к частоте среза ω_c (см. фиг. 25).

Эффект поправочного коэфициента ρ, определяемого формулой (179), на изменение ошибки $\varepsilon(t)$ во времени можно учесть, умножив на него ординаты кривой $\widehat{\varepsilon}(t)$, полученной при помощи формулы (176) в интервале значений времени $\frac{1}{\omega_3} < t < \frac{1}{\omega_2}$.

Итак, изложенный способ вычисления ошибки $\varepsilon(t)$ во времени состоит из следующих шагов:

1) определяем, пользуясь сформулированным выше правилом, функцию $\widehat{KW}^*(s)$, исходя из заданной логарифмической амплитудной характеристики $Lm|KW|$, и полагаем

$$\widehat{\Phi}_\varepsilon(s) = \frac{1}{\widehat{KW}^*(s)};$$

2) вычисляем ошибку $\widehat{\varepsilon}^*(t)$, пользуясь формулой (176);

3) вычисляем поправочный коэфициент ρ, пользуясь формулой (179);

4) умножаем ординаты кривой $\widehat{\varepsilon}^*(t)$ на ρ при значениях времени $t: \frac{1}{\omega_3} < t < \frac{1}{\omega_2}$ и плавно соединяем первоначальную и получившуюся кривые в окрестности значений t, равных $\frac{1}{\omega_2}$ и $\frac{1}{\omega_3}$.

Весьма важно подчеркнуть, что изложенный способ применим также к вычислению отклонения регулируемой величины $x(t)$, имеющей преобразование Лапласа $X(s)$ вида (см. главу VI)

$$X(s) = \frac{V(s)}{1 + KW(s)} F(s) = \Phi_\varepsilon(s) V(s) F(s), \tag{181}$$

а также к вычислению свободных колебаний при ненулевых начальных условиях.

Согласно формуле (181)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \Phi_\varepsilon(s) V(s) F(s) e^{st} ds, \tag{182}$$

причем передаточная функция ошибки $\Phi_\varepsilon(s)$ может быть найдена по логарифмической амплитудной функции $Lm|KW|$ так, как это было изложено выше.

Пример. Предположим, что передаточная функция разомкнутой системы $KW(s)$ определяется формулой

$$KW(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{(\tau_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)(T_2 s + 1)} \tag{183}$$

и что логарифмическая амплитудная характеристика, соответствующая формуле (183), имеет вид, графически изображенный на фиг. 26, *а*.

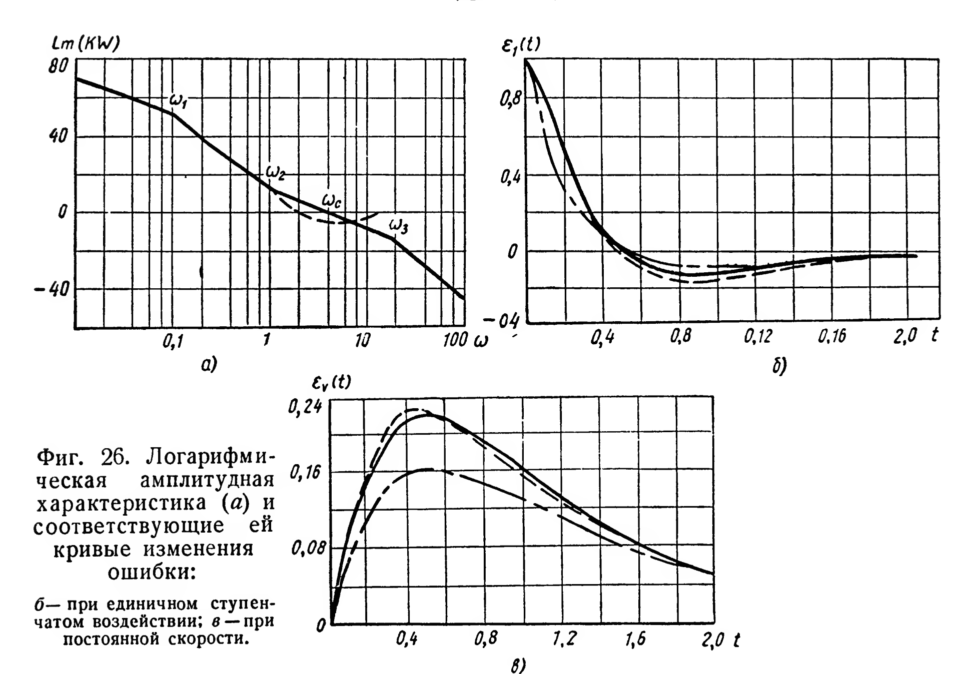
Требуется найти выражение для $\varepsilon(t)$ при единичном ступенчатом воздействии и при воздействии в виде постоянной скорости.

Согласно изложенному выше правилу для образования функции $K\widehat{W}(s)$ нужно опустить два последних сомножителя в знаменателе и ввести сомножитель $(\tau_c s + 1)$ в числитель. Итак,

$$K\widehat{W}^*(s) = \frac{K(\tau_2 s + 1)(\tau_c s + 1)}{s(T_1 s + 1)} \tag{184}$$

и

$$\Phi_\varepsilon^*(s) = \frac{s(T_1 s + 1)}{K(\tau_2 s + 1)(\tau_c s + 1)}. \tag{185}$$



Фиг. 26. Логарифмическая амплитудная характеристика (*а*) и соответствующие ей кривые изменения ошибки:

б — при единичном ступенчатом воздействии; *в* — при постоянной скорости.

Следовательно, преобразование Лапласа $\widehat{E}(s)$ для первого приближения $\widehat{\varepsilon}(t)$ функции $\varepsilon(t)$ при единичном ступенчатом воздействии имеет вид

$$\widehat{E}(s) = \frac{(T_1 s + 1)}{K(\tau_2 s + 1)(\tau_c s + 1)}, \tag{186}$$

или

$$\widehat{E}^*(s) = \frac{s + \omega_1}{(s + \omega_2)(s + \omega_c)}, \tag{187}$$

так как (см. фиг. 24)

$$K = \frac{T_1}{\tau_2 \tau_c} = \frac{\omega_2 \omega_c}{\omega_1}.$$

Итак, первое приближение для $\varepsilon(t)$ при единичном ступенчатом воздействии имеет вид

$$\widehat{\varepsilon}_1^*(t) = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_c - \omega_2} e^{-\omega_2 t} - \frac{\omega_1 - \omega_c}{\omega_c - \omega_2} e^{-\omega_c t}. \tag{188}$$

При воздействии в виде единичной постоянной скорости

$$\widehat{E}^*(s) = \frac{s+\omega_1}{s(s+\omega_2)(s+\omega_c)}, \tag{189}$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_v(t) = \frac{\omega_1}{\omega_2\omega_c} + \frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_2(\omega_2-\omega_c)}e^{-\omega_2 t} + \frac{\omega_1-\omega_c}{\omega_c(\omega_c-\omega_2)}e^{-\omega_c t}. \tag{190}$$

Найдем теперь поправочный коэфициент ρ, пользуясь формулой (179). Подставляя равенства (183) и (184) в (179), получим

$$\rho = \left| \frac{\dfrac{(s+\omega_2)(s+\omega_c)}{s(s+\omega_1)}}{\dfrac{s(s+\omega_1)(s+\omega_3)+\omega_c\omega_3(s+\omega_2)}{s(s+\omega_1)(s+\omega_3)}} \right|_{s=j\omega_c}. \tag{191}$$

Для уточнения результатов необходимо умножить значения функций $\widehat{\varepsilon}^*(t)$, определяемых формулами (188) и (190), на ρ в интервале $\frac{1}{\omega_3} < t < \frac{1}{\omega_2}$.

На фиг. 26, *б* изображены кривые $\varepsilon_1(t)$, а на фиг. 26, *в* — кривые $\varepsilon_v(t)$ для случая, когда (фиг. 26, *а*)

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 10; \quad \frac{\omega_3}{\omega_2} = 16; \quad \frac{\omega_c}{\omega_2} = 4 \text{ и } \omega_2 = 1. \tag{192}$$

Пунктирные кривые соответствуют точному решению, кривые точка—пунктир дают первое приближение согласно формулам (188) и (190), а сплошные кривые — приближенное решение с учетом поправочного коэфициента ρ.

Заметим, что рассмотренный метод дает хорошие результаты при значениях отношения $\frac{\omega_3}{\omega_2}$ порядка 10 и выше. Это отношение пропорционально длине прямолинейного отрезка логарифмической амплитудной характеристики в окрестности частоты среза ω_c. Указанное условие обычно удовлетворяется для достаточно высококачественных систем.

При меньших значениях $\frac{\omega_3}{\omega_2}$ влияние комплексных корней характеристического уравнения замкнутой системы становится настолько значительным, что оно не может быть с достаточной точностью учтено при помощи чисто вещественного корня ω_c так, как это делается согласно изложенному методу.

21. СВЯЗЬ МЕЖДУ СОПРЯГАЮЩИМИ ЧАСТОТАМИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ АМПЛИТУДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ И КОЭФИЦИЕНТАМИ ОШИБОК

В главе VI были получены формулы, позволяющие определить коэфициенты ошибок по заданным коэфициентам α_i, β_i, входящим в выражение для передаточной функции разомкнутой системы

$$KW\langle s\rangle = \frac{K}{s^\nu}\cdot\frac{1+\beta_1 s+\beta_2 s^2+\cdots+\beta_m s^m}{1+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2+\cdots+\alpha_n s^n}. \tag{193}$$

Так как коэфициенты α_i, β_i являются функциями от постоянных времени, а постоянные времени являются величинами, обратными сопрягающим частотам, то очевидно, что коэфициенты ошибок могут быть выражены непосредственно через сопрягающие частоты логарифмической амплитудной характеристики.

Поясним это на простом примере.

Рассмотрим систему с передаточной функцией вида

$$KW(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{(\tau_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}. \tag{194}$$

Сравнивая равенство (194) со (193), получим

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \tau_2 = \frac{1}{\omega_2}; \\ \alpha_1 &= T_1 + T_3 + T_4 = \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_3} + \frac{1}{\omega_4}; \\ \alpha_2 &= T_1 T_3 + T_1 T_4 + T_3 T_4 = \frac{\omega_1 + \omega_3 + \omega_4}{\omega_1 \omega_3 \omega_4}; \\ \alpha_3 &= T_1 T_3 T_4 = \frac{1}{\omega_1 \omega_3 \omega_4}. \end{aligned}\right\} \tag{195}$$

Подставляя равенство (195) в формулы для коэфициентов ошибок (см. главу VI)

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{K}; \\ C_2 &= 2\frac{\alpha_1 - \beta_1}{K} - \frac{2}{K^2}; \\ C_3 &= \frac{6}{K^3} + \frac{12(\beta_1 - \alpha_1)}{K^2} + \frac{6\left(\beta_1^2 - \alpha_1\beta_1 + \alpha_2 - \beta_2\right)}{K}, \end{aligned}\right\} \tag{196}$$

получим

$$C_2 = 2\frac{\omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_4 + \omega_2\omega_3\omega_4 - \omega_1\omega_3\omega_4}{K\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4} - \frac{2}{K^2}; \tag{197}$$

$$C_3 = \frac{6}{K^3} + \frac{12}{K^2} \cdot \frac{\omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_4 + \omega_2\omega_3\omega_4 - \omega_1\omega_3\omega_4}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4} +$$

$$+ \frac{6}{K} \cdot \frac{\omega_1\omega_3\omega_4 + \omega_2^2(\omega_1 + \omega_3 + \omega_4) - \omega_2\omega_3\omega_4 - \omega_1\omega_2\omega_4}{\omega_1\omega_2^2\omega_3\omega_4}. \tag{198}$$

Если предположить, что в равенствах (197) и (198) можно пренебречь T_3 и T_4 по сравнению с T_1, $T_3 T_4$ по сравнению с $T_1 T_3$ и $T_1 T_4$ и что добротность K настолько велика, что можно пренебречь в выражении для C_2 величиной $\frac{1}{K^2}$, а в выражении для C_3 — величиной $\frac{2}{K^2}$, то мы получим

$$C_2 \approx 2\frac{\omega_2 - \omega_1}{K^2\omega_1\omega_2}; \tag{199}$$

$$C_3 \approx \frac{12(\omega_2 - \omega_1)}{K^2\omega_1\omega_2} + \frac{6\left(\omega_1\omega_3\omega_4 - \omega_2\omega_3\omega_4 + \omega_2^2\omega_4 + \omega_2^2\omega_3\right)}{\omega_1\omega_2^2\omega_3\omega_4}. \tag{200}$$

Формулы (199) и (200) устанавливают сравнительно простую связь между коэфициентами ошибки и сопрягающими частотами логарифмической амплитудной характеристики в случае передаточной функции вида (194).

Очевидно, что аналогичным способом, пользуясь общими формулами, приведенными в главе VI, можно выразить коэфициенты ошибки через сопрягающие частоты логарифмической амплитудной характеристики в случае любой передаточной функции вида (193).

ЛИТЕРАТУРА

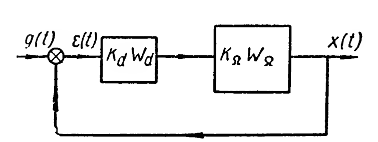
1. Михайлов А. В., Метод гармонического анализа в теории регулирования, „Автоматика и телемеханика" № 3, 1938.
2. Солодовников В. В., Применение операторного метода к исследованию процесса регулирования скорости гидротурбины, „Автоматика и телемеханика" № 1, 1941.
3. Солодовников В. В., Об одном приближенном методе исследования динамики следящих систем и систем регулирования, „Известия АН СССР, ОТН" № 12, 1945.
4. Солодовников В. В., Метод частотных характеристик в теории регулирования, „Автоматика и телемеханика" № 2, 1947.
5. Солодовников В. В., Частотный метод анализа динамики следящих и регулируемых систем, дисс., Институт автоматики и телемеханики АН СССР, М. 1948.
6. Солодовников В. В., Анализ качества следящих систем по их амплитудно-фазовым характеристикам, „Известия АН СССР, ОТН" № 4, 1949.
7. Солодовников В. В., Критерий отсутствия перерегулирований и критерий монотонности, Доклады АН СССР, т. LXII, № 5. 1948, стр. 599—602.
8. Солодовников В. В., О применении трапецоидальных частотных характеристик к анализу качества систем автоматического регулирования, „Автоматика и телемеханика" № 5, 1949.
9. Harris H., Kirby M., Von Arx E., Servomechanism Transient Performance from decibel-log frequency Plot, „Trans. AIEE", v. 70, 1951.
10. Джемс Х., Никольс Н., Филлипс Р., Теория следящих систем, ИЛ, М. 1951.
11. Мееров М. В., „Известия АН СССР, ОТН" № 12, 1950.
12. Воронов А. А., К приближенному построению кривых переходного процесса по вещественной частотной характеристике, „Автоматика и телемеханика" № 6, 1952.

ГЛАВА XVI

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ КОРРЕКЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

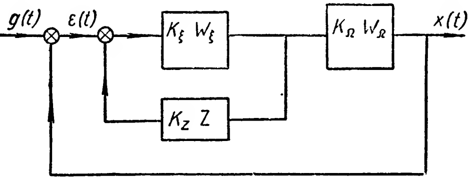
1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ КОРРЕКТИРУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА

Всякая система автоматического регулирования, как это мы видели в главе I, состоит из объекта регулирования и одного или нескольких регуляторов, взаимодействующих как с объектом регулирования, так и друг с другом.



Фиг. 27. Простейшая структурная схема системы автоматического регулирования с последовательным корректирующим устройством:

$K_\Omega W_\Omega$ — объект регулирования; $K_d W_d$ — последовательное корректирующее устройство.



Фиг. 28. Простейшая структурная схема системы автоматического регулирования с параллельным корректирующим устройством:

$K_\Omega W_\Omega$ — объект регулирования; $K_\xi W_\xi$ — усилительные элементы; $K_z Z$ — параллельное корректирующее устройство.

Задача проектирования систем автоматического регулирования в наиболее общей постановке заключается в таком выборе схемы взаимодействия, способа технического осуществления, параметров и характеристик регуляторов и объекта регулирования, при котором требуемые динамические и эксплуатационные свойства всей системы в целом обеспечиваются при применении возможно более простых технических средств.

Большое значение для придания системе автоматического регулирования требуемых динамических свойств имеют так называемые корректирующие устройства, являющиеся элементами с легко изменяемыми параметрами и характеристиками.

Корректирующие устройства, входящие в состав замкнутых контуров направленного действия, из которых состоит система автоматического регулирования, можно подразделить на два основных типа: *последовательные и параллельные.*

Последовательные корректирующие устройства служат обычно для преобразования сигнала ошибки и включаются последовательно с объектом регулирования (фиг. 27).

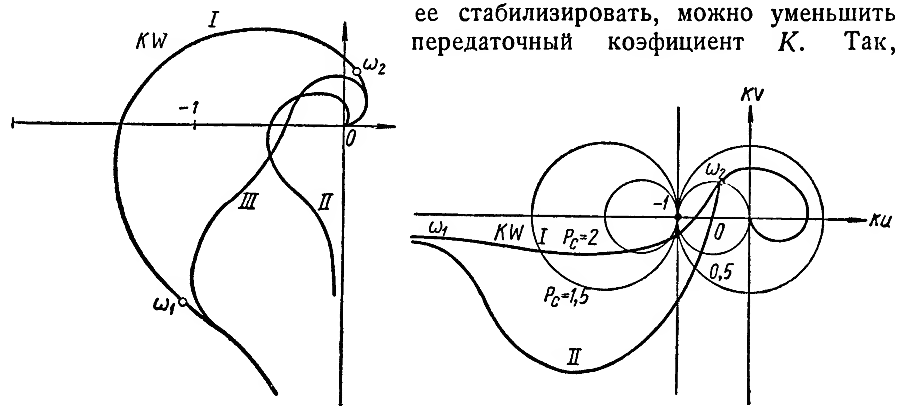
Параллельные корректирующие устройства (местные обратные связи) связывают выход одного из последующих звеньев системы со входом одного из предыдущих (фиг. 28).

2. ПРИМЕРЫ КОРРЕКЦИИ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Смысл введения в систему автоматического регулирования корректирующих устройств можно пояснить, если рассмотреть, каким образом они позволяют изменить (скорректировать) передаточную функцию или частотные характеристики системы.

Поясним это на примерах.

Предположим, что система автоматического регулирования имеет амплитудно-фазовую характеристику $KW(j\omega)$ вида, изображенного на фиг. 29 (кривая *I*). Как мы видим, система неустойчива. Для того чтобы ее стабилизировать, можно уменьшить передаточный коэфициент K. Так,



Фиг. 29. Коррекция амплитудно-фазовой характеристики неустойчивой системы:

I — до коррекции; *II* — после коррекции.

Фиг. 30. Коррекция амплитудно-фазовой характеристики системы, не обладающей требуемым запасом устойчивости:

I — до коррекции; *II* — после коррекции.

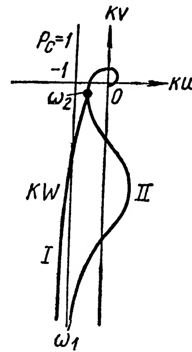
например, если уменьшить K в 3 раза, то амплитудно-фазовая характеристика примет вид кривой *II* на фиг. 29, и система будет обладать значительным запасом устойчивости.

Предположим, однако, что величина K фиксирована, исходя, например, из требования, чтобы ошибка системы при управляющем воздействии, изменяющемся с постоянной скоростью, равной единице, равнялась $\frac{1}{K}$. Тогда коррекция системы при помощи изменения формы амплитудно-фазовой характеристики, сводящегося к простому изменению ее масштаба, уже не подходит, и необходимо, оставляя форму амплитудно-фазовой характеристики неизменной при низких частотах, скорректировать ее форму при средних частотах, скажем, в интервале (ω_1, ω_2) так, как это изображено на фиг. 29 (кривая *III*).

Рассмотрим другой пример.

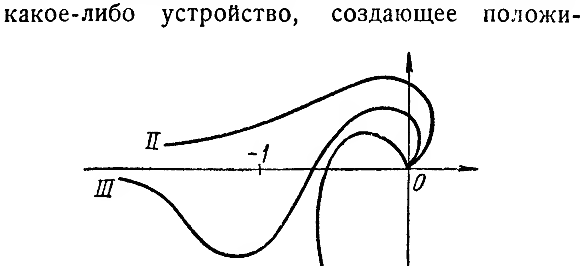
27 Коллектив авторов 1309

Амплитудно-фазовая характеристика на фиг. 30 (кривая *I*) соответствует устойчивой системе. Однако система не имеет достаточного запаса устойчивости и пересекает окружности вещественной, круговой диаграммы с большими по абсолютной величине значениями индексов P_c. Как мы знаем, это означает, что воздействия, приложенные к системе, будут вызывать в ней слабо затухающие колебания. Заметим, что в рассматриваемом случае уменьшение передаточного коэфициента K не может существенно уменьшить склонность системы к колебаниям. Но если скорректировать форму амплитудно-фазовой характеристики так, как это показано на фиг. 30 (кривая *II*), введя какое-либо устройство, создающее положи-



Фиг. 31. Коррекция амплитудно-фазовой характеристики системы с замедленным переходным процессом:

I — до коррекции;
II — после коррекции.



Фиг. 32. Коррекция амплитудно-фазовой характеристики, приводящая к повышению порядка астатизма.

тельный сдвиг фазы в интервале частот (ω_1, ω_2), то можно будет обеспечить не только достаточный запас устойчивости, но и требуемые качественные показатели.

На фиг. 31 изображена амплитудно-фазовая характеристика, расположенная в некотором интервале частот справа от мнимой оси на плоскости KW.

Системы с такого рода амплитудно-фазовой характеристикой, вообще говоря, плохо воспроизводят управляющие воздействия и имеют значительное время переходного процесса. Для улучшения динамических свойств системы необходимо ввести устройство, которое скорректировало бы форму амплитудно-фазовой характеристики в интервале частот (ω_1, ω_2), например, так, как это показано на фиг. 29, создав дополнительное отставание по фазе.

Наконец, рассмотрим систему, имеющую амплитудно-фазовую характеристику, изображенную на фиг. 32 (кривая *I*). Предположим, что помимо обычных условий качества к системе предъявляется требование отсутствия установившейся ошибки при подаче на ее вход постоянной скорости. Для того чтобы достигнуть удовлетворения этого требования, необходимо сделать так, чтобы амплитудно-фазовая характеристика уходила в бесконечность при $\omega = 0$ не вдоль отрицательного направления мнимой оси, что имеет место в случае кривой *I* на фиг. 32, а вдоль отрицательного направления вещественной оси (кривая *II* на

фиг. 32). Этого можно достигнуть введением в систему интегрирующего звена. Однако после введения такого звена система, как мы видим, делается неустойчивой. Поэтому необходимо скорректировать ее форму, например, так, как это представлено на фиг. 32 в виде кривой *III*.

Приведенные примеры наглядно иллюстрируют те простые соображения, которыми следует руководствоваться, чтобы качественно определить, каким образом следует скорректировать амплитудно-фазовую характеристику для обеспечения не только условия устойчивости, но и остальных требований, предъявляемых к системе.

Остановимся теперь несколько подробнее на способах коррекции динамических свойств систем автоматического регулирования.

3. СПОСОБ КОРРЕКЦИИ, ОСНОВАННЫЙ НА ПРЕОБРАЗОВАНИИ СИГНАЛА ОШИБКИ

Способ коррекции, основанный на преобразовании сигнала ошибки в следящих системах или отклонения регулируемой величины в системах стабилизации, как это уже указывалось, заключается в том, что сигнал ошибки преобразуется при помощи тех или иных устройств, включаемых последовательно с объектом, в соответствии с некоторым функциональным соотношением, часто называется законом регулирования.

В общем случае это функциональное преобразование можно представить в виде

$$v(t) = N(p)\,\varepsilon(t) = \sum_{i=-l}^{k} n_i p^i \varepsilon(t), \tag{201}$$

где, как обычно,

$$p^{-l}\varepsilon(t) = \underbrace{\int_0^t dt \cdots \int_0^t}_{l} \varepsilon(t)\,dt$$

и

$$p^k \varepsilon(t) = \frac{d^k \varepsilon(t)}{dt^k}.$$

Так, например, при $l = k = 2$ выражение (201) сводится к виду

$$v(t) = n_{-2}\int_0^t dt \int_0^t \varepsilon(t)\,dt + n_{-1}\int_0^t \varepsilon(t)\,dt + n_0\varepsilon(t) + n_1\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + n_2\frac{d^2\varepsilon(t)}{dt^2}. \tag{202}$$

Таким образом, этот метод сводится к введению помимо сигнала $\varepsilon(t)$, пропорционального ошибке, сигналов, пропорциональных последующим производным и интегралам по времени от ошибки.

Введение интегралов в закон регулирования приводит к появлению кратного полюса в начале координат у передаточной функции разомкнутой системы. Но мы видели (см. главу VI), что если передаточная

функция разомкнутой системы имеет при $s=0$ полюс кратности ν, то установившаяся ошибка не зависит от $(\nu-1)$ первых производных воздействия.

Это означает, что когда воздействие представляет достаточно гладкую функцию, то введением некоторого количества интегралов в закон регулирования (если, конечно, система остается при этом устойчивой) можно добиться, чтобы ошибка $\varepsilon(t)$ по абсолютному значению была весьма малой.

Введение в закон регулирования производных позволяет изменять распределение нулей и полюсов передаточной функции системы и, таким образом, обеспечивать ее устойчивость, а также требуемое поведение в переходном процессе.

Преобразование Лапласа для уравнения (202) при нулевых начальных условиях имеет вид

$$V(s)=\frac{n_{-2}+n_{-1}s+n_0s^2+n_1s^3+n_2s^4}{s^2}E(s). \qquad (203)$$

Выражение (203) показывает, что передаточная функция $N(s)$ корректирующего устройства, осуществляющего функциональное преобразование или закон регулирования уравнения (202), должна иметь следующий вид:

$$N(s)=\frac{n_{-2}+n_{-1}s+n_0s^2+n_1s^3+n_2s^4}{s^2}. \qquad (204)$$

Из сказанного ясно, что если бы практическое осуществление функциональных преобразований вида (201) было несложным, то проблема построения устойчивых и высококачественных систем автоматического регулирования не представляла бы таких затруднений, которые имеются в действительности.

Это можно пояснить также следующим образом. Передаточная функция системы на фиг. 27 в разомкнутом состоянии имеет вид

$$KW(s)=K_dW_d(s)K_\Omega W_\Omega(s), \qquad (205)$$

где через $K_\Omega W_\Omega(s)$ обозначена передаточная функция объекта, а через $K_dW_d(s)$ — передаточная функция последовательного корректирующего устройства.

Если бы можно было осуществить любой закон регулирования вида (201), то передаточную функцию $W_d(s)$ всегда возможно было бы подобрать так, чтобы она была обратна передаточной функции объекта, т. е.

$$W_d(s)=\frac{1}{W_\Omega(s)}. \qquad (206)$$

Но при удовлетворении соотношения (206) передаточная функция $KW(s)$ свелась бы к постоянной величине K, и при достаточно больших значениях K можно было бы обеспечить малость ошибки при любых управляющих воздействиях (по крайней мере в линейном приближении), так как в данном случае мы имели бы

$$E(s)=\frac{G(s)}{1+K}. \qquad (207)$$

Однако на самом деле для введения каждого нового члена в закон регулирования необходим специальный, обычно сложный, прибор, создание которого представляет тем большие трудности, чем больше порядок производной или кратность интеграла. Выражение вида (202) в настоящее время является одним из наиболее сложных законов регулирования, встречающихся на практике. Обычно же в законе регулирования содержится один или два и реже три члена.

Из сказанного ясно, насколько важно с практической точки зрения уметь подбирать параметры n_i закона регулирования так, чтобы при наименьшем их числе достигнуть наилучших результатов. Чем меньше это число, тем проще, дешевле и надежнее осуществление системы автоматического регулирования. Поэтому следует еще раз подчеркнуть, что удовлетворительным может считаться лишь тот метод синтеза системы автоматического регулирования, который указывает, каким образом можно добиться требуемой корректировки динамических свойств системы при наименьшем числе членов в законе регулирования.

При введении производных в закон регулирования следует иметь в виду ряд связанных с этим практических трудностей помимо трудности создания необходимых специальных сложных приборов.

Так, необходимо учитывать, что вследствие ограниченной мощности источников энергии, содержащихся в цепи регулирования, всегда можно указать такую максимальную скорость изменения, когда эффективность регулирования по производным теряется. Возьмем, например, следящую систему с исполнительным двигателем постоянного тока. Ясно, что никаким регулированием по производным нельзя достигнуть того, чтобы при внезапном изменении положения входной (задающей) оси выходная (следящая) ось мгновенно перешла в новое положение. Этого не может быть хотя бы вследствие ограниченности максимального ускорения и скорости нагруженного двигателя, имеющего ограниченную мощность.

Наличие производных в законе регулирования при больших скоростях изменения воздействия может также привести к нежелательным механическим или электрическим перенапряжениям в элементах цепи регулирования.

Большие затруднения для введения производных в закон регулирования возникают в тех случаях, когда на полезный сигнал, подлежащий диференцированию, накладываются шумы или помехи. Вследствие большой скорости их изменения по сравнению с полезным сигналом сигнал на выходе диференцирующих устройств может оказаться зависящим в основном от помех и создать насыщение или, как говорят, „забить“ канал усиления сигнала.

4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПАССИВНЫЕ КОРРЕКТИРУЮЩИЕ КОНТУРЫ

Не останавливаясь здесь на описании различных устройств, применяемых в системах автоматического регулирования для диференцирования и интегрирования сигнала ошибки или отклонения регулируемой величины, укажем лишь на способ преобразования сигнала ошибки при помощи пассивных электрических контуров, получивший благодаря простоте своего технического осуществления широкое распространение.

Пассивный диференцирующий контур. Если бы корректирующее устройство давало на своем выходе помимо сигнала, пропорционального ошибке, еще и сигнал, пропорциональный точной производной от ошибки, его передаточная функция должна была бы иметь вид

$$N(s) = n_0 + n_1 s = n_0(1 + \tau s), \tag{208}$$

где

$$\tau = \frac{n_1}{n_0}.$$

Такого рода устройство, называемое диференцирующим звеном первого порядка, имеет амплитудно-фазовую характеристику (см. главу VII)

$$N(j\omega) = n_0 \sqrt{1 + \tau^2\omega^2} e^{j \operatorname{arctg} \tau\omega}. \tag{209}$$

Очевидно, никакое пассивное устройство (т. е. устройство, не содержащее источников энергии) не может иметь амплитудно-фазовую характеристику вида (209), так как при беспредельном увеличении частоты гармонического воздействия конечной амплитуды на входе устройства с амплитудно-фазовой характеристикой (209) амплитуда сигнала на его выходе должна неограниченно возрастать, что невозможно. При помощи пассивного контура можно получить лишь такую передаточную функцию, в которой порядок числителя не превышает порядка знаменателя. В рассматриваемом случае такого рода передаточная функция будет иметь вид

$$K_d W_d(s) = K_d \frac{1 + \tau s}{1 + Ts}, \tag{210}$$

а выражением для соответствующей амплитудно-фазовой характеристики будет

$$K_d W_d(j\omega) = K_d \sqrt{\frac{1 + \tau^2\omega^2}{1 + T^2\omega^2}}\, e^{j(\operatorname{arctg} \tau\omega - \operatorname{arctg} T\omega)}. \tag{211}$$

Наличие в знаменателе выражения (210) при $s = j\omega$ члена, не зависящего от частоты, ограничивает амплитуду сигнала при нулевой частоте, а наличие в знаменателе члена $Tj\omega$, зависящего от частоты, ограничивает амплитуду сигнала при бесконечной частоте.

При $\tau > T$ и $\omega > 0$ амплитудно-фазовая характеристика (211) представляет полуокружность *II*, расположенную в первом квадранте фиг. 33.

Таким образом, мы видим, что как в устройстве с амплитудно-фазовой характеристикой вида (209), так и в устройстве с амплитудно-фазовой характеристикой вида (211) сигнал на выходе опережает по фазе сигнал на входе. Однако, в то время как в случае равенства (209) опережение по фазе стремится к 90°, а амплитуда сигнала на выходе неограниченно возрастает при возрастании частоты, в случае уравнения (211) опережение по фазе ни при каких условиях не может превосходить некоторого значения, меньшего 90° (см. фиг. 33), а амплитуда сигнала на выходе непрерывно убывает. Очевидно, что устройство с амплитудно-фазовой характеристикой (211) позволяет сравнительно точно диференцировать лишь те низкие частоты, которым соответствуют точки полуокружности *II*, мало уклоняющиеся от прямой *I* на фиг. 33, *а*.

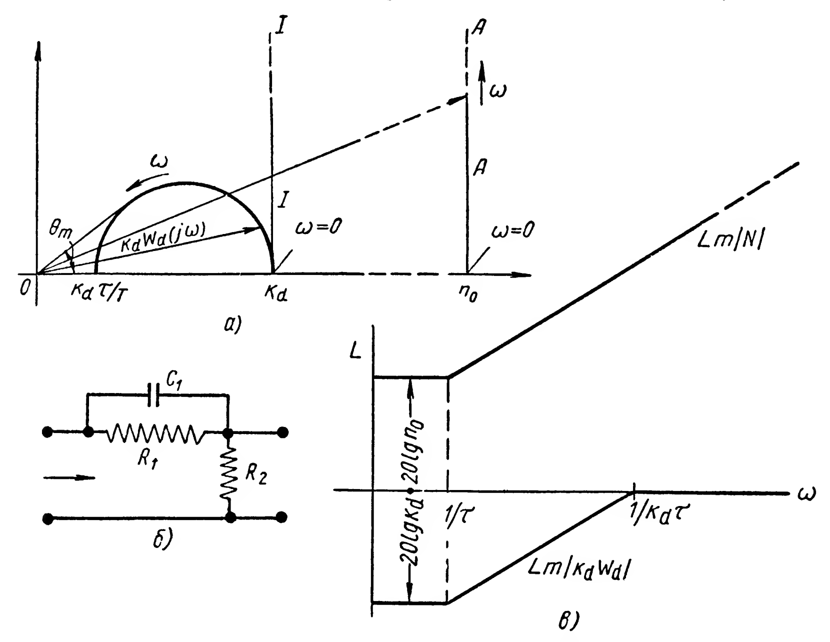
На фиг. 33, *б* изображен пассивный электрический контур, имеющий передаточную функцию вида (210), причем в данном случае

$$K_d W_d(j\omega) = K_d \frac{1 + \tau j\omega}{1 + K_d \tau j\omega}. \tag{212}$$

$$\tau = R_1 C_1;$$

$$K_d = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Из уравнения (212) ясно, что чем меньше K_d, тем в более широком интервале частот можно пренебречь в знаменателе членом, зависящим



Фиг. 33. Активный и пассивный диференцирующие контуры.

от частоты, и, следовательно, тем с большей точностью пассивный контур производит диференцирование сигнала. Однако чем меньше K_d, тем сильнее ослабление сигнала, создаваемое пассивным электрическим контуром при низких частотах. Очевидно, что это ослабление сигнала должно быть скомпенсировано соответствующим усилением сигнала в какой-либо другой части схемы, если общий коэфициент усиления имеет заданное значение.

Заметим, что при наличии помех во входном сигнале пассивный контур при правильном выборе параметров может обеспечить лучший эффект, чем схема точного диференцирования, стремящаяся усилить влияние составляющих высокой частоты, содержащихся в сигнале.

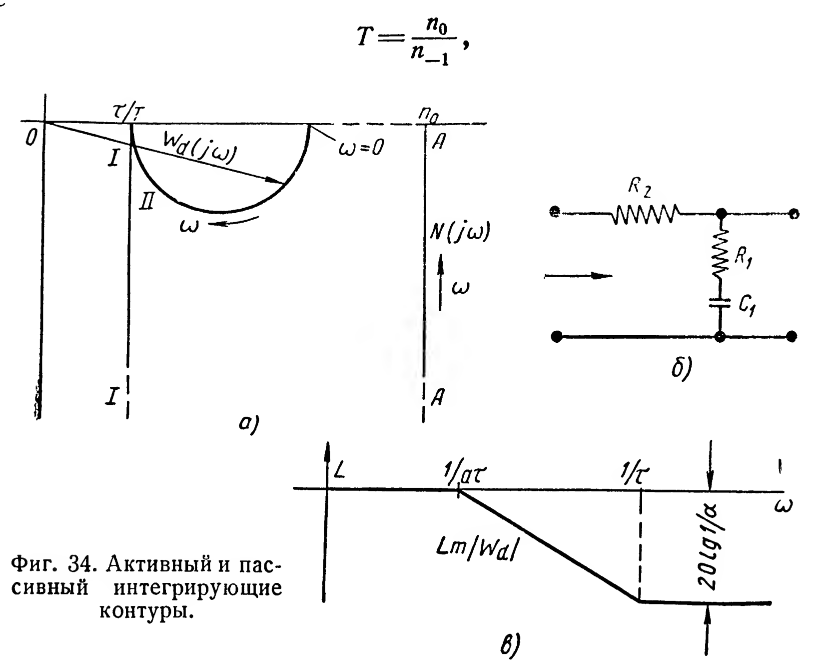
На фиг. 33, *в* приведены логарифмические амплитудные характеристики, приближенно представленные в виде сопрягающихся прямых, соответствующие передаточным функциям (208) и (210).

Пассивный интегрирующий контур. Если бы корректирующее устройство давало на своем выходе помимо сигнала, пропорционального ошибке, еще и сигнал, пропорциональный точному интегралу от ошибки, его передаточная функция должна была бы иметь вид

$$N(s) = n_0 + \frac{n_{-1}}{s} = n_0\left(1 + \frac{1}{Ts}\right), \tag{213}$$

где

$$T = \frac{n_0}{n_{-1}},$$



Фиг. 34. Активный и пассивный интегрирующие контуры.

и, следовательно, в этом случае выражение для амплитудно-фазовой характеристики

$$N(j\omega) = n_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{T\omega}\right)^2}\, e^{j \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{T\omega}\right)}. \tag{214}$$

Амплитудно-фазовая характеристика (214) при $\omega > 0$ представляет прямую AA, расположенную в четвертом квадранте (фиг. 34, *а*).

Передаточная функция (213) может быть осуществлена лишь при помощи устройства, содержащего источник энергии, так как ей соответствует бесконечная амплитуда при нулевой частоте. В случае пассивного контура знаменатель передаточной функции должен иметь член, не зависящий от частоты, т. е.

$$K_d W_d(s) = K_d \frac{1 + \tau s}{1 + Ts}, \tag{215}$$

и выражение для амплитудно-фазовой характеристики опять сводится к виду (211).

При $\tau > 7$ и $\omega > 0$ амплитудно-фазовая характеристика (211) представляет полуокружность *II*, расположенную в четвертом квадранте (фиг. 34, *а*).

Как в активном, так и в пассивном интегрирующем устройствах сигнал на выходе отстает по фазе относительно сигнала на входе. Однако в первом случае отставание по фазе при нулевой частоте равно 90°, а во втором — нулю. Очевидно, что устройство с передаточной функцией вида (215) позволяет точно интегрировать лишь те частоты, которым соответствуют точки полуокружности *II*, мало уклоняющиеся от прямой *I* на фиг. 34, *а*.

На фиг. 34, *б* изображен пассивный электрический контур, имеющий передаточную функцию (215), причем в данном случае

$$W_d(j\omega) = \frac{1 + \tau j\omega}{1 + \alpha\tau j\omega}, \qquad (216)$$

где

$$\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_1}; \quad \tau = R_1 C_1.$$

Из уравнения (216) ясно, что чем больше α, тем в более широком интервале частот можно пренебречь в знаменателе единицей по сравнению с $(\alpha\tau\omega)^2$ и, следовательно, с тем большей точностью пассивный контур производит интегрирование сигнала. Однако чем больше α, тем сильнее ослабление сигнала при высоких частотах, так как

$$\lim_{\omega \to \infty} \left| W_d(j\omega) \right| = \frac{1}{\alpha};$$

логарифмическая амплитудная характеристика, соответствующая выражению (216), приведена на фиг. 34, *в*.

Пассивный интегро-диференцирующий контур. Рассмотрим теперь случай, когда закон регулирования должен содержать как производную, так и интеграл от сигнала ошибки и передаточная функция корректирующего устройства при точном осуществлении закона регулирования должна иметь вид

$$N(s) = \frac{n_{-1}}{s} + n_0 + n_1 s. \qquad (217)$$

Эффект, эквивалентный в некотором интервале частот эффекту активного корректирующего устройства с передаточной функцией вида (217), можно получить, например, при помощи сочетания пассивного диференцирующего и пассивного интегрирующего контуров, рассмотренных ранее. Схема такого пассивного интегро-диференцирующего контура приведена на фиг. 35. Его передаточная функция имеет вид

$$W_d(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}, \qquad (218)$$

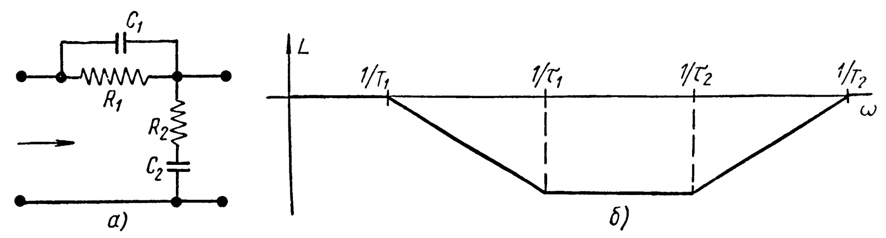
где

$$\tau_1 = R_1 C_1; \quad \tau_2 = R_2 C_2; \tag{219}$$

$$T_1 = \frac{2C_1C_2R_1R_2}{[C_2(R_1+R_2)+C_1R_1] - \sqrt{[C_2(R_1+R_2)+C_1R_1]^2 - 4C_1C_2R_1R_2}};$$

$$T_2 = \frac{2C_1C_2R_1R_2}{[C_2(R_1+R_2)+C_1R_1] + \sqrt{[C_1(R_1+R_2)+C_1R_1]^2 - 4C_1C_2R_1R_2}}.$$

Логарифмическая амплитудная характеристика, соответствующая передаточной функции (218), приведена на фиг. 35, *б*. Как мы видим, пассивное корректирующее устройство с передаточной функцией (218) при низких частотах ведет себя как пассивный интегрирующий контур, а при более высоких частотах — как пассивный диференцирующий



Фиг. 35. Пассивный интегро-диференцирующий контур.

контур. Следует заметить, что интегро-диференцирующий контур не вводит ослабления сигнала ни при $\omega \to 0$, ни при $\omega \to \infty$.

Нами были рассмотрены лишь три примера широко применяемых на практике пассивных корректирующих контуров. Нужно, однако, заметить, что число разновидностей таких контуров, встречающихся в различных схемах, весьма велико.

5. КОРРЕКЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Часто практически более удобным является метод коррекции динамических свойств систем автоматического регулирования, основанный на применении параллельных, а не последовательных корректирующих устройств.

Одно из существенных преимуществ параллельных корректирующих устройств заключается в том, что они позволяют уменьшить нежелательное влияние нестабильности и нелинейности характеристик отдельных элементов системы автоматического регулирования, например усилителей, электрических машин и т. д., на динамические свойства всей системы в целом.

Рассмотрим влияние изменения параметров элемента системы с передаточной функцией $W(s)$ на его выход в том случае, когда этот элемент не охвачен обратной связью (фиг. 36, *а*), и в том случае, когда он охвачен обратной связью с включенным в нее параллельным корректирующим устройством с передаточной функцией $Z(s)$ (фиг. 36, *б*).

В случае схемы на фиг. 36, *а* имеем

$$x_2 = Wx_1. \qquad (220)$$

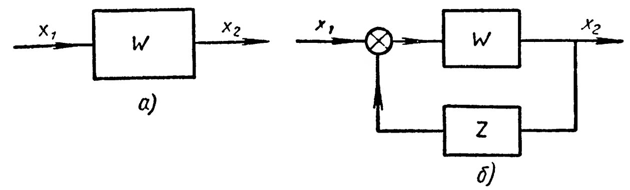
Для того чтобы определить эффект изменений в W на x_2, найдем диференциал от обеих частей равенства (220), предполагая величину x_1 постоянной:

$$dx_2 = x_1 dW. \qquad (221)$$

Разделив уравнение (221) на (220), получим

$$dx_2 = \frac{x_2}{W} dW. \qquad (222)$$

Уравнение (222) показывает, что изменения величины x_2 на выходе в случае схемы на фиг. 36, *а* прямо пропорциональны величине изменений в передаточной функции.



Фиг. 36. Элемент системы W:

а — не охваченный обратной связью; *б* — охваченный обратной связью.

Рассмотрим теперь схему с обратной связью на фиг. 36, *б*. В ней связь между величиной на выходе x_2 и величиной на входе x_1 выражается соотношением

$$x_2 = \frac{W}{1 + WZ} x_1. \qquad (223)$$

Найдем эффект изменений в W на x_2, предполагая Z и x_1 неизменными. Имеем

$$dx_2 = \frac{x_1 dW}{(1 + WZ)^2}. \qquad (224)$$

Разделив уравнение (224) на (223), получим

$$dx_2 = \frac{1}{1 + WZ} \cdot \frac{dW}{W} x_2. \qquad (225)$$

Выражение (225) показывает, что введение обратной связи позволило уменьшить эффект изменений передаточной функции W на величину x_2 в $(1 + WZ)$ раз. Таким образом, если для интересующего нас интервала частот имеет место неравенство

$$|W(j\omega) Z(j\omega)| \gg 1, \qquad (226)$$

то изменения в передаточной функции W элементов системы, охваченных обратной связью, не будут оказывать сколько-нибудь существенного влияния на работу системы.

Нужно, однако, подчеркнуть, что изменения в передаточной функции параллельного корректирующего устройства на фиг. 36, *б* существенно влияют на выходную величину.

Действительно, диференцируя формулу (223) и считая при этом переменными лишь величины Z и x_2, найдем

$$dx_2 = \frac{-W^2 dZ}{1+WZ} x_1. \tag{227}$$

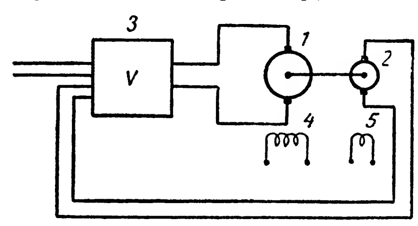
Из выражений (227) и (223) получим

$$dx_2 = \frac{-WZ}{1+WZ} \cdot \frac{dZ}{Z} x_2. \tag{228}$$

Если имеет место неравенство (226), то на основании равенства (228) приближенно можем написать:

$$dx_2 \approx -\frac{dZ}{Z} x_2. \tag{229}$$

Уравнение (229) показывает, что изменения в передаточной функции параллельного корректирующего устройства вызывают приблизительно пропорциональные им изменения величины на выходе. Следовательно, система на фиг. 36, *б* более чувствительна к изменениям в цепи обратной связи Z, чем в главной цепи W.



Фиг. 37. Способ линеаризации демпфирующего момента двигателя при помощи обратной связи:

1 — двигатель; *2* — тахомашина; *3*—усилитель; *4* и *5* — обмотки возбуждения.

В качестве примера рассмотрим, каким образом введение параллельного корректирующего устройства позволяет устранить влияние нестабильности характеристики демпфирующего момента электрического двигателя *1* (фиг. 37). Если воспользоваться тахомашиной *2* как параллельным корректирующим устройством и предположить, что передаточная функция двигателя имеет вид

$$W(s) = \frac{k_1}{Js^2 + bs},$$

а передаточная функция тахомашины

$$Z(s) = k_2 s,$$

то передаточная функция $Y(s)$ схемы на фиг. 37

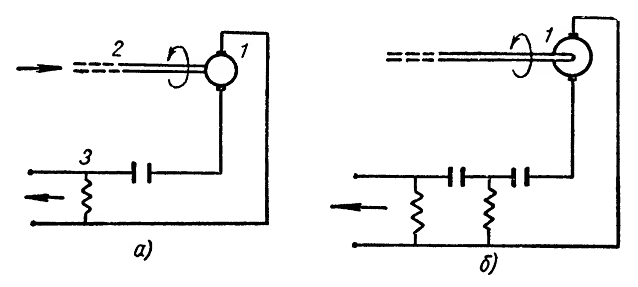
$$Y(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)Z(s)} = \frac{k_1}{Js^2 + (b + k_1 k_2) s}. \tag{230}$$

Из равенства (230) ясно, что если

$$k_1 k_2 \gg b,$$

то эффект колебаний величины b будет незначительным и система будет вести себя как система с демпфирующим моментом, пропорциональным $k_1 k_2$ и линейно зависящим от скорости.

Параллельные корректирующие устройства могут применяться не только для линеаризации тех или иных элементов системы автоматического регулирования, но и для изменения характеристик системы автоматического регулирования в соответствии с требованиями устойчивости,

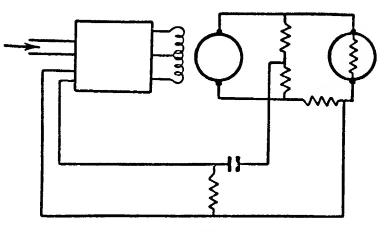


Фиг. 38. Параллельные корректирующие устройства.

качества и точности. Действительно, из уравнения (223) следует, что при удовлетворении неравенства (226) мы приближенно можем написать:

$$\frac{W}{1+WZ} \approx \frac{1}{Z}. \tag{231}$$

Выражение (231) показывает, *что характеристика системы, состоящей из элементов, охваченных обратной связью с включенным в нее параллельным корректирующим устройством, имеющим передаточную функцию Z, в той области частот, в которой имеет место неравенство (226), целиком определяется характеристиками параллельного корректирующего устройства*. Благодаря этому параллельные корректирующие устройства являются весьма удобным средством, позволяющим изменять вид характеристик системы требуемым образом.



Фиг. 39. Мостиковая обратная связь.

Заметим, что к удовлетворению неравенства (226) обычно стремятся лишь в некотором среднем интервале частот, особенно существенном для устойчивости и качества системы, при низких же частотах соблюдение неравенства (226) и приближенного равенства (231) является невыгодным, так как это может привести к значительному ухудшению статической точности системы и увеличению ее коэфициентов ошибок.

В качестве примеров схемного осуществления параллельных корректирующих устройств рассмотрим тахометрическую и мостиковую обратные связи, обычно применяемые в следящих системах.

На фиг. 38, *а* изображено параллельное корректирующее устройство, состоящее из тахомашины *1*, механически связанной с валом *2* исполнительного двигателя, и пассивного однозвенного *RC*-контура *3*.

Передаточная функция этого устройства, очевидно, имеет вид

$$\frac{kTs^2}{1+Ts}.$$

Иногда вместо однозвенного применяют двухзвенный RC-контур (фиг. 38, *б*). В этом случае передаточная функция корректирующего устройства имеет вид

$$\frac{ks^2}{(1+T_1s)(1+T_2s)}.$$

Если применение тахометра нежелательно, то можно воспользоваться мостиковой обратной связью, изображенной на фиг. 39. Если мост сбалансирован, то напряжение на выходе пропорционально угловой скорости вращения двигателя, если же мост не сбалансирован, то угловой скорости и ускорению.

6. ПРИМЕНЕНИЕ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВХОДНОГО СИГНАЛА

При помощи обратных связей можно получить различные законы преобразования входного сигнала. При этом можно воспользоваться одним из двух типов обратных связей: положительной с низким усилением или отрицательной с высоким усилением.

В качестве примера применения обратной связи с низким усилением для получения требуемого закона преобразования входного сигнала предположим, что в общей формуле

$$\frac{W}{1+WZ}$$

для передаточной функции схемы на фиг. 36, *б*

$$W(s)=1$$

и

$$Z(s)=\frac{-1}{Ts+1}. \tag{232}$$

Минус в равенстве (232) указывает на то, что обратная связь взята не отрицательной, а положительной. Тогда

$$\frac{W}{1+WZ}=\frac{1}{1+\frac{1}{Ts+1}}=1+\frac{1}{Ts}, \tag{233}$$

и мы видим, что схема может служить для получения на выходе сигнала, пропорционального интегралу от входа. Следует заметить, что рассмотренная схема сама по себе неустойчива и может применяться лишь как элемент более сложной системы.

Если

$$W(s)=k,$$

где k — постоянная величина, немного меньшая единицы, то схема на фиг. 36, *б* имеет такую же передаточную функцию, как пассивный интегрирующий контур на фиг. 34, *б*.

Действительно,

$$\frac{W}{1+WZ}=\frac{k}{1-\frac{k}{Ts+1}}=\frac{k(Ts+1)}{Ts+(1-k)}=\frac{k}{1-k}\cdot\frac{Ts+1}{\frac{T}{1-k}s+1}. \quad (234)$$

Однако чаще применяется отрицательная обратная связь с высоким коэфициентом усиления, осуществляющая преобразование входного сигнала в соответствии с выражением, обратным выражению для передаточной функции параллельного корректирующего устройства.

Так, например, если

$$W(s)=k\gg 1$$

и

$$Z(s)=\frac{Ts}{1+Ts}, \quad (235)$$

то

$$\frac{W}{1+WZ}\approx 1+\frac{1}{Ts}. \quad (236)$$

Если же k недостаточно велико для того, чтобы неравенство (226) удовлетворялось для всех частот, представляющих интерес, то

$$\frac{W}{1+WZ}=\frac{k}{1+\frac{kTs}{1+Ts}}=\frac{k(1+Ts)}{1+(k+1)Ts}, \quad (237)$$

и мы опять получаем схему, эквивалентную по своим свойствам пассивному интегрирующему контуру.

Если

$$Z(s)=\frac{1}{1+Ts} \quad (238)$$

и имеет место неравенство (226), то мы получаем преобразование входного сигнала, соответствующее диференцирующему звену первого порядка.

Если усиление k недостаточно, то

$$\frac{W}{1+WZ}=\frac{k}{1+\frac{k}{Ts+1}}=\frac{1+Ts}{1+\frac{1}{1+k}Ts}, \quad (239)$$

и схема на фиг. 36, *б*, оказывается эквивалентной пассивному диференцирующему контуру на фиг. 33, *б*.

Если в цепь обратной связи включить электрический контур на фиг. 40, имеющий передаточную функцию

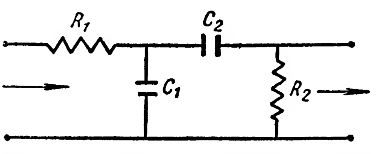
$$Z(s)=\frac{T_2 s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}, \quad (240)$$

то при достаточно больших k схема на фиг. 36, *б* будет давать на выходе сигнал, пропорциональный не только входной величине, но и ее интегралу и производной, так как

$$\frac{1}{Z(s)}=\frac{1+(T_1+T_2)s+T_1T_2s^2}{T_2 s}=\frac{1}{T_2}s^{-1}+\left(\frac{T_1+T_2}{T_2}\right)+T_1 s. \quad (241)$$

Другая полезная схема для получения требуемого закона преобразования входного сигнала изображена на фиг. 41.

В ней сигнал с выхода параллельного корректирующего устройства Z сравнивается не только с величиной на входе, но и с величиной на выходе W. Передаточная функция схемы на фиг. 41 имеет вид



Фиг. 40. Пассивный электрический контур, имеющий передаточную функцию:

$$Z(s) = \frac{T_2 s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)},$$

где $T_1 = C_1 R_1$; $T_2 = C_2 R_2$.

$$Y(s) = \frac{W}{1 + WZ} - \frac{WZ}{1 + WZ}, \quad (242)$$

поэтому при $|WZ| \gg 1$

$$Y \approx \frac{1 - Z}{Z}; \quad (243)$$

например, если

$$Z(s) = \frac{1}{1 + Ts},$$

то схема на фиг. 41 осуществляет диференцирование входного сигнала, так как в этом случае согласно уравнению (243)

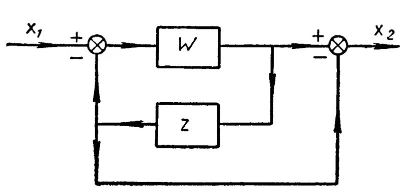
$$Y(s) = Ts,$$

если же

$$Z(s) = \frac{Ts}{1 + Ts},$$

то схема на фиг. 41 осуществляет интегрирование входного сигнала, так как в этом случае согласно уравнению (243)

$$Y(s) = \frac{1}{Ts}.$$



Фиг. 41. Схема для получения требуемого закона преобразования сигнала.

Местные обратные связи широко применяются также для усиления мощности входного сигнала, а также для того, чтобы преобразовать входную величину, имеющую одну физическую природу, в выходную, имеющую совсем другую физическую природу, например механическое перемещение — в давление пара и т. д.

7. СРАВНЕНИЕ СПОСОБОВ КОРРЕКЦИИ ПРИ ПОМОЩИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Преимущество последовательных корректирующих устройств заключается в том, что они часто могут быть осуществлены в виде простых пассивных RC-контуров.

Их основные недостатки можно охарактеризовать следующим образом. Эффективность их действия может быть существенно уменьшена непостоянством параметров и характеристик остальных элементов системы.

Поэтому при их применении к стабильности характеристик элементов предъявляются обычно повышенные требования.

Интегрирующие (создающие отставание по фазе) RC-контуры, включаемые последовательно, обычно содержат более громоздкие конденсаторы, чем контуры в цепи обратной связи.

Диференцирующие (создающие опережение по фазе) RC-контуры очень чувствительны к помехам.

Преимущества параллельных корректирующих устройств заключаются в следующем.

1. Они уменьшают зависимость динамических свойств системы от изменений параметров и характеристик входящих в ее состав элементов. Поэтому требования к элементам могут быть менее жесткими, чем при применении последовательных корректирующих устройств.

2. В элементах системы автоматического регулирования, близких к ее выходу, развивается значительная мощность. Поэтому питание параллельного корректирующего устройства даже в том случае, если оно потребляет значительное количество энергии, не представляет затруднений.

3. Системы, содержащие параллельные корректирующие устройства, менее подвержены влиянию помех, часто содержащихся в сигнале ошибки, чем системы с последовательными корректирующими устройствами. Это объясняется тем, что элементы системы, включенные перед их входом, играют роль фильтров низких частот.

Недостатком параллельных корректирующих устройств является то, что они часто состоят из дорогих или громоздких элементов, какими являются, например, тахомашины или стабилизирующие трансформаторы.

В небольших следящих системах величина тахомашины может быть сравнимой с величиной двигателя.

Иногда значительные трудности связаны с выполнением требования, чтобы обратная связь не нагружала предварительные каскады усиления.

В случае применения параллельных корректирующих устройств обычно требуются весьма высокие коэфициенты усиления.

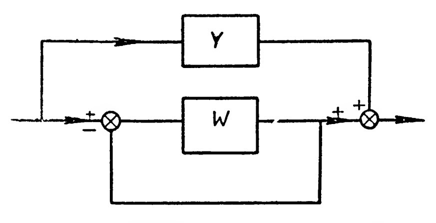
8. КОМБИНИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ОСНОВАННЫЕ НА СОЧЕТАНИИ ПРИНЦИПОВ ЗАМКНУТОГО И РАЗОМКНУТОГО ЦИКЛОВ

В главе II мы уже видели, что автоматическое управление по принципу разомкнутого цикла обычно не может обеспечить требуемой точности. Однако сочетание принципов разомкнутого и замкнутого циклов может привести к созданию весьма совершенных систем. Система разомкнутого цикла действует как сравнительно грубая система, основная задача которой состоит в том, чтобы обеспечить получение на выходе требуемой мощности, система же замкнутого цикла, включаемая параллельно системе разомкнутого цикла (фиг. 42), действует как своего рода верньер, выбирающий остающуюся ошибку и, таким образом, обеспечивающий требуемую точность.

Сочетание обоих принципов позволяет существенно увеличить диапазон плавной работы и точность следящих систем, что можно подтвердить при помощи следующих рассуждений. Предположим, что мы хотим

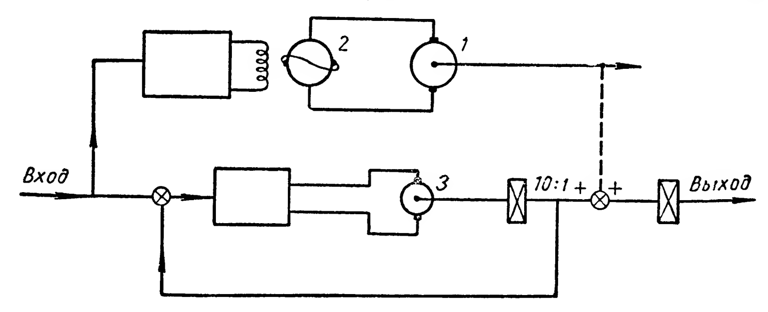
обеспечить плавную работу системы в очень широком диапазоне скоростей. Для того чтобы достигнуть этого, мы можем возложить на систему разомкнутого цикла задачу поддержания скорости, приблизительно равной требуемой. При этом система замкнутого цикла будет служить для того, чтобы вводить небольшие поправки в работу системы разомкнутого цикла, несущей на себе основную нагрузку.

Таким способом максимальная скорость системы замкнутого цикла, а следовательно, и ее максимальная мощность, может быть взята, скажем, в 10 раз меньшей, чем в том случае, когда нет системы разомкнутого цикла. Поэтому, если система замкнутого цикла имеет всего лишь такой же диапазон рабочих скоростей, как и система разомкнутого цикла, то она может быть присоединена к нагрузке через редуктор с коэфициентом передачи 10 : 1, что приведет к расширению диапазона рабочих скоростей всей системы в целом в 10 раз. В комбинированной системе система замкнутого цикла все время корректирует выход и, кроме того, воспринимает на себя всю нагрузку при очень низких скоростях, когда система разомкнутого цикла останавливается.



Фиг. 42. Комбинированная система.

Преимущества рассмотренной комбинированной системы сводятся не только к увеличению диапазона рабочих скоростей, но и к тому, что



Фиг. 43. Пример комбинированной системы.

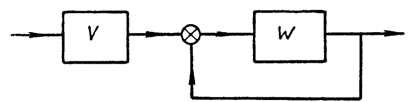
она оказывается более простой и дешевой, чем система замкнутого цикла, удовлетворяющая тем же требованиям.

В качестве примера рассмотрим схему, изображенную на фиг. 43. Она состоит из мощного двигателя *1*, управляемого по схеме разомкнутого цикла электромашинным усилителем *2*, и из системы замкнутого цикла, управляющей двигателем *3* значительно меньшей мощности и поэтому значительно более быстродействующей.

10 оборотов двигателя *3* в системе замкнутого цикла соответствуют одному обороту двигателя *1*, приведенного к нагрузке. Предположим, что более мощный двигатель *1* имеет диапазон скоростей 50 : 1. Диапазон скоростей замкнутой системы может быть сделан равным, скажем, 500 : 1. Таким образом, система замкнутого цикла будет уменьшать

установившуюся ошибку системы разомкнутого цикла в 500 раз, и, следовательно, общий диапазон скоростей всей системы будет равен 5000 : 1, Кроме того, рассмотренная комбинированная система, состоящая из мощной системы разомкнутого цикла и маломощной замкнутой системы, будет, конечно, проще и дешевле, чем полностью замкнутая система равной ей мощности, даже в том случае, если диапазон регулируемых скоростей будет равен не 5000 : 1, а всего лишь 500 : 1.

Способ построения комбинированных систем, при котором система разомкнутого цикла и система замкнутого цикла соединяются параллельно друг с другом (фиг. 42), оказывается весьма полезным во всех тех случаях, когда закон изменения во времени управляющего воздействия известен хотя бы приближенно. При этом система разомкнутого цикла может быть осуществлена в виде простого программного механизма.



Фиг. 44. Комбинированная система.

Можно, однако, указать на другой принцип построения комбинированных систем, при котором осуществляется последовательное соединение систем, работающих по принципу разомкнутого и замкнутого циклов. Использование этого принципа особенно целесообразно в тех случаях, когда желательно не вводить никаких схемных или конструктивных изменений в систему замкнутого цикла и когда закон изменения управляющего воздействия не может быть предугадан, но известна передаточная функция системы замкнутого цикла.

В этом случае передаточная функция внешнего корректирующего устройства, включаемого последовательно с системой замкнутого цикла перед ее чувствительным элементом (фиг. 44), выбирается таким образом, чтобы она была обратна передаточной функции $\Phi(j\omega)$ системы замкнутого цикла. В результате передаточная функция $Y(j\omega)$ всей системы в целом в некотором интервале значений ω приближенно определяется некоторым постоянным числом, так как

$$\frac{1}{\Phi(j\omega)}\Phi(j\omega)=1,$$

и мы получаем систему, приближенно удовлетворяющую в некотором интервале значений ω условиям идеального воспроизведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р., Теория следящих систем, ИЛ, М. 1954.

2. Бобов К. С., К теории следящих систем с дополнительной обратной связью, „Автоматика и телемеханика“ № 1, 1952.

3. Moore I. R., Combination open-cycle closed-cycle Sysems, „Proceed Inst. Radio Eng.“ № 11, p. 1421—32 (1952).

ГЛАВА XVII

СИНТЕЗ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В предыдущей главе были вкратце рассмотрены основные методы коррекции динамических свойств систем автоматического регулирования. Эти методы, как мы видели, связаны обычно с применением последовательных и параллельных корректирующих устройств, характеризуемых некоторыми передаточными функциями. Задача настоящей главы состоит в изложении метода определения передаточных функций корректирующих устройств, обеспечивающих придание системе требуемых динамических свойств.

Нужно заметить, что эта задача является лишь частью общей задачи синтеза систем автоматического регулирования, сформулированной в предыдущей главе. Проектирование системы автоматического регулирования может, например, состоять из следующих этапов:

1) анализа свойств, определения статических и динамических характеристик объекта регулирования, формулировки и обоснования требований, которым должна удовлетворять система автоматического регулирования в целом;

2) выбора структурной схемы, способа технического осуществления и некоторых параметров и характеристик элементов системы автоматического регулирования, при котором можно ожидать удовлетворения предъявлявляемых к системе требований;

3) определения передаточных функций и характеристик корректирующих устройств, которые должны входить в систему для придания ей требуемых динамических свойств при применении возможно более простых технических средств;

4) выбора схемы, способа технического осуществления и параметров корректирующих устройств;

5) анализа всей полученной схемы автоматического регулирования в целом, имеющего целью подтвердить расчетным или тем или иным экспериментальным путем, что система удовлетворяет предъявленным к ней требованиям.

Нужно, однако, подчеркнуть, что вследствие сложности многих современных систем автоматического регулирования, являющихся динамическими системами со многими степенями свободы, содержащими не только постоянные, но и нелинейные, переменные во времени, а часто и рас-

пределенные параметры, в большинстве случаев нельзя ожидать высокой точности от результатов, полученных расчетным путем.

Теоретический анализ и расчет обычно могут лишь облегчить выбор рациональной схемы системы автоматического регулирования в целом, а также схемы и ориентировочных значений параметров корректирующих устройств, входящих в ее состав, окончательно же значения этих параметров обычно устанавливаются в результате последующей наладки и настройки системы в реальных условиях ее работы. В связи со сказанным следует также подчеркнуть значение различного рода моделирующих и счетно-решающих устройств, которые существенно облегчают разработку и проектирование новых систем автоматического регулирования.

Из всего изложенного ясно, что мы не можем здесь ставить перед собой невыполнимую задачу изложения общего метода синтеза систем автоматического регулирования, который давал бы ответ на все поставленные выше вопросы вне зависимости от специфики, условий работы и области применения систем автоматического регулирования. Поэтому мы ограничимся лишь изложением способа определения передаточных функций и параметров корректирующих устройств, которые должны быть введены в систему автоматического регулирования для того, чтобы придать ей требуемые динамические свойства.

Другими словами, мы изложим в дальнейшем метод синтеза не систем автоматического регулирования в целом, а лишь корректирующих устройств, входящих в их состав. Методы синтеза в теории регулирования еще недостаточно разработаны. Некоторые попытки, имевшиеся в этом направлении (см., например, [1]), не привели к желаемым результатам. В значительной мере это объясняется тем, что не учитывались особенности постановки задачи синтеза в теории регулирования.

Эти особенности заключаются в следующем [5].

1. Всякая система автоматического регулирования содержит объект регулирования и элементы со сравнительно трудно изменяемыми параметрами и характеристиками и элементы с легко изменяемыми параметрами и характеристиками, вводимыми в систему для придания ей требуемых динамических свойств. Поэтому первое требование ко всякому методу синтеза корректирующих устройств заключается в том, чтобы учитывались динамические свойства объекта или не подлежащей изменению части системы, накладывающие определенные ограничения и существенно влияющие на динамические свойства всей системы в целом.

2. Требования, или, как их иногда называют [2], условия качества, обычно определяют лишь верхние допустимые границы для таких показателей качества, как, например, время переходного процесса, величина перерегулирования и т. д. Другими словами, они определяют лишь область допустимых значений регулируемой величины [2], но не определяют однозначно вид переходного процесса, который должен протекать в системе при том или ином приложенном к ней воздействии. Поэтому метод синтеза должен исходить из стремления получить требуемое качество регулирования, определяемое областью допустимых значений регулируемой величины, а не какой-либо фиксированной кривой, так как в последнем случае мы будем стремиться получить от системы значительно больше, чем необходимо. Это не противоречит тому, что при

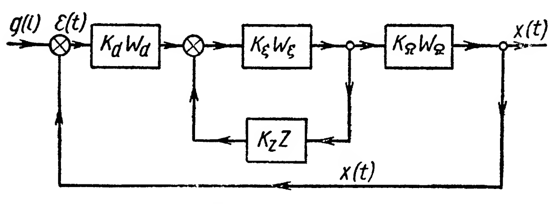
синтезе очень удобно и важно установить оптимальные условия протекания переходного процесса с тем, чтобы знать, какое сочетание параметров выбранных корректирующих устройств при прочих равных условиях является наиболее благоприятным.

3. Решение задачи синтеза не является однозначным, так как одни и те же требования, предъявляемые к системе, можно удовлетворить при помощи самых различных корректирующих устройств. Поэтому метод синтеза должен давать возможность определять характеристики, схему и параметры не любого корректирующего устройства, лишь бы оно обеспечивало удовлетворение заданных требований, а такого, которое при рассматриваемых условиях являлось бы возможно более просто технически осуществимым.

Ниже излагается метод синтеза корректирующих устройств, учитывающий все перечисленные выше особенности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В дальнейшем мы будем предполагать, что структурная схема системы автоматического регулирования нам задана и может быть сведена к виду, графически изображенному на фиг. 45, т. е. что она состоит из следующих основных частей:



Фиг. 45. Структурная схема автоматического регулирования.

а) объекта или неизменяемой части, состоящих из двух последовательно соединенных частей, с передаточными функциями $K_\Omega W_\Omega(j\omega)$ и $K_\zeta W_\zeta(j\omega)$;

б) последовательного корректирующего устройства с передаточной функцией $K_d W_d(j\omega)$;

в) параллельного корректирующего устройства с передаточной функцией $K_z Z(j\omega)$, шунтирующего звенья объекта, имеющие передаточную функцию $K_\zeta W_\zeta(j\omega)$,

Таким образом, передаточная функция $KW(j\omega)$ всей системы, разомкнутой в месте измерения ошибки, имеет вид

$$KW(j\omega) = K_d W_d(j\omega) K_\Omega W_\Omega(j\omega) \frac{K_\zeta W_\zeta(j\omega)}{1 + K_z Z(j\omega) K_\zeta W_\zeta(j\omega)}. \qquad (244)$$

Мы предположим, что передаточные функции $K_\Omega W_\Omega(j\omega)$, $K_\zeta W_\zeta(j\omega)$ нам заданы в виде аналитических выражений или соответствующих им частотных характеристик.

Наша задача заключается в определении вида передаточных функций $K_d W_d(i\omega)$, $K_z Z(j\omega)$ последовательного и параллельного корректирующих устройств, включая численные значения входящих в эти функции параметров, чтобы система обладала требуемыми показателями качества.

В качестве таких показателей мы будем, например, рассматривать:

1) порядок астатизма системы;

2) величину перерегулирования $\sigma\%$, вызываемого ступенчатым управляющим воздействием;

3) время переходного процесса T, вызываемого ступенчатым управляющим воздействием;

4) максимальное ускорение w_{max}, с которым изменяется регулируемая величина при заданном ступенчатом управляющем воздействии;

5) первый коэфициент ошибки C_1;

6) второй коэфициент ошибки C_2;

7) запас устойчивости по фазе γ.

Очевидно, что при синтезе можно интересоваться лишь некоторыми из перечисленных показателей качества, а не обязательно всеми ими одновременно.

Первым вариантом постановки задачи синтеза назовем условно случай, когда при заданном порядке астатизма нас интересуют следующие показатели качества:

1) величина перерегулирования σ %;

2) время переходного процесса T;

3) максимальное ускорение w_{max}.

Вторым вариантом постановки задачи синтеза назовем условно случай, когда при заданном порядке астатизма нас интересуют следующие показатели качества:

1) первый коэфициент ошибки C_1;

2) второй коэфициент ошибки C_2;

3) запас устойчивости по фазе γ.

Первый вариант обычно имеет интерес в тех случаях, когда в качестве типового воздействия рассматривается ступенчатое управляющее воздействие.

В случае следящих систем это соответствует режиму начального рассогласования, а в случае систем автоматической стабилизации — режиму перенастройки системы на новое значение регулируемой величины.

Заметим, что хотя режим перенастройки кажется несколько искусственным, не соответствующим реальным режимам работы систем автоматической стабилизации, однако его часто вводят в рассмотрение при расчетах. Это объясняется тем, что режим перенастройки обычно считается наиболее тяжелым режимом. Поэтому если система имеет приемлемые показатели качества в режиме перенастройки, то имеются все основания считать, что система будет обладать еще лучшими показателями качества в переходном процессе, вызываемом ступенчатым возмущающим (а не управляющим) воздействием.

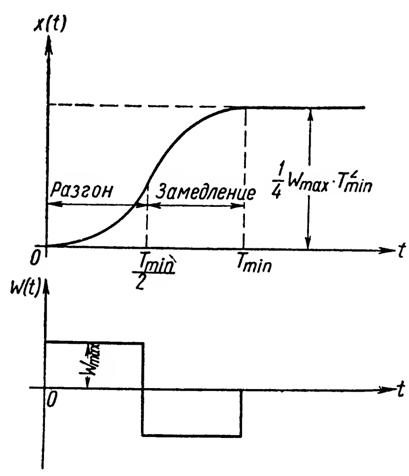
Второй вариант постановки задачи синтеза обычно имеет интерес для следящих систем и систем программного регулирования, когда типовым управляющим воздействием служит плавно изменяющееся воздействие, например в виде постоянной скорости, постоянного ускорения, арктангенса и т. д.

2. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

Выше нами уже указывалось, что при синтезе существенный интерес представляет определение оптимальных условий работы системы, т. е. условий, при которых обеспечиваются наилучшие возможные при принятых ограничениях показатели качества системы.

Если нам известны оптимальные характеристики, то даже при невозможности их точного осуществления они оказываются практически полезными, так как указывают, к какой форме характеристик следует стремиться при введении в систему корректирующих устройств. Поэтому мы прежде всего приведем способ нахождения оптимальной передаточной функции и соответствующих ей частотных характеристик, исходящий из следующего определения условий оптимума.

Назовем переходный процесс, вызванный ступенчатым воздействием, оптимальным, если он является монотонным и время переходного процесса имеет минимальное возможное значение T_{min}, совместимое с ограничением, наложенным на значение ускорения w регулируемой величины.



Фиг. 46. Оптимальный переходный процесс.

В главе XXXI излагается метод нахождения нелинейных обратных связей, обеспечивающих точное или приближенное осуществление сформулированных выше условий оптимума, мы же применим его здесь, оставаясь в пределах линейных представлений[1] [6].

Найдем прежде всего аналитическое выражение для переходного процесса, определенного выше. В течение периода разгона $0 < t < \frac{T_{min}}{2}$ (фиг. 46), когда ускорение $w = \frac{d^2x}{dt^2}$ сохраняет максимальное возможное значение w_{max}, переходный процесс определяется выражением

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} w_{max} t^2; \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{T_{min}}{2}; \\ x(t) &= 0; \quad t < 0. \end{aligned}\right\} \tag{245}$$

Но нас интересует выражение для переходного процесса не только для периода разгона, но и для всех значений t, включая период замедления:

$$\frac{T_{min}}{2} \leqslant t \leqslant T_{min}.$$

Легко видеть, что такого рода процесс может быть составлен из трех парабол (фиг. 47), первая из которых определяется выражением (245), но уже не только для периода разгона, а для всех $t > 0$, вторая сдвинута вправо на $\frac{T_{min}}{2}$ и имеет постоянную по величине вторую

[1] Излагаемый ниже способ определения оптимальных передаточных функций и частотных характеристик применим, если ограничены не только вторая, но и другие производные от регулируемой величины.

производную, равную $(-2w_{max})$, и, наконец, третья сдвинута вправо на T_{min} и имеет значение второй производной, равное w_{max}.

Итак, выражение для оптимального переходного процесса $x_{opt}(t)$ можно представить в виде

$$x_{opt}(t)=\frac{1}{2}w_{max}t^2 1(t)-w_{max}\left(t-\frac{T_{min}}{2}\right)^2 1\left(t-\frac{T_{min}}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}w_{max}(t-T_{min})^2 1(t-T_{min}), \qquad (246)$$

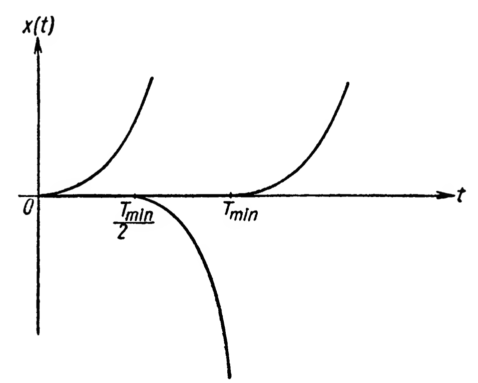
где через $1(t)$, $1\left(t-\frac{T_{min}}{2}\right)$, $1(t-T_{min})$ обозначены единичные ступенчатые функции.

Заметим, что

$$\lim_{t\to\infty}x_{opt}(t)=x_{opt}(\infty)=$$
$$=\frac{1}{4}w_{max}T_{min}^2. \qquad (247)$$

Величину в правой части уравнения (247) мы условимся обозначать в дальнейшем через g_0, т. е.

$$g_0=\frac{1}{4}w_{max}T_{min}^2. \qquad (248)$$



Фиг. 47. Представление оптимального переходного процесса в виде трех парабол.

Очевидно, что выражение (248) характеризует величину ступенчатого управляющего воздействия, которое нужно приложить к астатической системе с оптимальными характеристиками для того, чтобы получить переходный процесс вида (246).

Действительно, так как уравнение ошибки имеет вид

$$\varepsilon(t)=g(t)-x(t)$$

и так как в случае астатических систем

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=0,$$

то при рассматриваемых нами условиях

$$\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}x_{opt}(t)=\frac{1}{4}w_{max}T_{min}^2.$$

Из сказанного ясно, что время оптимального переходного процесса T_{min} при заданном максимальном ускорении w_{max} зависит от величины приложенного ступенчатого воздействия g_0 и определяется соотношением

$$T_{min}=\frac{2}{\sqrt{w_{max}}}g_0. \qquad (249)$$

Найдем оптимальную передаточную функцию $\Phi_{opt}(s)$, соответствующую переходному процессу (246), в предположении, что он вызван управляющим ступенчатым воздействием, имеющим величину, определяемую выражением (248) и приложенным в момент времени $t=0$.

Очевидно, что

$$L[x_{opt}(t)] = \Phi_{opt}(s)\frac{\frac{1}{4}w_{\max}T_{\min}^2}{s}. \tag{250}$$

Но, применяя к обеим частям равенства (246) преобразование Лапласа, мы можем также написать:

$$L[x_{opt}(t)] = \frac{w_{\max} - 2w_{\max}e^{-\frac{T_{\min}}{2}s} + w_{\max}e^{-T_{\min}s}}{s^3},$$

и, следовательно,

$$\Phi_{opt}(s) = \frac{4}{T_{\min}^2}\cdot\frac{1-2e^{-\frac{T_{\min}}{2}s} + e^{-T_{\min}s}}{s^2}. \tag{251}$$

Заметим, что мы должны иметь

$$\lim_{s\to 0}\Phi_{opt}(s) = 1. \tag{252}$$

Выполнение равенства (252) можно проверить, продиференцировав дважды числитель и знаменатель выражения (251) по s (для раскрытия неопределенности при $s=0$) и положив затем $s=0$.

Положив в уравнении (251) $s=j\omega$ и отделяя вещественную часть от мнимой, получим следующие выражения для оптимальных вещественной и мнимой частотных характеристик:

$$P_{opt}(\omega) = \frac{4}{T_{\min}^2}\left(\frac{1-2\cos\frac{T_{\min}}{2}\omega + \cos T_{\min}\omega}{-\omega^2}\right); \tag{253}$$

$$Q_{opt}(\omega) = \frac{4}{T_{\min}^2}\left(\frac{2\sin\frac{T_{\min}}{2}\omega - \sin T_{\min}\omega}{-\omega^2}\right).$$

Подставляя уравнение (251) в известную формулу

$$KW(s) = \frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)},$$

устанавливающую связь между передаточными функциями $\Phi(s)$ и $KW(s)$ системы соответственно в замкнутом и разомкнутом состоянии (см. главу VI), найдем оптимальную передаточную функцию $KW_{opt}(s)$ разомкнутой системы;

$$KW_{opt}(s) = \frac{\frac{4}{T_{\min}^2}\left(1-2e^{-\frac{T_{\min}}{2}s} + e^{-T_{\min}s}\right)}{s^2 - \frac{4}{T_{\min}^2}\left(1-2e^{-\frac{T_{\min}}{2}s} + e^{-T_{\min}s}\right)}. \tag{254}$$

Формула (254) может служить для определения оптимальных логарифмической амплитудной $L_{opt}(\omega)$ и фазовой $\theta_{opt}(\omega)$ частотных характеристик разомкнутой системы:

$$\left.\begin{aligned} L_{opt}(\omega) &= 20 \lg |KW_{opt}(j\omega)|; \\ \theta_{opt}(\omega) &= \arg KW(j\omega). \end{aligned}\right\} \qquad (255)$$

Найдем формулу, определяющую частоту среза $\omega_{c\,opt}$ для оптимальной логарифмической амплитудной характеристики.

Напомним, что частотой среза называется угловая частота ω_c, при которой имеет место равенство

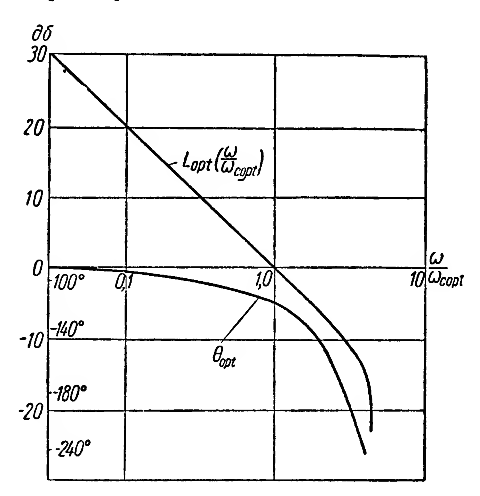
$$L(\omega) = 0, \qquad (256)$$

но выражение (256) эквивалентно [см. главу XVI, уравнение (68)] равенству

$$P(\omega) = 0{,}5, \qquad (257)$$

поэтому, воспользовавшись уравнением (253), получим следующее трансцендентное уравнение для определения частоты среза $\omega_{c\,opt}$:

$$\frac{1}{8} T_{\min}^2 \omega_c^2 + \cos T_{\min}\omega_c - 2\cos\frac{T_{\min}}{2}\omega_c + 1 = 0. \qquad (258)$$



Фиг. 48. Оптимальные логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики.

Решение этого уравнения имеет вид

$$\omega_c = \frac{2}{T_{\min}}. \qquad (259)$$

Итак, если нам удалось реализовать систему, имеющую передаточные функции (251) и (254) или частотные характеристики (253), то такого рода система будет обеспечивать оптимальные условия протекания переходного процесса при единичном управляющем воздействии.

Заметим, что полученные выражения для $\Phi_{opt}(s)$ и $KW_{opt}(s)$ являются трансцендентными функциями от s.

Это означает, что принятая нами форма оптимального переходного процесса, определяемого уравнением (245), не может быть точно реализована в случае линейной системы автоматического регулирования с сосредоточенными параметрами.

Однако это не исключает возможности осуществления линейных систем с сосредоточенными параметрами, имеющих передаточные и переходные функции, достаточно близкие к оптимальным.

На фиг. 48 изображены оптимальные логарифмическая амплитудная $L_{opt}(\omega)$ и фазовая $\theta_{opt}(\omega)$ частотные характеристики.

Наклон оптимальной логарифмической амплитудной характеристики при относительных частотах $\frac{\omega}{\omega_c}$, меньших 4, близок к (—20 *дб/дек*).

При относительных частотах $\frac{\omega}{\omega_c}$, больших 4, наклон резко возрастает (по абсолютной величине).

Выше мы видели, каким образом могут быть определены оптимальные частотные характеристики в случае, когда нас интересует поведение системы под влиянием управляющего воздействия. Изложенный способ может быть применен и тогда, когда интерес представляет поведение системы под влиянием возмущающего воздействия. В этом случае выражение для передаточной функции замкнутой системы $Y(s)$ попрежнему будет иметь вид (251), т. е.

$$Y(s)=\frac{4}{T_{\min}^2 s^2}\left(1-2e^{-\frac{T_{\min}}{2}s}+e^{-T_{\min}s}\right), \tag{260}$$

но оптимальная передаточная функция $KW_{opt}(s)$ разомкнутой системы будет определяться (см. главу VI) уже не формулой (254), а выражением

$$KW_{opt}(s)=\frac{V(s)-Y_{opt}(s)}{Y_{opt}(s)}, \tag{261}$$

где $V(s)$ — передаточная фукция системы автоматического регулирования при отключенной главной обратной связи.

В заключение заметим, что, располагая оптимальными характеристиками всей системы, очевидно, уже не сложно найти, пользуясь, скажем, методами, изложенными в главе XVI, частотные характеристики корректирующих устройств, обеспечивающих приближение к оптимальным частотным характеристикам с требуемой степенью точности. Однако на практике осуществление условий, близких к оптимуму, часто может быть нецелесообразным вследствие технической сложности осуществления необходимых для этого корректирующих устройств.

В этом случае знания оптимальных частотных характеристик уже недостаточно для решения задачи синтеза корректирующих устройств, так как необходимо уметь быстро определять, каковы отклонения от условий оптимума при тех или иных отклонениях реально осуществимых характеристик от оптимальных, и не превосходят ли эти отклонения допустимых для них пределов.

Решение этого вопроса удобно производить при помощи понятия о желаемой логарифмической амплитудной характеристике, рассматриваемого ниже, и специальных приводимых ниже номограмм, позволяющих быстро определять показатели качества, соответствующие выбранной желаемой логарифмической амплитудной характеристике.

При использовании оптимальных частотных характеристик необходимо иметь в виду следующее. Минимальное время $T_{\min}$, соответствующее оптимальному переходному процессу, зависит, как это ясно из уравнения (248), от величины управляющего воздействия g_0 (или начального рассогласования). Поэтому оптимальная частота среза должна определяться для ступенчатого управляющего воздействия, равного не

единице, как это обычно делается для простоты, когда не учитывается ограниченность второй производной величины на выходе, а значению, выбираемому на основании рассмотрения конкретных интересующих нас условий работы системы. Так, например, им может служить наибольшее начальное рассогласование, при котором еще возможно линейное рассмотрение системы.

3. ЖЕЛАЕМАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ АМПЛИТУДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА [5]

Реализация оптимальных частотных характеристик, способ определения которых был изложен выше, может быть связана со значительными техническими трудностями. Кроме того, она часто и не является необходимой, поскольку далеко не всегда обязательно иметь монотонные переходные процессы и обычно можно удовлетвориться временем переходного процесса, значительно большим, чем T_{min}. Наконец, условия, принятые выше за оптимальные, могут находиться в противоречии с другими требованиями, предъявляемыми к системе.

Эти требования могут быть, например, связаны с величиной ошибок в установившемся состоянии при том или ином воздействии. Поэтому важно уметь быстро находить характеристики, обеспечивающие разумный компромисс между условиями оптимума и другими, часто противоречивыми, требованиями, подлежащими учету при решении задачи синтеза.

Такого рода компромиссными характеристиками могут служить так называемые желаемые логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики, а в случае минимально-фазовых систем — лишь одна из них, например логарифмическая амплитудная частотная характеристика.

Выбор и построение желаемой логарифмической амплитудной характеристики можно производить при помощи приводимых ниже довольно простых правил, вытекающих из связи между свойствами логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы и вещественных частотных характеристик замкнутой системы, рассмотренными в главе XV.

Можно, например, предложить следующий порядок действий для построения желаемой логарифмической амплитудной характеристики (необходимые пояснения даются несколько ниже).

1. Зная требуемый порядок астатизма ν и предполагая, что передаточный коэфициент K является заданной величиной, строим логарифмическую амплитудную характеристику объекта или неизменяемой части системы с учетом заданного значения K и требуемого порядка астатизма ν, т. е.

$$Lm\left|\frac{K}{(j\omega)^{\nu-\nu_1}}W_2(j\omega)\right|,$$

где ν_1 — число интегрирующих звеньев объекта, и принимаем низкочастотную асимптоту этой логарифмической амплитудной характеристики за низкочастотную асимптоту желаемой логарифмической амплитудной характеристики. Последняя при частотах, меньших первой сопрягающей частоты, имеет наклон (-20ν *дб/дек*) и при $\omega=1$ имеет ординату, равную $20 \lg K$.

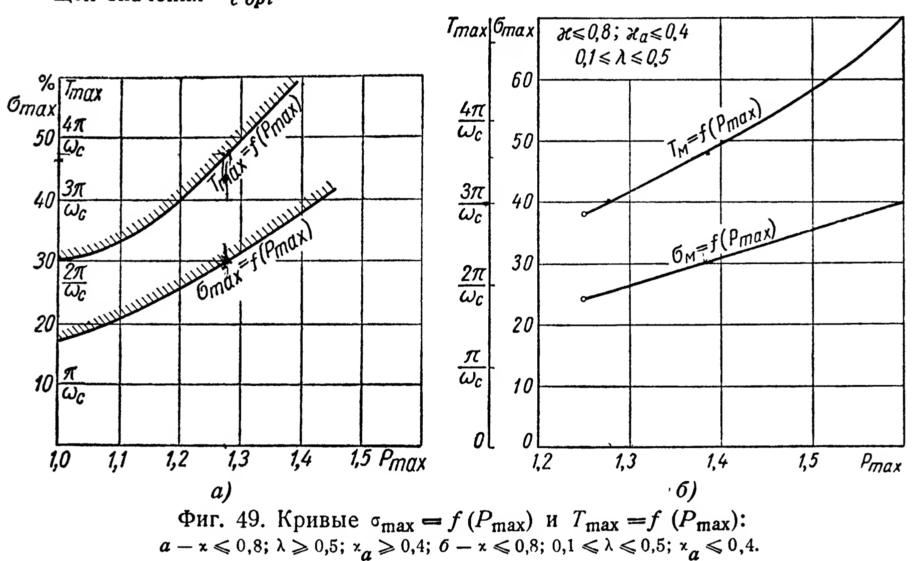
2. Выбираем частоту среза ω_c желаемой логарифмической амплитудной характеристики так, чтобы она удовлетворяла неравенству

$$(\omega_c)_{T\,max} \leqslant \omega_c \leqslant \omega_{c\,opt}, \tag{262}$$

где $(\omega_c)_{T\,max}$ — частота среза, определяемая при помощи кривых на фиг. 49 по заданным значениям для σ_{max} и T_{max};

$\omega_{c\,opt}$ — частота среза оптимальной логарифмической амплитудной характеристики, определяемая по формуле (259).

Примечание I. Если заданное значение T_{max} таково, что $\omega_{c\,opt} < (\omega_c)_{T\,max}$, то частоту среза ω_c следует выбирать не превышающей значения $\omega_{c\,opt}$.



Фиг. 49. Кривые $\sigma_{max} = f(P_{max})$ и $T_{max} = f(P_{max})$:
$а$ — $\varkappa \leqslant 0{,}8$; $\lambda \geqslant 0{,}5$; $\varkappa_a \geqslant 0{,}4$; $б$ — $\varkappa \leqslant 0{,}8$; $0{,}1 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5$; $\varkappa_a \leqslant 0{,}4$.

3. Проводим через точку ω_c прямую с наклоном (—20 *дб/дек*) (среднечастотная асимптота желаемой логарифмической амплитудной характеристики).

4. По заданному значению $\sigma_{max}\,\%$ находим при помощи кривой $\sigma_{max} = f(P_{max})$ на фиг. 49 соответствующее значение P_{max}; определяем $|P_{min}|$ по формуле

$$|P_{min}| \approx P_{max} - 1 \tag{263}$$

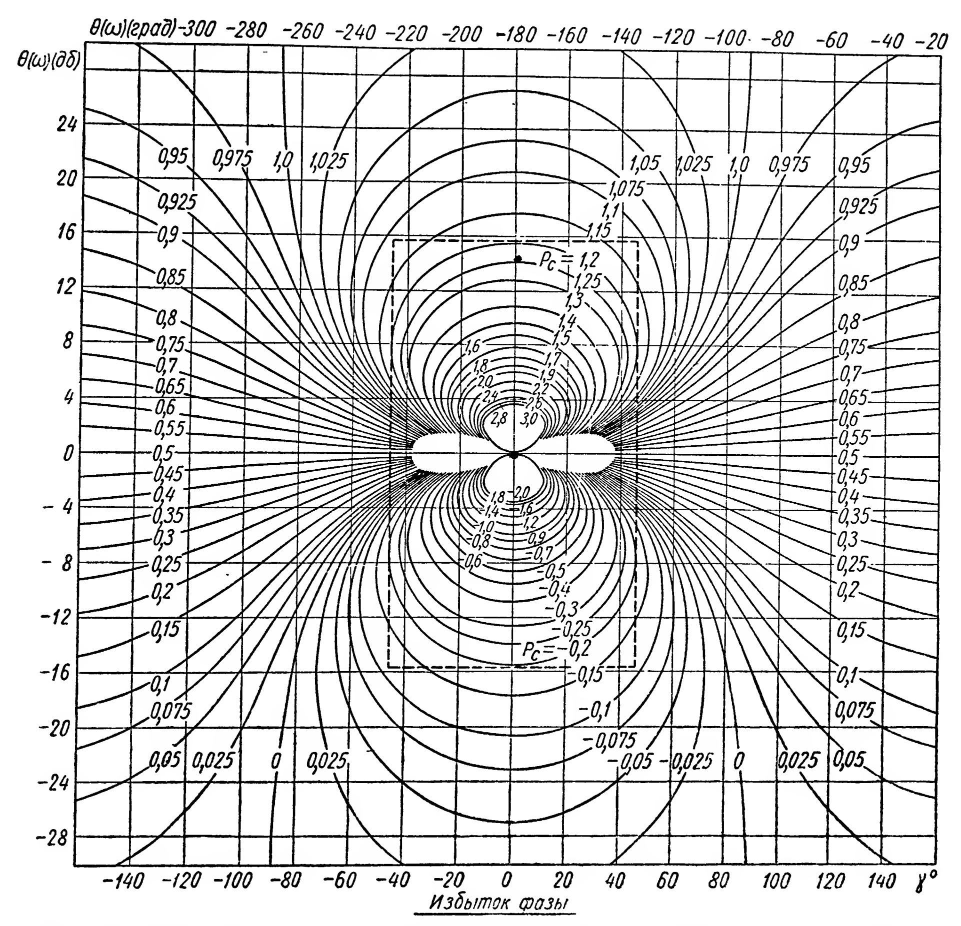
и, пользуясь номограммой на фиг. 50, определяем наименьшее допустимое значение избытка фазы γ_1, обеспечиваемое на всем интервале частот, на котором желаемая логарифмическая амплитудная характеристика удовлетворяет неравенству

$$L_1 \geqslant L_ж(\omega) \geqslant -L_1. \tag{264}$$

Примечание II. Величины $2L_1$ и 2γ являются сторонами прямоугольника, которым приближенно можно заменить область на фиг. 50, ограничиваемую кривой с индексом, равным найденному значению P_{max}. Этот прямоугольник при $P_{max} = 1{,}2$ отмечен на фиг. 50 пунктиром.

5. Сопрягаем низкочастотную и среднечастотную асимптоты логарифмической амплитудной характеристики так, чтобы в том интервале частот, в котором справедливо неравенство

$$L_1 \geqslant L_{ж}(\omega) \geqslant 0,$$



Фиг. 50. Линии равных значений $P(\omega)$ в координатах логарифм амплитуды — фаза.

избыток фазы был не меньше величины γ_1. Проверку выполнения этого условия производим при помощи приближенной формулы (см. главу XII)

$$\gamma = \pi + \theta(\omega) = \pi - \nu\frac{\pi}{2} - \left(k\frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^{k}\frac{\omega_i}{\omega}\right)_{\omega \geqslant \omega_i} + \left(l\frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^{l}\frac{\omega_i}{\omega}\right), \qquad (265)$$

где ω_l — сопрягающие частоты, меньшие того значения ω, при котором определяется значение фазы θ, а k и l — число сопрягающих частот, в которых наклон логарифмической амплитудной характеристики соответственно увеличивается или уменьшается на 20 *дб/дек*.

В уравнении (265) частоты сопряжения, превышающие частоту среза, не принимаются во внимание, так как обычно среднечастотная асимптота желаемой логарифмической амплитудной характеристики занимает значительный интервал частот порядка декады или больше.

6. Сопрягаем среднечастотную асимптоту желаемой логарифмической амплитудной характеристики с высокочастотной частью логарифмической амплитудной характеристики $Lm\,|KW_\Omega|$ (областью малых параметров) так, чтобы в том интервале частот, в котором справедливо неравенство

$$0 \geqslant L_{ж}(\omega) \geqslant -L_1, \tag{266}$$

избыток фазы γ был не меньше γ_1.

Проверку выполнения этого условия производим при помощи приближенной формулы (см. главу XII)

$$\gamma = \pi + \theta(\omega) = -\pi - \frac{\pi}{4} q_{cp} - \sum_{r=1}^{m} \frac{\omega}{\omega_r}, \tag{267}$$

где q_{cp} — наклон среднечастотной асимптоты логарифмической амплитудной характеристики [при наклоне (—20 *дб/дек*) $q_{cp} = 1$], а m — число сопрягающих частот ω_r, удовлетворяющих условию $\omega_r > \omega_c$.

Примечание III. При сопряжении среднечастотной асимптоты с низкочастотной асимптотой и с высокочастотной частью желаемой логарифмической амплитудной характеристики особое внимание следует обращать на то, чтобы желаемая логарифмическая амплитудная характеристика имела наклон, возможно менее отличающийся от наклона логарифмической амплитудной характеристики объекта $Lm\,|K_\Omega W_\Omega|$ на каждом из участков, на которые разбиваются сопрягающими частотами объекта соответствующие интервалы частот. Это существенно для того, чтобы получить возможно более простую передаточную функцию (т. е. имеющую числитель и знаменатель возможно более низкого порядка). Необходимо иметь в виду, что если максимальная разность в наклонах обеих характеристик на каком-либо участке лежит в промежутке $20(q-1) \div \div 20q$ (*дб/дек*), то это означает, что порядок (числителя или знаменателя) передаточной функции должен быть не ниже q, $q+1$.

Сделаем теперь несколько пояснительных замечаний относительно изложенного выше порядка действий.

Поясним прежде всего смысл кривых на фиг. 49 и способ определения по ним величины $(\omega_c)_{T\max}$, входящей в неравенство (262).

Кривые $\sigma_{\max} = f(P_{\max})$, $T_{\max} = f(P_{\max})$ на фиг. 49, *а* и *б* получены на основании графического построения переходных процессов, соответствующих типовым вещественным частотным характеристикам вида, графически изображенного на фиг. 51, для значений параметров этих характеристик, указанных на фиг. 49, *а* и *б*.

Кривая $\sigma_{\max} = f(P_{\max})$ позволяет определить максимальное возможное перерегулирование $\sigma_{\max}$, которое может иметь место при данном значении максимума вещественной частотной характеристики $P_{\max}$ или,

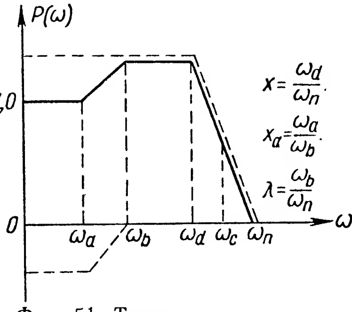
наоборот, величину максимума P_{max}, при котором еще можно гарантировать, что перерегулирование σ не будет превышать максимального допустимого значения σ_{max}.

Точно так же кривая $T_{max}=f(P_{max})$ позволяет определить максимальное возможное время переходного процесса T_{max} при заданных значениях P_{max} и частоту среза (ω_c) или, наоборот, частоту среза $(\omega_c)_{T\,max}$ при заданных значениях P_{max} и T_{max}.

Величина $(\omega_c)_{T_{max}}$, входящая в неравенство (262), может быть определена при помощи этих кривых следующим образом.

Предположим, что максимальные допустимые значения времени переходного процесса и величины перерегулирования равны соответственно T_{max} и σ_{max}. Тогда, пользуясь кривой $\sigma_{max}=f(P_{max})$ на фиг. 49, находим допустимое при данном σ_{max} значение для максимума вещественной частотной характеристики P_{max}, затем находим ординату кривой $T_{max}=f(P_{max})$, соответствующую найденному значению P_{max}. Эта ордината равна $\frac{k\pi}{(\omega_c)\,T_{max}}$ и в то же время она определяет заданное значение T_{max}. Итак,

$$(\omega_c)_{T_{max}}=\frac{k\pi}{T_{max}}. \qquad (268)$$



Фиг. 51. Типовая вещественная характеристика.

Предположим, например, что $\sigma_{max}\,{}^0/_0=25^0/_0$, $T_{max}=1$ сек.

Найдем $(\omega_c)_{T\,max}$, пользуясь фиг. 49.

Пользуясь кривой $\sigma_{max}=f(P_{max})$, получим, что $P_{max}=1{,}2$.

Восставив из точки $P_{max}=1{,}2$ перпендикуляр до пересечения с кривой $T_{max}=f(P_{max})$, найдем, что $T_{max}=\frac{3\pi}{(\omega_c)\,T_{max}}$. Но $T_{max}=1$ сек. Отсюда следует, что $(\omega_c)_{T\,max}\approx 10$ рад/сек.

Из сказанного ясно, что если выбрать частоту среза желаемой логарифмической амплитудной характеристики меньшей, чем $(\omega_c)_{T\,max}$, то нельзя гарантировать, что время переходного процесса T получится меньшим T_{max}.

В то же время частоту среза ω_c не следует выбирать большей $\omega_{c\,opt}$, так как она все равно едва ли сможет быть осуществлена вследствие ограниченности ускорения. Кроме того, всякое излишнее увеличение ω_c нежелательно, так как обычно возрастает сложность корректирующих устройств.

Наклон среднечастотной асимптоты выбирается равным (— 20 *дб/дек*), так как такой наклон имеет оптимальная логарифмическая амплитудная характеристика. Кроме того, меньший наклон обычно трудно осуществить, а больший наклон в значительном интервале частот не обеспечивает надлежащего запаса устойчивости.

Согласно п. 4, для того чтобы $\sigma^0/_0<\sigma_{max}\,{}^0/_0$, должно быть соблюдено неравенство

$$\gamma=|\pi+\theta(\omega)|\geqslant\gamma_1 \qquad (269)$$

при всех ω, при которых

$$L_1 \geqslant L_{ж}(\omega) \geqslant -L_1. \qquad (270)$$

Поясним на конкретном примере, каким образом следует выбирать величины L и γ_1, входящие в формулы (269) и (270). Предположим, что $\sigma_{max}\,{}^0/_0 = 25^0/_0$. Пользуясь кривой $\sigma_{max} = f(P_{max})$ на фиг. 49, найдем, что $P_{max} = 1{,}2$. Согласно формуле (263) положим, что $|P_{min}| = 0{,}2$. Обращаясь теперь к номограмме на фиг. 50, мы видим, что требуемое неравенство

$$-0{,}2 \leqslant P(\omega) \leqslant 1{,}2$$

будет обеспечено, если величины γ_1 и L_1 в неравенствах (269) и (270) соответственно равны $\gamma_1 = 45°$, $L_1 = 16$ *дб*, так как при этом логарифмическая амплитудно-фазовая характеристика $L(\theta)$ не попадает внутрь области на фиг. 50, отмеченной пунктиром, в которой расположены кривые с индексами $P_c = 1{,}2$ и $P_c = -0{,}2$.

4. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ЖЕЛАЕМОЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ АМПЛИТУДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Поясним на примере методику построения желаемой логарифмической амплитудной характеристики, изложенную выше. Предположим, что передаточная функция объекта имеет вид

$$K_{\Omega} W_{\Omega}(s) = \frac{1}{s(0{,}1s+1)(0{,}02s+1)(0{,}01s+1)(0{,}005s+1)} \qquad (271)$$

и требуется обеспечить удовлетворение следующих условий качества:

а) система должна иметь астатизм первого порядка и передаточный коэфициент K системы должен равняться 200 1/сек;

б) перерегулирование σ не должно превышать $\sigma_{max}\,{}^0/_0 = 30^0/_0$;

в) время переходного процесса T не должно превышать $T_{max} = 0{,}8$ сек.;

г) ускорение $w = \frac{d^2x}{dt^2}$ при начальном рассогласовании $g_0 = 0{,}2$ рад. не должно превышать $w_{max} = 30$ рад/сек.

Требуется построить желаемую логарифмическую амплитудную характеристику. Следуя изложенному выше порядку действий:

1) строим логарифмическую амплитудную характеристику

$$Lm\left|\frac{K}{(j\omega)^{\nu-\nu_1}} W_{\Omega}(j\omega)\right|$$

с учетом того, что $K = 200$ 1/сек, $\nu = 1$, $\nu_1 = 1$ (фиг. 52), и находим низкочастотную асимптоту желаемой логарифмической амплитудной характеристики;

2) выбираем частоту среза ω_c желаемой логарифмической амплитудной характеристики равной 1,5 рад/сек, имея в виду, что в рассматриваемом случае неравенство (262) принимает вид $14 \leqslant \omega_c \leqslant 28$;

3) проводим среднечастотную асимптоту желаемой логарифмической амплитудной характеристики;

4) пользуясь фиг. 49 и номограммой на фиг. 50, найдем, что $L_1 \approx 14$ *дб*; $\gamma_1 = 40°$;

5) учитывая примечание III, сопрягаем низкочастотную и среднечастотную асимптоты желаемой логарифмической амплитудной характеристики отрезком прямой, имеющим наклон (—40 *дб/дек*).

Пользуясь формулой (265), находим, что наибольшее значение сопрягающей частоты ω_2, при котором еще $\gamma \geqslant \gamma_1$, равно 2,6 1/сек (если корректирующим устройством служит пассивный электрический контур, то чем больше значения создаваемых им сопрягающих частот, тем они обычно легче осуществимы);



Фиг. 52. Пример построения желаемой логарифмической амплитудной характеристики.

6) среднечастотную асимптоту сопрягаем с высокочастотной частью логарифмической амплитудной характеристики $Lm|KW_\Omega|$; проверка при помощи формулы (267) при этом показывает, что требуемый избыток фазы $\gamma_1 = 40°$ сохраняется при $L_{ж}(\omega) \geqslant -6$ *дб*, т. е. что $L_2 = 6$ *дб*, между тем как мы положили, что $L_2 = 14$; однако номограмма на фиг. 52 показывает, что это может привести лишь к незначительному увеличению (P_{min}), что не существенно для качества, поэтому, чтобы не усложнять корректирующего устройства, мы примем, что логарифмическая амплитудная характеристика $Lm|KW_\Omega|$ при $\omega > \omega_{3\Omega}$ остается нескорректированной, как это показано на фиг. 52.

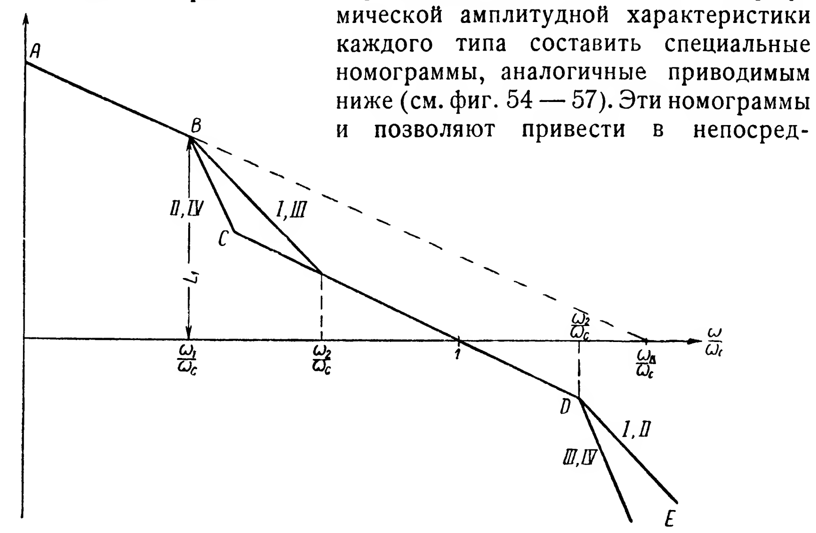
Итак, желаемая логарифмическая амплитудная характеристика найдена.

5. ТИПОВЫЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ АМПЛИТУДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Анализ, произведенный выше, показывает, что желаемую логарифмическую амплитудную характеристику часто можно представить состоящей из следующих основных частей (см. фиг. 53): среднечастотной асимптоты *CD* с наклоном —20 *дб/дек*, пересекающей ось частот в точке, соответствующей частоте среза ω_c; низкочастотной асимптоты *AB*, имеющей

наклон — 20ν *дб/дек*, где ν — порядок астатизма; отрезка прямой *BC* с наклоном —40 ÷ —60 *дб/дек*, соединяющего низкочастотную асимптоту с отрезком прямой, пересекающим ось частот; отрезка прямой *DE* с наклоном —40 ÷ —60 *дб/дек*, определяющим вид желаемой логарифмической амплитудной характеристики при повышенных частотах, и, наконец, высокочастотной части, которая мало влияет на качество системы и поэтому в первом приближении может не приниматься во внимание.

Учитывая сказанное, желаемые логарифмические амплитудные характеристики можно подразделить на ряд основных типов и для логарифмической амплитудной характеристики каждого типа составить специальные номограммы, аналогичные приводимым ниже (см. фиг. 54 — 57). Эти номограммы и позволяют привести в непосредственную связь основные параметры логарифмической амплитудной характеристики с интересующими нас показателями качества. Ясно, что такого рода номограммы представляют существенный интерес не только для анализа, но и для синтеза корректирующих устройств.



Фиг. 53. Типовые логарифмические амплитудные характеристики.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь типовых логарифмических амплитудных характеристик астатических систем первого порядка, имея в виду, что приводимые ниже результаты, как это показывается далее, в ряде случаев с известной степенью приближения могут быть применены и к статическим системам, а также и к астатическим системам второго порядка.

Итак, ограничиваясь астатическими системами первого порядка, мы рассмотрим четыре основных типа логарифмической амплитудной характеристики (фиг. 53), имеющих низкочастотные и среднечастотные асимптоты с одним и тем же наклоном — 20 *дб/дек* и отличающихся друг от друга лишь наклоном в интервале частот (ω_1, ω_2), соответствующем отрезку *BC*, и в интервале частот (ω_3, ∞), соответствующем отрезку *DE*.

Если предположить, что типовые логарифмические амплитудные характеристики на фиг. 53 принадлежат минимально-фазовым системам,

то легко найти соответствующие им передаточные функции $KW(s)$. Нумерация типов логарифмических амплитудных характеристик в соответствии с их наклоном в указанных интервалах и выражения для передаточных функций $KW(s)$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

Передаточные функции $KW(s)$ для типовых логарифмических амплитудных характеристик

Тип логарифмической амплитудной характеристики	Передаточная функция		Наклон в интервале *дб/дек*			
I	$\dfrac{K(\tau_2 s+1)}{s(T_1 s+1)(T_3 s+1)}$	(272)	—20	—40	—20	—40
II	$\dfrac{K(\tau_2 s+1)^2}{s(T_1 s+1)^2(T_3 s+1)}$	(273)	—20	—60	—20	—40
III	$\dfrac{K(\tau_2 s+1)}{s(T_1 s+1)(T_3 s+1)^2}$	(274)	—20	—40	—20	—60
IV	$\dfrac{K(\tau_2 s+1)^2}{s(T_1 s+1)^2(T_3 s+1)^2}$	(275)	—20	—60	—20	—60

Ниже мы увидим, что результаты, полученные для типовых логарифмических амплитудных характеристик, имеющихся в табл. 2, могут быть использованы и для ряда других типовых логарифмических амплитудных характеристик, имеющих передаточные функции, отличающиеся от приведенных в таблице.

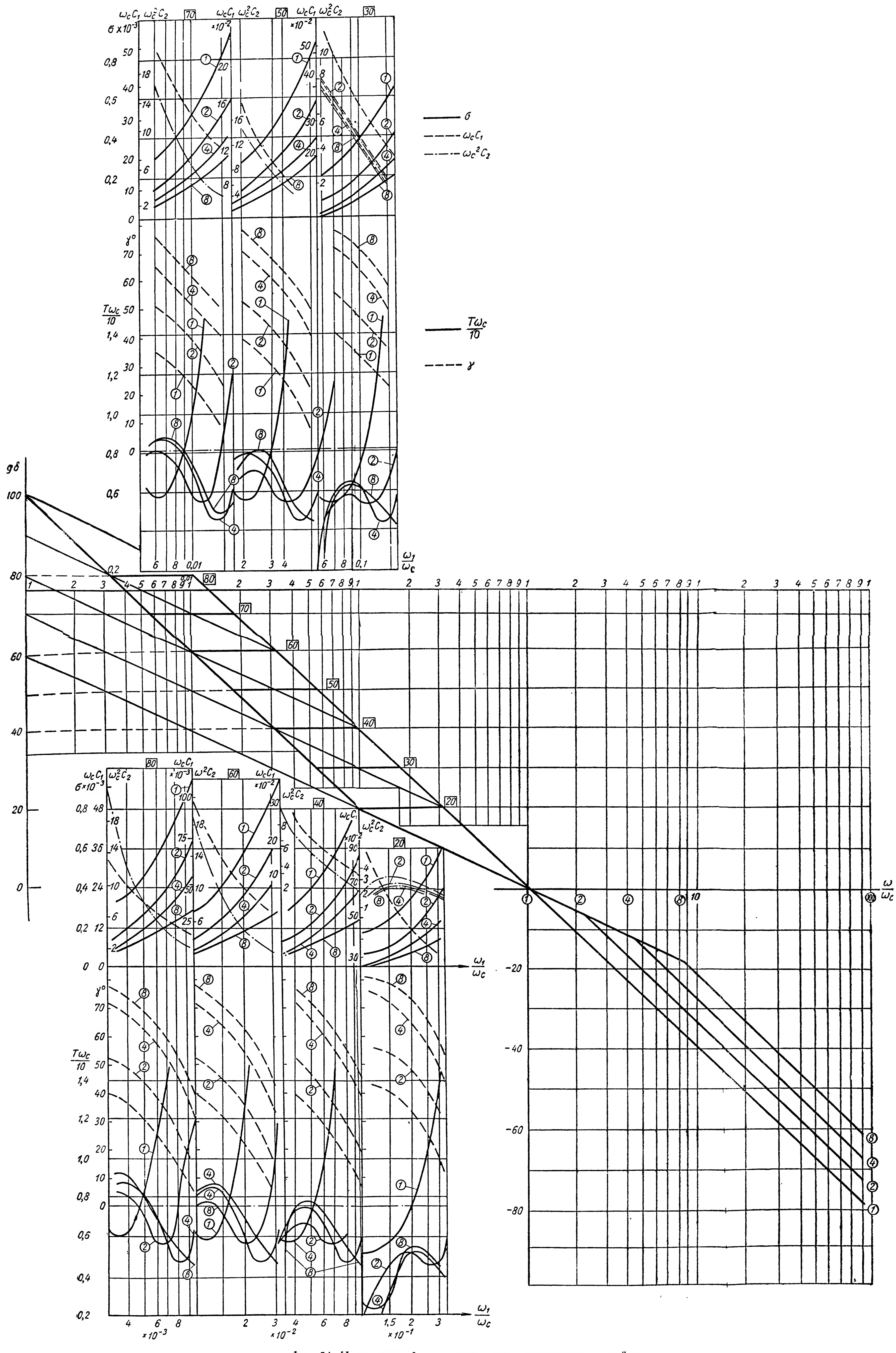
Каждая из типовых логарифмических амплитудных характеристик табл. 2 полностью определяется четырьмя параметрами: добротностью K и сопрягающими частотами $\omega_1=\frac{1}{T_1}$; $\omega_2=\frac{1}{\tau_2}$; $\omega_3=\frac{1}{T_3}$.

Однако нам будет удобнее пользоваться для характеристики типовых логарифмических амплитудных характеристик совокупностью следующих четырех параметров: ординаты L_1 логарифмических амплитудных характеристик при $\omega=\omega_1$, частоты среза ω_c и относительных сопрягающих частот $\frac{\omega_1}{\omega_c}$ и $\frac{\omega_3}{\omega_c}$.

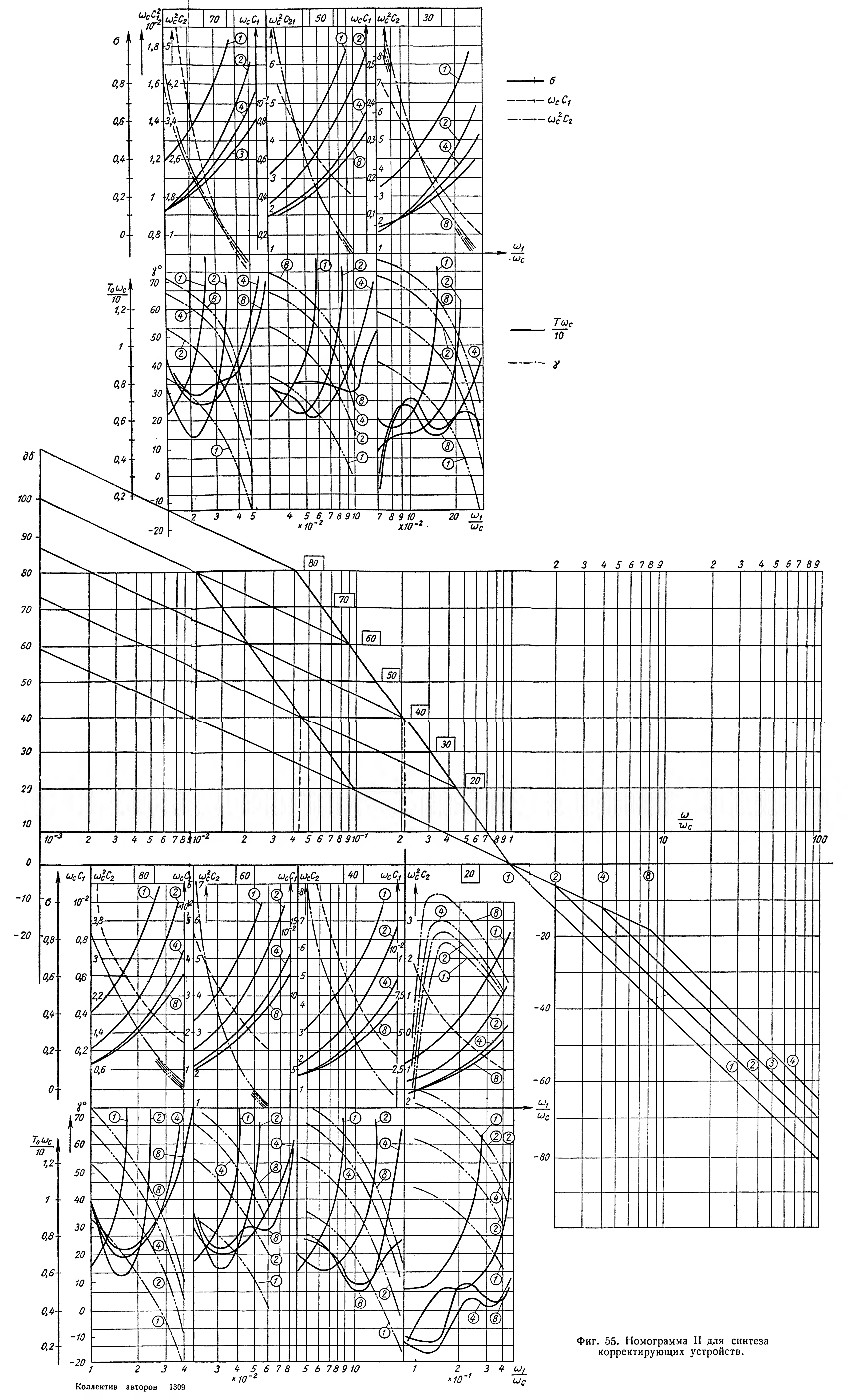
Наша задача состоит в построении номограмм, позволяющих определять интересующие нас показатели качества системы непосредственно по виду типовых логарифмических амплитудных характеристик, заданной своими четырьмя параметрами L_1, ω_c, $\frac{\omega_1}{\omega_c}$, $\frac{\omega_3}{\omega_c}$.

6. НОМОГРАММЫ ДЛЯ СИНТЕЗА КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

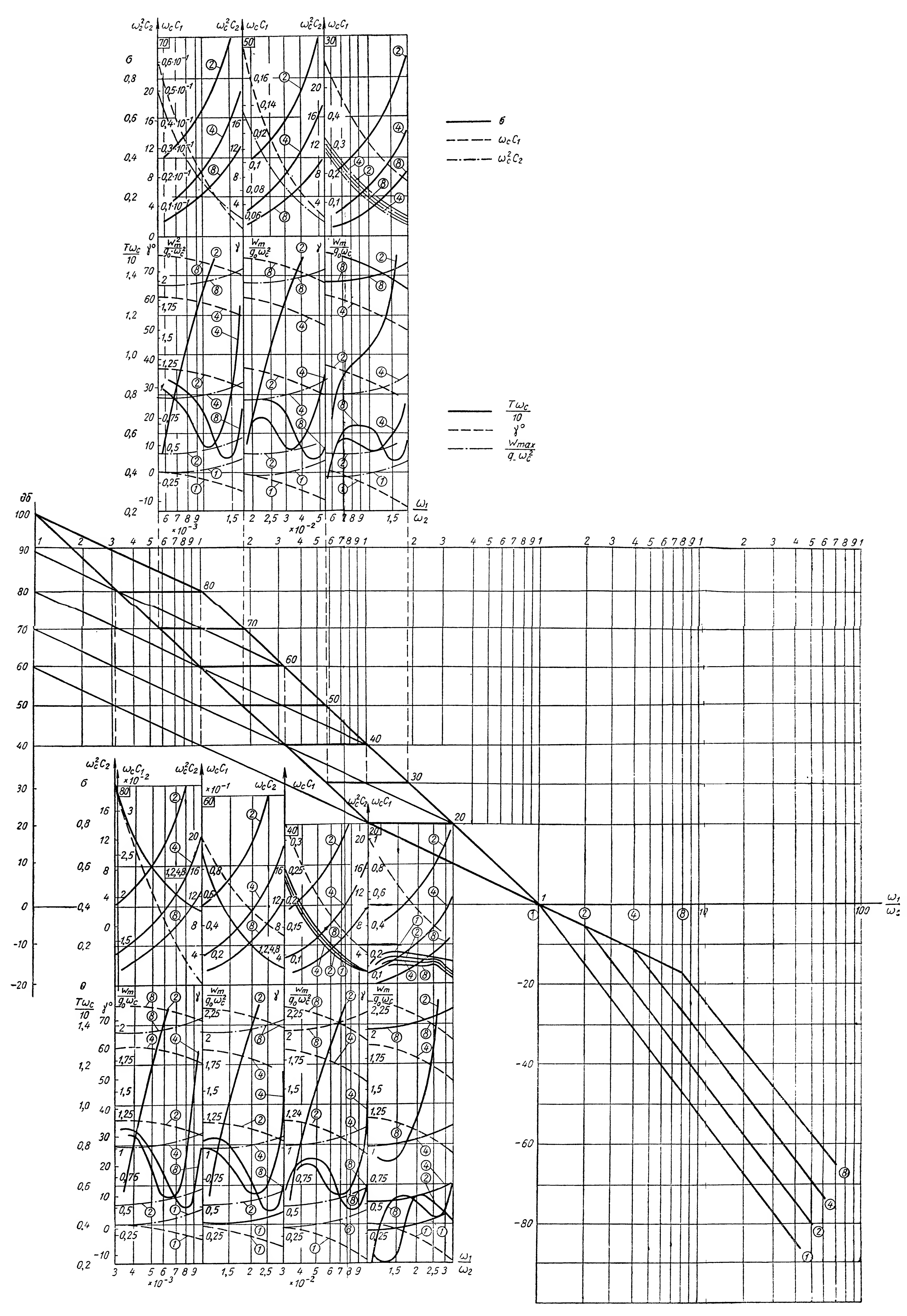
В соответствии с четырьмя передаточными функциями, приведенными в табл. 2, мы рассмотрим четыре номограммы: I — IV (номер номограммы соответствует типу логарифмической амплитудной характеристики в табл. 2, см. фиг. 54—57).



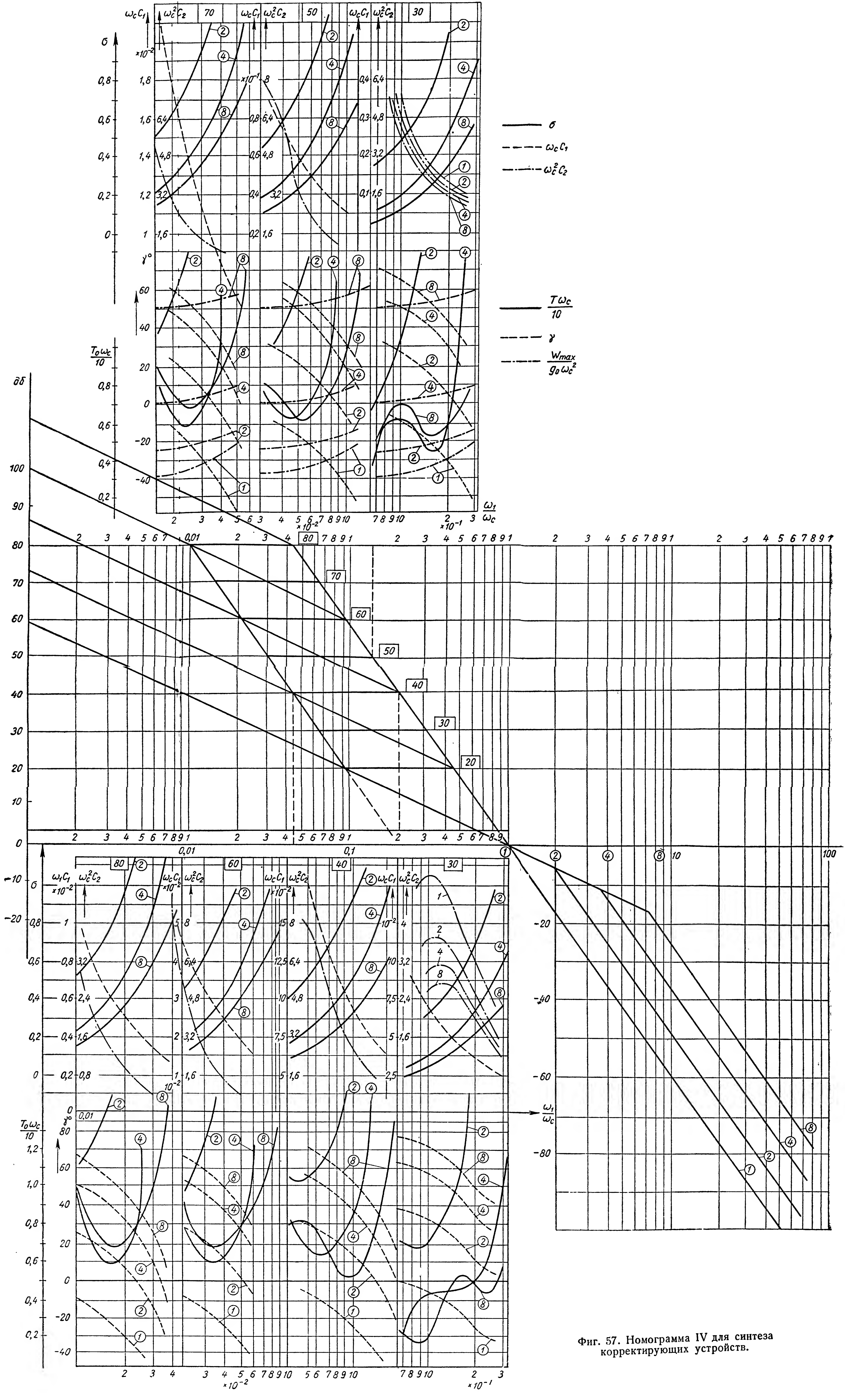
Фиг. 54. Номограмма I для синтеза корректирующих устройств.



Фиг. 55. Номограмма II для синтеза корректирующих устройств.



Фиг. 56. Номограмма III для синтеза корректирующих устройств.



Фиг. 57. Номограмма IV для синтеза корректирующих устройств.

В центральной части каждой номограммы изображена область, внутри которой обычно располагаются логарифмические амплитудные характеристики рассматриваемого типа. Здесь по оси абсцисс отложены относительные частоты $\frac{\omega}{\omega_c}$, а по оси ординат значения модуля $|KW(j\omega)|$ в *дб*. Частоте среза ω_c, очевидно, соответствует на оси абсцисс точка $\frac{\omega}{\omega_c} = 1$.

Цифры, обведенные прямоугольниками справа от наклонной прямой, идущей вверх от точки $\frac{\omega}{\omega_c} = 1$, представляют значения ординат изображенных на номограмме горизонтальных отрезков. Цифры, обведенные кружками в конце прямых в правой части номограммы, обозначают значения относительных сопрягающих частот $\frac{\omega_3}{\omega_c}$, соответствующих этим прямым.

Кривые расположенные в верхней и нижней частях номограммы, представляют зависимости рассматриваемых шести динамических показателей, или, точнее, величин σ, $\frac{T\omega_c}{10}$, $\frac{w_{max}}{\omega^2}$, $\omega_c C_1$, $\omega_c^2 C_2$ и γ от относительной сопрягающей частоты $\frac{\omega_1}{\omega_c}$ при различных фиксированных значениях L и $\frac{\omega_3}{\omega_c}$.

В верхней части номограммы помещены кривые, дающие указанные зависимости для значений L, равных 70, 50 и 30 *дб*.

В нижней части номограммы построены кривые, дающие те же зависимости для значений L, равных 80, 60, 40 и 20 *дб*.

Цифры в кружках, которыми отмечены кривые, обозначают соответствующие им значения относительной сопрягающей частоты $\frac{\omega_3}{\omega_c}$.

Способ применения номограммы для определения перечисленных динамических показателей, соответствующих какой-либо конкретной логарифмической амплитудной характеристике, относящейся к одному из четырех перечисленных типов, заключается в следующем:

1) определяем, пользуясь таблицей, тип, к которому относится рассматриваемая логарифмическая амплитудная характеристика, и выбираем соответствующую номограмму;

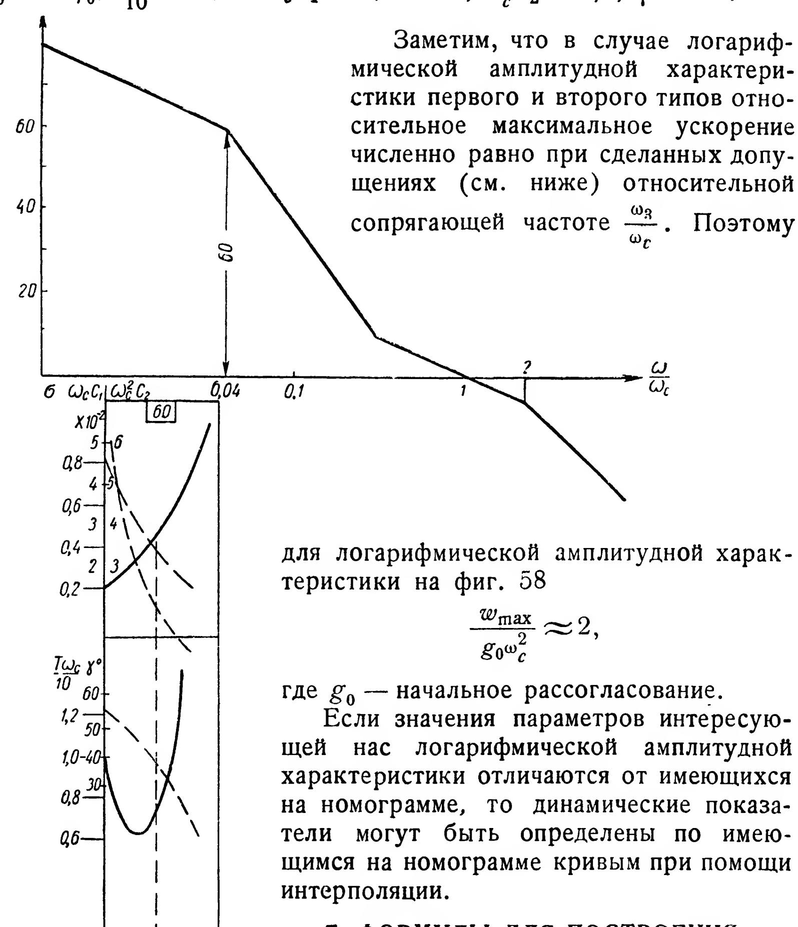
2) находим параметры логарифмической амплитудной характеристики L, $\frac{\omega_1}{\omega_c}$, $\frac{\omega_3}{\omega_c}$ и определяем интересующие нас динамические показатели при помощи кривых, приведенных на номограмме.

Рассмотрим конкретный пример (фиг. 58).

Параметры логарифмической амплитудной характеристики на фиг. 58 равны: $L = 60$; $\frac{\omega_1}{\omega_c} = 0{,}04$; $\frac{\omega_3}{\omega_c} = 2$. Так как $L = 60$, то выбираем на номограмме те из кривых, которые отмечены сверху цифрой $\boxed{60}$. Затем отмечаем на оси $\frac{\omega_3}{\omega_c}$ точку 0,04 и восставляем из нее перпендикуляр до пересечения с кривыми, отмеченными цифрами в кружке, равными заданному значению $\frac{\omega_3}{\omega_c}$. В данном случае $\frac{\omega_3}{\omega_c} = 2$.

В результате получаем искомые значения динамических показателей. Так, например, в рассматриваемом случае (см. фиг. 58) имеем

$$\sigma^0/_0 = 45^0/_0; \ \frac{T\omega_c}{10} = 0{,}74; \ \omega_c C_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}; \ \omega_c^2 C_2 = 2{,}2; \ \gamma = 38^\circ.$$



Фиг. 58. Пример определения показателей качества при помощи номограмм.

Заметим, что в случае логарифмической амплитудной характеристики первого и второго типов относительное максимальное ускорение численно равно при сделанных допущениях (см. ниже) относительной сопрягающей частоте $\frac{\omega_3}{\omega_c}$. Поэтому для логарифмической амплитудной характеристики на фиг. 58

$$\frac{w_{max}}{g_0 \omega_c^2} \approx 2,$$

где g_0 — начальное рассогласование.

Если значения параметров интересующей нас логарифмической амплитудной характеристики отличаются от имеющихся на номограмме, то динамические показатели могут быть определены по имеющимся на номограмме кривым при помощи интерполяции.

7. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ НОМОГРАММ

Рассмотрим способ построения номограмм. Как мы видели, номограммы содержат кривые для определения следующих шести динамических показателей: T, σ, w_{max}, C_1, C_2, γ.

Кривые для определения первых двух величин T и σ были получены [3] при помощи вычисления корней, последующего вычисления и построения переходных процессов для различных сочетаний параметров, определяющих типовые логарифмические амплитудные характеристики, и, наконец, непосредственного измерения по этим кривым указанных величин.

Для построения кривых, определяющих остальные динамические показатели, легко вывести общие формулы,

Если представить передаточную функцию $KW(s)$ в виде

$$KW(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{1 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \ldots}{1 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \ldots}, \tag{276}$$

то, как это было показано в главе VI, первые три коэфициента ошибки определяются выражениями

$$C_0 = 0;$$

$$C_1 = \frac{1}{K};$$

$$C_2 = 2\frac{\alpha_1 - \beta_1}{K} - \frac{2}{K^2}. \tag{277}$$

Наша задача состоит в том, чтобы выразить для типовых логарифмических амплитудных характеристик коэфициенты ошибки C_1, C_2 через относительные сопрягающие частоты $\frac{\omega_1}{\omega_c}$, $\frac{\omega_3}{\omega_c}$ и ординату логарифмической амплитудной характеристики L_1 при $\omega = \omega_1$.

Ввиду того что решение этой задачи несложно, мы дадим ее решение лишь применительно к логарифмической амплитудной характеристике типа I.

Для логарифмической амплитудной характеристики типа I, которой соответствует передаточная функция (272), мы можем написать (см. фиг. 53)

$$\frac{\omega_k}{\omega_1} = 10^{\frac{L_1}{20}}. \tag{278}$$

Но ω_k есть добротность системы K, которая представляет величину, обратную коэфициенту ошибки C_1. Поэтому из уравнения (278) получаем

$$\omega_c C_1 = \frac{\omega_c}{k} = \frac{10^{\frac{-L_1}{20}}}{\frac{\omega_1}{\omega_c}}. \tag{279}$$

На основании уравнения (277) имеем

$$C_2 = 2C_1\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_3} - \frac{1}{\omega_2}\right) - 2C_1^2$$

или

$$\omega_c^2 C_2 = 2\omega_c C_1\left(\frac{\omega_c}{\omega_1} + \frac{\omega_c}{\omega_3} - \frac{\omega_c}{\omega_2}\right) - 2(\omega_c C_1)^2. \tag{280}$$

Исключим из уравнения (280) относительную частоту $\frac{\omega_2}{\omega_c}$. Имеем

$$\frac{\omega_c}{\omega_2} = 10^{\frac{L_2}{20}};$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 10^{\frac{L_1 - L_2}{40}},$$

где L_2 — ордината характеристики при $\omega = \omega_2$.

Следовательно,

$$\lg \frac{\omega_c}{\omega_2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \frac{L_1}{20}, \tag{281}$$

откуда

$$\frac{\omega_2}{\omega_c} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_c}\right)^2 10^{\frac{L_1}{20}}$$

или, учитывая уравнение (279),

$$\frac{\omega_2}{\omega_c} = \frac{\omega_1}{\omega_c} \cdot \frac{1}{\omega_c C_1}. \tag{282}$$

Подставляя уравнение (282) в (280), окончательно получим

$$\omega_c^2 C_2 = 2\omega_c C_1 \left[\frac{\omega_c}{\omega_1}(1 - \omega_c C_1) + \frac{\omega_c}{\omega_3} - \omega_c C_1\right]. \tag{283}$$

Выражение для избытка фазы γ при $\omega = \omega_c$ в случае передаточной функции (272), очевидно, имеет вид

$$\gamma = \pi + \theta(\omega_c) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_1} + \operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_2} - \operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_3} \tag{284}$$

или, если принять во внимание уравнение (281),

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_1} + \operatorname{arctg}\left[\left(\frac{\omega_c}{\omega_1}\right)^2 10^{\frac{-L_1}{20}}\right] - \operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_3}. \tag{285}$$

Формулы для вычисления $\omega_c C_1$, $\omega_c^2 C_2$ и γ для остальных типов логарифмической амплитудной характеристики могут быть получены аналогичным способом.

Результаты сведены в табл. 3.

Остановимся, наконец, на выводе формул для $w_{\max}$.

Предположим, что к системе, имеющей передаточную функцию $\Phi(s)$, приложено ступенчатое воздействие g_0 [1]. Тогда преобразование Лапласа $X(s)$ для переходного процесса $x(t)$ будет иметь вид

$$X(s) = \frac{g_0 \Phi(s)}{s}. \tag{286}$$

Пусть передаточная функция $\Phi(s)$ определяется выражением

$$\Phi(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}. \tag{287}$$

Таблица 3

Формулы для вычисления $\omega_c C_1$, $\omega_c^2 C_2$ и γ

№	$KW(s)$	$\omega_c C_1$	$\omega_c^2 C_2$	γ	$\frac{w_m}{\omega_c^2}$
I	$\frac{K(\tau_2 s+1)}{s(T_1 s+1)(T_3 s+1)}$	$10^{\frac{L_1}{20}}\frac{\omega_c}{\omega_1}$	$2\omega_c C_1\left[(1-\omega_c C_1)\frac{\omega_c}{\omega_1}+\frac{\omega_c}{\omega_3}-\omega_c C_1\right]$	$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_1}+\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_2}-\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_3}$	$\frac{\omega_3}{\omega_c}$
II	$\frac{K(\tau_2 s+1)^2}{s(T_1 s+1)^2(T_3 s+1)}$	$10^{\frac{L_1}{20}}\frac{\omega_c}{\omega_1}$	$2\omega_c C_1\left[(1-\sqrt{\omega_c C_1})\frac{2\omega_c}{\omega_1}+\frac{\omega_c}{\omega_3}-\omega_c C_1\right]$	$\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_1}+2\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_2}-\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_3}$	$\frac{\omega_3}{\omega_c}$
III	$\frac{K(\tau_2 s+1)}{s(T_1 s+1)(T_3 s+1)^2}$	$10^{\frac{L_1}{20}}\frac{\omega_c}{\omega_1}$	$2\omega_c C_1\left[(1-\omega_c C_1)\frac{\omega_c}{\omega_1}+\frac{2\omega_c}{\omega_1}-\omega_c C_1\right]$	$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_1}+\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_2}-2\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_3}$	$\frac{\left(\frac{\omega_3}{\omega_c}\right)^2}{2\left[\left(1-\frac{1}{\omega_c C_1}\right)\frac{\omega_1}{\omega_c}+\frac{2\omega_3}{\omega_c}\right]}$
IV	$\frac{K(\tau_2 s+1)^2}{s(T_1 s+1)^2(T_3 s+1)^2}$	$10^{\frac{L_1}{20}}\frac{\omega_c}{\omega_1}$	$4\omega_c C_1\left[(1-\sqrt{\omega_c C_1})\frac{\omega_c}{\omega_1}+\frac{\omega_c}{\omega_3}-\omega_c C_1\right]$	$\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_1}+2\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_2}-2\operatorname{arctg}\frac{\omega_c}{\omega_3}$	$\frac{\left(\frac{\omega_3}{\omega_c}\right)^2}{4\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{\omega_c C_1}}\right)\frac{\omega_1}{\omega_c}+\frac{\omega_3}{\omega_c}\right]}$

Мы можем написать:

$$\Phi(s) = \frac{\rho_1}{s^{n-m}} + \frac{\rho_2}{s^{n-m+1}} + \frac{\rho_3}{s^{n-m+2}} + \ldots, \tag{288}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{b_m}{a_n} \\ \rho_2 &= \frac{a_n b_{m-1} - a_{n-1} b_m}{a_n^2}; \\ \rho_3 &= \frac{a_n(a_n b_{m-2} - a_{n-2} b_m) - a_{n-1}(a_n b_{m-1} - a_{n-1} b_m)}{a_n^3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{289}$$

и, следовательно,

$$X(s) = g_0\left(\frac{\rho_1}{s^{n-m+1}} + \frac{\rho_2}{s^{n-m+2}} + \frac{\rho_3}{s^{n-m+3}} + \ldots\right). \tag{290}$$

Применяя к каждому из членов ряда (290) обратное преобразование Лапласа, получим

$$x(t) = \frac{g_0\rho_1}{(n-m)!} t^{n-m} + \frac{g_0\rho_2}{(n-m+1)!} t^{n-m+1} +$$

$$+ \frac{g_0\rho_3}{(n-m+2)!} t^{n-m+2} + \ldots \tag{291}$$

При малых значениях t мы можем ограничиться лишь первым или первыми двумя членами ряда (291) и отбросить все остальные. Итак, при малых t

$$x(t) \approx \frac{g_0\rho}{(n-m)!} t^{n-m} + \frac{g_0\rho_2}{(n-m+1)!} t^{n-m+1}. \tag{292}$$

Применим общую формулу (292) для определения максимального ускорения w_{max} в случае передаточной функции типа I. Эта передаточная функция легко может быть приведена к виду

$$\Phi(s) = \frac{K_\omega s + K_\omega \omega_2}{s^3 + (\omega_1 + \omega_3) s^2 + (\omega_1\omega_3 + K_\omega) s + K_\omega \omega_2}, \tag{293}$$

где

$$K_{1\omega} = \frac{K\omega_1\omega_3}{\omega_2}, \tag{294}$$

и, следовательно, в случае уравнения (293),

$$x(t) \approx \frac{g_0\rho_1}{2!} t^2 + \frac{g_0\rho_3}{3!} t^3. \tag{295}$$

Воспользовавшись уравнением (295), найдем

$$w_{max} \approx g_0\rho_1,$$

но

$$\rho_1 = K_{I\omega}$$

и, следовательно,

$$w_{max} \approx g_0 K_{I\omega} = g_0 \frac{K\omega_1\omega_3}{\omega_2}; \tag{296}$$

или

$$\frac{w_{max}}{g_0\omega_c^2} \approx \frac{K}{\omega_c} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_c} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_c} \cdot \frac{\omega_c}{\omega_2}. \tag{297}$$

Из уравнения (297), принимая во внимание выражения (279) и (282), найдем

$$\frac{w_{max}}{g_0\omega_c^2} \approx \frac{\omega_3}{\omega_c}. \tag{298}$$

Аналогичным способом можно найти формулы для вычисления максимального ускорения w_{max} и в случае остальных передаточных функций. Эти формулы приведены в табл. 3.

8. ПРИМЕНЕНИЕ НОМОГРАММ К ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ АМПЛИТУДНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ ДРУГИХ ТИПОВ

Номограммы, аналогичные приведенным, могут быть построены, конечно, не только для систем с астатизмом первого порядка, но и для статических систем, а также для систем с порядком астатизма выше первого. Однако если интерес представляют лишь величина перерегулирования и время переходного процесса, то приведенные номограммы часто оказываются применимыми независимо от порядка астатизма.

Действительно, если две логарифмические амплитудные характеристики, соответствующие минимально-фазовым системам, отличаются друг от друга лишь при достаточно малых значениях ω, при которых

$$|KW| \gg 1, \tag{299}$$

то им соответствуют весьма мало отличающиеся друг от друга вещественные частотные характеристики, а следовательно, и мало отличающиеся друг от друга переходные процессы.

Так, например, если логарифмические амплитудные характеристики статической системы и систем с астатизмом первого и второго порядков совпадают друг с другом при всех ω, при которых

$$|KW(j\omega)| \leqslant 30 \text{ дб},$$

и отличаются друг от друга лишь при тех значениях ω, при которых

$$|KW(j\omega)| > 30 \text{ дб},$$

то вещественные характеристики $P(\omega)$ этих систем в замкнутом состоянии отличаются от вещественной характеристики $P(\omega)$ системы с астатизмом первого порядка не более чем на 2,5% (см. фиг. 50), и, следовательно, переходные процессы в них мало отличаются друг от друга.

Применение номограммы будет давать для статических систем, вообще говоря, несколько завышенные, а для систем с астатизмом второго порядка несколько заниженные оценки величины перерегулирования σ и времени переходного процесса T по сравнению с действительными их значениями.

Для систем с астатизмом второго порядка, имеющих низкочастотную асимптоту с наклоном — 40 *дб/дек*, переходящую в асимптоту с наклоном — 20 *дб/дек*, следует пользоваться номограммами I или III и применять кривые $\sigma = f\left(\frac{\omega_1}{\omega_c}\right)$; $\frac{T\omega_c}{10} = f\left(\frac{\omega_1}{\omega_c}\right)$, соответствующие значению $L_1 = 80$, принимая за ω_1 то значение ω, при котором $L(\omega) = 80$.

Номограммы часто оказывается возможным применять не только в случае передаточных функций вида (272) — (275), имеющих кратные полюсы и нули, но и в случае передаточных функций, у которых нет кратных полюсов и нулей, но которые имеют тот же порядок числителя и знаменателя.

Так, например, номограммой II можно пользоваться для систем с передаточными функциями вида

$$KW(s) = \frac{K(\tau_3 s + 1)(\tau_4 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_5 s + 1)}, \tag{300}$$

номограммой III можно пользоваться для систем с передаточными функциями вида

$$KW(s) = \frac{K(\tau_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}, \tag{301}$$

номограммой IV можно пользоваться для систем с передаточными функциями вида

$$KW(s) = \frac{K(\tau_3 s + 1)(\tau_4 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_5 s + 1)(T_6 s + 1)}. \tag{302}$$

Правило перехода от передаточных функций (300) — (302) к передаточным функциям (272) — (275) заключается в том, что две соседние постоянные времени T_i и T_{i+1} заменяются двумя одинаковыми постоянными времени, определяемыми по формуле

$$T_{i,\, i+1} = \sqrt{T_i T_{i+1}}. \tag{303}$$

Ошибка в логарифмической амплитудной характеристике, получающаяся при замене двух соседних неодинаковых постоянных времени T_i,

T_{i+1} одной постоянной времени $T_{i,\,i+1}$ при $\frac{1}{T_{i+1}} \leqslant \frac{4}{T_i}$, не превышает 2 *дб*.

Заметим, что часто номограммами можно пользоваться также в тех случаях, когда вместо двух апериодических звеньев с одинаковыми постоянными времени имеется одно колебательное звено. Очевидно, что ошибка при этом будет тем меньше, чем меньше относительный коэфициент затухания ζ (см. главу VI) отличается от единицы.

9. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ НОМОГРАММ ДЛЯ УТОЧНЕНИЯ ВИДА ЖЕЛАЕМОЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ АМПЛИТУДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Покажем, каким образом номограммы могут применяться для уточнения вида желаемой логарифмической амплитудной характеристики, полученной при помощи изложенной ранее методики.

Возьмем тот же пример, который был рассмотрен в п. 4. Желаемая логарифмическая амплитудная характеристика для этого случая изображена на фиг. 53.

Постараемся решить при помощи номограмм следующий вопрос: нельзя ли, не нарушая требований, предъявляемых к системе, изменить вид желаемой логарифмической амплитудной характеристики на фиг. 53 так, чтобы упростить вид передаточной функции корректирующего устройства, необходимого для ее осуществления?

Дело в том, что для получения требуемого избытка фазы в интервале частот, в котором имеет место неравенство $L_1 \geqslant L_{ж}(\omega) \geqslant -L_1$, нам понадобилось продолжить среднечастотную асимптоту желаемой логарифмической амплитудной характеристики до сопрягающей частоты объекта $\omega_{3♀} = 100$ 1/сек. Для осуществления такой логарифмической амплитудной характеристики нужно ввести корректирующее устройство, которое сможет изменить наклон логарифмической амплитудной характеристики объекта в интервале частот ($\omega_{2♀}$, $\omega_{3♀}$) и сделать его равным (—20 *дб/дек*) вместо (—60 *дб/дек*).

Возникает вопрос: нельзя ли не изменять наклон логарифмической амплитудной характеристики объекта в указанном интервале и все же получить перерегулирование и время переходного процесса, не превышающие заданных значений?

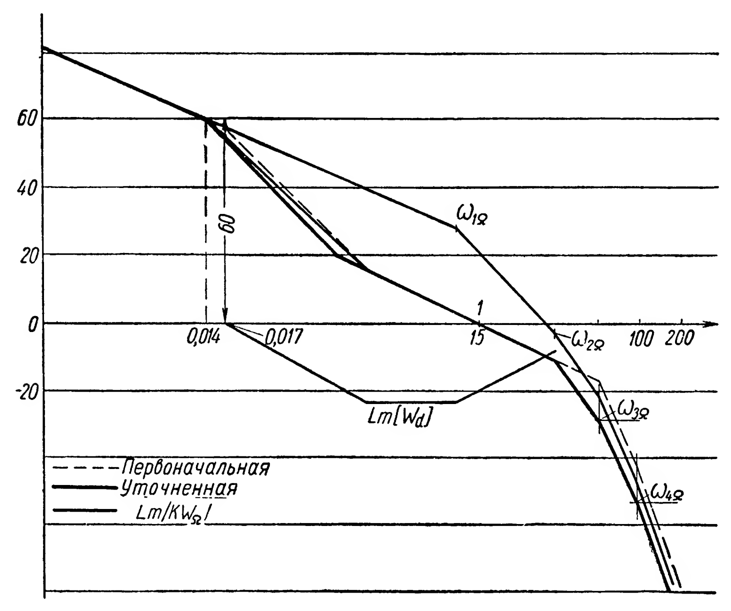
Для того чтобы ответить на этот вопрос при помощи номограммы, необходимо прежде всего решить, какой из номограмм следует воспользоваться, а для этого определить, к какому типу логарифмических амплитудных характеристик можно отнести желаемую логарифмическую характеристику в рассматриваемом случае.

Легко видеть, что желаемую логарифмическую амплитудную характеристику следует отнести к III типу, так как в интервале частот (ω_1, ω_2) она имеет наклон (—40 *дб/дек*), а в интервале частот $\omega > \omega_{2♀}$ мы хотим, чтобы она имела наклон (—60 *дб/дек*).

Выбрав номограмму III, наложим на нее желаемую логарифмическую амплитудную характеристику, изображенную на фиг. 52, так, чтобы частота среза последней совпала с точкой *1* на оси относительных частот номограммы (фиг. 59).

При этом сопрягающей частоте ω_1 будет соответствовать уровень $L \approx 60$, причем $\frac{\omega_1}{\omega_c} = 0{,}017$. Сопрягающую частоту ω_3 желаемой логарифмической амплитудной характеристики положим равной $\omega_{2\Omega}$. При этом логарифмической амплитудной характеристике III типа, имеющей параметры $L = 60$; $\frac{\omega_1}{\omega_c} = 0{,}017$; $\frac{\omega_3}{\omega_c} = 4$, согласно номограмме соответствуют следующие показатели качества: $\sigma^0/_0 = 33$; $T \approx 0{,}5$ сек.

Для того чтобы уменьшить σ, переместим частоту сопряжения ω_1 несколько влево так, чтобы относительная сопрягающая частота $\frac{\omega_1}{\omega_c}$



Фиг. 59. Применение номограмм для уточнения желаемой логарифмической амплитудной характеристики.

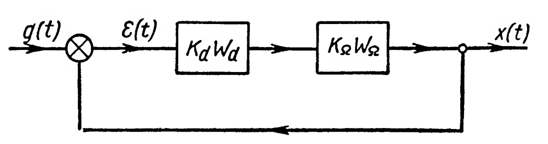
сделалась равной 0,014 (см. фиг. 59). Тогда для показателей качества получим $\sigma^0/_0 \approx 27^0/_0$; $T \approx 0{,}5$ сек., что с некоторым запасом удовлетворяет предъявляемым к системе требованиям. Правда, полученные значения показателей качества найдены без учета наличия в желаемой логарифмической амплитудной характеристике сопрягающих частот ω_4, ω_5, равных соответственно сопрягающим частотам $\omega_{3\Omega}$, $\omega_{4\Omega}$ объекта. Однако эти частоты соответствуют ординатам желаемой логарифмической амплитудной характеристики, меньшим (—26 *дб*), и, следовательно, не могут значительно изменить показатели качества, так как находятся в области малых параметров.

Итак, применение номограммы позволило уточнить вид желаемой логарифмической амплитудной характеристики с тем, чтобы ее осуществление было проще и чтобы она в то же время попрежнему удовлетворяла заданным требованиям.

10. СИНТЕЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

После того как желаемая логарифмическая амплитудная характеристика выбрана, дальнейший ход решения задачи синтеза корректирующих устройств обычно уже не представляет собой сколько-нибудь значительных затруднений.

Рассмотрим вначале более простой случай, чем представленный на фиг. 45. Предполагая, что параллельное корректирующее устройство отсутствует и что, следовательно, структурная схема следящей системы имеет вид, графически изображенный на фиг. 60, поставим перед собой задачу синтеза последовательного корректирующего устройства.



Фиг. 60. Структурная схема системы автоматического регулирования без параллельного корректирующего устройства.

В этом случае выражение (244) для передаточной функции $KW(j\omega)$ принимает вид

$$KW(j\omega) = K_d W_d(j\omega) K_\Omega W_\Omega(j\omega), \quad (304)$$

где $K_d W_d(j\omega)$ — передаточная функция корректирующего устройства; $K_\Omega W_\Omega(j\omega)$ — передаточная функция объекта.

Пусть

$$K_d W_d(j\omega) = K_d H_d(j\omega)\, e^{j\theta_d(\omega)};$$
$$K_\Omega W_\Omega(j\omega) = K_\Omega W_\Omega e^{j\theta_\Omega(\omega)}, \quad (305)$$

тогда

$$Lm\,|KW| = Lm\,|K_d W_d| + Lm\,|K_\Omega W_\Omega| \quad (306)$$

и

$$\theta(\omega) = \theta_d(\omega) + \theta_\Omega(\omega). \quad (307)$$

Выражения (306) и (307) показывают, что в рассматриваемом случае логарифмическая фазовая $\theta(\omega)$ и амплитудная $Lm\,|KW|$ частотные характеристики всей системы соответственно равны сумме фазовых $\theta_d(\omega)$, $\theta_\Omega(\omega)$ и логарифмических амплитудных $Lm\,|K_d W_d|$, $Lm\,|K_\Omega W_\Omega|$ характеристик последовательного корректирующего устройства и объекта.

Предлагаемый порядок операций для определения передаточной функции $K_d W_d(j\omega)$ последовательного корректирующего устройства заключается в следующем:

а) строим логарифмическую амплитудную характеристику $Lm\,|K_\Omega W_\Omega|$ объекта, т. е. той части системы, схему и параметры которой мы предполагаем заданными;

б) строим исходную или желаемую логарифмическую амплитудную характеристику $Lm\,|KW_{ж}|$;

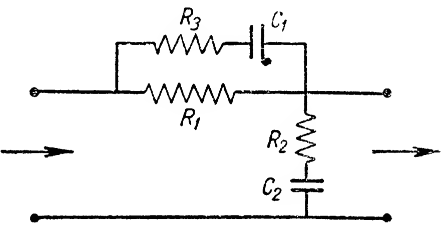
в) вычитая из желаемой характеристики $Lm\,|KW_{ж}|$ характеристику объекта $Lm\,|K_\Omega W_\Omega|$, находим желаемую $Lm\,|K_d W_d|$ логарифмическую амплитудную характеристику последовательного корректирующего устройства;

г) апроксимируем амплитудную характеристику $K_d W_d$, соответствующую $Lm\,|K_d W_d|$, дробно-рациональной функцией или полиномом

с требуемой степенью точности одним из известных методов так, чтобы числитель и знаменатель этой функции имели возможно более низкий порядок и чтобы в то же время все требования логарифмической амплитудной характеристики $Lm|KW|$, следующие из заданных условий качества, были удовлетворены.

Заметим, что в тех случаях, когда наивысший порядок передаточной функции $W_d(j\omega)$ корректирующего устройства ограничивается из технических соображений (что обычно всегда имеет место) некоторым заданным целым числом, эта задача сводится к классической задаче апроксимации вещественной неотрицательной функции $|K_d W_d(j\omega)|$ на конечном интервале (определяющем устойчивость и качество системы) четной дробно-рациональной функцией, наименее отличающейся от $K_d W_d$.

д) если корректирующее устройство должно представлять пассивный RC-контур, то в соответствии с полученной формой характеристики $Lm|K_d W_d|$ выбираем наиболее подходящий тип и схему такого контура или в более общем случае производим синтез пассивного электрического контура, соответствующего характеристике $Lm|K_d W_d|$, обычными методами, принятыми в теории электрических цепей;



Фиг. 61. Пассивный электрический корректирующий контур.

е) производим непосредственную проверку удовлетворения заданных условий качества при выбранной логарифмической амплитудной характеристике $Lm|K_d W_d|$ путем построения переходного процесса методом трапецоидальных характеристик или при помощи номограмм.

Пример. В качестве примера рассмотрим объект с передаточной функцией (271) и предположим, что желаемая логарифмическая амплитудная характеристика имеет вид, графически изображенный на фиг. 52.

Вычитая из желаемой характеристики $Lm|KW_{ж}|$ характеристику $Lm|KW_2|$, найдем логарифмическую амплитудную характеристику $Lm|W_d|$, изображенную на фиг. 59.

Легко видеть, что передаточная функция этого корректирующего устройства будет

$$W_d(s) = \frac{\left(\frac{1}{2{,}1}s+1\right)\left(\frac{1}{10}s+1\right)}{\left(\frac{1}{0{,}21}s+1\right)\left(\frac{1}{50}s+1\right)}, \tag{308}$$

и схема электрического пассивного корректирующего контура может иметь вид, графически изображенный на фиг. 61.

11. О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ АМПЛИТУДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗВЕНЬЕВ, ШУНТИРОВАННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ КОРРЕКТИРУЮЩИМ ЗВЕНОМ

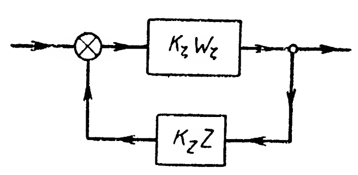
Прежде чем приступить к изложению метода синтеза параллельных корректирующих устройств, рассмотрим некоторые простые свойства логарифмической амплитудной характеристики последовательности звеньев, шунтированных параллельным корректирующим звеном (фиг. 62).

Передаточная функция системы на фиг. 62 имеет вид

$$KW(j\omega)=\frac{K_\zeta W_\zeta(j\omega)}{1+K_z Z(j\omega)K_\zeta W_\zeta(j\omega)}. \tag{309}$$

Мы предположим, так же как и ранее, что передаточная функция объекта $K_\zeta W_\zeta(j\omega)$ задана и что задача состоит в определении передаточной функции $K_z Z(j\omega)$ параллельного корректирующего устройства.

Сделаем прежде всего несколько замечаний, которые понадобятся нам при дальнейшем изложении. Заметим, что для того, чтобы введение параллельного корректирующего устройства не понижало порядок астатизма системы на фиг. 62, необходимо, чтобы порядок нуля его передаточной функции $K_z Z(j\omega)$ при $\omega=0$ был не ниже порядка полюса передаточной функции $K_\zeta W_\zeta(j\omega)$ объекта при $\omega=0$.



Фиг. 62. Последовательность звеньев, шунтированных параллельным корректирующим звеном.

Действительно, пусть

$$W_\zeta(j\omega)=\frac{W_{0\zeta}(j\omega)}{(j\omega)^{\nu_1}}; \tag{310}$$

$$Z(j\omega)=(j\omega)^{\nu_2}Z_0(j\omega),$$

где

$$W_{0\zeta}=Z_0(j0)=1.$$

Подставляя выражение (310) в (309), получим

$$KW(j\omega)=\frac{K_\zeta W_{0\zeta}(j\omega)}{(j\omega)^{\nu_1}}\cdot\frac{1}{1+(j\omega)^{\nu_2-\nu_1}K_z K_\zeta Z_0 W_{0\zeta}}, \tag{311}$$

откуда ясно, что модуль функции KW при $\omega\to 0$ будет иметь вид

$$\lim_{\omega\to 0}|KW|=\lim_{\omega\to 0}\frac{K}{\omega^{\nu_1}},$$

и, следовательно, система будет обладать астатизмом ν_1-го порядка лишь в том случае, если $\nu_2\geqslant\nu_1$.

Заметим, что при $\nu_2=\nu_1$

$$K=\frac{K_\zeta}{1+K_z K_\zeta}, \tag{312}$$

а при $\nu_2>\nu_1$

$$K=K_\zeta. \tag{313}$$

Равенство (312) показывает, что если кратность полюса объекта равна кратности нуля обратной связи, то общий передаточный коэфициент системы K_ζ после введения обратной связи уменьшается в $(1+K_z K_\zeta)$ раз.

Точно так же из равенства (313) следует, что если кратность полюса объекта меньше кратности нуля обратной связи, то общий передаточный коэфициент системы после введения обратной связи остается неизменным.

Далее рассмотрим важное свойство передаточной функции вида

$$K_1 W_1 = \frac{K_\zeta W_\zeta}{1 + K_z Z K_\zeta W_\zeta}. \tag{313a}$$

Это свойство заключается в следующем: в том интервале частот, в котором

$$|K_z Z(j\omega) K_\zeta W_\zeta(j\omega)| \gg 1, \tag{314}$$

амплитудная частотная характеристика, соответствующая передаточной функции (313а), приближенно равна

$$|K_1 W_1| \approx \frac{1}{K_z |Z(j\omega)|}. \tag{315}$$

Логарифмируя обе части выражения (315), получим

$$Lm|K_1 W_1| \approx -Lm|K_z Z|. \tag{316}$$

Из формулы (316) следует, что в интервале частот, для которого справедливо условие (314), логарифмическая амплитудная частотная характеристика системы, состоящей из последовательности звеньев, шунтированных параллельным корректирующим звеном, приближенно равна логарифмической амплитудной характеристике корректирующего звена с обратным знаком.

Предположим, что логарифмическая амплитудная характеристика $Lm|K_1 W_1|$ системы на фиг. 62 отличается не более чем на $\pm\Delta L$ от характеристики $-Lm|K_z Z|$ в некотором интервале частот (ω_1, ω_2).

Значит, в этом интервале частот должно удовлетворяться неравенство

$$\frac{1}{m|K_z Z|} \leqslant \frac{|K_\zeta W_\zeta|}{|1 + K_z Z K_\zeta W_\zeta|} \leqslant \frac{m}{|K_z Z|}, \tag{317}$$

где

$$m = 10^{\frac{\Delta L}{20}} \tag{318}$$

или

$$\frac{1}{m} \leqslant \frac{|K_z Z K_\zeta W_\zeta|}{|1 + K_z Z K_\zeta W_\zeta|} \leqslant m. \tag{319}$$

Заметим, что выражение

$$\Phi_{z\zeta} = \frac{K_z Z K_\zeta W_\zeta}{1 + K_z Z K_\zeta W_\zeta} \tag{320}$$

имеет такую же структуру, как и выражение

$$\Phi = \frac{KW}{1 + KW},$$

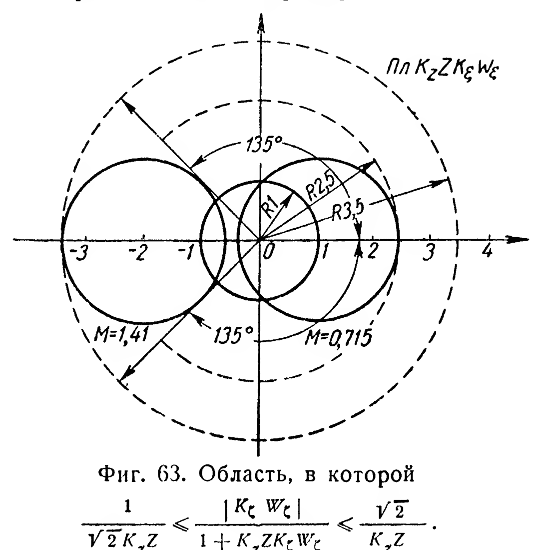
представляющее зависимость между передаточными функциями системы в замкнутом и разомкнутом состоянии. Отсюда легко видеть, что для удовлетворения приближенного равенства (316) в некотором интервале

частот (ω_1, ω_2) с требуемой степенью точности $\pm\Delta L$ необходимо и достаточно, чтобы в этом интервале вектор $K_z Z(j\omega) K_\zeta W_\zeta(j\omega)$ не попадал внутрь окружностей амплитудной круговой диаграммы с индексами m и $\frac{1}{m}$.

Предположим, например, что $\Delta L = 3$ *дб*, тогда

$$m = \sqrt{2} \approx 1{,}41;$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}715,$$



Фиг. 63. Область, в которой $\frac{1}{\sqrt{2} K_z Z} \leqslant \frac{|K_\zeta W_\zeta|}{1 + K_z Z K_\zeta W_\zeta} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{K_z Z}$.

и вектор $K_z Z(j\omega) K_\zeta W_\zeta(j\omega)$ (фиг. 63) в интервале частот (ω_1, ω_2) не должен попадать внутрь окружностей с индексами $M = 1{,}41$ и $M = 0{,}715$.

Из фиг. 63 можно получить следующие условия для удовлетворения равенства (319) с точностью ± 3 *дб*:

а) при 8 *дб* $\geqslant Lm|K_z Z K_\zeta W_\zeta| \geqslant 0$ должно удовлетворятся либо неравенство

$$-135^\circ \leqslant \overset{\circ}{\theta}_{z\zeta}(\omega) \leqslant -90^\circ,$$

либо неравенство

$$90^\circ \leqslant \overset{\circ}{\theta}_{z\zeta}(\omega) \leqslant 135^\circ;$$

б) при 11 *дб* $\geqslant Lm|K_z Z K_\zeta W_\zeta \geqslant 8$ *дб* должно удовлетворяться неравенство

$$-135^\circ \leqslant \overset{\circ}{\theta}_{z\zeta}(\omega) \leqslant 135^\circ;$$

в) при $Lm|K_z Z K_\zeta W_\zeta| \geqslant 11$ *дб* фаза $\theta_{z\zeta}(\omega)$ может быть какой угодно.

12. СИНТЕЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Рассматривая способ синтеза параллельных корректирующих устройств, предположим вначале, что последовательное корректирующее устройство отсутствует и структурная схема системы имеет вид, графически изображенный на фиг. 64.

На основании результатов, полученных в п. 11, можно предложить следующий порядок действий для определения передаточной функции параллельного корректирующего устройства:

а) строим логарифмическую амплитудную характеристику $Lm|W_\zeta$ объекта;

б) строим, исходя из заданных условий качества, желаемую характеристику $Lm|KW_{ж}|$ всей системы так, как это было изложено ранее;

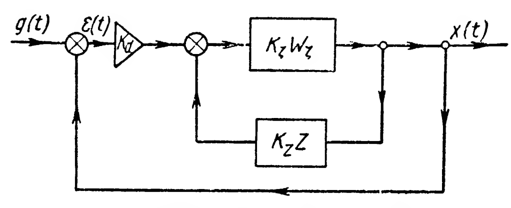
в) определяем интервал частот ω_a, ω_0, существенный для определения требуемого качества, и в этом интервале выбираем характеристику $Lm|Z|$ так, чтобы имело место равенство

$$Lm|Z| \approx -Lm|W_{ж}|; \qquad (321)$$

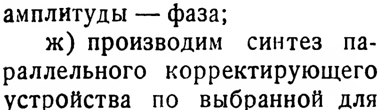
г) строим характеристику $Lm|Z| \approx -Lm|W_{ж}|$;

д) выбираем значение K_z так, чтобы обеспечить удовлетворение неравенства (314) в интервале частот ω_a, ω_0;

е) проверяем, является ли выбранное значение K_z совместимым с требованием устойчивости внутренней петли обратной связи при соблюдении для нее заданного запаса устойчивости[1], для этого определяем фазовую характеристику, соответствующую выбранной логарифмической амплитудной характеристике для $Lm|K_zZK_\zeta W_\zeta|$, и строим амплитудную фазовую характеристику в координатах логарифм амплитуды — фаза;



Фиг. 64. Структурная схема систем автоматического регулирования без последовательного корректирующего звена.



ж) производим синтез параллельного корректирующего устройства по выбранной для него передаточной функции $K_zZ(j\omega)$, руководствуясь теми же основными соображениями, что и при синтезе последовательного корректирующего устройства;

з) выбираем K_d так, чтобы величина K имела требуемое значение;

и) уточняем вид логарифмической амплитудной и фазовой характеристик, соответствующих функции $\frac{K_dK_\zeta W_\zeta}{1+K_zZK_\zeta W_\zeta}$, для этого складываем логарифмические амплитудные и фазовые характеристики, соответствующие функциям $K_dK_\zeta W_\zeta(j\omega)$ и $\frac{1}{1+K_zZ(j\omega)K_\zeta W_\zeta(j\omega)}$;

к) производим проверку удовлетворения заданных условий качества.

13. СИНТЕЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Рассмотрим общий случай структурной схемы на фиг. 45, содержащей как последовательное, так и параллельное корректирующие устройства.

Передаточная функция системы на фиг. 45 имеет вид (244), и, следовательно, для ее логарифмической амплитудной характеристики можно написать:

$$Lm|KW| = Lm|K_dW_d| + Lm|K_\Omega W_\Omega| + \\ + Lm\left|\frac{K_\zeta W_\zeta}{1+K_zZK_\zeta W_\zeta}\right|. \qquad (322)$$

[1] Излагаемый способ синтеза без труда может быть обобщен и на тот случай, когда внутренний контур обратной связи неустойчив.

Первый шаг процесса синтеза, состоящий в выборе на основании заданных условий качества и характеристик объекта желаемой логарифмической амплитудной характеристики, остается тем же, что и ранее, дальнейший же ход решения задачи может, например, заключаться в следующем. Пусть

$$Lm\,|K_{d'}\,W_{d'}| = Lm\,|K_d W_d| + Lm\left|\frac{K_\zeta W_\zeta}{1+K_z Z K_\zeta W_\zeta}\right|, \tag{323}$$

тогда вместо уравнения (322) можно написать:

$$Lm\,|KW| = Lm\,|K_{d'}\,W_{d'}| + Lm\,|K_\Omega W_\Omega|. \tag{324}$$

Выражение (324) имеет такой же вид, как и (306). Поэтому синтез передаточной функции $K_{d'}\,W_{d'}(j\omega)$ можно выполнить способом, которым производят синтез последовательных корректирующих устройств. Определив $Lm\,|K_{d'}\,W_{d'}|$ и выбрав $Lm\,|K_d W_d|$ на основании имеющихся в распоряжении технических средств, мы можем, зная $Lm\,|K_\zeta\,W_\zeta|$, найти логарифмическую амплитудную характеристику

$$Lm\left|\frac{1}{1+K_z Z K_\zeta W_\zeta}\right| \tag{325}$$

из уравнения (323) при помощи простого вычитания. Если же нам известна логарифмическая амплитудная характеристика (325) и соответствующая ей фазовая характеристика, то логарифмическая амплитудная характеристика $Lm\,|K_z Z K_\zeta W_\zeta|$, а следовательно, и искомая логарифмическая амплитудная характеристика $Lm\,|K_z Z|$ могут быть определены без особых затруднений.

Процесс значительно упрощается, если во всем существенном с точки зрения заданных условий качества интервале частот удовлетворяется неравенство (317).

При этом логарифмическая амплитудная характеристика $Lm\,|K_{d'} W_{d'}|$ [см. формулу (323)] сводится к виду

$$Lm\,|K_{d'}\,W_{d'}| \approx Lm\left|\frac{K_d W_d}{K_z Z}\right| = Lm\,|K_d W_d| - Lm\,|K_z Z|, \tag{326}$$

и способ синтеза по существу ничем не отличается от способа синтеза последовательных корректирующих звеньев.

В этом случае необходимо лишь, определив характеристику $Lm\,|K_{d'}\,W_{d'}|$, найти логарифмическую амплитудную характеристику $Lm\,|K_d W_d|$ и $Lm\,|K_z Z|$, пользуясь формулой (326), что не представляет каких-либо затруднений и может быть выполнено, исходя из имеющихся в распоряжении технических средств и конкретных особенностей схемы.

Примеры синтеза, основанные на изложенной выше методике, приведены в следующей главе.

14. ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА НА СЛУЧАЙ, КОГДА ОБЪЕКТ ОБЛАДАЕТ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В заключение сделаем несколько замечаний о возможности применения метода в случае, когда объект обладает запаздыванием и передаточная функция объекта имеет вид

$$K_\Omega W_\Omega(j\omega) = \frac{K_\Omega}{(j\omega)^\nu} W_{0\Omega}(j\omega)\, e^{-j\tau\omega}, \tag{327}$$

где $W_{0\Omega}(j\omega)$ — дробно-рациональная функция от ω.

В этом случае

$$Lm\left|K_\Omega W_\Omega\right| = Lm\,\frac{K_\Omega}{\omega^\nu}\left|W_{0\Omega}(j\omega)\right|; \tag{328}$$

$$\theta_\Omega(\omega) = -\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^\nu + \theta_{0\Omega}(\omega) + \tau\omega)\right]. \tag{329}$$

Система, имеющая передаточную функцию вида (327), не относится к системам минимально-фазового типа, и ее амплитудная и фазовая частотные характеристики не связаны друг с другом однозначной зависимостью.

Действительно, из уравнения (328) следует, что логарифмическая амплитудная характеристика совершенно не зависит от величины запаздывания τ и что, следовательно, системы с запаздыванием, имеющие одинаковые амплитудные характеристики, могут иметь существенно отличающиеся фазовые характеристики. Поэтому изложенная выше методика синтеза, в основе которой лежит предположение о наличии однозначной зависимости между логарифмической амплитудной и фазовой характеристиками, строго говоря, оказывается уже неприменимой.

Однако ее обобщение на случай, когда объект обладает запаздыванием и его передаточная функция имеет вид уравнения (327), не представляет каких-либо затруднений.

В п. 3 мы видели, что при конструировании желаемой логарифмической амплитудной характеристики необходимо сопрягать ее среднечастотную часть с низкочастотной и высокочастотной частями так, чтобы фазовая характеристика $\theta(\omega)$ в точках ω_1, ω_2 не выходила из определенных пределов, выбираемых из условий качества; при этом для вычисления $\theta(\omega)$ при ω_1, ω_2 мы пользовались приближенными формулами (265) и (267).

Все, что нужно сделать теперь, когда объект обладает запаздыванием, заключается в том, чтобы вычислять $\theta(\omega)$ при $\omega = \omega_1$ по формуле

$$\theta(\omega_1) = -\tau\omega - \nu\frac{\pi}{2} - \left(k\frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^{k}\frac{\omega_i}{\omega_1}\right) + \left(l\frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^{l}\frac{\omega_i}{\omega_1}\right), \tag{330}$$

а при $\omega = \omega_2$ — по формуле

$$\theta(\omega_2) = -\tau\omega - \frac{\pi}{2} q_{cp} - \sum_{r=1}^{m}\frac{\omega_2}{\omega_r}, \tag{331}$$

выбирая для $\theta(\omega)$ те же допустимые пределы из условий качества, которые были выбраны в отсутствие запаздывания.

После того как желаемая логарифмическая амплитудная характеристика, обеспечивающая заданные условия качества, выбрана, методика синтеза, изложенная в п. 3, остается прежней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Whiteley A. L., Theory of servo systems with particular reference to stabilization, „Journ. Inst. El. Eng.", v. 93, p. II, p. p. 353—367, August. 1946.

2. Солодовников В. В., Об одном приближенном методе анализа динамики следящих систем и систем регулирования, „Известия АН СССР, ОТН" № 12, 1945, стр. 1179—1202.

3. Chestnut H., Mayer R. W., Servomechanisms and regulating system design, v. I, J. Wiley, 1951.

4. Ван дер Поль В. и Бреммер G., Операционное исчисление, ИЛ, 1952.

5. Солодовников В. В., Синтез корректирующих устройств следящих систем при типовых воздействиях, „Автоматика и телемеханика" № 5, с. 352—88, 1951.

6. Солодовников В. В., Синтез корректируюших устройств следящих систем при помощи оптимальных и типовых логарифмических частотных характеристик, „Автоматика и телемеханика" № 5, с. 531—55, 1953.

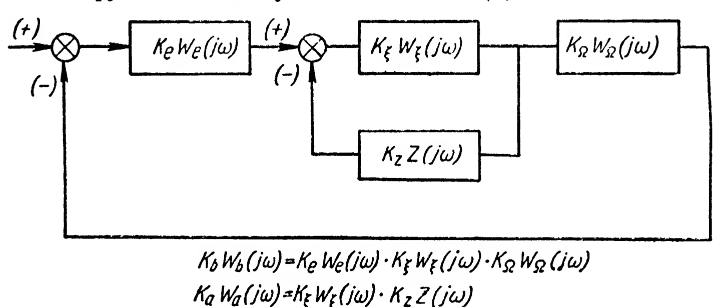
ГЛАВА XVIII

ПРИМЕРЫ СИНТЕЗА КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Поясним методику синтеза корректирующих устройств, изложенную в предыдущей главе, на примерах систем автоматического регулирования, рассмотренных в гл. III.

1. СИНТЕЗ КОРРЕКТИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СКОРОСТИ ГИДРОТУРБИНЫ

Синтез системы автоматического регулирования скорости гидротурбины рассмотрим для случая изменения настройки регулятора скорости. Передаточная функция замкнутой системы $\Phi(s)$ по отношению к воз-



Фиг. 65. Упрощенная структурная схема системы автоматического регулирования скорости гидротурбины.

действию, представляющему изменение настройки регулятора, связана с передаточной функцией разомкнутой системы $KW(s)$ соотношением

$$\Phi(s) = \frac{KW(s)}{1 + KW(s)}.$$

Допустим, что передаточная функция $K_b W_b$ последовательно соединенных (фиг. 65) объекта $K_\Omega W_\Omega$, гидравлических усилителей $K_\xi W_\xi$ и центробежного маятника $K_e W_e$ при отключенном параллельном корректирующем устройстве $K_z Z$, имеет вид

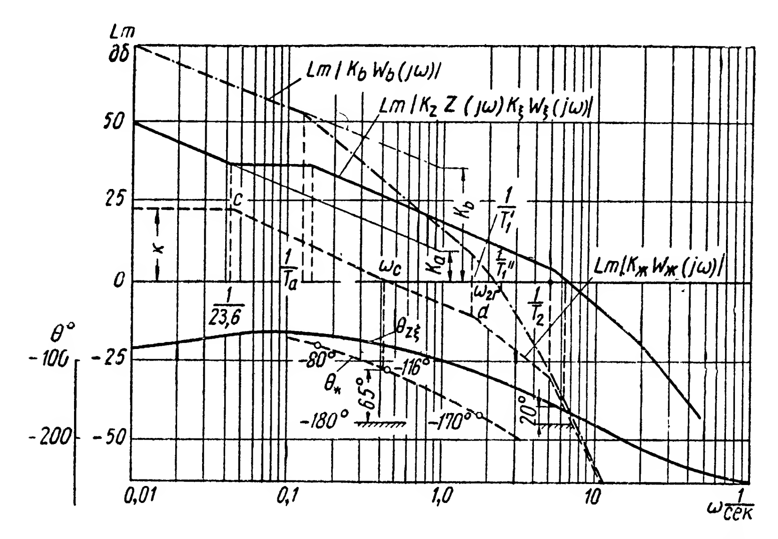
$$K_b W_b(s) \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{s(T_a s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)\left(T_1^2 s^2 + 2\zeta_1 T_1 s + 1\right)}, \tag{332}$$

причем передаточные коэфициенты и постоянные времени, входящие в формулу (332), имеют значения: $k_1 = 15$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0{,}75$, $k_4 = 5{,}0$, $\xi_1 = 1{,}025$, $T_a = 8{,}0$ сек., $T_1 = 0{,}5$ сек., $T_2 = 0{,}2$ сек., $T_3 = 0{,}05$ сек.

Предположим, что необходимо выбрать параметры корректирующего устройства $K_z Z$ таким образом, чтобы:

1) система представляла статическую систему с передаточным коэфициентом $K = 15$;

2) переходный процесс при внезапном изменении настройки был близок к монотонному и время переходного процесса T_0 не превышало 7 сек.



Фиг. 66. Построение желаемой логарифмической амплитудной характеристики системы автоматического регулирования скорости гидротурбины.

В соответствии с методикой, изложенной в предыдущей главе, построим прежде всего логарифмическую амплитудную характеристику $Lm\,|K_b W_b(j\omega)|$ неизменяемой части системы[1].

Соответствующее построение выполнено штрих-пунктирной линией на фиг. 66.

Перейдем к построению желаемой логарифмической характеристики.

[1] Передаточную функцию центробежного маятника

$$K_1 W_1(s) = \frac{k_1}{T_1^2 s^2 + 2\zeta_1 T_1 s + 1}$$

при принятых значениях T_1, ζ_1 и k_1 можно представить в виде

$$K_1 W_1(s) = \frac{15}{(0{,}625s+1)\,(0{,}4s+1)}\,.$$

Согласно первому из сформулированных выше требований низкочастотная асимптота этой характеристики должна быть прямой, параллельной оси частот, и располагаться от нее на расстоянии 23,5 *дб* (так как $20 \lg 15 = 23{,}5$).

Определим приближенно частоту среза ω_c при помощи соотношения

$$\omega_c \approx \frac{\pi}{T_0} = 0{,}45 \ 1/\text{сек}$$

и через точку ω_c проведем среднечастотную асимптоту в виде прямой с наклоном —20 *дб/дек*.

Так как переходный процесс должен быть близок к монотонному, то необходимо обеспечить значительный избыток фазы γ_1. Пользуясь номограммой на фиг. 4 главы XV, выбираем его равным 65°.

Сопряжение низкочастотной и среднечастотной асимптот производим, продолжив их до пересечения друг с другом в точке c (фиг. 66).

Остальную часть желаемой логарифмической амплитудной характеристики, руководствуясь примечанием III предыдущей главы, построим следующим образом. Примем, что при $\omega \gg \frac{1}{T_2}$ она совпадает с характеристикой $Lm|K_b W_b|$, и из точки $Lm|K_b W_b|$, соответствующей $\omega = \frac{1}{T_2}$, проведем прямую с наклоном —40 *дб/дек* до пересечения со среднечастотной асимптотой в точке d.

Проверим теперь, пользуясь формулами (265) и (267) предыдущей главы, какой избыток фазы имеет система при некоторых значениях ω. Кривая $\theta_{ж}(\omega)$ на фиг. 66, построенная при помощи этих формул, показывает, что требуемый избыток фазы порядка 65° сохраняется до частоты среза ω_c, а при $\omega > \omega_c$ быстро падает.

Воспользовавшись номограммой на фиг. 4 главы XV, мы видим, что вследствие этого обстоятельства вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ будет иметь отрицательный экстремум, равный (—0,38). Это может вызвать некоторое отклонение от монотонности, но, повидимому, весьма незначительное. Имея в виду проверить в дальнейшем это обстоятельство, перейдем к определению передаточной функции корректирующего устройства, остановившись на выбранной форме желаемой характеристики затухания $Lm|K_{ж} W_{ж}|$ (фиг. 66).

Рассмотрим передаточную функцию $KW(s)$ схемы на фиг. 65 при отключенной главной и включенной внутренней обратной связи:

$$KW(s) = \frac{K_e W_e K_\xi W_\xi K_\Omega W_\Omega}{1 + K_\xi W_\xi K_z Z}. \tag{333}$$

Если предположить, что в интересующем нас интервале частот

$$|K_\xi W_\xi K_z Z| \gg 1,$$

то мы можем написать:

$$|KW| \approx |K_e W_e K_\xi W_\xi K_\Omega W_\Omega| \, |K_\xi W_\xi K_z Z|^{-1},$$

или

$$|KW| \approx |K_b W_b| \, |K_a W_a|^{-1},$$

где

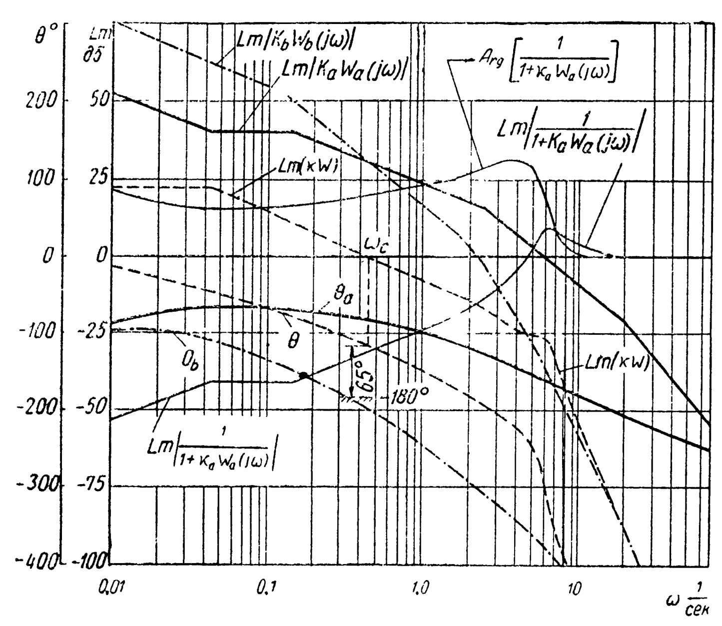
$$K_a W_a = K_\xi W_\xi K_z Z;$$

$$K_b W_b = K_e W_e K_\xi W_\xi K_\Omega W_\Omega.$$

Из полученных соотношений следует, что для того, чтобы получить характеристику затухания $Lm|K_z Z|$ параллельного корректирующего устройства, нужно:

1) найти характеристику $Lm|K_a W_a|$, вычтя из характеристики $Lm|K_b W_b|$ желаемую характеристику $Lm|K_{ж} W_{ж}|$;

2) вычесть из $Lm|K_a W_a|$ характеристику $Lm|K_\xi W_\xi|$.



Фиг. 67. Амплитудные и фазовые характеристики, соответствующие передаточным функциям

$$K_b W_b(j\omega);\ K_a W_a(j\omega);\ \frac{1}{1+K_a W_a(j\omega)}\ \text{и}\ KW(j\omega).$$

Первый из только что указанных шагов выполнен на фиг. 66, причем характеристика затухания $Lm|K_z Z K_\xi W_\xi|$ и соответствующая ей фазовая характеристика $\theta_{z\xi}$ изображены в виде сплошных кривых.

Из фиг. 66 легко видеть, что

$$K_z Z K_\xi W_\xi = \frac{3{,}64\,(23{,}6s+1)}{(7s+1)(0{,}2s+1)(0{,}05s+1)},$$

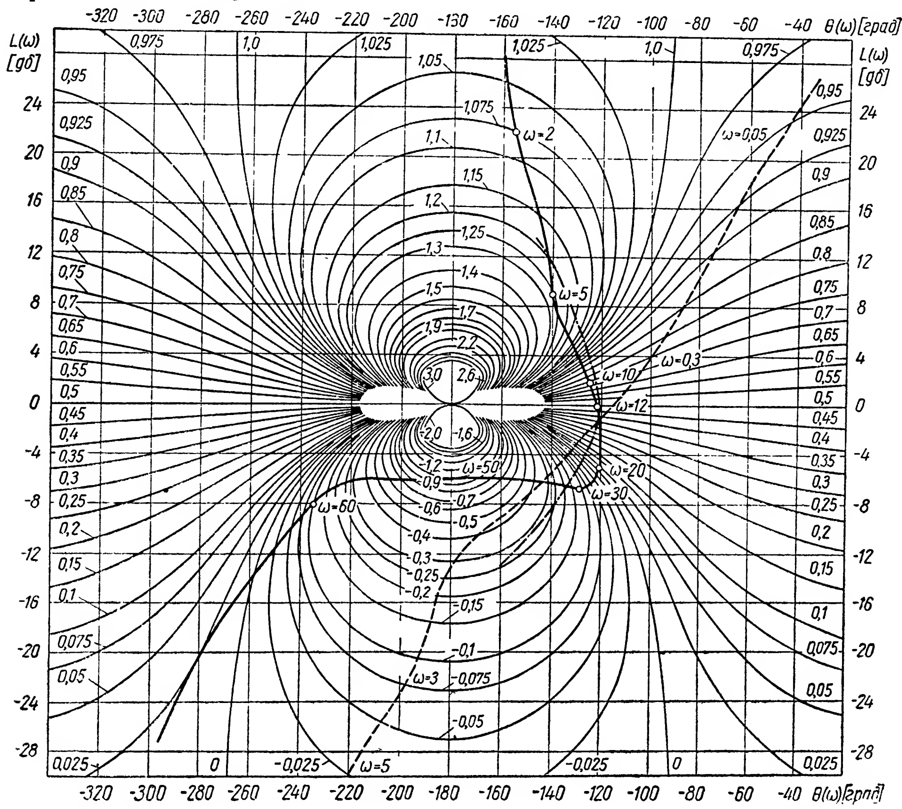
но

$$K_\xi W_\xi = \frac{k_2 k_3 k_4}{(T_2 s+1)(T_3 s+1)} = \frac{3{,}75}{(0{,}2s+1)(0{,}05s+1)},$$

и, следовательно,

$$K_z Z = 0{,}97\left(\frac{23{,}6s + 1}{7s + 1}\right). \qquad (334)$$

По полученной передаточной функции [формула (334)], постоянным времени и коэфициенту K_z устанавливаем, что в качестве корректирующего элемента может быть выбран изодром с параметрами $T_5 = 23{,}6$ сек., $T_4 = 7{,}0$ сек. и $k_5 = 0{,}97$.

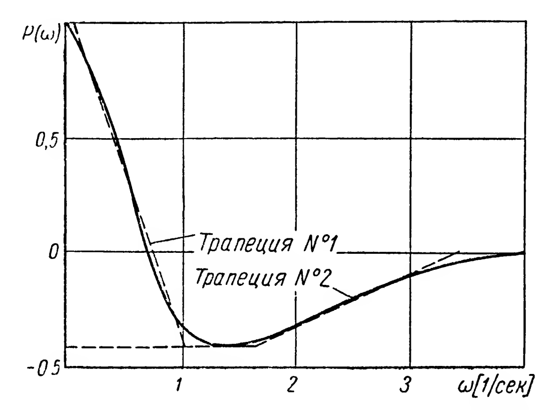


Фиг. 68. Определение вещественных характеристик замкнутой системы при помощи номограммы логарифм амплитуды — фаза.

В заключение произведем проверку полученных результатов. Для этого прежде всего уточним вид логарифмических амплитудной $Lm|KW|$ и фазовой $\theta(\omega)$ характеристик всей системы, который получится при выбранной нами передаточной функции корректирующего устройства.

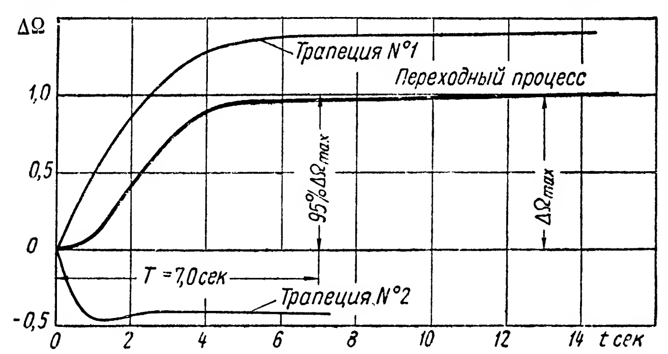
Это можно сделать, найдя по характеристикам $Lm|K_aW_a|$ и $\theta_a(\omega)$ амплитудную и фазовую характеристики, соответствующие выражению $\frac{1}{1+K_aW_a(j\omega)}$, так, как это было изложено в главе XII, и сложив затем ординаты полученных таким образом характеристик с ординатами характеристик $Lm|K_bW_b|$ и θ_b. Это построение произведено на фиг. 67.

Как видно из фиг. 67 и 66, построенные приближенно и точно амплитудная и фазовая характеристики для передаточной функции $\dot{K}W(j\omega)$ отличаются друг от друга лишь в области относительно высоких частот, что практически не оказывает влияния на поведение системы.



Фиг. 69. Вещественная характеристика замкнутой системы автоматического регулирования скорости гидротурбины.

Для того чтобы найти кривую переходного процесса системы, построим вещественную частотную характеристику $P(\omega)$, пользуясь характеристиками $Lm|KW|$ и $\theta(\omega)$ на фиг. 67 и номограммой на фиг. 4



Фиг. 70. Переходный процесс системы автоматического регулирования скорости гидротурбины.

главы XV. Это построение выполнено на фиг. 68 (см. пунктирную кривую), а сама характеристика $P(\omega)$ приведена на фиг. 69. Переходный процесс, полученный методом трапецоидальных характеристик, графически изображен на фиг. 70.

Здесь по оси ординат отложено относительное изменение скорости вращения гидротурбины $\Delta\Omega$.

Как видно из фиг. 70, переходный процесс является апериодическим, и время его протекания равно примерно 7,0 сек.

Итак, выбранное корректирующее устройство позволяет получить систему автоматического регулирования скорости гидротурбины, полностью отвечающую поставленным техническим требованиям.

2. СИНТЕЗ КОРРЕКТИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ КОПИРОВАЛЬНО-ФРЕЗЕРНОГО СТАНКА

В структурной схеме системы копировально-фрезерного станка передаточная функция $K_e W_e$ сводится к постоянной K_e. Передаточная функция системы с разомкнутой главной обратной связью имеет вид

$$KW(s) = \frac{K_e K_\Omega W_\Omega(s) K_\xi W_\xi(s)}{1 + K_\xi W_\xi(s) K_z Z(s)}. \qquad (335)$$

Положим, что передаточная функция $K_\xi W_\xi(s)$ задана нам в виде

$$K_\xi W_\xi(s) = \frac{k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8}{s(T_f s + 1)(T_k s + 1)(T_{\partial в} s + 1)}, \qquad (336)$$

где $T_f = 0{,}008$ сек., $T_{\partial в} = 0{,}11$ сек., $T_k = 0{,}05$ сек., $K_\xi = k_3 k_4 k_5 k_6 k_7 k_8 = 960$.

Допустим, что требования качества заключаются в следующем [1]:

а) следящая система должна обладать астатизмом первого порядка;

б) коэфициенты ошибки по отношению к линейной скорости подачи $C_1 = 0{,}005$ сек., по ускорению $C_2 = 0{,}04$ сек^2;

в) перерегулирование σ в переходном процессе при единичном управляющем воздействии не должно превышать 30%;

г) время переходного процесса при единичном воздействии не более 0,6 сек.

Как и в первом примере, определим вид передаточной функции параллельного корректирующего устройства и найдем числовые значения его параметров, обеспечивающие не только устойчивую работу системы, но и приведенные в пп. а — г требования качества.

По заданным параметрам построим логарифмическую амплитудную характеристику $Lm\,|W_\xi(j\omega)|$. Это построение выполнено на фиг. 71. Построим желаемую логарифмическую амплитудную характеристику. Так как следящая система должна иметь астатизм первого порядка и $K = \frac{1}{C_1} = 200$ 1/сек, то низкочастотная асимптота должна иметь наклон — 20 *дб/дек* и при $\omega = 1$ иметь ординату, равную 46 *дб*.

По заданным значениям σ_{max} и T_{max} определим при помощи кривых на фиг. 49 предыдущей главы частоту среза ω_c:

$$\omega_c = 12 \ 1/\text{сек}.$$

Через точку ω_c проведем прямую с наклоном —20 *дб/дек*. Для того чтобы произвести сопряжение полученной таким образом среднечастотной асимптоты с низкочастотной асимптотой, заметим, что приближен-

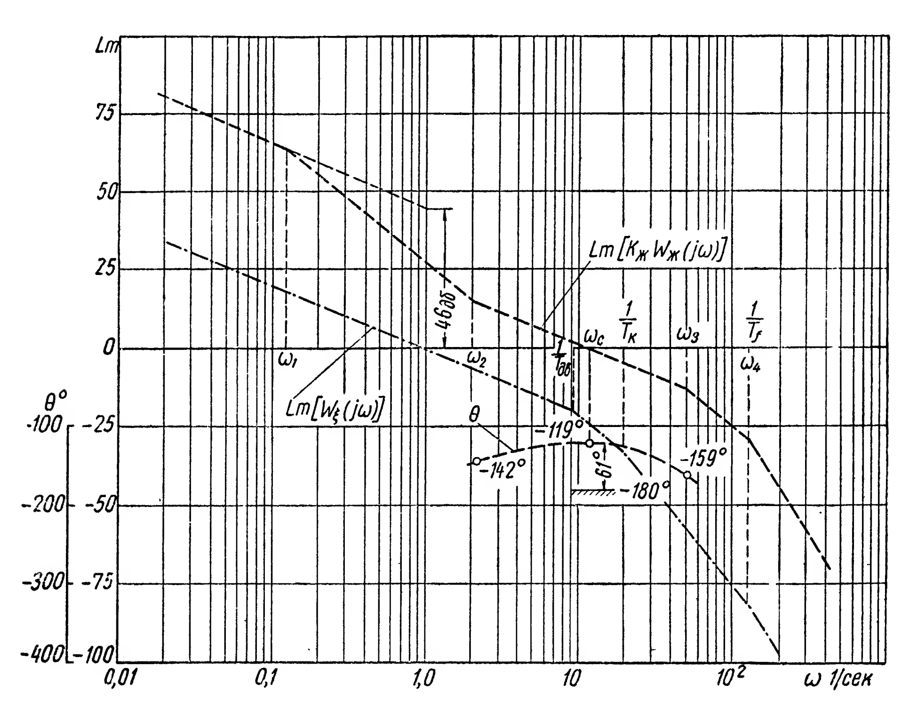
---

[1] Приведенные здесь требования качества на следящую систему выбраны произвольно и служат лишь для иллюстрации излагаемой методики.

ное значение первой сопрягающей частоты ω_1 при условии, что $\omega_1 \ll \omega_2$, определяется соотношением

$$\omega_1 \approx \frac{C_1}{C_2} \approx \frac{0{,}005}{0{,}04} = 0{,}125 \ 1/\text{сек},$$

поэтому для сопряжения обеих асимптот проведем через точку низкочастотной асимптоты, соответствующую найденному значению ω_1, прямую с наклоном —40 *дб/дек* до пересечения ее со среднечастотной асимптотой в точке, имеющей абсциссу ω_2.



Фиг. 71. Построение желаемой логарифмической амплитудной характеристики следящей системы копировально-фрезерного станка.

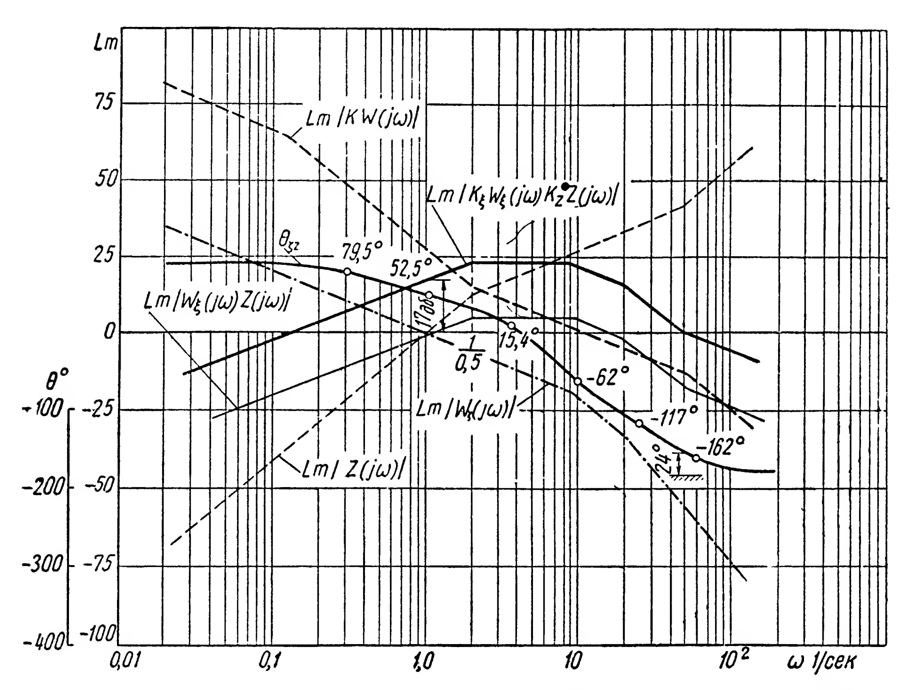
Построение $Lm|K_{ж}W_{ж}|$ при $\omega > \omega_c$ выполним следующим образом. Продолжим среднечастотную асимптоту до сопрягающей частоты $\omega_3 = 50$ 1/сек, после которой проведем прямую с наклоном —40 *дб/дек* до частоты $\omega_4 = \frac{1}{T_f}$. При $\omega > \omega_4$ выберем наклон характеристики $Lm|K_{ж}W_{ж}|$ равным наклону $Lm|W_{\xi}|$, т. е. —80 *дб/дек*.

Выбрав форму желаемой характеристики, проверим, обладает ли она избытком фазы, достаточным для того, чтобы величина σ была меньше 30%. Как это мы видели в главе XV, при $\sigma \leqslant 30\%$ желательно иметь избыток фазы порядка 40° при тех значениях ω, при которых

$$-16 \leqslant Lm|K_{ж}W_{ж}| \leqslant 16.$$

Фазовая характеристика $\theta(\omega)$ на фиг. 71, построенная при помощи формул (265) и (267) предыдущей главы, показывает, что это условие приблизительно удовлетворяется. Поэтому характеристика $Lm\,|K_{жс} W_{жс}|$ на фиг. 71 может служить исходной для синтеза.

Перейдем к определению характеристики затухания $Lm\,|Z|$ корректирующего устройства. Как это было показано в предыдущей главе, характеристика $Lm\,|Z|$ должна быть обратна характеристике $Lm\,|K_{жс} W_{жс}|$ в существенном для качества интервале частот, который в рассматриваемом случае можно считать заключенным в пределах 0,2 1/сек $\leqslant \omega \leqslant$ 100 1/сек.



Фиг. 72. Амплитудная и фазовая характеристика передаточной функции $K_\xi W_\xi(j\omega) K_z Z(j\omega)$ и амплитудные характеристики передаточных функций $KW(j\omega)$ (желаемая характеристика), $W_\xi(j\omega)$ и $Z(j\omega)$.

Имея это в виду, получим характеристику $Lm\,|Z|$, графически изображенную на фиг. 72.

Ей соответствует передаточная функция

$$Z(s) = \frac{s^2 (0{,}02\,s + 1)}{0{,}5s + 1}.$$

Теперь выберем передаточный коэфициент K_z параллельного корректирующего устройства так, чтобы внутренний контур на фиг. 72 обладал достаточным запасом устойчивости по фазе, скажем, порядка 25°. Сложив характеристики $Lm\,|W_\xi|$ и $Lm\,|Z|$, получим характеристику $Lm\,|W_\xi Z|$, приведенную на фиг. 72. Соответствующая ей фазовая характеристика $\theta_{\xi z}(\omega)$ изображена на той же фигуре сплошной линией.

Найдем точку на $\theta_{\xi z}(\omega)$, которой соответствует запас устойчивости порядка 25°. Этой точке соответствует частота $\omega \approx 50$ 1/сек. Очевидно, запас устойчивости по фазе внутреннего контура будет равен 24°, если характеристика $Lm|K_\xi W_\xi K_z Z|$ будет пересекать ось частот при $\omega = 50$ 1/сек. Этого можно достигнуть, сместив ранее найденную характеристику $Lm|W_\xi Z|$ параллельно самой себе вверх на 17 *дб*. Отсюда следует, что

$$K_\xi K_z = 7{,}1 \text{ (или 17 } дб)$$

и

$$K_z = \frac{7{,}1}{960} = 0{,}0148.$$

Итак,

$$K_z Z(s) = \frac{0{,}0148 s^2 (0{,}02s + 1)}{(0{,}5s + 1)}. \qquad (337)$$

Одна из возможных схем корректирующего устройства, состоящая из тахометрического устройства и диференцирующего контура, приведена на фиг. 73.

Передаточная функция этого корректирующего устройства будет иметь вид

$$K_z Z(s) = \frac{KT_1 (T_2 s + 1) s^2}{(T_1 s + 1)}. \qquad (338)$$

Положив в формуле (338) $KT_1 = 0{,}0148$, $T_1 = 0{,}5$ сек. и $T_2 = 0{,}02$ сек., получим формулу (337).

В заключение произведем проверку полученных результатов. Уточним вид характеристик $Lm|KW|$ и $\theta(\omega)$. Для этого найдем логарифмические характеристики для $\frac{1}{1 + K_\xi W_\xi(j\omega) K_z Z(j\omega)}$, построив на номограмме фиг. 74 логарифмическую амплитудно-фазовую характеристику, соответствующую передаточной функции $\frac{1}{K_\xi W_\xi(j\omega) K_z Z(j\omega)}$.

Заметим, что

$$K_e K_\xi = 200,$$

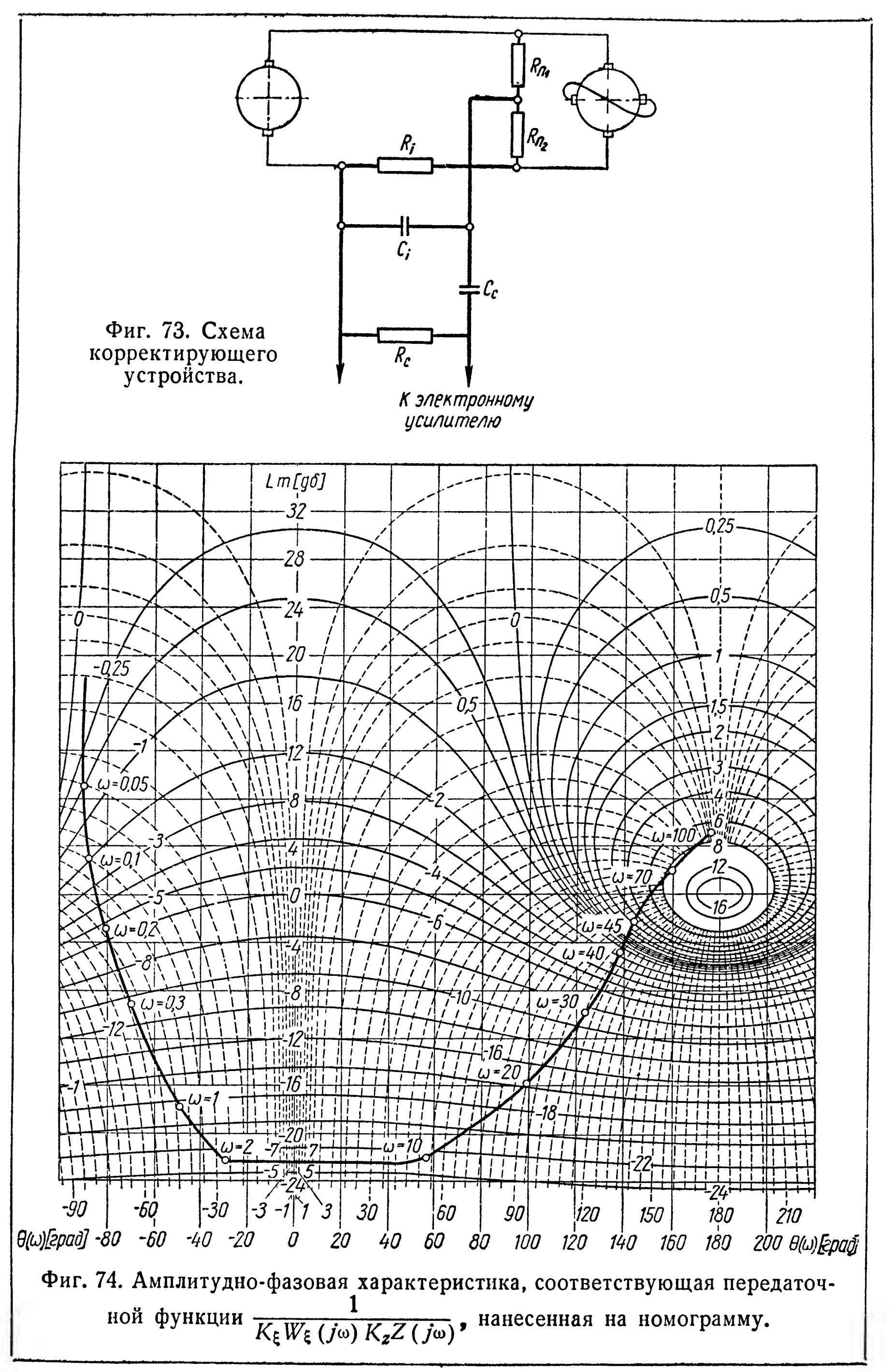
и, следовательно,

$$K_e = 0{,}208.$$

Логарифмические характеристики

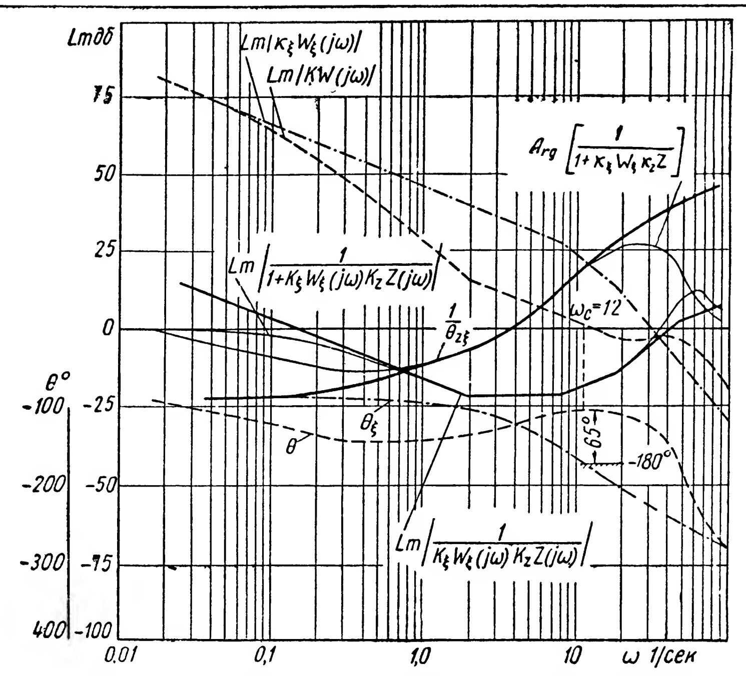
$$Lm\left|\frac{1}{1 + K_\xi W_\xi K_z Z}\right|, \quad \arg\left[\frac{1}{1 + K_\xi W_\xi K_z Z}\right],$$

соответствующие передаточной функции $\frac{1}{1 + K_\xi W_\xi(j\omega) K_z Z(j\omega)}$, найденные при помощи номограммы на фиг. 74, изображены на фиг. 75. Сложив их с характеристиками $Lm|K_\xi W_\xi|$ и θ_ξ, получим искомые характеристики $Lm|KW|$ и $\theta(\omega)$ (см. фиг. 75). Нанеся на номограмму фиг. 68 значения $Lm|KW|$ и $\theta(\omega)$ (сплошной линией), найдем вещественную частотную характеристику $P(\omega)$ (см. фиг. 76).



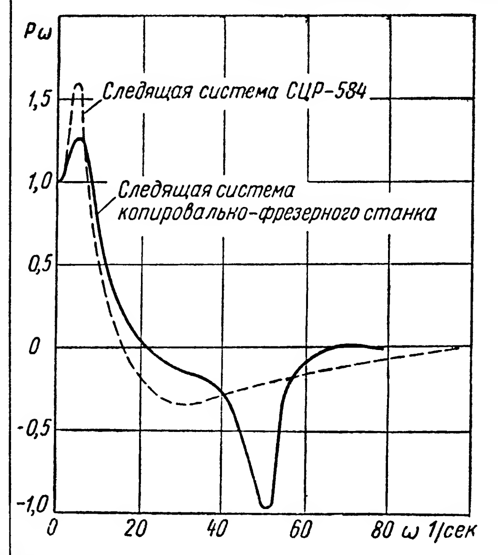
Фиг. 73. Схема корректирующего устройства.

Фиг. 74. Амплитудно-фазовая характеристика, соответствующая передаточной функции $\dfrac{1}{K_\xi W_\xi(j\omega) K_z Z(j\omega)}$, нанесенная на номограмму.

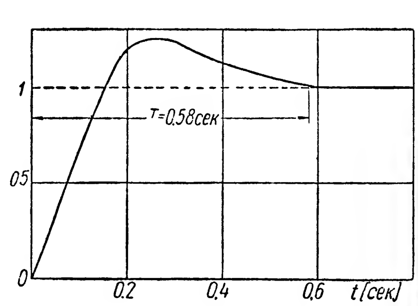


Фиг. 75. Амплитудные и фазовые характеристики передаточных функций $KW(j\omega)$; $K_\xi(j_\xi W\omega)$;

$$\frac{1}{K_\xi W_\xi(j\omega) K_z(j\omega)} \text{ и } \frac{1}{1+K_\xi W_\xi(j\omega) K_z Z(j\omega)}.$$



Фиг. 76. Вещественные характеристики замкнутых следящих систем (копировально-фрезерного станка и СЦР-584).



Фиг. 77. Переходный процесс следящей системы копировально-фрезерного станка.

Соответствующий переходный процесс изображен на фиг. 77. Как видно из фиг. 77, переходный процесс удовлетворяет поставленным требованиям, так как $T = 0{,}58$ сек. и $\sigma = 25\%$.

3. СИНТЕЗ КОРРЕКТИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ СТАНЦИИ СЦР-584

Допустим, что следящая система имеет передаточные функции вида

$$\left.\begin{aligned} K_e W_e(s) &= \frac{k_3 k_4}{(T_3 s + 1)\left(T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1\right)}; \\ K_\xi W_\xi(s) &= \frac{k_5 k_6 k_7 k_8}{s\,(T_f s + 1)\,(T_k s + 1)\,(T_{\partial e} s + 1)}, \end{aligned}\right\} \qquad (339)$$

где $T_3 = 0{,}013$ сек., $T_0 = 0{,}01$ сек., $T_f = 0{,}002$ сек., $T_k = 0{,}02$ сек., $T_{\partial e} = 0{,}11$ сек. и $\xi_0 = 0{,}35$.

Предположим, что требования качества для следящей системы заключаются в следуюшем:

а) система должна иметь астатизм первого порядка;

б) коэфициент ошибки по скорости $C_1 = 0{,}005$ сек. и по ускорению $C_2 = 0{,}0077$ сек^2;

в) перерегулирование σ при единичном управляющем воздействии не должно превышать 40%;

г) время переходного процесса $T_м$ при единичном управляющем воздействии не более $T_м = 1{,}0$ сек.

Дополнительное требование к этой системе заключается в достаточно малой ее чувствительности к помехам. Решение этой задачи в общем случае требует выбора такой передаточной функции, которая обеспечивает наивысшую точность воспроизведения полезного сигнала при наличии возмущающего воздействия, заданного статистически.

Не рассматривая эту задачу подробно (см. об этом в главе XXIII), будем считать, что система мало подвержена действию помех, когда частота ее среза не превышает $\omega_c = 10$ 1/сек.

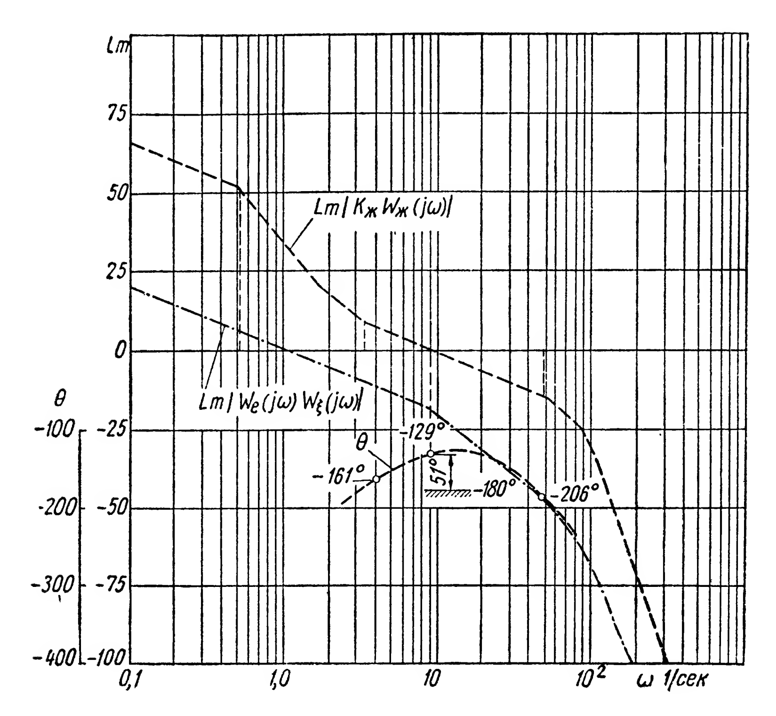
Требуется найти передаточную функцию корректирующего устройства, обеспечивающего удовлетворение приведенных выше требований.

Построив прежде всего, как обычно, характеристику $Lm\,|W_e W_\xi|$ неизменяемой части системы (фиг. 78), перейдем к построению желаемой логарифмической характеристики $Lm\,|K_{ж} W_{ж}|$.

Вид низкочастотной асимптоты, а также первую сопрягающую частоту можно найти из требований пп. а и б, так же как в предыдущем примере. Выбрав частоту среза ω_c равной 9 1/сек, проведем через нее среднечастотную асимптоту в виде прямой с наклоном —20 *дб/дек*. Сопряжение обеих асимптот, а также выбор формы желаемой характеристики $Lm\,|K_{ж} W_{ж}|$ при $\omega > \omega_c$ выполним, не забывая примечания III предыдущей главы, так, чтобы получить запас в интервале частот, в котором $-8 \leqslant Lm\,|K_{ж} W_{ж}| \leqslant 8$ избыток фазы не меньше 20°. Полученная на основании указанных соображений желаемая характеристика $Lm\,|K_{ж} W_{ж}|$ приведена на фиг. 80.

В рассматриваемом примере требования к коэфициентам ошибки и к полосе пропускания не позволили нам построить желаемую характеристику так, чтобы можно было с уверенностью гарантировать выполнение остальных условий качества. Поэтому произведем предварительную оценку качества по характеристикам $Lm|K_{жс} W_{жс}|$ и $\theta_{жс}$.

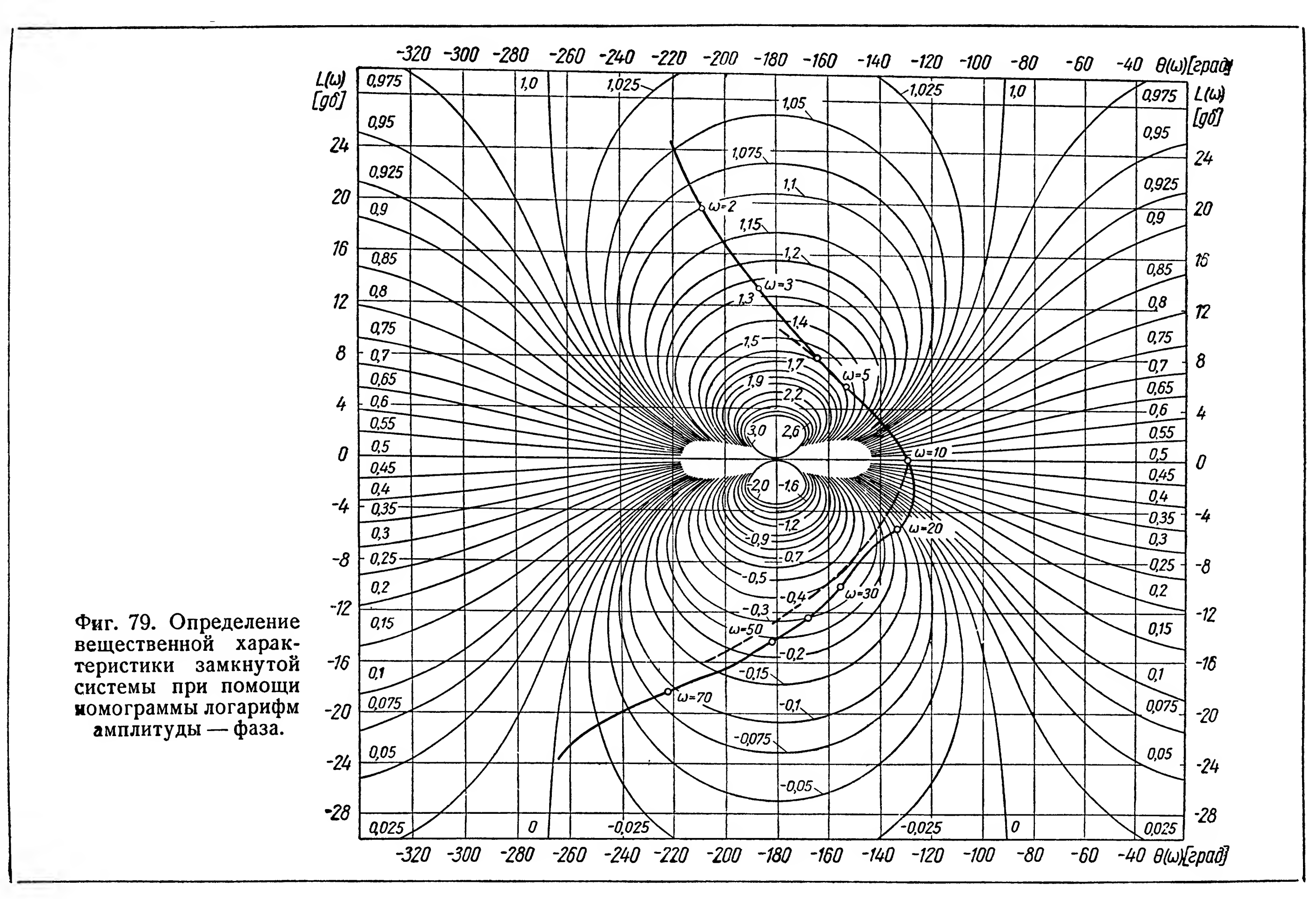
Для этого отложим значения ординат этих характеристик на номограмму (см. пунктирную кривую на фиг. 79).



Фиг. 78. Построение желаемой логарифмической амплитудной характеристики следящей системы радиолокационной станции СЦР-584.

Как видно из фиг. 79, (пунктирная линия) максимум вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ равен 1,6, а минимум — 0,4. Воспользуемся теперь для оценки показателей качества кривыми на фиг. 49 предыдущей главы. Мы получим $\sigma^0/_0 \leqslant 40$; $T_м \leqslant 0{,}95$ сек. Следовательно, желаемая логарифмическая характеристика удовлетворяет поставленным требованиям качества.

Перейдем к определению передаточной функции корректирующего устройства. Для этого построим в существенном для качества системы интервале частот характеристику $Lm|Z|$, обратную желаемой $Lm|W_{жс}|$ (т. е. $Lm|Z| = -Lm|W_{жс}|$ в существенном для качества интервале частот). Характеристика $Lm|Z|$ построена на фиг. 80. На этой же фигуре построена характеристика $Lm|W_\xi|$.

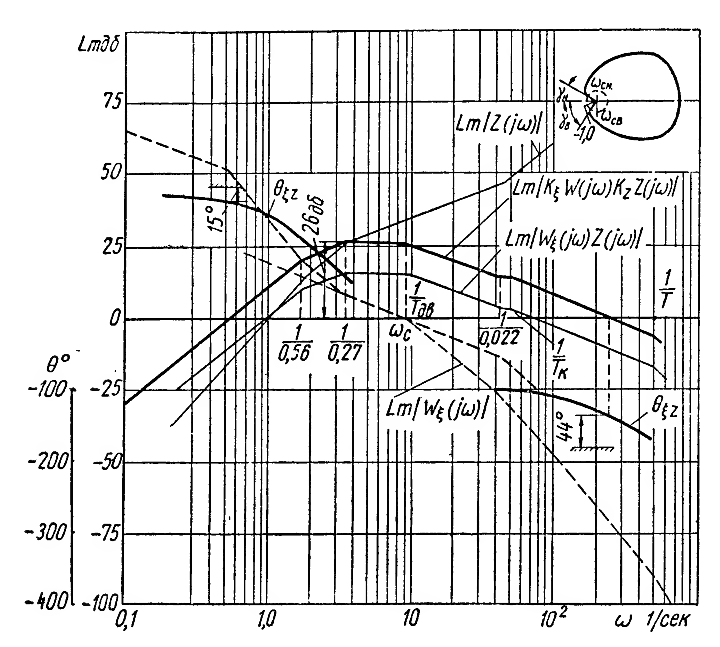


Фиг. 79. Определение вещественной характеристики замкнутой системы при помощи номограммы логарифм амплитуды — фаза.

Сложив эти характеристики, получим амплитудную характеристику $Lm\,[W_\xi(j\omega)\,Z(j\omega)]$.

Теперь вычислим значения фазовой характеристики для передаточной функции $W_\xi(j\omega)\,Z(j\omega)$ и нанесем ее на фиг. 80.

Переместим вверх характеристику $Lm\,|W_\xi(j\omega)\,Z(j\omega)|$ на $Lm\,[K_\xi K_z]$. Величину $K_\xi K_z$ выберем так, чтобы запас устойчивости по фазе на низ-



Фиг. 80. Амплитудная и фазовая характеристики передаточной функции $K_\xi W_\xi(j\omega)\,K_zZ(j\omega)$ и амплитудные характеристики передаточных функций $W_\xi(j\omega)$ и $K_{ж}W_{ж}(j\omega)$ (желаемая характеристика).

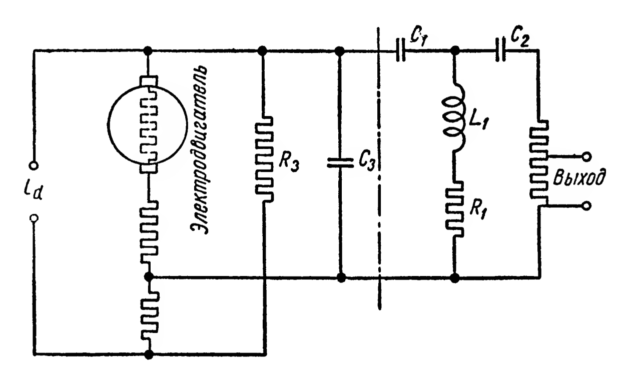
кой частоте среза[1] был не менее 12° и на высокой частоте среза не менее 24°. Этим условиям удовлетворяет значение $K_\xi K_z = 26$ *дб*. При $K_\xi K_z = 26$ *дб* запас по фазе в низкой частоте среза равен 15° и в высокой частоте среза 44°. Определим вид передаточной функции корректирующего устройства по логарифмической амплитудной характеристике $Lm\,|K_zZ(j\omega)|$.

Передаточная функция будет

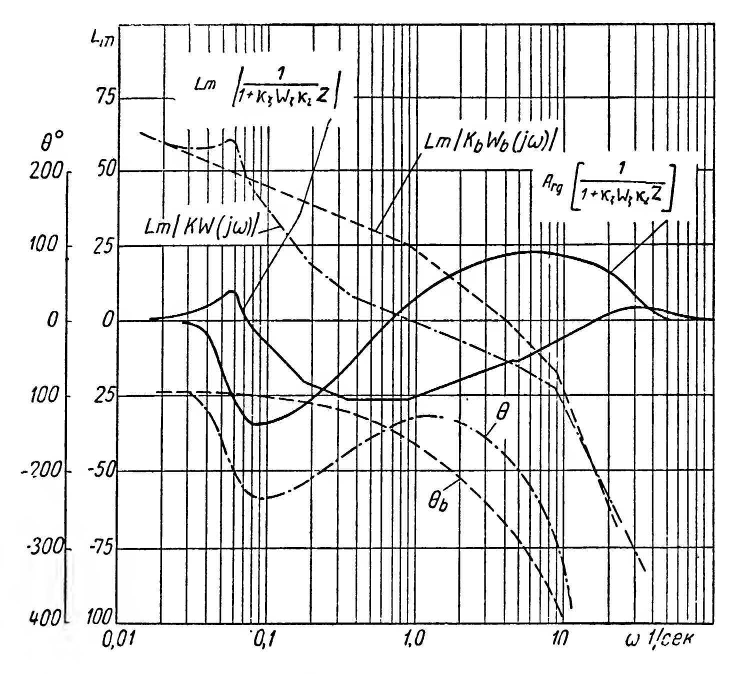
$$K_zZ(j\omega) = \frac{K_zs^2(T_Ls+1)\,s\,(T_{\partial в 0}s+1)}{(T_ns+1)\,(T^*s+1)^2\,(T_xs+1)}. \tag{340}$$

---

[1] Низкой частотой среза называется меньшая из двух частот, при которых логарифмическая амплитудная характеристика, в данном случае $Lm\,|K_\xi W_\xi K_z Z|$, пересекает ось частот. Соответственно высокой частотой среза называется большая из двух указанных частот. На фиг. 80 вверху построена амплитудно-фазовая характеристика $K_\xi W_\xi(j\omega)\,K_zZ(j\omega)$, где показаны запасы устойчивости по фазе $\gamma_н$, $\gamma_в$ в низкой и высокой частотах среза.



Фиг. 81 Схема корректирующего устройства.



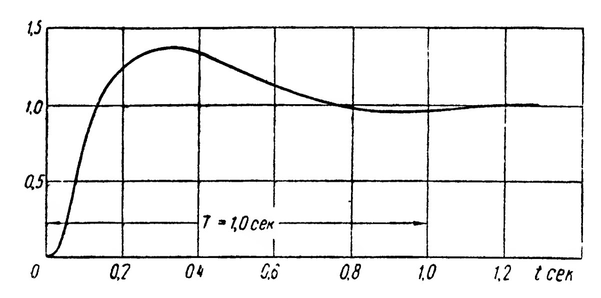
Фиг. 82. Амплитудные и фазовые характеристики внутреннего замкнутого контура и передаточных функций $KW\ (j\omega)$ и $K_bW_b\ (j\omega)$.

Постоянная времени T^* выбрана близкой к постоянной времени T_L. Если подставить численные значения постоянных времени, то формула (340) может быть переписана в виде

$$K_z Z(j\omega) = \frac{K_z s^2 (0,27s+1)\, s\,(0,022s+1)}{(0,56s+1)(0,26s+1)^2(0,0017s+1)}. \qquad (341)$$

Коэфициент K_z определяется по формуле

$$K_z = \frac{20}{K_e}.$$



Фиг. 83. Переходный процесс следящей системы.

По уравнению этой передаточной функции найдем вид корректирующего устройства.

Выбранное нами корректирующее устройство состоит из мостика и стабилизирующего контура (фиг. 81).

На фиг. 82 построим амплитудную и фазовую характеристики для передаточной функции $K_b W_b(j\omega)$.

Сложив эти амплитудную и фазовую характеристики с амплитудной и фазовой характеристиками замкнутого контура $\frac{1}{1 + K_\xi W_\xi K_z Z(j\omega)}$, получим результирующие характеристики для $KW(j\omega)$.

Нанесем на номограмму фиг. 79 значения амплитуд и фаз функции $KW(j\omega)$. Соединив их сплошной линией, получим вещественную частотную характеристику $P(\omega)$ (показана на фиг. 76 пунктирной линией).

По характеристике $P(\omega)$ вычисляем переходный процесс (фиг. 83).

Как видно, время протекания переходного процесса $T_м = 1,0$ сек. при $\sigma = 35^0/_0$. Итак, выбранные параметры корректирующего устройства обеспечивают удовлетворение требований, предъявляемых к этой следящей системе.

ГЛАВА XIX

СВЯЗЬ МЕЖДУ КАЧЕСТВОМ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА И РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

В настоящей главе мы рассмотрим связь между распределением нулей и полюсов передаточной функции системы и аналитическим выражением, определяющим переходный процесс, изложим методы определения основных характеристик распределения корней характеристического уравнения и способы оценки при помощи этих характеристик показателей качества переходного процесса при простейших типах начальных условий.

В связи с тем, что, как это будет показано, большое влияние на качество переходного процесса имеет расположение нулей передаточной функции относительно ее полюсов, а также расположение полюсов комплексного спектра внешнего воздействия, заключительная часть главы посвящена анализу этого вопроса и формулировке рекомендаций по выбору рационального распределения нулей и полюсов передаточной функции по отношению к заданному спектру внешнего воздействия.

1. ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Рассмотрим общие выражения (189) главы V для преобразования Лапласа $X(s)$ переменной $x(t)$, характеризующей протекание переходного процесса в исследуемой системе. Полагая, что преобразование Лапласа $F(s)$ для воздействия $f(t)$ представляет дробно-рациональную функцию от s вида

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{F_2(s)}, \tag{342}$$

где $F_1(s)$ и $F_2(s)$ полиномы от s, мы можем, подставляя формулу (342) в (189), написать:

$$X(s)=\frac{M(s)F_1(s)}{D(s)F_2(s)}+\frac{M_н(s)}{D(s)}. \tag{343}$$

Разложив многочлены $D(s)$, $M(s)$, $F_1(s)$ и $F_2(s)$ на множители и обозначив нули $D(s)$ через λ, а их число через n, нули $M(s)$ через γ,

а их число через m, нули $F_1(s)$ через σ, а их число через μ, нули $F_2(s)$ через ρ, а их число через ν, получим

$$D(s) = a_m(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\dots(s-\lambda_n);$$
$$M(s) = b_m(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)\dots(s-\gamma_m);$$
$$F_1(s) = f_1(s-\sigma_1)(s-\sigma_2)\dots(s-\sigma_\mu);$$
$$F_2(s) = f_2(s-\rho_1)(s-\rho_2)\dots(s-\rho_\nu);$$

положив $\frac{f_1}{f_2} = f_0$, будем иметь

$$X(s) = \frac{b_m(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)\dots(s-\gamma_m)}{a_n(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\dots(s-\lambda_n)} f_0 \frac{(s-\sigma_1)(s-\sigma_2)\dots(s-\sigma_\mu)}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)\dots(s-\rho_\nu)} + \\ + \frac{M_н(s)}{a_n(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\dots(s-\lambda_n)}. \quad (344)$$

Это выражение ясно показывает, что в общем случае преобразование Лапласа $X(s)$ для изменения регулируемой величины в переходном процессе зависит от следующих факторов:

1) распределения полюсов λ передаточной функции (корней характеристического уравнения);

2) распределения нулей γ передаточной функции;

3) вида возмущающего воздействия $f(t)$ (нулей σ и полюсов ρ его изображения);

4) начальных условий [вида функции $M_н(s)$];

5) постоянных коэфициентов a_n, b_m и f_0.

Применим к уравнению (344) обратное преобразование Лапласа, предположив для простоты, что все нули $D(s)$ и $F_2(s)$ простые.

Пользуясь формулой (196а) и группируя отдельно члены, соответствующие полюсам λ передаточной функции, полюсам ρ преобразования Лапласа $F(s)$ для воздействия и начальным условиям, получим

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M(\lambda_i) F_1(\lambda_i)}{D'(\lambda_i) F_2(\lambda_i)} e^{\lambda_i t} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{M(\rho_k) F_1(\rho_k)}{D(\rho_k) F_2'(\rho_k)} e^{\rho_k t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{M_н(\lambda_i)}{D'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}. \quad (345)$$

Если преобразование Лапласа $F(s)$ возмущающего воздействия имеет один полюс в начале координат, т. е. если

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{sF_{21}(s)} \text{ и } F_{21}(s) = f_2(s-\rho_2)(s-\rho_3)\dots(s-\rho_\nu),$$

то выражение для регулируемой величины примет вид

$$x(t) = \frac{M(0) F_1(0)}{D(0) F_{21}(0)} + \sum_{k=2}^{\nu} \frac{M(\rho_k) F_1(\rho_k)}{\rho_k D(\rho_k) F_{21}'(\rho_k)} e^{\rho_k t} + \\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{M(\lambda_i) F_1(\lambda_i)}{D'(\lambda_i) F_2(\lambda_i)} e^{\lambda_i t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{M_н(\lambda_i)}{D'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}. \quad (346)$$

Обозначим постоянные

$$\frac{M(0)\,F_1(0)}{D(0)\,F_{21}(0)} = x(\infty); \quad \frac{M(\rho_k)\,F_1(\rho_k)}{\rho_k D(\rho_k)\,F'_{21}(\rho_k)} = C_{вk}; \quad \frac{M(\lambda_i)\,F_1(\lambda_i)}{D'(\lambda_i)\,F_2(\lambda_i)} = C_{ci}$$

и

$$\frac{M_н(\lambda_i)}{D'(\lambda_i)} = C_{нi}.$$

Выражение (346) получит вид

$$x(t) = x(\infty) + \sum_{k=2}^{\nu} C_{вк} e^{\rho_k t} + \sum_{i=1}^{n} C_{ci}\, e^{\lambda_i t} + \sum_{i=1}^{n} C_{нi}\, e^{\lambda_i t}. \qquad (347)$$

Первые два члена представляют вынужденную составляющую решения, определяемую полюсами преобразования Лапласа $F(s)$ возмущающего воздействия $f(t)$.

В данном случае при наличии полюса этого преобразования в начале координат и при $M(0)\,F_1(0) \neq 0$ вынужденная часть решения имеет постоянную составляющую $x(\infty)$. Обозначим вынужденную составляющую решения через $x_в(t)$:

$$x_в(t) = x(\infty) + \sum_{k=2}^{\nu} C_{вк} e^{\rho_k t}.$$

Последние два члена решения (347) представляют собственную составляющую, определяемую полюсами передаточной функции системы. Первый из них определяет собственные движения, возникающие в системе под влиянием возмущающего воздействия, и зависит от его вида. Эта составляющая имеет место и при нулевых начальных условиях. Иногда ее называют собственной сопровождающей составляющей [13]. Обозначим ее $x_c(t)$.

Последний член решения целиком определяется передаточной функцией системы и начальными условиями и носит название свободной составляющей решения. Обозначим ее $x_{св}(t)$. Тогда в общем виде решение диференциального уравнения процесса регулирования можем записать:

$$x(t) = x_в(t) + x_c(t) + x_{св}(t). \qquad (348)$$

2. АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СИСТЕМЫ И ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

Как уже отмечалось выше, часто о динамических свойствах систем автоматического регулирования судят по характеру переходных процессов, которые протекают в системе при единичном ступенчатом возмущающем воздействии и при нулевых начальных условиях.

При этом

$$F(s) = \frac{1}{s}; \quad M_н(s) = 0,$$

и общее выражение (343) для преобразования Лапласа $X(s)$ сводится к виду

$$X(s) = \frac{M(s)}{sD(s)} = \frac{b_m(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)\ldots(s-\gamma_m)}{a_n s(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_n)}. \qquad (349)$$

Это выражение показывает, что существенное и определяющее значение для переходного процесса, а следовательно, и для основных показателей его качества имеют как полюсы, так и нули передаточной функции. Поэтому в общем случае анализ лишь распределения корней характеристического уравнения (полюсов передаточной функции) не может дать правильного представления о характере переходного процесса. Тем не менее в литературе большое внимание уделяется исследованию распределения корней характеристических уравнений и оценке качества переходных процессов по основным показателям этого распределения при простейших типах начальных условий [обычно при $x(0)=1$, $x'(0)=x''(0)=\ldots=x^{(n-1)}(0)=0$].

О том, что подобное исследование не всегда может дать правильное представление о процессах, протекающих в реальной системе, может свидетельствовать хотя бы такой пример: одинаковые, тождественные характеристические уравнения могут иметь статическая и астатическая системы регулирования; несмотря на то, что переходные процессы в таких системах при ступенчатом возмущающем воздействии принципиально отличаются друг от друга, оценки качества переходных процессов, полученные лишь на основании исследования распределения корней характеристического уравнения при простейших типах начальных условий, будут одинаковыми.

Правда, для любой системы можно найти определенные начальные условия, при которых свободные колебания, найденные по характеристическому уравнению, будут соответствовать переходному процессу в реальной системе, протекающему при единичном ступенчатом возмущающем воздействии и нулевых начальных условиях. При этом начальные условия получаются обычно достаточно сложными, и оценка качества процесса по распределению корней характеристического уравнения усложняется.

Отдавая себе в этом полный отчет, мы все же рассмотрим здесь методику определения начальных условий, позволяющих получить колебания, совпадающие с переходным процессом в системе при единичном ступенчатом воздействии (см. [1] и [8]), поскольку этот вопрос имеет самостоятельный интерес.

При применении преобразования Лапласа начальные значения функции времени (регулируемой величины) $x(t)$ и ее производных могут быть найдены непосредственно по изображению этой функции $X(s)$, без применения обратного преобразования Лапласа, с помощью предельного перехода:

$$x(0+)=\lim_{s\to\infty} sX(s);$$

$$x'(0+)=\lim_{s\to\infty} s[sX(s)-x(0+)];$$

$$x''(0+)=\lim_{s\to\infty} s[s^2X(s)-sx(0+)-x'(0+)];$$

. . . .

$$x^{n}(0+)=\lim_{s\to\infty} s\,[s^{n}X(s)-s^{n-1}x(0+)-\ldots-x^{(n-1)}(0+)].$$

Приведенные соотношения следуют из формул (138) главы V, если в них заменить $f(t)$ через $x(t)$ и воспользоваться теоремой о начальном значении [см. формулу (147), главы V].

По преобразованию Лапласа $X(s)$ при помощи теоремы о конечном значении [см. формулу (144) главы V] может быть найдено и предельное значение функции времени $x(t)$, к которому она стремится при t, стремящемся к бесконечности [если $sX(s)$ — функция аналитическая в правой полуплоскости и на мнимой оси, что для устойчивых систем, к которым приложено единичное воздействие, всегда выполняется].

Действительно,

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s).$$

Для рассматриваемого случая, когда $X(s) = \frac{M(s)}{sD(s)}$, будем иметь

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{M(s)}{D(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} = \frac{b_0}{a_0};$$

$$x(0) = \lim_{s \to \infty} \frac{M(s)}{D(s)} = \lim_{s \to \infty} \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0};$$

при $m < n$

$$x(0) = 0;$$

$$x'(0) = \lim_{s \to \infty} \left[\frac{sM(s)}{D(s)} - sx(0)\right];$$

при $m = n - 1$

$$x'(0) = \frac{b_m}{a_n}.$$

Для этого же случая имеем

$$x''(0) \lim_{s \to \infty} s \left[\frac{sM(s)}{D(s)} - 0 - \frac{b_m}{a_n}\right] = \frac{a_n b_{m-1} - a_{n-1} b_m}{a_n^2}$$

и т. д.

Найденные таким образом значения $x(\infty)$, $x(0+)$, $x'(0+) \ldots x^{(n-1)}(0+)$ могут быть использованы для определения таких начальных условий, при которых свободные колебания системы протекают так же, как переходный процесс, вызванный в исходной системе воздействием в виде единичной ступенчатой функции.

Чтобы убедиться в этом, следует лишь установить связь между процессами, протекающими в том и другом случае.

Нетрудно видеть, что переход от одного процесса к другому сводится лишь к переносу начала координат на величину конечного значения $x(\infty)$, к которому будет стремиться регулируемая величина при единичном ступенчатом воздействии и при нулевых начальных условиях. Следовательно, все производные $x'(t)$, $x''(t), \ldots$ в том и другом случае будут одинаковыми в течение всего процесса, в том числе и в начальный момент при $t = 0+$, а величина отклонения регулируемой величины при свободных колебаниях $x_{св}(t)$ будет связана с отклонением $x(t)$ при ступенчатом воздействии соотношением

$$x_{св}(t) = x(t) + x(0),$$

где $x(0) = -x(\infty) = -\lim_{s \to 0} sX(s)$.

Сопоставление переходного процесса при типовом ступенчатом воздействии и свободных колебаний, найденных по характеристическому уравнению системы при соответствующих начальных условиях, показывает, что в общем случае начальные условия получаются сложными и сильно отличаются от тех типовых начальных условий, которые обычно применяются при оценке качества переходных процессов по распределению корней характеристического уравнения,

Только в том случае, когда передаточная функция системы $Y(s) = \frac{M(s)}{D(s)}$ *не имеет нулей, т. е. когда ее числитель представляет постоянную величину, не зависящую от* s, *качество переходного процесса вполне допустимо оценивать по распределению корней характеристического уравнения при простейших типовых начальных условиях*

Рассмотрение этого частного, но распространенного случая и будет представлять ближайшую цель дальнейшего изложения.

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЮСОВ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Итак, условимся рассматривать далее системы автоматического регулирования, имеющие передаточные функции вида

$$Y(s) = \frac{1}{D(s)},$$

где $D(s)$ — полином от s, имеющий все нули, расположенные в левой полуплоскости.

Для точного определения кривой переходного процесса, вызванного единичным ступенчатым воздействием, нужно знать расположение всех полюсов передаточной функции. Однако для приближенного определения характера переходного процесса, для оценки его качества в большинстве случаев достаточно определить область, внутри которой расположены полюсы передаточной функции в плоскости комплексного переменного. Эту область можно ограничить по-разному.

Наиболее просто ее представить в виде фигуры, ограниченной дугами окружностей с радиусами, равными наибольшему и наименьшему из модулей полюсов передаточной функции системы, и отрезками лучей, проведенных из начала координат через ту пару комплексных сопряженных полюсов, которая дает наибольший угол 2ψ, заключенный между этими лучами (фиг. 84).

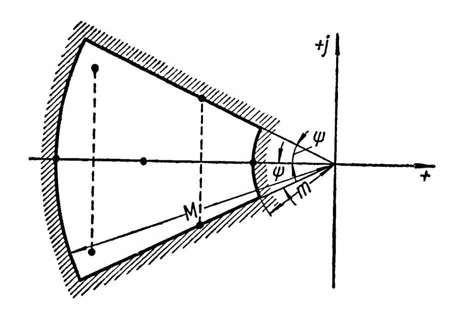
При грубой предварительной оценке области распределения полюсов такое ограничение этой области весьма удобно, поскольку приближенная оценка границ, внутри которых заключены модули полюсов передаточной функции (нулей знаменателя ее), как мы увидим в дальнейшем, очень проста [2].

Однако вычисление модулей полюсов с достаточно высокой точностью представляет затруднения. Поэтому обычно область распределения полюсов передаточной функции ограничивают равнобокой трапецией, на сторонах и основаниях которой расположено хотя бы по

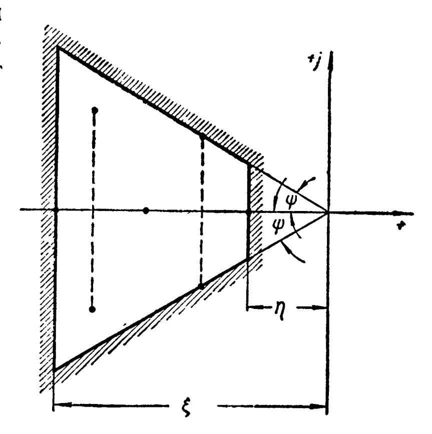
одному полюсу, а вне ее не содержится полюсов. Стороны такой трапеции образуются отрезками лучей, проведенных через начало координат, а основания представляют отрезки параллельных мнимой оси прямых, заключенные между этими лучами (фиг. 85).

Если все полюсы передаточной функции вещественны, то область расположения полюсов такой передаточной функции вырождается в отрезок действительной оси, заключенный между наиболее удаленным от начала координат и наиболее близким к нему полюсами.

Ограниченную таким образом область расположения полюсов передаточной функции вполне определяют три существенные величины:



Фиг. 84. Границы области расположения полюсов передаточной функции системы. Заданы ψ, M и m.



Фиг. 85. Границы области расположения полюсов передаточной функции системы. Заданы ψ, η и ξ.

1) абсолютное значение вещественной части полюса, ближайшего к мнимой оси η; эта величина носит название степени устойчивости[1] [6];

2) абсолютное значение вещественной части наиболее удаленного от мнимой оси полюса;

3) угол 2ψ, внутри и на границе которого расположены все полюсы передаточной функции; тангенс половины этого угла $\mu = \operatorname{tg} \psi$ называют колебательностью системы [5].

Как увидим дальше, для некоторых частных случаев распределения полюсов передаточной функции системы можно получить более или менее точные оценки качества переходного процесса при определенных простейших начальных значениях[2]. Поэтому целесообразно классифицировать возможные распределения полюсов передаточной функции и типы начальных значений.

Примем следующую классификацию распределения полюсов передаточной функции, предложенную А. А. Фельдбаумом [5]:

класс 0 — все полюсы вещественные;

---

[1] Степень устойчивости не имеет ничего общего с запасом устойчивости, под которым обычно понимают наименьшее изменение того или иного параметра (или характеристики) системы, при котором нарушается ее устойчивость.

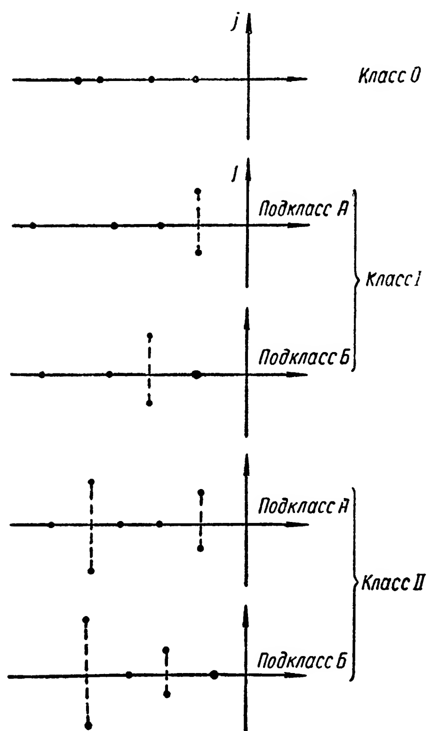
[2] Т. е. значениях, которые функция $x(t)$ и ее производные имеют в момент времени $t = 0^{+}$.

класс I — среди полюсов имеется только одна пара комплексно сопряженных полюсов;

класс II — имеются две пары комплексно сопряженных полюсов и т. д.

При этом число вещественных полюсов не ограничивается.

Целесообразно, кроме того, ввести и подклассы распределения [10]. Отнесем к подклассу А такое распределение полюсов, при котором ближе всего к мнимой оси лежит пара комплексно сопряженных полюсов, и к подклассу Б такое распределение, при котором ближайшим к мнимой оси является вещественный полюс (фиг. 86).



Фиг. 86. Классы распределения полюсов передаточной функции системы.

Изучение распределения корней характеристического уравнения в теории автоматического регулирования впервые было произведено основоположником теории регулирования И. А. Вышнеградским.

Среди всего многообразия возможных начальных значений, если следовать излагаемому ниже методу, целесообразно выделить ряд типовых.

Излагаемый метод связан с введением понятия так называемых единичных начальных значений.

Будем называть единичные начальные значения начальными значениями типа 0, если начальное отклонение регулируемой величины

$$x(0) = x_0 = 1,$$

а его $n-1$ производных равны нулю:

$$x'(0) = x''(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0;$$

типа I, если

$$x'(0) = x_1 = 1,$$

а

$$x(0) = x''(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0;$$

. . . .

типа $n-1$, если

$$x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} = 1,$$

а

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-2)}(0) = 0.$$

Оценки качества переходных процессов, полученные при единичных начальных значениях, в ряде случаев могут быть распространены и на другие процессы при более сложных типах начальных значений.

4. МЕТОДЫ ОТЫСКАНИЯ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЮСОВ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Для точного вычисления кривой переходного процесса необходимо знать положение всех корней характеристического уравнения. Для уравнений высоких степеней эта задача решается лишь приближенно.

Существует большое число различных методов приближенного определения корней. Однако здесь мы не будем затрагивать этих вопросов.

Рассмотрим методы определения основных характеристик распределения полюсов передаточной функции, или, что то же, корней характеристического уравнения системы — верхней и нижней границ модулей корней, степени устойчивости η, вещественной части наиболее удаленного от мнимой оси полюса ξ и колебательности $\mu = \operatorname{tg}\psi$, не требующие вычисления всех корней характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение системы возьмем в виде

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0. \qquad (350)$$

Для определения основных показателей распределения корней характеристического уравнения нет необходимости вычислять все корни.

Для приближенной, предварительной оценки области расположения корней характеристического уравнения, как уже отмечалось, целесообразно вычислить границы, внутри которых расположены модули корней уравнения. Известные теоремы высшей алгебры [2] позволяют решить эту задачу.

Верхняя граница M модулей всех действительных и комплексных корней характеристического уравнения определяется выражением

$$M \leqslant 1 + \frac{a_{k\max}}{a_n}, \qquad (351)$$

где a_n — старший коэфициент уравнения n-й степени;

$a_{k\max}$ — наибольший из модулей остальных коэфициентов уравнения.

Например, для уравнения

$$2s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$$

получим

$$M \leqslant 1 + \frac{10}{2} = 6.$$

Полезно иметь в виду теорему Какейя [2], которую мы приведем без доказательства: если коэфициенты уравнения

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

все положительны и строго убывают, т. е.

$$a_n > a_{n-1} > \ldots > a_0 > 0,$$

то все его корни, как действительные, так и комплексные, лежат внутри единичного круга, т. е. по модулю меньше единицы. Если же коэфициенты уравнения строго возрастают ($0 < a_n < a_{n-1} < \ldots < a_0$),

то все корни лежат вне единичного круга, т. е. по модулю больше единицы.

Более интересные результаты дает обобщение теоремы Какейя [2]. Если все коэфициенты уравнения $D(s)=0$ строго положительны и если все отношения последующего коэфициента к предыдущему $\frac{a_{k-1}}{a_k}$ заключены между положительными числами m и M $(0<m<\frac{a_{k-1}}{a_k}<M;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, то модули корней уравнения λ_k заключены между теми же числами m и M:

$$m \leqslant |\lambda| \leqslant M. \tag{352}$$

Пример. Для уравнения

$$D(s)=s^5+3s^4+s^3+2s^2+3s+2=0$$

отношение коэфициентов будут соответственно равны 3; $\frac{1}{3}$; 2; $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$. Отсюда $m=\frac{1}{3}$ и $M=3$. Поэтому для любого корня уравнения λ_k будет справедливо неравенство

$$\frac{1}{3} \leqslant |\lambda_k| \leqslant 3.$$

К сожалению, рассмотренные теоремы нередко дают слишком расширенные границы области распределения корней характеристического уравнения, и при точных расчетах использовать полученные соотношения нецелесообразно, несмотря на всю их простоту. Поэтому чаще определяют область распределения корней характеристического уравнения, вычисляя степень устойчивости η и вещественную часть наиболее удаленного от мнимой оси корня ξ.

Для определения степени устойчивости можно воспользоваться следующим методом, разработанным Я. З. Цыпкиным и П. В. Бромбергом [6].

Если передвинуть мнимую ось плоскости корней характеристического уравнения влево на величину η, равную степени устойчивости, то по меньшей мере один вещественный корень или пара сопряженных комплексных корней попадет на мнимую ось, и система окажется на границе устойчивости. При этом старший определитель Гурвица обратится в нуль. Таким образом, приравнивание нулю старшего определителя Гурвица характеристического уравнения со смещенной влево на величину η мнимой осью дает уравнение для определения степени устойчивости системы.

Выполним указанные операции.

а) Сместим мнимую ось плоскости корней характеристического уравнения влево на неизвестную пока величину η. Для этой цели положим $s=z-\eta$ и подставим в характеристическое уравнение

$$D(z)=(z-\eta)^n+a_{n-1}(z-\eta)^{n-1}+\ldots+a_1(z-\eta)+a_0=0$$

или

$$D(z)=z^n+A_{n-1}z^{n-1}+\ldots+A_1z+A_0=0. \tag{353}$$

Коэфициенты полученного уравнения можно вычислить по формуле

$$A_k = \frac{D^{(k)}(-\eta)}{k!},$$

где

$$D^{(k)}(-\eta) = \left(\frac{d^k [D(s)]}{ds^k}\right)_{s=-\eta}.$$

б) Приравняем нулю старший определитель Гурвица Δ_n уравнения (353), который можно представить в виде

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} A_0 = 0, \tag{354}$$

где Δ_{n-1} — предпоследний определитель Гурвица того же уравнения.

При этом могут быть два случая:

1) $A_0 = 0$; $\Delta_{n-1} > 0$, и все остальные условия устойчивости Гурвица соблюдаются;

2) $\Delta_{n-1} = 0$; $A_0 > 0$, и все остальные условия устойчивости Гурвица соблюдаются.

В первом случае один вещественный корень характеристического уравнения (353) лежит в начале координат, а все остальные — в левой полуплоскости. При этом имеет место такое распределение корней характеристического уравнения (350), при котором ближайшим к мнимой оси является вещественный корень (распределение подкласса Б). Степень устойчивости системы — абсолютная величина этого корня — определяется наименьшим положительным корнем уравнения $A_0 = 0$.

Во втором случае два сопряженных корня уравнения (353) лежат на мнимой оси, а все остальные — в левой полуплоскости.

Среди корней характеристического уравнения (350) ближайшей к мнимой оси будет пара комплексных корней (распределение подкласса А). Степень устойчивости системы будет определяться наименьшим положительным корнем уравнения

$$\Delta_{n-1} = 0.$$

Следует отметить, однако, что трудность определения степени устойчивости η в общем случае такая же, как и определения корней исходного характеристического уравнения, так как уравнения $A_0 = 0$ и $\Delta_{n-1} = 0$ получаются той же степени относительно η, что и исходное уравнение $D(s) = 0$ относительно s.

В качестве примера рассмотрим характеристическое уравнение третьей степени

$$D(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0. \tag{355}$$

Нормируем это уравнение, заменив переменную:

$$s = \sqrt[3]{a_0}\, y;$$

$$D(y) = y^3 + Ay^2 + By + 1 = 0. \tag{356}$$

Здесь

$$A = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0}} \text{ и } B = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2}}$$

параметры Вышнеградского, полностью определяющие уравнение третьей степени.

Степень устойчивости исходного уравнения (355), которую обозначим η^*, будет связана со степенью устойчивости нормированного уравнения (356) η соотношением

$$\eta^* = \sqrt[3]{a_0}\,\eta.$$

Сместим мнимую ось в плоскости y влево на величину η, произведя замену $y = z - \eta$:

$$D(z) = z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0 = 0. \tag{357}$$

Здесь

$$A_2 = A - 3\eta;$$
$$A_1 = 3\eta^2 - 2A\eta + B;$$
$$A_0 = -\eta^3 + A\eta^2 - B\eta + 1. \tag{358}$$

Приравнивая нулю свободный член уравнения (357) A_0 или предпоследний определитель Гурвица $A_2 A_1 - A_0$, можно определить степень устойчивости системы по заданным коэфициентам A и B уравнения (356) (или по коэфициентам исходного уравнения a_0, a_1 и a_2), причем остальные неравенства Гурвица позволяют определить из условий их совместности, какой из указанных выше двух случаев распределения корней имеет место.

Однако, вместо того чтобы для каждого конкретного случая определять степень устойчивости системы, целесообразно на диаграмму Вышнеградского в координатах (A, B) (см. главу XI) нанести линии равной степени устойчивости $B = f(A)_{\eta=\text{const}}$ [6].

Пользуясь такой диаграммой, можно непосредственно решать две задачи:

1) по заданным коэфициентам характеристического уравнения A и B определять степень устойчивости η;

2) по заданной степени устойчивости определять коэфициенты A и B, которые должно иметь характеристическое уравнение.

Рассмотрим методику построения такой диаграммы.

Для первого случая распределения корней (для подкласса Б) имеем $A_0 = 0$; $A_1 > 0$; $A_2 > 0$* или, учитывая уравнения (358),

$$A_0 = -\eta^3 + A\eta^2 - B\eta + 1 = 0;$$
$$A_1 = 3\eta^2 - 2A\eta + B > 0;$$
$$A_2 = A - 3\eta > 0.$$

Рассматривая η как параметр, получим в плоскости (A, B) однопараметрическое семейство кривых $B = f(A)$, в данном случае прямых

$$B = \frac{1}{\eta} - \eta^2 + \eta A, \tag{359}$$

* При этих условиях предпоследний определитель Гурвица $\Delta_2 = A_1 A_2 - A_0$ всегда будет положительным.

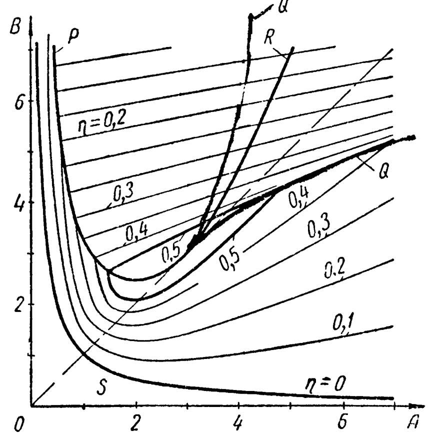
которые должны быть нанесены только в той части плоскости, где выполняются приведенные неравенства. Границы этой области получим, приравняв нулю левые части неравенств и представив уравнения границ в параметрическом виде.

Уравнение граничной кривой P (фиг. 87) в параметрическом виде получим, решая совместно $A_0 = 0$ и $A_2 = 0$:

$$\left.\begin{aligned} A &= 3\eta \\ B &= \frac{1}{\eta} + 2\eta^2 \end{aligned}\right\} \text{ при } \eta \leqslant 1.$$

После исключения η уравнение кривой P примет вид

$$2A^2 - 9AB + 27 = 0.$$



Фиг. 87. Диаграмма Вышнеградского с нанесенными линиями равной степени устойчивости.

Уравнение граничной кривой Q получим, решая совместно $A_0 = 0$ и $A_1 = 0$:

$$\left.\begin{aligned} A &= 2\eta + \frac{1}{\eta^2} \\ B &= \frac{2}{\eta} + \eta^2 \end{aligned}\right\} \text{ при } \eta \leqslant 1.$$

После исключения η уравнение кривой Q получит вид

$$4(A^3 + B^3) - A^2B^2 - 18AB + 27 = 0.$$

Таким образом, семейство прямых должно быть нанесено в верхней части плоскости над граничной кривой, состоящей из двух участков P и Q.

Параметрические уравнения $A = 2\eta + \frac{1}{\eta^2}$ и $B = \frac{2}{\eta} + \eta^2$ при $\eta > 1$ определяют кривую R, которая вместе с кривой Q ограничивает область апериодической устойчивости, соответствующую всем вещественным корням характеристического уравнения. Границы этой области были найдены еще Вышнеградским.

Для второго случая распределения корней (для подкласса А) имеем

$$A_2A_1 - A_0 = 0; \; A_0 > 0; \; A_2 > 0.$$

Учитывая уравнения (358), получим уравнение кривых равной степени устойчивости

$$(A - 3\eta)(3\eta^2 - 2A\eta + B) + \eta^3 - A\eta^2 + B\eta - 1 = 0$$

или

$$B = \frac{1}{A - 2\eta} + 2\eta(A - 2\eta). \tag{360}$$

Эти кривые должны быть ненесены в той части плоскости, в которой выполняются неравенства

$$A_0 = -\eta^3 + A\eta^2 - B\eta + 1 > 0;$$
$$A_2 = A - 3\eta > 0.$$

Нетрудно видеть, что верхней границей этой области являются кривые P и Q, уравнения которых нами уже найдены.

При $\eta = 0$ уравнение (360) вырождается в уравнение гиперболы И. А. Вышнеградского

$$AB = 1,$$

представляющее уравнение границы области устойчивости.

Кривые, построенные по уравнению (360), и прямые, построенные по уравнению (359), для постоянного значения η, образуют замкнутые линии равной степени устойчивости.

Максимально возможное значение степени устойчивости η для нормированного уравнения получается при $A = B = 3$ и равняется единице.

Определение абсолютной величины вещественной части наиболее удаленного от мнимой оси корня характеристического уравнения. Эту задачу можно свести к задаче определения степени устойчивости. Для этой цели необходимо сдвинуть мнимую ось влево на величину ξ заменой $s = z - \xi$; при этом все корни характеристического уравнения окажутся в правой полуплоскости за исключением корней, имевших вещественную часть, равную $-\xi$, которые будут расположены на мнимой оси. Затем все корни переводим из правой полуплоскости в левую заменой z на $-z$ и поступаем точно так же, как и при определении степени устойчивости. Теперь вместо уравнения (353) мы будем иметь уравнение

$$(-1)^n z^n + (-1)^{n-1} A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_2 z^2 - A_1 z + A_0 = 0, \quad (361)$$

где

$$A_k = \frac{D^{(k)}(-\xi)}{k!}.$$

Уравнением для определения ξ будет

$$\Delta_n = A_0 \Delta_{n-1} = 0.$$

Рассмотрим характеристическое уравнение третьей степени (355).

Заменив $s = z - \xi$, а затем подставив $-z$ вместо z и умножив уравнение на -1, получим

$$z^3 - A_2 z^2 + A_1 z - A_0 = 0. \quad (362)$$

Если на мнимой оси будет действительный корень этого уравнения, то, так же как и при определении степени устойчивости, будем иметь

$$A_0 = -\xi^3 + A\xi^2 - B\xi + 1 = 0;$$
$$A_1 = 3\xi^2 - 2A\xi + B > 0;$$
$$A_2 = A - 3\xi < 0.$$

Кривые равных значений $\xi = \text{const}$ будут определяться уравнением

$$B = \frac{1}{\xi} - \xi^2 + \xi A, \qquad (363)$$

аналогичным уравнению (359), однако оба неравенства выполняются в иной области — в области, ограниченной кривыми P, R и гиперболой Вышнеградского. В этой области и следует начертить семейство кривых (прямых) по уравнению (363) (фиг. 88).

В том случае, когда на мнимую ось попадают комплексные корни, получаем

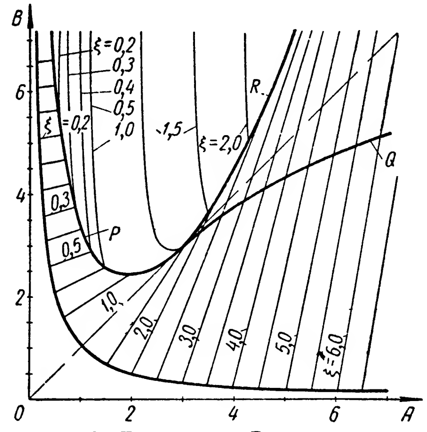
$$A_2A_1 - A_0 = (A - 3\xi)(3\xi^2 - - 2A\xi + B) + \xi^3 - A\xi^2 + + B\xi - 1 = 0;$$

$$A_0 = -\xi^3 + A\xi^2 - B\xi + 1 < 0;$$

$$A_2 = A - 3\xi < 0.$$

При этом кривые равных значений $\xi = \text{const}$ будут определяться уравнением вида (360)

$$B = \frac{1}{A - 2\xi} + 2\xi(A - 2\xi). \qquad (364)$$



Фиг. 88. Диаграмма Вышнеградского с нанесенными линиями равных значений ξ.

Семейство кривых уравнения (364) нужно нанести в области, ограниченной кривыми P и R, так как только в этой области выполняются неравенства $A_0 < 0$ и $A_2 < 0$.

Величину вещественной части наиболее удаленного от мнимой оси корня ξ^* уравнения (355) можем определить по формуле

$$\xi^* = \sqrt[3]{a_0}\,\xi.$$

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ

Общим методом определения колебательности системы $\mu = \operatorname{tg}\psi$ по заданному характеристическому уравнению является следующий [5].

1. Координатные оси $(\alpha, j\beta)$ плоскости корней характеристического уравнения повернем против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2} - \psi$, с тем чтобы по меньшей мере один корень характеристического уравнения оказался на мнимой оси $j\beta'$ (фиг. 89). Для этой цели в уравнении (350) произведем подстановку $s = jze^{-j\psi}$, которая, как нетрудно видеть, соответствует такому повороту осей.

После этого уравнение (350) примет вид

$$B_nz^n + B_{n-1}z^{n-1} + \ldots + B_1z + B_0 = 0, \qquad (365)$$

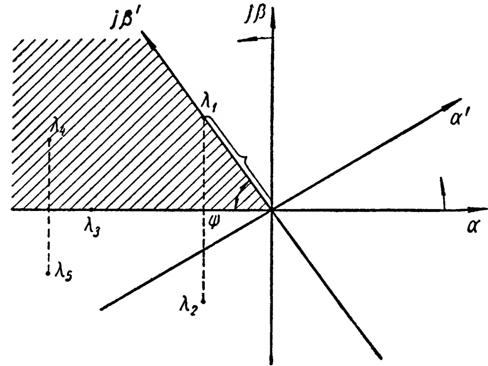
где

$$B_k = j^ke^{-jk\psi}a_k.$$

В полученном уравнении коэфициенты B_k — комплексные числа, так как корни его в результате поворота координатных осей уже не могут быть комплексными сопряженными или все действительными.

2. Определим величину ψ или $\mu = \operatorname{tg} \psi$ из уравнения (365).

Это уравнение имеет по меньшей мере один чисто мнимый положительный корень, модуль которого обозначим через ω_1. Подставим в уравнение (365) $z = j\omega_1$ и отделим в нем действительную и мнимую части, каждая из которых будет зависеть от двух неизвестных ψ и μ. Поскольку это уравнение удовлетворяется при $z = j\omega_1$, мы можем порознь приравнять и действительную часть его, которую обозначим через $U(\psi, \omega_1)$, и коэфициент при мнимой части $V(\psi, \omega_1)$.



Фиг. 89. К определению колебательности системы.

Из полученных двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} U(\psi, \omega_1) &= 0 \\ V(\psi, \omega_1) &= 0 \end{aligned} \qquad (366)$$

необходимо определить ψ, исключив ω_1.

В общем случае для этой цели необходимо составить результант левых частей полученных уравнений, которые являются многочленами по ω_1, и приравнять его нулю [2]:

$$R_{\omega_1}(U, V) = 0. \qquad (367)$$

Наименьший действительный корень уравнения (367) позволит определить искомый угол ψ.

В качестве примера рассмотрим характеристическое уравнение третьей степени.

Так как при нормировании уравнения колебательность не меняется, рассмотрим уравнение в форме И. А. Вышнеградского

$$s^3 + As^2 + Bs + 1 = 0.$$

Подставив $s = jze^{-j\psi}$, получим

$$-je^{-j3\psi}z^3 - Ae^{-j2\psi}z^2 + jBe^{-j\psi}z + 1 = 0.$$

Заменив $z = j\omega_1$ и использовав формулу Эйлера, будем иметь

$$-\cos 3\psi\omega_1^3 + A\cos 2\psi\omega_1^2 - B\cos\psi\omega_1 + 1 +$$

$$+ j\omega_1(\sin 3\psi\omega_1^2 - A\sin 2\psi\omega_1 + B\sin\psi) = 0,$$

откуда

$$U(\psi, \omega_1) = -\cos 3\psi\omega_1^3 + A\cos 2\psi\omega_1^2 - B\cos\psi\omega_1 + 1 = 0;$$

$$V(\psi, \omega_1) = (\sin 3\psi\omega_1^2 - A\sin 2\psi\omega_1 + B\sin\psi)\,\omega_1 = 0.$$

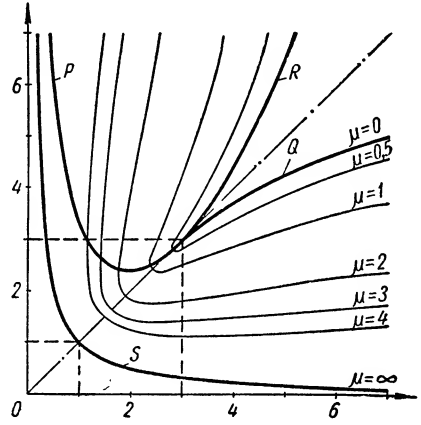
Исключаем из этих уравнений ω_1, приравнивая нулю результант:

$$R_{\omega_1}(U,\ V)=\begin{vmatrix} -\cos 3\psi & A\cos 2\psi & -B\cos\psi & 1 & 0 \\ 0 & -\cos 3\psi & A\cos 2\psi & -B\cos\psi & 1 \\ \sin 3\psi & -A\sin 2\psi & B\sin\psi & 0 & 0 \\ 0 & \sin 3\psi & -A\sin 2\psi & B\sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & \sin 3\psi & -A\sin 2\psi & B\sin\psi \end{vmatrix}=0.$$

Это уравнение получается алгебраическим относительно $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$, так как все входящие в него тригонометрические функции легко выражаются через $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$. Находя из него наименьшее действительное значение $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$, определяем и угол ψ.

Рассмотренный метод определения колебательности по заданному характеристическому уравнению, как это видно из изложенного, отличается громоздкостью, и поэтому его практическая ценность невелика.

Эту задачу можно решить также, пользуясь формулами Виета, связывающими корни и коэфициенты уравнения. В ряде случаев такой метод требует меньшей затраты труда. Возьмем тот же пример уравнения третьего порядка.



Фиг. 90. Диаграмма Вышнеградского с нанесенными линиями равной колебательности.

Допустим, что корни уравнения (356) будут

$$\lambda_1=-\alpha_1+j\beta_1;\ \lambda_2=-\alpha_1-j\beta_1\ \text{и}\ \lambda_3=-\alpha_2,$$

тогда, имея в виду, что

$$\mu=\operatorname{tg}\psi=\frac{\beta_1}{\alpha_1},$$

получим

$$2\alpha_1+\alpha_2=A;$$
$$2\alpha_1\alpha_2+\alpha_1^2(1+\mu^2)=B;$$
$$\alpha_1^2\alpha_2(1+\mu^2)=1.$$

Исключая α_1 и α_2 и заменив $1+\mu^2=\varkappa$, получим уравнение семейства кривых равных значений $\varkappa$, а следовательно, и μ [10]:

$$4\varkappa^2(A^3+B^3)-\varkappa^3A^2B^2+(2\varkappa^3-4\varkappa^2-16\varkappa)AB-\varkappa^3+$$
$$+12\varkappa^2-48\varkappa+64=0. \qquad (368)$$

Эти кривые нанесены на фиг. 90.

При колебательности, равной нулю, когда $\varkappa = 1$, уравнение (368 переходит в уравнение границы области апериодической устойчивости Q, R (фиг. 90); если вещественная часть пары сопряженных комплексных корней обращается в нуль и система оказывается на границе устойчивости $\mu \to \infty$, уравнение (368) вырождается в уравнение гиперболы Вышнеградского.

Для характеристического уравнения четвертой степени, которая определяется тремя существенными параметрами, диаграммы Вышнеградского представляют уже не семейство кривых в плоскости двух параметров A и B, как для уравнения третьей степени, а семейства поверхностей в пространстве трех измерений. Построение таких диаграмм значительно усложняется. В ряде случаев, когда характеристическое уравнение четвертой степени содержит вещественные корни, исключением одного из них можно понизить степень уравнения, сведя задачу к исследованию уравнения третьей степени, и использовать при этом построенные диаграммы Вышнеградского для этого уравнения.

Некоторые номограммы, облегчающие исследование уравнений четвертой степени, можно найти в работе [10].

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ РАСПОЛОЖЕНИЯ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПО ОТОБРАЖЕНИЮ СЕТКИ КООРДИНАТ ЛЕВОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА ПЛОСКОСТЬ ФУНКЦИИ $D(s)$

Нанесем сетку координат (декартовых или полярных) во втором квадранте плоскости корней характеристического уравнения и отобразим ее на плоскость функции $D(s)$. Функция $D(s)$ представляет левую часть характеристического уравнения, т. е.

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0.$$

Такое отображение, очевидно, будет конформным. Так как каждой точке плоскости s соответствует вполне определенная точка плоскости $D(s)$, то это соответствие однозначно.

Однако переход от точек плоскости $D(s)$ к точкам плоскости s неоднозначен.

В общем случае каждая точка плоскости $D(s)$ будет образом n точек плоскости s.

Нетрудно видеть, что образом всех корней характеристического уравнения $D(s) = 0$ является начало координат плоскости функции $D(s)$.

Если одна из линий координатной сетки пройдет через корень характеристического уравнения, то ее отображение пройдет через начало координат плоскости $D(s)$.

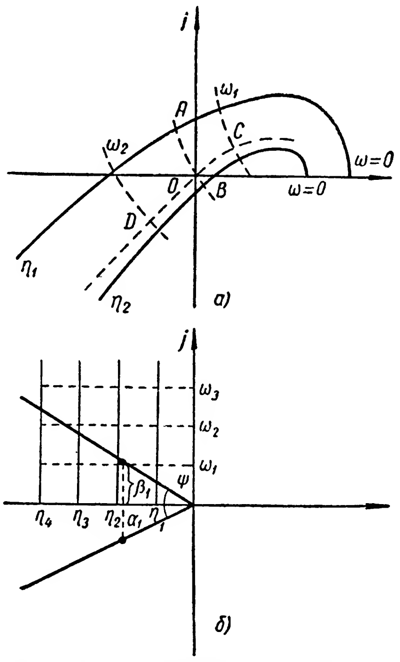
Если какой-либо корень уравнения будет заключен в одной из клеток координатной сетки, то участки кривых, отображающие стороны этой клетки, охватят 1 раз начало координат в плоскости $D(s)$. Если внутри клетки координатной сетки расположено k корней, то контур, отображающий стороны координатной сетки, охватит начало координат в плоскости $D(s)$ k раз.

Таким образом, анализируя расположение кривых в плоскости $D(s)$, отображающих координатную сетку, нанесенную во втором квадранте плоскости корней характеристического уравнения (для устойчивых систем, характеристические уравнения которых имеют все действительные коэфициенты, очевидно, достаточно координатную сетку нанести только во втором квадранте), можно определить расположение корней характеристического уравнения, а воспользовавшись методом интерполяции, и вычислить их значения с той или иной точностью.

Н. Н. Мясников [11] рассмотрел эту задачу для случая, когда на плоскости s наносится сетка декартовых координат.

В этом случае задача сводится к построению кривых Михайлова для исходного характеристического уравнения и полученных из него уравнений путем смещения мнимой оси влево на расстояния η, соответствующие расстояниям вертикальных линий координатной сетки от мнимой оси, и нанесению линий равных значений ω.

Всякой координатной линии, проходящей через вещественный корень, соответствует кривая Михайлова в плоскости $D(s)$, выходящая из начала координат (при $\omega = 0$). Если координатные линии проходят через комплексный корень $\lambda_i = -\alpha_i + j\beta_i$, то кривая Михайлова, построенная для характеристического уравнения со смещенной на $\eta_i = \alpha_i$ мнимой осью, пройдет через начало координат, причем в этой точке будет $\omega = \beta_i$.



Фиг. 91. Отображение сетки декартовых координат, нанесенных в плоскости корней характеристического уравнения, на плоскость $D(s)$. Случай пары комплексных корней.

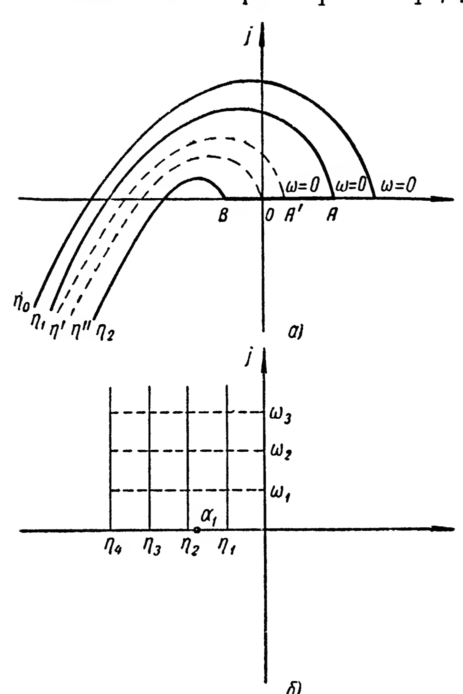
Если при выбранном расстоянии между линиями координатной сетки ни одна из кривых Михайлова не проходит через начало координат, то это значит, что корни рассматриваемого уравнения не лежат на координатных линиях, а заключены между теми линиями, отображения которых (кривые Михайлова) охватывают начало координат в плоскости $D(s)$.

Другими словами, если область, внутри которой расположено начало координат плоскости $D(s)$, ограничена участками некоторых двух соседних кривых Михайлова, построенных для уравнений со смещением η_1 и η_2 (фиг. 91, *а*), и участками кривых равных значений ω_1 и ω_2, то это значит, что один из корней характеристического уравнения λ_i расположен в прямоугольнике, ограниченном координатными линиями η_1, η_2, ω_1 и ω_2, т. е. $\eta_1 < \alpha_i < \eta_2$ и $\omega_1 < \beta_i < \omega_2$ (см. фиг. 91, *б*).

Если построенные указанным образом кривые Михайлова будут начинаться при $\omega = 0$ на действительной оси по разные стороны от начала

координат, это значит, что характеристическое уравнение имеет действительный корень, заключенный между значениями η_1 и η_2, для которых построены эти кривые.

Интерполяцией можно приближенно определить значение корней характеристического уравнения, в том числе и координаты ближайшего к мнимой оси корня $\lambda_1 = -\alpha_1 + j\beta_1$, которые определяют степень устойчивости и колебательность системы.



Фиг. 92. Отображение сетки декартовых координат, нанесенных в плоскости корней характеристического уравнения, на плоскость $D(s)$. Случай действительных корней.

Рассмотрим метод определения значения корней характеристического уравнения на примере определения степени устойчивости.

Допустим, что начало координат в плоскости $D(s)$ в первый раз охватывается кривыми Михайлова, построенными для уравнений со смещенной мнимой осью на величины η_1 и η_2 (фиг. 92,*а*). Эти кривые при $\omega = 0$ берут начало в точках A и B. Таким образом, уравнение имеет вещественный корень, абсолютная величина которого α_1 будет лежать в пределах $\eta_1 < \alpha_1 < \eta_2$ (фиг. 92, *б*).

Кривая Михайлова, соответствующая смещению на η, где $\eta = \alpha_1$ — степень устойчивости, должна проходить через начало координат. Первое приближение для η найдем путем линейной интерполяции:

$$\eta' = \eta_1 + \frac{AO}{AB}(\eta_2 - \eta_1). \quad (369)$$

Построим для найденного значения η кривую Михайлова. Если эта кривая исходит при $\omega = 0$ не из начала координат, а из точки левее или правее его, например из точки A', найдем точно таким же способом второе приближение для η:

$$\eta'' = \eta' + \frac{A'O}{A'B}(\eta_2 - \eta'). \quad (370)$$

В большинстве случаев бывает достаточно одного-двух приближений для определения этим способом степени устойчивости с приемлемой для практики точностью.

Если ближайшими к мнимой оси будут два комплексно сопряженных корня характеристического уравнения, то кривые Михайлова будут охватывать начало координат при значениях ω, отличных от нуля, как это показано на фиг. 91. В этом случае следует провести через начало

координат линии равных значений η и ω, имея в виду свойство конформных отображений — пересечение линий, отображающих координатную сетку, под прямым углом.

По закону линейной интерполяции находим первое приближение для координат корня $\lambda_1 = -\alpha_1 + j\beta_1$:

$$\alpha_1 = \eta = \eta_1 + \frac{AO}{AB}(\eta_2 - \eta_1); \tag{371}$$

$$\beta_1 = \omega_1 + \frac{CO}{CD}(\omega_2 - \omega_1).$$

Аналогичным способом, если потребуется, найдем и второе приближение.

Определив степень устойчивости $\eta = \alpha_1$ и β_1, находим колебательность системы $\mu = \operatorname{tg}\psi = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$.

Пример. Дано характеристическое уравнение системы

$$D(s) = s^3 + 9s^2 + 23s + 15 = 0.$$

Необходимо построить кривые в плоскости $D(s)$, отображающие сетку декартовых координат в плоскости s, и определить распределение корней.

Нанесем во втором квадранте плоскости s сетку прямоугольных координат, выбрав расстояние между соседними линиями, равное единице.

Построим кривую Михайлова для исходного уравнения. Заменив $s = j\omega$ и представив левую часть уравнения в виде

$$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

получим

$$U(\omega) = -9\omega^2 + 15 \text{ и } V(\omega) = -\omega^3 + 23\omega.$$

По этим выражениям построим кривую Михайлова для $0 < \omega < \infty$ (фиг. 93, кривая A).

Сместим мнимую ось влево на величину $\eta = 1$, заменив $s = -1 + j\omega$, и построим для полученного уравнения кривую Михайлова. В результате получим (фиг. 93, кривая $Б$):

$$U(\omega) = -6\omega^2;\; V(\omega) = -\omega^3 + 8\omega.$$

Смещая мнимую ось влево на величину $\eta = 2$, 3, 4 и т. д., получим семейство кривых, изображенное на фиг. 93.

Устанавливаем, что при $\eta_1 = 1$, $\eta_3 = 3$ и $\eta_5 = 5$ кривые Михайлова проходят через начало координат при $\omega = 0$.

Это позволяет сделать заключение, что рассмотренное уравнение имеет три вещественных корня, равных -1, -3 и -5, и, следовательно, степень устойчивости системы $\eta = 1$, а $\xi = 5$.

Метод отображения сетки полярных координат, нанесенных во втором квадранте плоскости s, на плоскость $D(s)$, рассмотренный А. М. Рубинчиком [9], сводится к следующему.

Выбираем число лучей, которые наносятся во втором квадранте плоскости s (фиг. 94).

Положение каждого луча определится направляющими единичными векторами

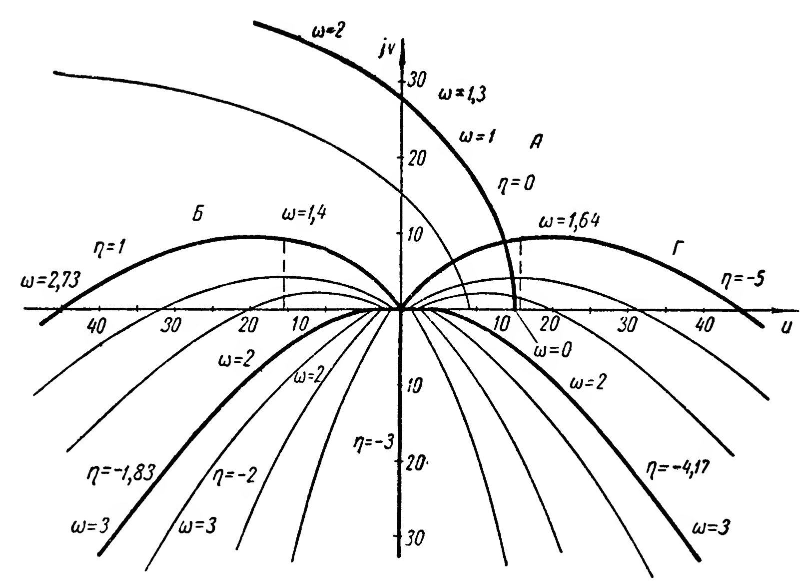
$$ie^{j\frac{\pi k}{2N}},$$

где k — номер луча ($k = 0,1 \ldots, N$), $N + 1$ — число лучей, если первым лучом считать положительную мнимую полуось, а N-м — отрицательную действительную полуось.

Для $k=0$ положим $s=j\omega$ и получаем кривую Михайлова исходного уравнения.

Для $k=1$ положим $s_1 = j\omega e^{j\frac{\pi}{2N}}$ и подставим в выражение функции $D(s)$:

$$D(s_1) = (j\omega)^n e^{j\frac{\pi n}{2N}} + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} e^{j\frac{\pi(n-1)}{2N}} + \ldots + a_1 j\omega e^{j\frac{\pi}{2N}} + a_0.$$



Фиг. 93. Пример построения кривых Михайлова для характеристического уравнения третьей степени со смещением мнимой оси.

В общем случае имеем

$$s_k = j\omega e^{j\frac{\pi k}{2N}};$$

$$D(s_k) = (j\omega)^n e^{j\frac{\pi k n}{2N}} + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} e^{j\frac{\pi k(n-1)}{2N}} + \ldots + a j\omega e^{j\frac{\pi k}{2N}} + a_0. \quad (372)$$

Построив для каждого значения k отображения соответствующих лучей на плоскости $D(s)$ и соединив на полученных кривых точки равных значений ω (здесь ω является мерой модуля отрезка каждого луча), получим отображение полярной сетки координат на плоскость $D(s)$.

Рассматривая контуры этого отображения, охватывающие начало координат, и линии, проходящие через начало координат (если таковые имеются), можно определить область расположения корней характеристического уравнения, а также и части этой области, внутри которых лежат отдельные корни.

Построение кривых Михайлова и отображений сетки декартовых или полярных координат можно производить и графическим методом, разработанным З. Ш. Блохом [8], который основан на использовании многоугольника коэфициентов характеристического уравнения. При

этом полезно иметь в виду возможность изменения масштаба построения в M раз, так как для двух уравнений

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

и

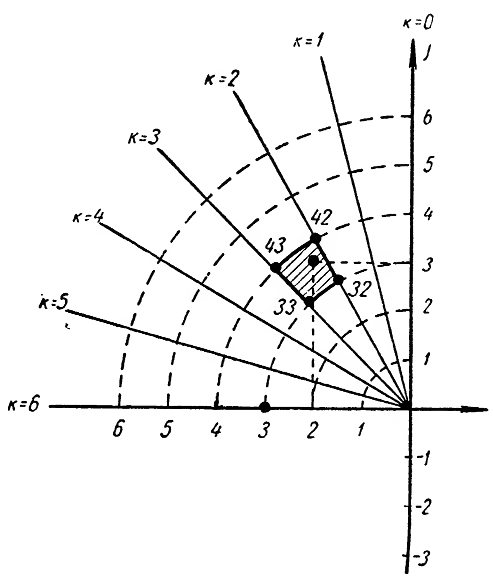
$$s^n + \frac{a_{n-1}}{M} s^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{M^2} s^{n-2} + \ldots + \frac{a_0}{M^n} = 0$$

области расположения корней подобны при коэфициенте подобия, равном M.

В качестве примера рассмотрим характеристическое уравнение третьего порядка

$$D(s) = s^3 + 7s^2 + 25s + 39 = 0.$$

Проведем лучи во втором квадранте, разделяющие его на шесть равных секторов. Следовательно, $N = 6$. Номера лучей будут $k = 0, 1, 2, \ldots, 6$ (фиг. 94).



Фиг. 94. Сетка полярных координат в плоскости корней характеристического уравнения.

Для этих значений k находим выражения $D(s)_k$:

$$D(s_0) = -j\omega^3 - 7\omega^2 + 25j\omega + 39; \quad k = 0;$$

$$D(s_1) = -j\omega^3 e^{j\frac{4}{\pi}} - 7\omega^2 e^{j\frac{\pi}{6}} + 25j\omega e^{j\frac{\pi}{12}} + 39; \quad k = 1;$$

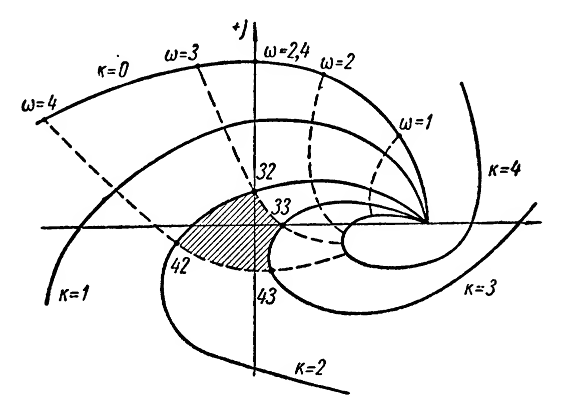
$$D(s_2) = -j\omega^3 e^{j\frac{\pi}{2}} - 7\omega^2 e^{j\frac{\pi}{3}} + 25j\omega e^{j\frac{\pi}{6}} + 39; \quad k = 2;$$

. . . .

$$D(s_6) = -\omega^3 + 7\omega^2 - 25\omega + 39; \quad k = 6.$$

Анализируя построенные по этим выражениям отображения сетки полярных координат на плоскости $D(s)$ (фиг. 95), видим, что начало координат расположено между отображением лучей с номерами 2 и 3 и отображениями окружностей равных значений ω, соответствующих $\omega = 3$ и $\omega = 4$, и, кроме того, видим, что отображение 6-го луча, совпадающее с действительной осью, проходит через начало координат своей точкой, для которой $\omega = 3$. Таким образом, один комплексный корень уравнения расположен в области, заключенной между 2-м и 3-м лучами и между окружностями радиусов 3 и 4, второй корень будет

сопряженным первому, а третий, вещественный, будет равен — 3. Модуль первого корня $|\lambda_1|$ будет лежать в пределах $3 < |\lambda_1| < 4$, а угол ψ,



Фиг. 95. Отображение сетки полярных координат, нанесенных в плоскости корней характеристического уравнения на плоскость $D(s)$.

определяющий колебательность системы, $\frac{\pi}{4} < \psi < \frac{\pi}{3}$. Точный подсчет показывает, что $\lambda_{1,2} = -2 \pm j3$ и $\lambda_3 = -3$.

Таким образом, $\mu = \frac{3}{2}$; $\psi = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} \approx 56^\circ$; $\eta = 2$; $\xi = 3$; $|\lambda_1| = 3{,}6$.

7. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ПО ИЗВЕСТНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ η, ξ и μ

Мы рассмотрели различные способы определения степени устойчивости η, величины действительной части наиболее удаленного от мнимой оси корня ξ и колебательности μ по заданному характеристическому уравнению.

Рассмотрим теперь методы определения основных показателей качества переходного процесса — длительности процесса регулирования T и величины перерегулирования:

$$\Delta x_{max} = x_{max} - x(\infty)$$

или

$$\sigma\% = \frac{x_{max} - x(\infty)}{x(\infty)} 100\%$$

по известным η, ξ и μ. К сожалению, в общем виде при произвольном распределении корней и для любых начальных условий эта задача еще не имеет решения.

Однако для определенных классов распределения корней и для некоторых частных типов начальных значений найдены соотношения, позволяющие оценить время процесса регулирования, величину перерегу-

лирования и построить кривые (мажоранту и миноранту)[1], охватывающие соответственно сверху и снизу истинную кривую переходного процесса.

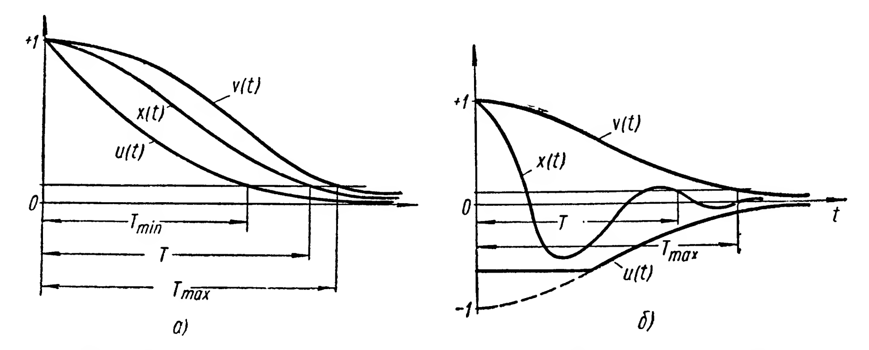
Для кривой переходного процесса $x(t)$ мажорантой будет кривая $v(t)$ и минорантой — кривая $u(t)$, если они удовлетворяют условию

$$u(t) \leqslant x(t) \leqslant v(t) \tag{373}$$

для $t \geqslant 0$.

Для начальных значений типа $x(0) = 1$; $x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0$ эти кривые изображены на фиг. 96.

Зная выражения миноранты и мажоранты, можно оценить сверху максимальное отклонение регулируемой величины, значение перерегулирования и время регулирования, а в некоторых случаях можно найти и диапазон, внутри которого лежит действительное время регулирования T (фиг. 96, *а*).



Фиг. 96. Мажоранта $v(t)$ и миноранта $u(t)$, охватывающие сверху и снизу кривую переходного процесса $x(t)$:

а — для распределения корней класса 0; *б* — для распределения корней класса I.

Используя выражение, дающее оценку величины перерегулирования, миноранта может быть представлена в виде кривой, состоящей из двух (фиг. 96, *б*) или трех участков.

Связь между распределением корней и качеством переходного процесса для уравнений до третьего порядка была рассмотрена в [3].

Определение корней характеристического уравнения и параметров регулятора по заранее заданным требованиям к переходному процессу для систем второго и третьего порядков было произведено В. С. Кулебакиным [7].

---

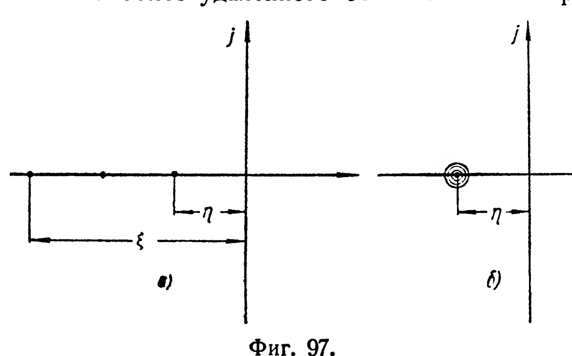
[1] Идея и методы построения мажоранты и миноранты, охватывающих сверху и снизу кривую, изображающую решение диференциального уравнения (в том числе и нелинейного), принадлежит акад. С. А. Чаплыгину [4], который использовал их для приближенного интегрирования диференциальных уравнений. Акад. Н. Н. Лузин указал способ построения мажорант и минорант, все более и более тесно охватывающих кривую, определяемую заданным диференциальным уравнением, и способ вычисления погрешности приближения.

А. А. Фельдбаум нашел выражения мажорант и минорант для линейных однородных диференциальных уравнений при некоторых типах начальных условий и некоторых классах распределения корней характеристических уравнений.

Впервые использовал значение расстояния от мнимой оси до ближайшего корня характеристического уравнения для оценки степени затухания процесса автоматического регулирования И. Н. Вознесенский [12].

А. А. Фельдбаум разработал метод оценки времени регулирования, величины перерегулирования и построения мажорант и минорант по известным значениям степени устойчивости и колебательности системы для указанных выше классов распределения корней при некоторых типах начальных значений [5].

А. М. Рубинчик, использовав, кроме того, величину действительной части наиболее удаленного от мнимой оси корня, указал метод построения кривых, более тесно охватывающих кривую переходного процесса, и рассмотрел более широкий класс начальных условий [10].



Фиг. 97.

а — распределение корней характеристического уравнения класса I; *б* — распределение корней, соответствующее мажоранте $v(\tau)$.

Рассмотрим эти методы, не приводя доказательств используемых соотношений, которые можно найти в цитированных работах.

Р а с п р е д е л е н и е к о р н е й н у л е в о г о к л а с с а. Выше была приведена классификация распределения корней характеристических уравнений (полюсов передаточной функции) и типов начальных значений.

В случае начальных значений типа 0, когда $x(0) = x_0 = 1,\ x'(0) = x''(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0$, для переходного процесса в системе, характеристическое уравнение которой имеет все действительные корни (распределение корней нулевого класса), справедливо следующее утверждение.

Если известна степень устойчивости системы η, то при указанных начальных значениях кривая переходного процесса $x(t)$ заключена между кривыми $v(t)$ (мажорантой) и $u(t)$ (минорантой), определяемыми выражениями

$$v(t) = e^{-\eta t}\left[1 + \eta t + \frac{\eta^2 t^2}{2} + \ldots + \frac{\eta^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!}\right]; \qquad (374)$$

$$u(t) = e^{-\eta t}, \qquad (375)$$

т. е.

$$u(t) \leqslant x(t) \leqslant v(t).$$

Это показывает, что для системы с характеристическим уравнением произвольной степени с распределением корней нулевого класса (фиг. 97, *а*) мажорантой является кривая, соответствующая характеристическому уравнению той же степени, имеющему n-кратный корень, равный $-\eta$ (см. фиг. 97, *б*), а минорантой — кривая переходного процесса в системе, описывающейся уравнением первого порядка, корень характеристического уравнения которой лежит в той же точке.

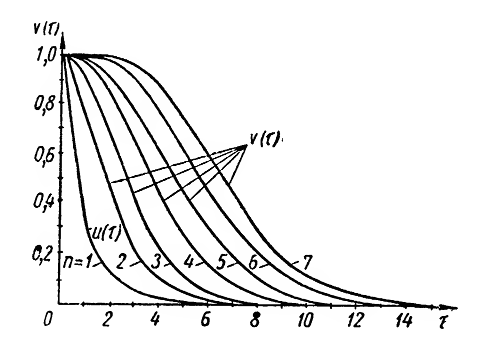
Выражение миноранты уже позволяет говорить о том, что в такой системе при данных начальных условиях перерегулирование невозможно.

При изображении мажорант и минорант удобнее пользоваться относительным временем $\tau = \eta t$. Выражения этих кривых после такой замены упрощаются:

$$V(\tau) = \left[1 + \tau + \frac{\tau^2}{2} + \ldots + \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\right] e^{-\tau}; \qquad (376)$$

$$U(\tau) = e^{-\tau} \qquad (377)$$

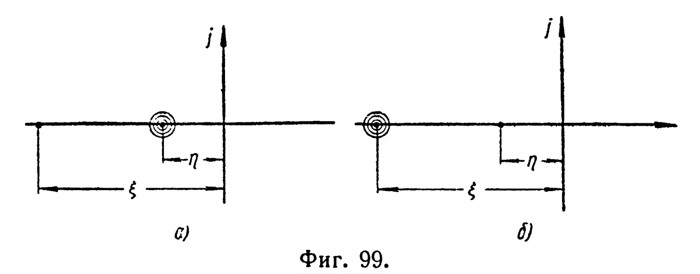
и приобретают известную универсальность, так как простой пересчет масштабов позволяет получить зону, внутри которой протекает действительная кривая для любого характеристического уравнения соответствующего класса с определенным значением степени устойчивости η.



Фиг. 98. Мажоранта $V(\tau)$ и миноранта $U(\tau)$ для характеристических уравнений различных степеней.

На фиг. 98 приведены мажоранты и миноранты, построенные для уравнений различных порядков [5].

В работе [10] показано, что мажорантой и минорантой, более тесно охватывающими кривую переходного процесса, могут служить решения диференциальных уравнений того же порядка, характеристические уравнения которых имеют корень кратности $n-1$, равный $-\eta$, и простой корень, равный $-\xi$ (для мажоранты) (фиг. 99, *а*), и корень кратности $n-1$, равный $-\xi$, и простой корень, равный $-\eta$ (для миноранты) (фиг. 99, *б*).



Фиг. 99.

а — распределения корней, соответствующие уточненным мажоранте $V(\tau)$; *б* — миноранте $U(\tau)$.

Найдем выражения этих уточненных мажоранты $V(t)$ и миноранты $U(t)$.

Характеристическое уравнение системы, кривая переходного процесса которой совпадает с мажорантой, будет иметь вид

$$(s + \eta)^{n-1}(s + \xi) = 0 \qquad (378)$$

или

$$s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \ldots + c_1 s + c_0 = 0,$$

где

$$c_k = c_k(\eta, \xi).$$

Преобразование Лапласа $[V(t)]$ при рассматриваемых начальных значениях $V(0) = 1$, $V'(0) = V''(0) = \ldots = V^{(n-1)}(0) = 0$ получит следующий вид [1]:

$$L[V(t)] = \frac{s^{n-1} + c_{n-1}s^{n-2} + \ldots + c_1}{(s+\eta)^{n-1}(s+\xi)} = \frac{A(s)}{B(s)}.$$

Выражение мажоранты получим, найдя обратное преобразование Лапласа:

$$V(t) = L^{-1}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\right] = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{(n-1-k)!} t^{n-1-k} e^{-\eta t} + A_n e^{-\xi t}, \qquad (379)$$

где

$$A_k = \frac{1}{(k-1)!}\left\{\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\left[(s+\eta)^{n-1}\frac{A(s)}{B(s)}\right]\right\}_{s=\eta}; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

или

$$A_k = \frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \cdot \frac{A(s)}{s+\xi}\right]_{s=\eta}$$

и

$$A_n = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \cdot \frac{A(s)}{(s+\eta)^{n-1}}\right]_{s=\xi}.$$

Аналогично находим выражение миноранты:

$$U(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{(n-1-k)!} t^{n-1-k} e^{-\xi t} + A_n e^{-\eta t}. \qquad (380)$$

Здесь

$$A_k = \frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \cdot \frac{A(s)}{s+\eta}\right]_{s=\xi}; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1;$$

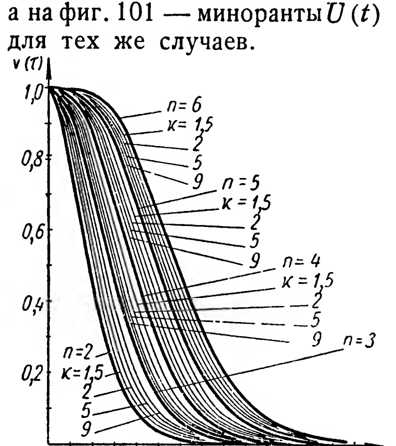
$$A_n = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \cdot \frac{A(s)}{(s+\xi)^{n-1}}\right]_{s=\eta}.$$

Приведем выражения мажоранты и миноранты, введя безразмерное время $\tau = \eta t$ и обозначив $\frac{\xi}{\eta} = \varkappa$:

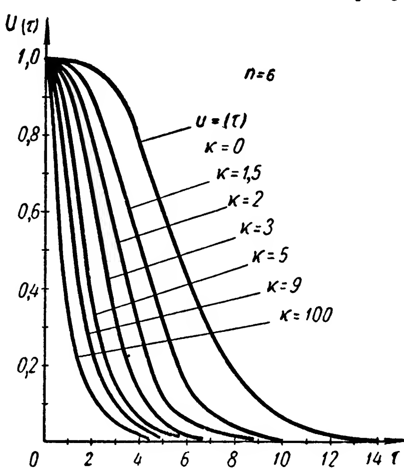
$$V(\tau) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{(n-1-k)!\,\eta^{n-1-k}} \tau^{n-1-k} e^{-\tau} + A_n e^{-\varkappa\tau}; \qquad (381)$$

$$U(\tau) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{(n-1-k)!\,\xi^{n-1-k}} \tau^{n-1-k} e^{\varkappa\tau} + A_n e^{-\tau}. \qquad (382)$$

На фиг. 100 приведены мажоранты $v(\tau)$ для уравнений третьего, четвертого, пятого и шестого порядков при различных значениях $\varkappa$ [10], а на фиг. 101 — миноранты $U(t)$ для тех же случаев.

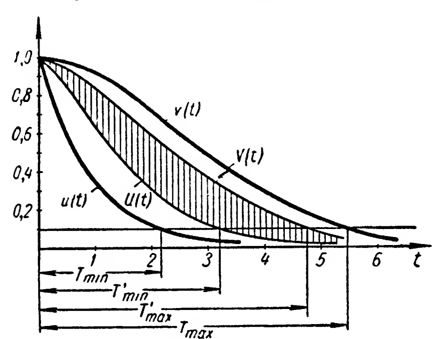


Фиг. 100. Уточненные мажоранты $V(\tau)$ для характеристических уравнений различных степеней с распределением корней класса 0.

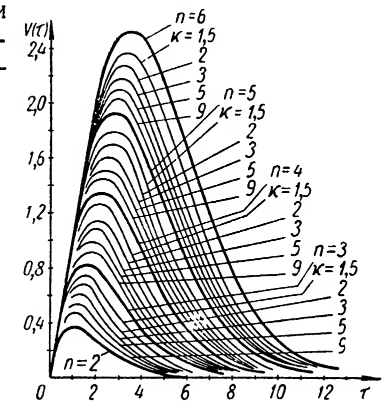


Фиг. 101. Уточненные миноранты $u(\tau)$ для характеристических уравнений различных степеней с распределением корней класса 0.

Сравнивая мажоранты и миноранты $v(t)$ и $u(t)$, построенные без учета величины максимально удаленного от мнимой оси корня характеристического уравнения ξ, с мажорантами и минорантами $V(\tau)$ и $U(\tau)$, построенными с учетом этой величины, можно по-



Фиг. 102. Определение времени переходного процесса по приближенным и уточненным мажорантам и минорантам.

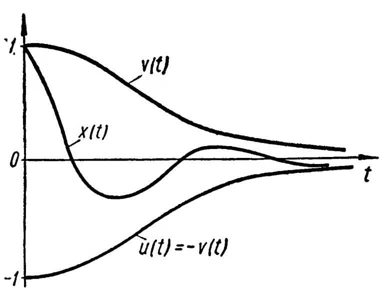


Фиг. 103. Мажоранты переходных процессов для характеристических уравнений различных степеней при начальных условиях типа $x'(0)=1$; $x(0)=x''(0)=\ldots=0$.

казать, что последние более тесно охватывают действительную кривую переходного процесса и во многих случаях при определении длительности переходного процесса позволяют уменьшить ошибку в несколько

раз. В качестве примера можно привести кривые, вычисленные для уравнения третьего порядка при $\eta = 1$ и $\xi = 3$ (фиг. 102).

Аналогичные выражения для мажорант и минорант переходного процесса можно получить и для других типов начальных значений например для $x(0) = 0$; $x'(0) = 1$; $x''(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0$ (фиг. 103) и др. [10].



Фиг. 104. Мажоранты и миноранты для характеристических уравнений с распределением корней класса I.

Распределение корней I класса. Для динамических систем, характеристическое уравнение которых имеет лишь одну пару комплексных сопряженных корней (распределение корней I класса), мажорантами являются те же кривые, что и для системы с распределением корней класса 0. Однако при рассмотренных начальных условиях в этих системах возможно перерегулирование, и минорантами будут уже другие кривые.

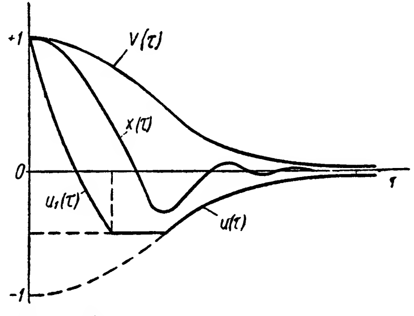
Можно показать, что для системы такого типа минорантой будет кривая $u(t) = -v(t)$, а если учесть величину ξ, уточненной минорантой будет кривая $U(t) = -V(t)$ (фиг. 104).

8. ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ ПЕРЕРЕГУЛИРОВАНИЯ

Можно показать [5], что для систем автоматического регулирования, характеристические уравнения которых имеют не более одной пары комплексных сопряженных корней (распределение корней I класса), при начальных значениях $x(0) = 1$; $x'(0) = x''(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0)$ перерегулирование Δx_{max} [при рассматриваемых начальных значениях абсолютная величина максимального отклонения в сторону отрицательных значений $x(t)$] не больше $e^{-\frac{\pi}{\mu}}$:

$$\Delta x_{max} \leqslant e^{-\frac{\pi}{\mu}}, \qquad (383)$$

где $\mu = \operatorname{tg} \psi$ — колебательность системы.



Фиг. 105. Уточненные мажоранта и миноранта для характеристических уравнений с распределением корней класса I.

Если начальные значения имеют более общий вид:

$$x(0) = x_0;\ x'(0) = x''(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0,$$

формула оценки перерегулирования будет

$$\Delta x_{max} \leqslant x_0 e^{-\frac{\pi}{\mu}}.$$

Зная верхнюю границу величины перерегулирования, можно уточнить границы области, внутри которой протекает кривая переходного процесса, заменив миноранту кусочной кривой, состоящей из трех участков.

В интервале $0 < \tau < \tau_1$, где $\tau = \eta t$, $\tau_1 = \frac{\pi}{\mu}$, имеем

$$x(\tau) \geqslant u_1(\tau) = e^{-\tau}(1 - a + ae^{-b\tau}), \tag{384}$$

где $a = \frac{e^{b\tau_1}}{b}$; b выбирается из условия, чтобы при $\tau = \tau_1$ было $\frac{du_1}{d\tau} = 0$.

Это условие дает $b = \frac{e^{b\tau_1} - 1}{2}$. Величина b легко определяется из полученного выражения по заданному τ_1 графически.

Вторым участком миноранты будет отрезок прямой $x(t) = -e^{-\frac{\pi}{\mu}}$ на интервале от $\tau = \tau_1$ до пересечения с кривыми $u(\tau)$ или $U(\tau)$ и третьим участком — кривые $u(\tau) = -v(\tau)$ или $U(\tau) = -V(\tau)$.

Пример расположения границ области, внутри которой протекает кривая процесса регулирования, приведен на фиг. 105.

Для начальных значений, когда $x(0) = 0$ и все производные до $n-1$, кроме одной, в начальный момент имеют нулевые значения, а одна из них $x^{(k)}(0) = x_k$ отлична от нуля, вместо перерегулирования целесообразно оценивать абсолютные величины первого (положительного) и второго (отрицательного) максимальных отклонений регулируемой величины.

Обозначим первую из них $x_{k\max}$ и вторую $-\Delta x_{k\max}$.

Для начальных значений вида $x(0) = 0$; $x'(0) = x_1$; $x''(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0$ выражение для верхней границы максимального отклонения [в сторону положительных значений $x(t)$ при $x_1 > 0$] при любом $n > 2$ будет [10]

$$x_{1\max} < x_1 \left[\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{\alpha} A_1(\mu)\right], \tag{385}$$

где α — абсолютная величина вещественной части пары комплексных сопряженных корней;

a_1 и a_0 — коэфициенты характеристического уравнения;

$$A_1(\mu) = \frac{\sqrt{1 + \mu^2} e^{-\frac{\psi}{\mu}} - 2}{1 + \mu^2}$$

и

$$\psi = \operatorname{arctg} \mu; \quad \mu = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Для величины наибольшего отклонения в сторону отрицательных значений $x(t)$ (при $x_1 > 0$) для тех же условий имеем выражение

$$\Delta x_{1\max} = x_1 \left[\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{\alpha} A_1(\mu)\right] e^{-\frac{\pi}{\mu}}. \tag{386}$$

Для начальных значений вида $x''(0) = x_2$; $x(0) = x'(0) = x'''(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0$ имеем для любого $n > 3$

$$x_{2\max} < x_2 \left[\frac{a_2}{a_0} + \frac{a_1}{\alpha a_0} A_1(\mu) - \frac{1}{\alpha^2} A_2(\mu)\right] \tag{387}$$

и

$$\Delta x_{2\,\max} < x_2\left[\frac{a_2}{a_0}+\frac{a_1}{\alpha a_0}A_1(\mu)-\frac{1}{\alpha^2}A_2(\mu)\right]e^{-\frac{\pi}{\mu}}, \tag{388}$$

где

$$A_2(\mu)=\frac{2A_1(\mu)+1}{1+\mu^2}.$$

Для начальных значений вида $x'''(0)=x_3$; $x(0)=\ldots=x''(0)=$ $=x^{(IV)}(0)=\ldots=x^{(n-1)}(0)=0$ при любом $n>4$ имеем

$$x_{3\,\max} < x_3\left[\frac{a_3}{a_0}+\frac{a_2}{\alpha a_0}A_1(\mu)-\frac{a_1}{\alpha^2 a_0}A_2(\mu)+\frac{1}{\alpha^3}A_3(\mu)\right] \tag{389}$$

и

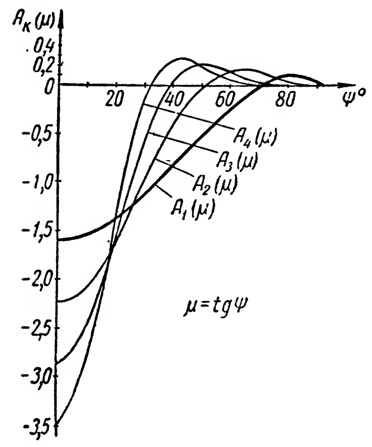
$$\Delta x_{3\,\max} < x_3\left[\frac{a_3}{a_0}+\frac{a_2}{\alpha a_0}A_1(\mu)-\frac{a_1}{\alpha^2 a_0}A_2(\mu)+\frac{1}{\alpha^3}A_3(\mu)\right]e^{-\frac{\pi}{\mu}}, \tag{390}$$

где

$$A_3(\mu)=\frac{2A_2(\mu)-A_1(\mu)}{1+\mu^2}$$

и т. д.

Как видно из приведенных выражений, функции $A_k(\mu)$ (фиг. 106) зависят только от колебательности системы μ.



Фиг. 106. Вспомогательные кривые для определения уточненных мажорант.

В том случае, когда ближайшей к мнимой оси является пара сопряженных комплексных корней, в выражениях оценок величин $x_{k\,\max}$ и $\Delta x_{k\,\max}$ вместо α можно подставить степень устойчивости системы η. Если эта пара корней является наиболее удаленной от мнимой оси, переходный процесс будет протекать при рассматриваемых начальных значениях без перерегулирования.

Мы привели формулы, позволяющие производить оценку времени регулирования, величины перерегулирования и максимального отклонения регулируемой величины в процессе свободных колебаний при простейших типах начальных значений, когда лишь одна из производных (или отклонение регулируемой величины) в начальный момент отлична от нуля.

При более сложных начальных значениях теоретически можно было бы применить принцип суперпозиции, поскольку мы рассматриваем линейные системы, и получить выражения оценок качества переходных процессов при сложных начальных значениях на основании соответствующих выражений, найденных для простейших начальных условий. Однако следует иметь в виду, что при этом в большинстве случаев оценки получаются весьма завышенными и границы, внутри которых протекают кривые переходных процессов, слишком широкими.

Для систем с распределением корней характеристических уравнений II и более высоких классов (с несколькими парами комплексных корней) выражения для оценок качества переходных процессов получаются чрезмерно сложными и пока не имеют практического значения.

В ряде случаев представляет интерес определение условий монотонности переходного процесса при заданных начальных условиях. Еще И. А. Вышнеградский в 1877 г. вывел весьма простое условие монотонности переходного процесса для системы регулирования машины при сбросе нагрузки.

Некоторые необходимые и достаточные критерии монотонности и отсутствия перерегулирования, условия существования монотонных переходных процессов и методы определения времени регулирования при монотонных процессах, установленные З. Ш. Блохом, можно найти в его книге [8].

9. ВЛИЯНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ НА КАЧЕСТВО ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Как это уже указывалось в настоящей главе, для широкого класса динамических систем преобразование Лапласа $X(s)$ регулируемой величины имеет вид

$$X(s)=\frac{M(s)\,F_1(s)}{D(s)\,F_2(s)}+\frac{M_н(s)}{D(s)},$$

а решение диференциального уравнения переходного процесса состоит из трех составляющих:

1) вынужденной

$$x_в(t)=\sum_{k=1}^{\nu}\frac{M(\rho_k)\,F_1(\rho_k)}{D(\rho_k)\,F_2'(\rho_k)}e^{\rho_k t}$$

[если преобразование Лапласа $F(s)$ возмущающего воздействия $f(t)$ не имеет полюсов в начале координат и все нули $D(s)$ и $F_2(s)$ — простые];

2) сопровождающей

$$x_c(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{M(\lambda_i)\,F_1(\lambda_i)}{D'(\lambda_i)\,F_2(\lambda_i)}e^{\lambda_i t};$$

3) свободной

$$x_{св}(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{M_н(\lambda_i)}{D'(\lambda_i)}e^{\lambda_i t}.$$

Рассмотрим влияние распределения нулей и полюсов передаточной функции системы, вида возмущающего воздействия и начальных условий на характер переходного процесса и сформулируем некоторые рекомендации по выбору распределения нулей и полюсов передаточной функции (если такая возможность имеется), при котором качество переходного процесса будет удовлетворительным.

При этом нужно подчеркнуть, что в практике встречаются два случая:

1) внешнее воздействие $f(t)$ является возмущающим и стоит задача создать систему, которая минимальным образом реагировала бы на это воздействие;

2) внешнее воздействие $f(t)$ является управляющим, полезным, и требуется так выбрать параметры системы, чтобы это воздействие воспроизводилось с минимальными погрешностями.

Как в том, так и в другом случае для уменьшения динамических ошибок и получения высококачественной системы необходимо соответствующим выбором параметров системы и расположения ее нулей и полюсов обеспечить возможное снижение собственных (свободной и сопровождающей) составляющих движения.

Вынужденная составляющая в первом случае должна быть возможно близкой к нулю, а во втором случае не должна по своему виду существенно отличаться от внешнего воздействия $f(t)$.

Рассмотрим условия, которые следуют из анализа влияния распределения нулей и полюсов передаточной функции системы на каждую из составляющих закона изменения интересующей нас величины $x(t)$.

Задача уменьшения вынужденной составляющей движения $x_в(t)$, возникающей при наличии возмущающего воздействия $f(t)$. Анализируя выражение вынужденной составляющей $x_в(t)$, нетрудно видеть, что ее величина будет тем меньше, чем меньше значения выражений $\left[\frac{M(s)}{D(s)}\right]_{s=\rho_k}$, т. е. значения передаточной функции системы в точках, соответствующих полюсам возмущающего воздействия, или, как говорят, значения комплексного спектра системы в полюсах воздействия, т. е. при $s=\rho_k$.

Так, например, если один из нулей передаточной функции системы лежит в начале координат, т. е. когда

$$M(s)=s(s-\gamma_2)\ldots(s-\gamma_m),$$

а возмущающее воздействие имеет постоянную составляющую [преобразование Лапласа $F(s)$ имеет полюс, расположенный в начале координат], $\left[\frac{M(s)}{D(s)}\right]_{s=0}=0$, и вынужденная часть решения не будет содержать постоянной составляющей. В этом случае мы имеем астатическую систему.

Вынужденная составляющая решения в системе с астатизмом второго порядка, в которой $M(s)=s^2(s-\gamma_3)\ \ldots\ (s-\gamma_m)$, не будет иметь постоянной слагаемой как при возмущающем воздействии в виде ступенчатой функции, так и при возмущающем воздействии вида $f(t)=kt$, так как $F(s)=\frac{k}{s^2}$. В последнем случае нуль второго порядка передаточной функции системы совпадает с полюсом второго порядка возмущающего воздействия, расположенным в начале координат.

В общем случае для уменьшения вынужденной составляющей целесообразно стремиться нули передаточной функции совмещать с полюсами возмущающего воздействия или вообще располагать их в области спектра воздействия, которая может быть известна заранее.

Задача воспроизведения управляющего воздействия. Эта задача возникает при расчете следящих систем, усилителей, систем управления, всережимных регуляторов с переменной настройкой и т. п.

Относительную погрешность воспроизведения определим [13] как отношение

$$\varepsilon = \frac{|x(t) - k_0 f(t)|}{K_0 |f(t)|}, \tag{391}$$

где $K_0 = \frac{M(0)}{D(0)} = \frac{b_0}{a_0} = \text{const}$ — коэфициент усиления.

Рассмотрим условия, при которых эта погрешность будет возможно меньшей и во всяком случае меньше некоторой наперед заданной допустимой погрешности ε_0.

Первым и основным условием точного воспроизведения внешнего воздействия является уменьшение собственных составляющих движения и обеспечение их быстрейшего затухания, поскольку эти составляющие представляют прямую ошибку воспроизведения.

При этом, естественно, ставится требование устойчивости системы, а также требование высокой степени устойчивости, малой колебательности и т. д.

Вторым существенным условием является требование отсутствия резонанса в системе.

Если один или несколько полюсов передаточной функции системы и комплексного спектра (преобразования Лапласа) внешнего воздействия совпадают, то имеет место так называемый обобщенный резонанс.

При наличии обобщенного резонанса вынужденная составляющая движения существенно отличается по своему виду от внешнего воздействия $f(t)$, и это отличие тем сильнее, чем ближе расположен резонансный полюс к мнимой оси [13]. Так, например, если в точке $s = \lambda_1$ резонансный полюс имеет порядок l, то соответствующая составляющая решения получит вид

$$(A_{l-1}t^{l-1} + A_{l-2}t^{l-2} + \ldots + A_0)\, e^{\lambda_1 t}.$$

Таким образом, для уменьшения ошибки воспроизведения необходимо удалять полюсы передаточной функции системы от полюсов воздействия.

Попытаемся оценить влияние расположения нулей и полюсов передаточной функции системы на ошибку воспроизведения внешнего воздействия.

Апроксимируем внешнее воздействие суммой составляющих следующего вида:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\nu} A_k e^{\rho_k t}, \tag{392}$$

тогда

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)\ldots(s-\rho_\nu)} = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}. \tag{393}$$

Вынужденная составляющая решения будет иметь вид

$$x_в(t) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{M(\rho_k) F_1(\rho_k)}{D(\rho_k) F_2'(\rho_k)} e^{\rho_k t}. \tag{394}$$

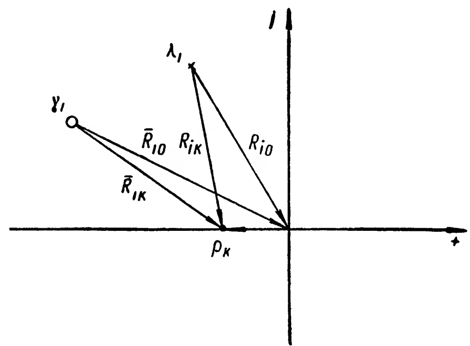
Ошибку воспроизведения $\varepsilon(t)$, определяемую формулой (391), можно представить в виде

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{K_0}\cdot\frac{|x(t)|}{|f(t)|}-1,$$

а ошибку воспроизведения внешнего воздействия $f(t)$ вынужденной составляющей $x_в(t)$ следующим выражением:

$$\varepsilon_в(t)=\frac{1}{K_0}\cdot\frac{|x_в(t)|}{|f(t)|}-1. \tag{395}$$

Следуя С. П. Стрелкову, введем ошибку воспроизведения отдельного элементарного воздействия $\varepsilon(\rho_k)$:



Фиг. 107. К определению погрешности воспроизведения внешнего воздействия.

$$\varepsilon(\rho_k)=\frac{1}{K_0}\cdot\frac{M(\rho_k)}{D(\rho_k)}-1, \tag{396}$$

или

$$\varepsilon(\rho_k)=\frac{D(0)}{M(0)}\cdot\frac{M(\rho_k)}{D(\rho_k)}-1.$$

Отсюда можно написать:

$$\frac{M(\rho_k)}{D(\rho_k)}=\frac{M(0)}{D(0)}\,[\varepsilon(\rho_k)+1]. \tag{397}$$

Подставляя это выражение в формулу (395) относительной ошибки воспроизведения внешнего воздействия вынужденной составляющей, получим

$$\varepsilon_в(t)=\frac{1}{|f(t)|}\left|\sum_{k=1}^{\nu}\frac{F_1(\rho_k)}{F_2'(\rho_k)}\,\varepsilon(\rho_k)\,e^{\rho_k t}\right|. \tag{398}$$

Эта формула показывает, что для улучшения качества воспроизведения внешнего воздействия нужно стремиться уменьшать $\varepsilon(\rho_k)$.

Преобразуем выражение $\varepsilon(\rho_k)$ и воспользуемся векторной интерпретацией входящих в формулы дробно-рациональных выражений, которая с успехом была применена при анализе погрешностей воспроизведения воздействия С. П. Стрелковым [13] и [14].

Представим $D(\rho_k)$ и $M(\rho_k)$ в следующем виде:

$$D(\rho_k)=a_n(\rho_k-\lambda_1)(\rho_k-\lambda_2)\ldots(\rho_k-\lambda_n)=a_n\prod_{i=1}^{n}R_{ik},$$

где R_{ik} — вектор, проведенный из i-го полюса передаточной функции в k-й полюс спектра воздействия; нетрудно видеть (фиг. 107), что $R_{ik}=R_{i0}+\rho_k$, где R_{i0} — вектор, проведенный из того же полюса в начало координат. Произведя замену R_{ik}, получим

$$D(\rho_k)=a_n\prod_{i=1}^{n}(R_{i0}+\rho_k);$$

$$M(\rho_k)=b_m(\rho_k-\gamma_1)(\rho_k-\gamma_2)\ldots(\rho_k-\gamma_m)=$$

$$=b_m\prod_{i=1}^{m}\overline{R}_{ik}=b_m\prod_{i=1}^{m}(\overline{R}_{i0}+\rho_k),$$

где $\overline{R}_{ik}$ — вектор, проведенный из i-го нуля передаточной функции в k-й полюс спектра воздействия;

$\overline{R}_{i0}$ — вектор, проведенный из того же нуля в начало координат (мы и в дальнейшем будем ставить черточку над векторами, идущими из нулей передаточной функции).

Подставив эти величины в выражение $\varepsilon(\rho_k)$, получим

$$\varepsilon(\rho_k) = \frac{a_0}{b_0} \cdot \frac{b_m \prod_{i=1}^{m} (\overline{R}_{i0} + \rho_k)}{a_n \prod_{i=1}^{n} (R_{i0} + \rho_k)} - 1.$$

Учитывая, что

$$D(0) = a_0 = a_n \prod_{i=1}^{n} (-\lambda_i) = a_n \prod_{i=1}^{n} R_{i0}$$

и

$$M(0) = b_0 = b_m \prod_{i=1}^{m} (-\gamma_i) = b_m \prod_{i=0}^{m} \overline{R}_{i0},$$

получаем [13]

$$\varepsilon(\rho_k) = \frac{\prod_{i=1}^{m} \left(1 + \frac{\rho_k}{\overline{R}_{i0}}\right)}{\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{\rho_k}{R_{i0}}\right)} - 1. \qquad (399)$$

Эта формула позволяет оценить погрешность воспроизведения каждого элемента воздействия, определяемого полюсом ρ_k.

Если $\frac{\rho_k}{\overline{R}_{i0}} \ll 1$ и $\frac{\rho_k}{R_{i0}} \ll 1$, то эта погрешность будет близка к нулю.

Если $R_{i0} \approx \overline{R}_{i0}$, то ошибка $\varepsilon(\rho_k)$ также будет весьма малой.

Отсюда видно, что для снижения погрешностей воспроизведения внешних воздействий или для повышения управляемости системы необходимо полюсы и нули передаточной функции удалять от области расположения полюсов спектра воздействия и по возможности приближать нули передаточной функции к ее полюсам, Так как число нулей передаточной функции всегда меньше числа ее полюсов, то целесообразно стремиться располагать нули вблизи тех полюсов передаточной функции, которые ближе всего к области расположения полюсов спектра воздействия.

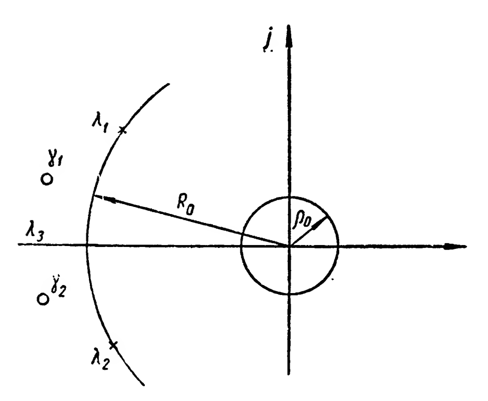
Если радиус ρ_0 области, внутри которой расположены полюсы спектра воздействия, достаточно мал по сравнению с расстоянием от начала координат до ближайшего к этой области полюса или нуля передаточной функции системы R_0 (фиг. 108), $\left|\frac{\rho_0}{R_0}\right| \ll 1$, то точную

формулу для оценки погрешности воспроизведения уравнения (399) можно заменить более простой приближенной формулой

$$\varepsilon(\rho_k) \approx \rho_k \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\overline{R}_{i0}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_{i0}} \right]. \qquad (400)$$

В этом случае выражение (398) для общей погрешности воспроизведения $\varepsilon_в(t)$ тоже значительно упрощается:

$$\varepsilon_в(t) \approx \frac{1}{|f(t)|} \left| \sum_{k=1}^{\nu} \frac{F_1(\rho_k)}{F_2'(\rho_k)} S_k \rho_k e^{\rho_k t} \right|,$$



Фиг. 108. Области расположения нулей и полюсов передаточной функции системы и полюсов спектра воздействия.

где

$$S = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\overline{R}_{i0}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_{i0}}.$$

Преобразуем это выражение, заметив, что

$$\sum_{k=1}^{\nu} \frac{F_1(\rho_k)}{F_2'(\rho_k)} \rho_k e^{\rho_k t} = \dot{f}(t);$$

$$\varepsilon_в(t) = \frac{1}{|f(t)|} |S\dot{f}(t)| = \frac{\rho_0 S}{\rho_0} \cdot \frac{|\dot{f}(t)|}{|f(t)|},$$

или, обозначив $\rho_0 S = \vartheta$, получим

$$\varepsilon_в(t) = \vartheta \frac{|\dot{f}(t)|}{\rho_0 |f(t)|}. \qquad (401)$$

Таким образом, для снижения погрешности воспроизведения необходимо уменьшать безразмерную величину

$$\vartheta = \rho_0 \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\overline{R}_{i0}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_{i0}} \right],$$

зависящую только от взаимного расположения нулей и полюсов передаточной функции системы и радиуса области расположения полюсов спектра внешнего воздействия.

Задача уменьшения собственной сопровождающей составляющей. Как мы видели, в общем случае выражение сопровождающей собственной составляющей движения имеет вид

$$x_c(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M(\lambda_i) F_1(\lambda_i)}{D'(\lambda_i) F_2(\lambda_i)} c^{\lambda_i t}. \qquad (402)$$

Апроксимируем внешнее воздействие суммой составляющих

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\nu} A_k e^{\rho_k t}$$

и рассмотрим сначала сопровождающие движения, вызываемые одной составляющей воздействия:

$$f_k(t) = A_k e^{\rho_k t}.$$

Преобразование Лапласа для этой составляющей будет

$$F_k(s) = \frac{A_k}{s - \rho_k},$$

а составляющая движения $x_{ск}(t)$ получит выражение

$$x_{ск}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_k M(\lambda_i)}{D'(\lambda_i)(\lambda_i - \rho_k)} e^{\lambda_i t}. \quad (403)$$

Здесь

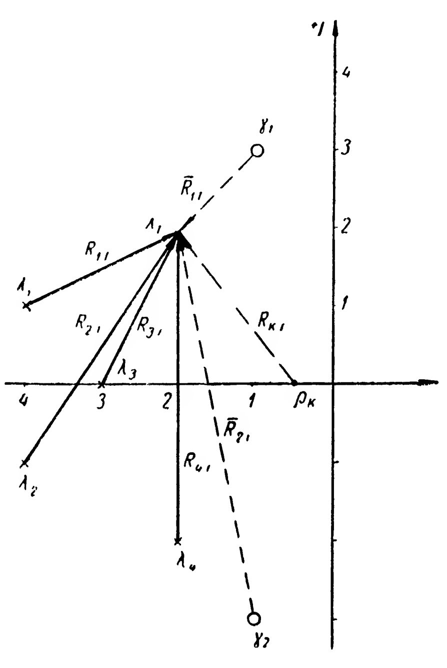
$$D'(\lambda_i) = \left[\frac{\partial D(s)}{\partial s}\right]_{s=\lambda_i} = a_n(\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2)\ldots(\lambda_i - \lambda_{i-1}) \times$$
$$\times (\lambda_i - \lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i - \lambda_n).$$

Таким образом,

$$x_{ск}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_k b_m}{a_n} \cdot \frac{(\lambda_i - \gamma_1)(\lambda_i - \gamma_2)\ldots(\lambda_i - \gamma_m)}{(\lambda_i - \lambda_1)\ldots(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i - \lambda_n)(\lambda_i - \rho_k)}. \quad (404)$$

Подчеркнем, что здесь суммирование распространяется на все полюсы передаточной функции системы.

Полученному выражению можно дать векторную интерпретацию. Нетрудно видеть, что каждая скобка числителя может быть представлена в виде вектора $\overline{R}_{li}$, проведенного из соответствующего нуля передаточной функции в ее i-й полюс λ_i, а знаменатель — в виде произведения векторов R_{ji}, проведенных в i-й полюс передаточной функции системы из всех остальных ее полюсов, умноженного на вектор R_{ki}, проходящий из данного k-го полюса внешнего воздействия в i-й полюс передаточной функции системы (фиг. 109).



Фиг. 109. К определению выражения собственной сопровождающей составляющей движения.

При указанных обозначениях формула (404) получит вид

$$x_{ск}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_k \frac{b_m}{a_n} \times$$
$$\times \frac{\prod_{l=1}^{m} \overline{R}_{li}}{R_{ki} \prod_{j=1}^{n-1} R_{ji}} e^{\lambda_i t}. \quad (405)$$

Собственная сопровождающая составляющая, а следовательно и динамические погрешности, будут тем меньше, чем меньше будут коэфициенты, стоящие под знаком суммы в выражении (405).

Анализируя выражение (405), мы видим, что сопровождающая составляющая будет тем меньше, чем дальше будут расположены полюсы передаточной функции от полюсов спектра воздействия и чем ближе будут находится нули передаточной функции к ее полюсам.

В том случае, если полюсы внешнего воздействия лежат в малой окрестности начала координат, а полюсы передаточной функции удалены от него, с достаточной точностью можно заменить расстояния между полюсами передаточной функции λ_i и полюсами спектра воздействия ρ_k расстояниями между полюсами λ_i и началом координат, т. е. принять $R_{ki} \approx R_{0i}$.

Представляет интерес проанализировать влияние изменения расположения нулей и полюсов передаточной функции на сопровождающую составляющую движения при постоянном коэфициенте усиления системы K_0.

Заметим, что

$$K_0 = \frac{b_0}{a_0} = \frac{M(0)}{D(0)} = \frac{b_m \prod\limits_{l=1}^{m} (-\gamma_l)}{a_n \prod\limits_{j=1}^{n} (-\lambda_j)} = \frac{b_m \prod\limits_{l=1}^{m} \overline{R}_{l0}}{a_n \prod\limits_{i=1}^{n} R_{j0}}, \tag{406}$$

отсюда

$$\frac{b_m}{a_n} = K_0 \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} R_{j0}}{\prod\limits_{l=1}^{m} \overline{R}_{l0}}. \tag{407}$$

Подставим это выражение в уравнение (405) и рассмотрим случай, когда можно принять $R_{ki} \approx R_{0i}$:

$$x_{ск}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_k K_0 \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} R_{j0} \prod\limits_{l=1}^{m} \overline{R}_{li}}{R_{0i} \prod\limits_{l=1}^{m} \overline{R}_{l0} \prod\limits_{j=1}^{n-1} R_{ji}} e^{\ _i t}.$$

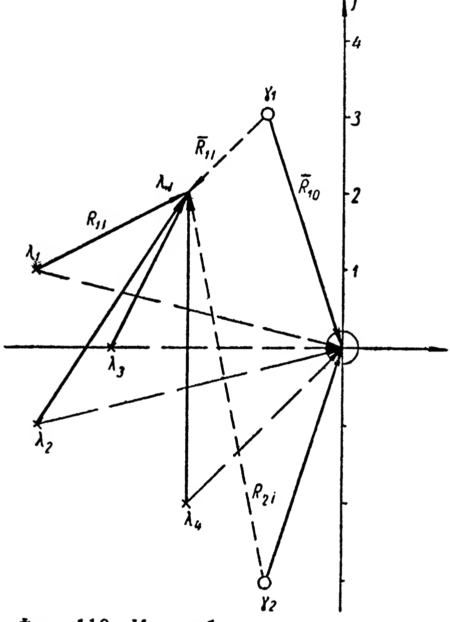
Учитывая, что $R_{0i} = -R_{i0}$, получим

$$x_{ск}(t) = -\sum_{i=1}^{n} A_k K_0 \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1} R_{j0} \prod\limits_{l=1}^{m} \overline{R}_{li}}{\prod\limits_{l=1}^{m} \overline{R}_{l0} \prod\limits_{j=1}^{n-1} R_{ji}} e^{\lambda_i t}, \tag{408}$$

где в произведении $\prod\limits_{j=1}^{n-1} R_{j0}$ в результате сокращения дроби отсутствует множитель, соответствующий $j = i$, т. е. R_{i0} — вектор, проходящий из i-го полюса в начало координат (фиг. 110).

Выражение (408) показывает, что в этом случае для уменьшения собственных сопровождающих колебаний необходимо стремиться векторы, проведенные из полюсов передаточной функции λ_i в начало координат R_{j0} и из нулей передаточной функции γ_l в ее полюсы, уменьшать, а векторы, проведенные между полюсами передаточной функции и из ее нулей в начало координат, — увеличивать.

Нетрудно видеть, что и то, и другое независимо осуществить нельзя, и эти требования в известной мере противоречивы. Однако можно найти некоторый оптимум, при котором расположение нулей и полюсов передаточной функции обеспечивает минимальное значение собственной сопровождающей составляющей движения. При этом нужно следить и за изменением вынужденной составляющей движения.



Фиг. 110. К приближенному определению выражения собственной сопровождающей составляющей движения при K_0=const.

З а д а ч а у м е н ь ш е н и я с в о б о д н о й с о с т а в л я ю щ е й д в и ж е н и я. Свободная составляющая движения, как уже отмечалось выше, появляется только при ненулевых начальных условиях. Величина этой составляющей зависит от вида функции $M_н(s)$, начальных условий и распределения полюсов передаточной функции системы (корней характеристического уравнения).

Выражение $M_н(s)$ и ее связь с параметрами системы рассмотрена в главе V. Анализу влияния расположения корней характеристического уравнения системы при типовых начальных условиях на качество переходного процесса посвящена значительная часть настоящей главы. Поэтому здесь мы не будем детально останавливаться на рассмотрении свободных колебаний системы. Отметим лишь, что свободные колебания затухают тем быстрее, чем дальше от мнимой оси расположены корни характеристического уравнения.

Пример. В качестве примера рассмотрим систему, передаточная функция которой имеет следующие нули γ и полюсы λ (фиг. 110):

$$\gamma_1 = -1+j3; \quad \gamma_2 = -1-j3;$$

$$\lambda_1 = -2+j2; \quad \lambda_2 = -2-j2; \quad \lambda_3 = -3; \quad \lambda_4 = -4+j;$$

$$\lambda_5 = -4-j.$$

Допустим, что

$$\dot{f}(t) = e^{-0,5t},$$

тогда

$$\rho_1 = -0{,}5$$

и

$$X(s) = \frac{(s+1+j3)(s+1-j3)}{(s+3)(s+2+j2)(s+2-j2)(s+4+j)(s+4-j)(s+0{,}5)}.$$

Найдем выражение ошибки воспроизведения $f(t)$ $\varepsilon(\rho_1)$ по формуле (399)

$$\varepsilon(\rho_1) = \frac{\left(1+\frac{\rho_1}{\overline{R}_{10}}\right)\left(1+\frac{\rho_1}{\overline{R}_{20}}\right)}{\left(1+\frac{\rho_1}{R_{10}}\right)\left(1+\frac{\rho_1}{R_{20}}\right)\left(1+\frac{\rho_1}{R_{30}}\right)\left(1+\frac{\rho_1}{R_{40}}\right)\left(1+\frac{\rho_1}{R_{50}}\right)} - 1.$$

Определив величины $\overline{R}_{i0}$ и R_{i0} прямо из чертежа, получим

$$\varepsilon(\rho_1) \approx 0{,}82.$$

Найдем выражение вынужденной составляющей $x_в(t)$:

$$x_в(t) = K_0\,[1+\varepsilon(\rho_1)]\,e^{\rho_1 t};$$

$$K_0 = \frac{M(0)}{D(0)} = 0{,}0245.$$

Для $\rho_1 = -0{,}5$ получим

$$x_в(t) = 0{,}0245\,[1+0{,}82]\,e^{-0{,}5t} = 0{,}045e^{-0{,}5t}.$$

Найдем выражение **собственной сопровождающей составляющей** движения $x_c(t)$.

Формула (405) для этого случая дает

$$x_c(t) \approx \sum_{i=1}^{5} \frac{\prod_{l=1}^{2} \overline{R}_{li}}{R_{0i}\prod_{j=1}^{4} R_{ji}}\, e^{\lambda_i t}.$$

Пользуясь фиг. 110 и исходными данными, найдем численные значения величин, входящих в полученное выражение. В результате получим

$$x_c(t) = 0{,}07e^{-2t}\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right) - 0{,}434e^{-3t} + 0{,}38e^{-4t}\cos\left(t-\frac{\pi}{9}\right).$$

Выясним на этом примере влияние на переходный процесс различного расположения нулей передаточной функции при неизменном расположении полюсов. Для этого переместим нули передаточной функции [1] в точки $\gamma_1' = -2+j1{,}8$; $\gamma_2 = -2-j1{,}8$ и вычислим выражения $x_в(t)$ и $x_c(t)$, сохранив при этом величину коэфициента K_0:

$$\varepsilon_{(\rho_1)} = \frac{1+\frac{0{,}5^2-2\cdot 2\cdot 0{,}5}{2^2+1{,}8^2}}{0{,}78\cdot 0{,}834\cdot 0{,}78} - 1 = 0{,}48.$$

---

[1] Изменение расположения нулей передаточной функции без нарушения расположения ее полюсов обычно представляет большие трудности, так как параметры системы, определяющие расположение нулей, влияют и на положение полюсов. Эта задача легко решается, если в системе имеется дополнительное воздействие по возмущающей функции и ее производным.

Для сохранения значения K_0 возьмем выражение $M(s)$ в следующем виде:

$$M(s) = b_2(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)$$

и выберем соответствующее значение b_2:

$$K_0 = \frac{M(0)}{D(0)} = \frac{b_2 \cdot 7{,}24}{408} = 0{,}0177 b_2 = 0{,}0245,$$

откуда

$$b_2 = 1{,}38.$$

После соответствующих вычислений получим

$$x_в(t) = 0{,}0245\,[1 + 0{,}48]\,e^{-0{,}5t} = 0{,}0362 e^{-0{,}5t}$$

и

$$x_c(t) = 1{,}1 \cdot 10^{-2} e^{-2t} \cos(2t + 0{,}06\pi) - 0{,}195 e^{-3t} +$$

$$+ 0{,}216 e^{-4t} \cos\left(t - \frac{\pi}{5}\right).$$

Полученные выражения для $x_в(t)$ и $x_c(t)$ показывают, что в результате изменения расположения нулей передаточной функции внутри области расположения ее полюсов существенно снизились амплитуды или, точнее говоря, величины всех составляющих переходного процесса, а компонента собственных движений системы, определяемая полюсами λ_1 и λ_2 передаточной функции, вблизи которых (на расстоянии 0,2) помещены ее нули γ_1' и γ_2', уменьшилась почти в 6 раз.

Роль этой компоненты по сравнению с другими стала пренебрежимо малой, несмотря на то, что определяющие ее полюсы имеют наименьшую по абсолютной величине вещественную часть, характеризующую степень устойчивости системы. При этом переходный процесс в основном уже определяется другими полюсами передаточной функции.

Из анализа влияния распределения нулей и полюсов передаточной функции на характер переходного процесса и его основные составляющие можно сделать следующие общие выводы и сформулировать некоторые рекомендации по выбору расположения полюсов передаточной функции относительно области полюсов заданного спектра внешнего воздействия.

1. Полюсы передаточной функции системы следует удалять от области расположения полюсов спектра внешнего воздействия и во всяком случае не допускать их совпадения, что приводит к обобщенному резонансу.

2. Нули и полюсы передаточной функции необходимо располагать так, чтобы значение передаточной функции $\frac{M(s)}{D(s)}$ в полюсах ρ_k спектра воздействия $\frac{M(\rho_k)}{D(\rho_k)}$ было минимальным, если система должна минимальным образом реагировать на возмущающее воздействие $f(t)$, или таким образом, чтобы передаточная функция $\frac{M(s)}{D(s)}$ имела в полюсах спектра

воздействия почти постоянное значение, т. е. чтобы $\frac{M(p_1)}{D(p_1)} \approx \frac{M(p_2)}{D(p_2)} \approx$ $\approx \ldots = \text{const}$, если система должна с минимальными погрешностями воспроизводить внешнее воздействие $f(t)$.

3. Нули передаточной функции целесообразно размещать вблизи ее полюсов, расположенных ближе всего к мнимой оси. При удалении нулей от полюсов передаточной функции возрастают собственные сопровождающие колебания.

4. Полюсы передаточной функции необходимо располагать возможно дальше от мнимой оси. Удаленные от мнимой оси полюсы не оказывают существенного влияния на характер переходного процесса.

Эти общие рекомендации позволяют ориентироваться в выборе расположения нулей и полюсов передаточной функции системы относительно заданной области расположения полюсов спектра воздействия и изменять их положение в определенном направлении, если качество переходного процесса не удовлетворяет поставленным требованиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гарднер М. Ф. и Бэрнс Дж. Л., Переходные процессы в линейных системах, Гостехиздат, 1949.
2. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, Гостехиздат, 1946.
3. Солодовников В. В., диссертация, ВЭИ, 1939.
4. Чаплыгин С. А., Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, Собр. соч. т. 1, М, Гостехтеоретиздат, 1948.
5. Фельдбаум А. А., О распределении корней характеристического уравнения систем автоматического регулирования, „Автоматика и телемеханика“, т. IX, № 4, 1948.
6. Цыпкин Я. З. и Бромберг П. В., О степени устойчивости линейных систем, „Известия АН СССР. ОТН“ № 12, 1945.
7. Кулебакин В. С., Об определении основных параметров автоматических регуляторов, „Автоматика и телемеханика“ № 6, 1940.
8. Блох З. Ш., Динамика линейных систем автоматического регулирования машин, Гостехиздат, 1952.
9. Рубинчик А. М., Определение области расположения корней характеристического уравнения, сб. научных работ Московского механического института „Регулирование машин и синтез механизмов“, т. 1, Машгиз, 1950.
10. Рубинчик А. М., Приближенный метод оценки качества регулирования в линейных системах, сб. „Устройства и элементы теории автоматики и телемеханики“, Машгиз, 1952.
11. Мясников Н. Н., Критерий Михайлова и оценка корней характеристического уравнения, „Автоматика и телемеханика“, т. X, № 4, 1949.
12. Корнилов Ю. Г. и Пивень В. Д., Основы теории регулирования, Машгиз, 1947.
13. Стрелков С. П., К общей теории линейных усилителей, ч. I, „Автоматика и телемеханика“, т. IX, № 3, 1948.
14. Стрелков С. П., К общей теории линейных усилителей, ч. II, „Автоматика и телемеханика“, т. X, № 4, 1949.

ГЛАВА XX

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ И ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Метод интегральных оценок относится к числу аналитических методов исследования качества процессов регулирования. При аналитических методах иссследования качество процесса характерезуется величинами, выраженными в аналитической форме через параметры системы. Величинами, характеризующими процесс регулирования в методе интегральных оценок, служат определенные интегралы по времени от некоторых функций регулируемой величины или других координат системы.

Вид интегральной оценки, т. е. вид подинтегральной функции, выбирается с тем расчетом, чтобы, с одной стороны, оценка по возможности лучше характеризовала качество переходных процессов, а с другой — возможно проще выражалась через коэфициенты уравнений системы регулирования.

Эти условия являются противоречивыми, и иногда удобно пользоваться оценками, которые дают сравнительно отдаленное представление о качестве переходного процесса, но зато весьма просто определяются через коэфициенты уравнений.

Находят применение:

1) интегральные квадратические оценки вида

$$J_0 = \int_0^\infty x^2 dt; \; J_1 = \int_0^\infty \left(x^2 + \tau_1^2 \dot{x}^2\right) dt, \; \ldots;$$

$$J_n = \int_0^\infty \left[x^2 + \tau_1^2 \dot{x}^2 + \ldots + \tau_n^{2n} x^{(n)^2}\right] dt$$

или более общего вида

$$J = \int_0^\infty F dt,$$

где x — кордината системы;

$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ — постоянные, задаваемые при выборе оценки;

F — квадратическая форма координат системы;

2) линейные интегральные оценки

$$X_{00} = \int_0^\infty x dt; \quad X_{01} = \int_0^\infty xt dt, \ldots; \quad X_{0m} = \int_0^\infty xt^m dt,$$

а также линейные оценки вида

$$X_{\alpha m} = \int_0^\infty x e^{-\alpha t} t^m dt,$$

где α — положительная постоянная.

Метод интегральных оценок имеет значительные перспективы применения при исследовании как линейных, так и нелинейных систем. Этот метод получил основное свое развитие в трудах советских ученых [1]—[7].

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КВАДРАТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

Интегральные квадратические оценки наиболее общего вида могут быть получены следующим образом.

Пусть уравнения линейной системы записаны в общем виде:

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i + f_k(t); \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{409}$$

где x_i — координаты системы.

Будем пока предполагать, что возмущающие воздействия $f_k(t)$ имеют форму

$$f_k(t) = \sum g_{kq} e^{\lambda_q t},$$

где g_{kq} — заданные коэфициенты;

λ_q — постоянные, имеющие отрицательные вещественные части.

Умножим уравнение (409) последовательно на $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и проинтегрируем в пределах от 0 до ∞ *, тогда будем иметь n^2 уравнений вида

$$\int_0^\infty \dot{x}_k x_j dt = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \int_0^\infty x_i x_j dt + \sum g_{kq} X_j(-\lambda_q), \tag{410}$$

где $X_j(s)$ — преобразование Лапласа функции $x_j(t)$.

Если не принимать во внимание соотношений

$$\int_0^\infty x_i x_j dt = \int_0^\infty x_j x_i dt, \tag{411}$$

то уравнение (410) содержит n^2 неизвестных вида $\int_0^\infty x_i x_j dt$ и n^2 неизвестных вида $\int_0^\infty \dot{x}_k x_j dt$. Число уравнений становится равным числу неизвестных, если, интегрируя по частям, записать:

$$\int_0^\infty \dot{x}_k x_j dt = x_k x_j \Big|_0^\infty - \int_0^\infty x_k \dot{x}_j dt. \tag{412}$$

* Для устойчивой системы все указанные интегралы сходятся.

Линейная комбинация интегралов $\int\limits_0^\infty x_k x_j dt$ является интегральной квадратической оценкой. Иными словами, интегральная квадратическая оценка представляет интеграл от квадратической формы координат системы

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\sum \mu_{kj} x_k x_j \right) dt .$$

Уравнения (410) и (412) позволяют выразить интегральную квадратическую оценку через начальное значение переменных и коэфициенты уравнений a_{kl}. Например, если уравнения системы имеют вид

$$\dot{x}_1 = -ax_1 - bx_2;$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - e^{-\lambda t},$$

где a, b, λ — вещественные положительные постоянные, то уравнения (410) и (412) запишутся следующим образом:

$$\int\limits_0^\infty \dot{x}_1 x_1 dt = -a\int\limits_0^\infty x_1^2 dt - b\int\limits_0^\infty x_1 x_2 dt;$$

$$\int\limits_0^\infty \dot{x}_1 x_2 dt = -a\int\limits_0^\infty x_1 x_2 dt - b\int\limits_0^\infty x_2^2 dt;$$

$$\int\limits_0^\infty \dot{x}_2 x_1 dt = \int\limits_0^\infty x_1^2 dt - X_1(\lambda);$$

$$\int\limits_0^\infty \dot{x}_2 x_2 dt = \int\limits_0^\infty x_1 x_2 dt - X_2(\lambda);$$

$$\int\limits_0^\infty \dot{x}_1 x_1 dt = -\frac{1}{2} \dot{x}_{10}^2; \quad \int\limits_0^\infty \dot{x}_2 x_2 dt = -\frac{1}{2} x_{20}^2;$$

$$\int\limits_0^\infty \dot{x}_1 x_2 dt = -x_{10}x_{20} - \int\limits_0^\infty x_1 \dot{x}_2 dt,$$

где x_{10} и x_{20} — начальные значения координат.

Из этих уравнений следует:

$$\int\limits_0^\infty x_1^2 dt = \frac{1}{2} x_{10}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} x_{20}^2 - \frac{b}{a} X_2(\lambda);$$

$$\int\limits_0^\infty x_1 x_2 dt = -\frac{1}{2} x_{20}^2 + X_2(\lambda);$$

$$\int\limits_0^\infty x_2^2 dt = \frac{1}{b}\left(x_{10}x_{20} + \frac{1}{2} x_{10}^2 \right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{b} \right) \left[\frac{1}{2} x_{20}^2 - X_2(\lambda) \right].$$

В частности, если начальные отклонения равны нулю, то

$$X_2(\lambda) = -\frac{\lambda + a}{2(\lambda^2 + a\lambda + b)\lambda}$$

и

$$\int\limits_0^\infty x_1^2 dt = \frac{b}{2a} \cdot \frac{\lambda + a}{(\lambda^2 + a\lambda + b)\lambda}$$

Применение интегральных квадратических оценок наиболее общего вида наталкивается на трудность рационального выбора значений коэфициентов μ_{kj} квадратичной формы. Дело в том, что интеграл квадратичной формы координат системы можно рассматривать как оценку качества процесса лишь в том случае, когда значение квадратичной формы монотонно увеличивается с увеличением отклонений координат. Более точно можно сказать, что коэфициенты μ_{kj} квадратической формы оценки должны выбираться так, чтобы уравнения вида

$$\sum \mu_{kj} x_k x_j = v_\nu; \quad \nu = 1,\ 2,\ \ldots;$$
$$v_1 < v_2 < v_3,\ \ldots$$

соответствовали замкнутым, вложенным друг в друга в порядке номеров ν, поверхностям. Однако при выборе оценки помимо этого условия требуется задать значение каждого из коэфициентов μ_{kj}, ибо это значение определяет „вес“ каждой составляющей в интегральной квадратической оценке.

Наибольшее применение находят интегральные квадратические оценки более простого вида:

$$J_0 = \int_0^\infty x^2 dt; \qquad J_1 = \int_0^\infty (x^2 + \tau_1^2 \dot{x}^2)\, dt,\ \ldots;$$

$$J_n = \int_0^\infty [x^2 + \tau_1^2 \dot{x}^2 + \tau_2^4 \ddot{x}^2 + \ldots + \tau_n^{2n} x^{(n)^2}]\, dt,$$

где x — отклонение регулируемой величины или другой координаты системы;

$\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_n$ — постоянные, задаваемые при выборе оценки и имеющие размерность времени.

Выбор постоянных $\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_n$ может быть произведен на основании следующих соображений.

Рассмотрим сначала вместо интеграла J_n другой интеграл

$$J'_n = \int_{-\varepsilon}^\infty [x^2 + \tau_1^2 \dot{x}^2 + \ldots + \tau_n^{2n} x^{(n)^2}]\, dt,$$

где $\varepsilon > 0$, причем будем предполагать, что производные интересующей нас величины $x(t)$ равны нулю при $t < 0$, а следовательно,

$$\dot{x}(-\varepsilon) = \ddot{x}(-\varepsilon) = \ldots = x^{(n)}(-\varepsilon) = 0. \qquad (413)$$

Представим интеграл J'_n в следующем виде:

$$J'_n = \int_{-\varepsilon}^\infty [x^2 + \tau_1^2 \dot{x}^2 + \ldots + \tau_n^{2n} x^{(n)^2}]\, dt =$$

$$= \int_{-\varepsilon}^\infty (x + \alpha_1 \dot{x} + \ldots + \alpha_n x^{(n)})^2\, dt + c. \qquad (414)$$

Возведя в квадрат подинтегральный многочлен правой части и интегрируя по частям произведения производных с неравными показателями, получаем, что равенство (414) имеет место, если

$$\alpha_0^2 = \tau_0^2;$$

$$\alpha_1^2 - 2\alpha_0\alpha_2 = \tau_1^2;$$

$$\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_0\alpha_4 = \tau_2^2;$$

$$\alpha_3^2 - 2\alpha_2\alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_5 - 2\alpha_0\alpha_6 = \tau_3^6; \qquad (415)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_n^2 = \tau_n^{2n};$$

$$c = \alpha_1 x^2 (-\varepsilon),$$

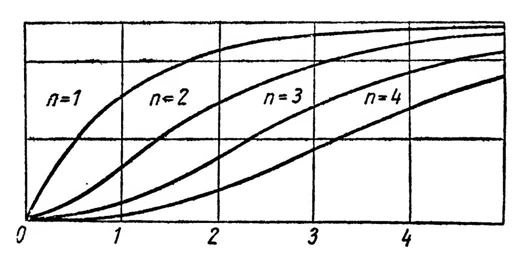
где $\alpha_0 = \tau_0 = 1$ введены для симметрии формул.

При этом учитываются соотношения (413) и обращение в нуль всех переменных величин при $t = \infty$.

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$J_n' = \int_0^\infty (x + \alpha_1\dot{x} + \ldots + \alpha_n x^{(n)})^2\, dt + \alpha_1 x_0^2,$$

где $x_0 = x(0)$.



Фиг. 111. Переходные функции n последовательно соединенных апериодических звеньев.

Если x_0 задано, то $\alpha_1 x_0^2 = \text{const}$ и интеграл

$$J_n = \int_0^\infty (x^2 + \tau_1^2\dot{x}^2 + \ldots + \tau_n^{2n} x^{(n)^2})\, dt \qquad (416)$$

имеет наименьшее значение тогда, когда x является решением диференциального уравнения

$$\alpha_n x^{(n)} + \alpha_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + x = 0 \qquad (417)$$

при $x_{(0)} = x_0$; $\dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \ldots = x^{(n)}(0) = 0$.

Отсюда следует, что если желательно приближение переходной функции рассматриваемой системы к функции, являющейся решением уравнения (417) при указанных начальных условиях, то следует отыскивать минимум интегральной оценки J_n, постоянные которой определяются соотношениями (415).

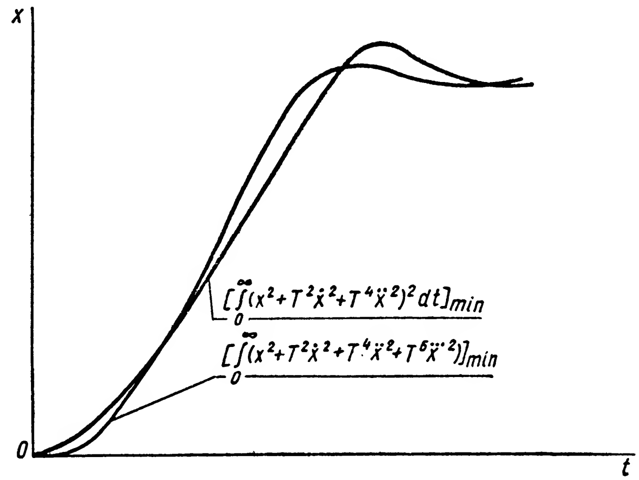
Так, если в качестве функции, к которой должно осуществиться приближение, выбрать переходную функцию n последовательно соединенных апериодических звеньев (фиг. 111), то коэфициенты α_1, α_2, ...,

α_n будут равны коэфициентам при соответствующих степенях s в разложении бинома $(1+Ts)^n$, т. е.

$$\alpha_q = \frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{q!} T^q.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (415), легко найти, что

$$\tau_q^{2q} = \frac{n(n-1)(n-q+1)}{q!} T^{2q}.$$



Фиг. 112. Экстремали, соответствующие минимуму квадратических оценок:

кривая 1 — $\left[\int_0^\infty (x^2+T^2\dot{x}^2+T^4\ddot{x}^2)\,dt\right]_{min}$; кривая 2 — $\left[\int_0^\infty (x^2+T^2\dot{x}^2+T^4\ddot{x}^2+T^6\dddot{x}^2)\,dt\right]_{min}$

Таким образом, приближение к переходным функциям фиг. 111 можно осуществить, находя условия минимума интегральных оценок вида

$$\int_0^\infty (x^2+T^2\dot{x}^2)\,dt;$$

$$\int_0^\infty (x^2+2T^2\dot{x}^2+T^4\ddot{x}^2)\,dt;$$

$$\int_0^\infty (x^2+3T^2\dot{x}^2+3T^4\ddot{x}^2+T^6\dddot{x}^2)\,dt;$$

. . . .

Пользуясь терминами вариационного исчисления, следует решение уравнения (417) называть экстремалью, а формулы (415) рассматривать как соотношения между коэфициентами интегральной оценки и коэфи-

циентами диференциального уравнения экстремали. Интегральным оценкам вида

$$\int_0^\infty (x^2 + T^2\dot{x}^2 + T^4\ddot{x}^2)\,dt;$$

$$\int_0^\infty (x^2 + T^2\dot{x}^2 + T^4\ddot{x}^2 + T^6\dddot{x}^2)\,dt;$$

$$\int_0^\infty (x^2 + T^2\dot{x}^2 + T^4\ddot{x}^2 + T^6\dddot{x}^2 + T^8\ddddot{x}^2)\,dt;$$

. . . .

соответствуют экстремали, изображенные на фиг. 112. Эти экстремали получены путем определения коэфициентов уравнений экстремалей согласно соотношениям (415) и путем приближенного определения функций рассмотренным ниже способом.

Способы вычисления интегральных квадратических оценок

Перейдем к рассмотрению способов вычисления интегральных квадратических оценок.

Как уже указывалось, интегральные квадратические оценки выражаются в конечном виде через начальные значения переменных и коэфициенты уравнений.

Во многих случаях удобно пользоваться формулой, представляющей результат решения уравнений (410)—(412). Эту формулу можно записать в следующем виде [5].

Если функция $x(t)$ имеет дробно-рациональное преобразование Лапласа

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)\,e^{-st}\,dt = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n}\cdot\frac{1}{s}; \quad m \leqslant n - 1 \quad (418)$$

и корни уравнения

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

обладают отрицательными вещественными частями, то

$$\int_0^\infty [x(t) - x(\infty)]^2\,dt = \frac{1}{2a_0^2\Delta}(B_0\Delta_0 + B_1\Delta_1 + \ldots + B_m\Delta_m - 2b_0b_1\Delta), \quad (419)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & a_4 & -a_6 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 & -a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$\Delta_\nu (\nu = 0, 1, \ldots, m)$ — определитель, получающийся из Δ заменой $(\nu + 1)$ столбца столбцом

$$a_1, \quad a_0, \quad 0, \quad 0, \ldots 0;$$

$$B_0 = b_0^2;$$

$$B_1 = b_1^2 - 2b_0 b_2;$$

$$\cdots\cdots$$

$$B_k = b_k^2 - 2b_{k-1} b_{k+1} + \ldots + 2(-1)^k b_0 b_{2k};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_m = b_m^2.$$

Следует заметить, что определитель Δ равен старшему определителю Гурвица и обращается в нуль на соответствующем участке границы области устойчивости.

Если $b_0 = 0$, то преобразование Лапласа имеет вид

$$X(s) = \frac{b_1 + b_2 s + \ldots + b_m s^{m-1}}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n}.$$

Предельное значение $x(\infty)$ в этом случае равно нулю:

$$x(\infty) = \frac{b_0}{a_0} = 0.$$

Формула (419) принимает вид

$$\int_0^\infty x^2 dt = \frac{1}{2a_0^2 \Delta} (B_1 \Delta_1 + B_2 \Delta_2 + \ldots + B_m \Delta_m), \tag{420}$$

где

$$B_1 = b_1^2;$$

$$B_2 = b_2^2 - 2b_1 b_3;$$

$$\cdots\cdots$$

$$B_k = b_k^2 - 2b_{k-1} b_{k+1} + \ldots - 2(-1)^k b_1 b_{2k-1};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_m = b_m^2.$$

Так, например, если преобразование Лапласа интересующей нас величины равно

$$X(s) = \frac{b_1 + b_2 s}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + s^3},$$

то

$$B_1 = b_1^2; \; B_2 = b_2^2; \; B_3 = B_4 = \ldots = 0;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & -1 \\ 0 & -1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - 1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_2; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -a_2 & a_1 \\ 0 & a_1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

и

$$\int_0^\infty x^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_1^2 a_2 + b_2^2}{a_1 a_2 - 1}.$$

Формула (420) годна тогда, когда степень полинома числителя преобразования $X(s)$ не менее чем на две единицы меньше степени полинома знаменателя. Иногда требуется найти интегральную квадратическую оценку функции, преобразование Лапласа которой имеет вид

$$X(s) = \frac{b_1 + b_2 s + \ldots + b_n s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n}.$$

Соответствующая этому случаю формула записывается так [5]:

$$\int_0^\infty x^2 dt = \frac{1}{2a_0^2 \Delta} \left[B_0' \Delta_0 + B_1' \Delta_1 + \ldots + B_{n-1}' \Delta_{n-1} - 2b_0' b_1' \Delta\right], \quad (421)$$

где

$$B_0' = b_n^2 \left(\frac{b_0}{b_n} - \frac{a_0}{a_n}\right)^2;$$

$$B_1' = b_n^2 \left[\left(\frac{b_1}{b_n} - \frac{a_1}{a_n}\right)^2 - 2\left(\frac{b_0}{b_n} - \frac{a_0}{a_n}\right)\left(\frac{b_2}{b_n} - \frac{a_2}{a_n}\right)\right];$$

$$B_2' = b_n^2 \left[\left(\frac{b_2}{b_n} - \frac{a_2}{a_n}\right)^2 - 2\left(\frac{b_1}{b_n} - \frac{a_1}{a_n}\right)\left(\frac{b_3}{b_n} - \frac{a_3}{a_n}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{b_0}{b_n} - \frac{a_0}{a_n}\right)\left(\frac{b_4}{b_n} - \frac{a_4}{a_n}\right)\right];$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_{n-1}' = b_n^2 \left(\frac{b_{n-1}}{b_n} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2;$$

$$b_0' = b_n \left(\frac{b_0}{b_n} - \frac{a_0}{a_n}\right); \quad b_1' = b_n \left(\frac{b_1}{b_n} - \frac{a_1}{a_n}\right),$$

где $b_0 = 0$ введено для симметрии формул и определители Δ, Δ_ν имеют указанное выше выражение.

Широко также известна следующая формула. Если

$$X(s) = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt,$$

то

$$\int_0^\infty x^2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) X(-j\omega)\, d\omega.$$

В частности, если

$$X(s) = \frac{b_1 + b_2 s + \ldots + b_n s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n},$$

то

$$\int_0^\infty x^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b_1 + jb_2\omega - b_3\omega^2 + \ldots)(b_1 - jb_2\omega + b_3\omega^2 + \ldots)}{(a_0 + a_1\omega + \ldots + a_n\omega^n)(a_0 - a_1\omega + \ldots + (-1)^n a_n\omega^n)}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_1 - B_2\omega^2 + \ldots + (-1)^{n-1} B_n\omega^{2n-2}}{(a_0 + a_1\omega + \ldots + a_n\omega^n)(a_0 - a_1\omega + \ldots + (-1)^n a_n\omega^n)}\,d\omega; \quad (422)$$

$$B_1 = b_1^2; \quad B_2 = b_2^2 - 2b_1b_3; \quad B_3 = b_3^2 - 2b_2b_4 + 2b_1b_5;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B_n = b_n^2.$$

Общей формулой для вычисления этих интегралов является формула (421). Она может быть выведена, в частности [10], на основании определения вычетов подинтегральной функции в правой части равенства (422).

В некоторых работах [10] приведены формулы (421) в развернутом виде для n от 1 до 7.

Для применения формул (419)—(421) необходимо найти преобразование Лапласа $X(s)$ интересующей нас величины. В ряде случаев определение $X(s)$ может представлять трудности. Последнее относится прежде всего к системам, находящимся под воздействием возмущающих сил, изменяющихся по сложному закону во времени. Поэтому желательно указать такой способ вычисления интегральных квадратических оценок, при котором не требовалось бы знания преобразований Лапласа возмущающих сил и достаточно было бы знания других легче определяемых характеристик возмущающих сил. Допустим, что передаточная функция и диференциальное уравнение системы имеют вид

$$Y(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n};$$

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 x = b_0 f + b_1 \frac{df}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m f}{dt^m}. \quad (423)$$

Возведем это уравнение в квадрат и проинтегрируем от 0 до ∞. Предполагая, что все интегралы сходятся и принимая, что

$$x^{(n)}(0) = x^{(n-1)}(0) = \ldots = x(0) = 0;$$

$$x^{(n)}(\infty) = x^{(n-1)}(\infty) = \ldots = x(\infty) = 0;$$

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(m)}(0) = (0),$$

получим

$$A_n\int_0^\infty \left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)^2 dt + A_{n-1}\int_0^\infty \left(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)^2 dt + \ldots + A_0\int_0^\infty x^2 dt =$$

$$= B_0\int_0^\infty f^2 dt + B_1\int_0^\infty \left(\frac{df}{dt}\right)^2 dt + \ldots + B_m\int_0^\infty \left(\frac{d^m f}{dt^m}\right)^2 dt, \quad (424)$$

где

$$A_0 = a_0^2;$$
$$A_1 = a_1^2 - 2a_0a_2;$$
$$A_2 = a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n = a_n^2;$$
$$B_0 = b_0^2;$$
$$B_1 = b_1^2 - 2b_0b_2;$$
$$B_2 = b_2^2 - 2b_1b_3 + 2b_0b_4;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_m = b_m^2.$$

Найдем выражение для интегральных квадратических оценок в виде ряда

$$\int_0^\infty x^{(k)^2}dt = D_0F_k + D_1F_{k+1} + D_2F_{k+2} + \ldots, \tag{425}$$

где $F_k = \int_0^\infty f^{(k)^2}dt$; D_0; $D_1 \ldots$ — коэфициенты.

Подставляя это выражение в уравнение (424) и приравнивая коэфициенты при F_k с одинаковыми индексами, получаем [1]

$$A_0D_0 = B_0;$$
$$A_1D_0 + A_0D_1 = B_1;$$
$$A_2D_0 + A_1D_1 + A_0D_2 = B_2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_nD_0 + A_{n-1}D_1 + \ldots + A_0D_n = 0; \tag{426}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_nD_\nu + A_{n-1}D_{\nu+1} + \ldots + A_0D_{n+\nu} = 0;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

[1] Уравнения (426), начиная с n-го, представляют однородные уравнения в конечных разностях с постоянными коэфициентами. Известно, что общее решение таких уравнений имеет вид

$$D_q = P_1z_1^q + P_2z_2^q + \ldots + P_nz_n^q,$$

где z_1; z_2; ...; z_n — корни уравнений

$$H(z) = A_0z^n + A_1z^{n-1} + \ldots + A_n = 0;$$

P_1; P_2; ...; P_n — постоянные, которые определяются из первых уравнений (426).

Эти уравнения позволяют последовательно определить коэфициенты D_0; D_1; ... по заданным значениям A_0; A_1; ... ; A_n; B_0; B_1; ... ; B_m. При возмущающих силах, изменяющихся медленно в сравнении с собственными движениями системы, члены ряда (425) быстро убывают. Это дает возможность приближенно определять интегральные квадратические оценки, вычисляя лишь несколько первых коэфициентов D_q. В качестве примера найдем указанным способом приближенное выражение интегральной квадратической оценки выходной величины колебательного звена при подаче на вход звена импульса вида $f(t) = te^{-\lambda t}$. Передаточная функция и величины F_k в этом случае равны

$$Y(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2};$$

$$F_0 = \int_0^\infty t^2 e^{-2\lambda t} dt = \frac{1}{4\lambda^3};$$

$$F_1 = \int_0^\infty (1 - \lambda t)^2 e^{-2\lambda t} dt = \frac{1}{4\lambda};$$

$$F_2 = \lambda^2 \int_0^\infty (2 - \lambda t)^2 e^{-2\lambda t} dt = \frac{5}{4}\lambda;$$

. . . .

. . . .

Соотношения (426) принимают форму

$$\omega_0^4 D_0 = \omega_0^4;$$

$$(2\zeta^2 - 1)\omega_0^2 D_0 + \omega_0^4 D_1 = 0;$$

$$D_0 + (2\zeta^2 - 1)\omega_0^2 D_1 + \omega_0^4 D_2 = 0,$$

. . . .

Обозначим характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (423), так:

$$H_0(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

Легко видеть, что $H(\lambda)$ связано с $H_0(\lambda)$ следующим соотношением:

$$H(z) = z^n \left| H_0\left(\frac{j}{\sqrt{z}}\right)\right|^2,$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Стало быть, если λ_ν ($\nu = 1;\ 2;\ \ldots;\ n$) — корни уравнения $H_0(\lambda) = 0$, то $\lambda_\nu = \frac{j}{\sqrt{z_\nu}}$ и $z_\nu = -\frac{1}{\lambda_\nu^2}$. Отсюда следует, что для сходимости ряда (425) достаточно, чтобы для всех q, больших некоторого q_0, выполнялось неравенство

$$F_{q+1} < \rho^2 F_q,$$

где ρ — модуль наименьшего по модулю корня характеристического уравнения.

откуда

$$D_0 = 1; \quad D_1 = \frac{1-2\zeta^2}{\omega_0^2}; \quad D_2 = -[1-(1-2\zeta^2)^2]\frac{1}{\omega_0^4}; \ldots;$$

. . . .

$$\int_0^\infty x^2 dt = \frac{1}{4\lambda^3}\left[1 + (1-2\zeta^2)\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2 + 20\zeta^2(1-\zeta^2)\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^4 + \ldots\right].$$

Особенно простое выражение интегральная квадратическая оценка имеет при степени затухания $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В этом случае

$$\int_0^\infty x^2 dt = F_0 - \frac{1}{\omega_0^4}F_2 + \frac{1}{\omega_0^8}F_4 - \frac{1}{\omega_0^{12}}F_6 + \ldots$$

Необходимо заметить, что коэфициенты D_0; D_1; ... равны коэфициентам разложения в ряд по степеням ω^2 квадрата амплитудной частотной характеристики.

В самом деле, квадрат амплитудной характеристики равен

$$|Y(j\omega)|^2 = \frac{|b_0 + jb_1\omega - b_2\omega^2 + jb_3\omega^3 + \ldots|^2}{|a_0 + ja_1\omega - a_2\omega^2 + ja_3\omega^3 - \ldots|^2} =$$

$$= \frac{B_0 + B_1\omega^2 + \ldots + B_m\omega^{2m}}{A_0 + A_1\omega^2 + \ldots + A_n\omega^{2n}}.$$

Находя коэфициенты разложения в ряд делением числителя на знаменатель, убеждаемся, что эти коэфициенты определяются соотношениями (426).

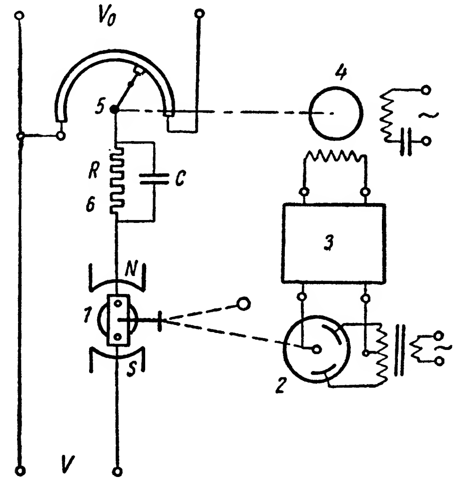
2. ЗАМЕЧАНИЯ О МЕТОДИКЕ И ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК

Целью применения интегральных квадратических оценок является определение таких значений параметров или соотношений между параметрами, при которых качество процесса регулирования удовлетворяет поставленным требованиям.

Отсутствие однозначного соответствия между формой кривой переходного процесса и значением любой из интегральных оценок затрудняет, а в ряде случаев и полностью исключает возможность определять качество процесса регулирования по значению интегральной оценки. Методика применения интегральных квадратических оценок обычно заключается не в определении характера процесса по числовым значениям этих оценок, а в отыскании условий минимума оценок.

Соотношения между параметрами системы регулирования, при которых интегральная квадратическая оценка имеет минимум, и являются согласно рассматриваемой методике теми расчетными формулами, на основании которых должно осуществляться проектирование регулятора. Необходимо иметь в виду, что во многих случаях интегральные квадратические и средние квадратические оценки позволяют произвести

энергетический расчет системы регулирования [1], а именно, энергию, выделяемую в элементах регулятора за время переходного процесса, или среднюю мощность, расходуемую в этих элементах при непрерывных колебаниях системы, можно выразить соответственно через интегральные квадратические или средние квадратические оценки. Поэтому требования к мощности элементов систем автоматического регулирования могут быть выражены в значениях указанных оценок, а расчет системы должен производиться с условием заданной ограниченности интегральных оценок, выражающих энергетические соотношения (см. рассматриваемый ниже пример).



Фиг. 113. Схема автопотенциометра.

Для определения условий минимума можно пользоваться формулами (426), (421) и (425), выражающими зависимость квадратических оценок от параметров системы.

Следует упомянуть, что аналитическое определение условий минимума выражений вида (429) для систем пятого и более высокого порядка обычно весьма громоздко и трудно выполнимо. Выбор параметров из условий минимума интегральных квадратических оценок, так же как и другие способы расчета систем регулирования, требует проверки качества процесса регулирования путем построения кривой переходного процесса при выбранных значениях параметров. Итак, расчет включает следующие этапы: выбор вида оценки, определение зависимости оценки от параметров системы, отыскание условий минимума, проверку качества переходного процесса, проверку энергетических соотношений.

Для иллюстрации методики применения интегральных квадратических оценок рассмотрим динамические ошибки автопотенциометра, схема которого изображена на фиг. 113.

В этом автопотенциометре разность измеряемого напряжения v и напряжения, снимаемого с потенциометра *5*, подается через корректирующее устройство (диференцирующий контур *6*) на гальванометр *1*. Гальванометр снабжен фотоэлектрическим датчиком *2*, посылающим сигнал на электронный усилитель *3*. К выходу электронного усилителя подключена управляющая обмотка конденсаторного асинхронного двигателя *4*. Двигатель *4* через редуктор связан со щеткой потенциометра *5* и при работе автопотенциометра устанавливает щетку в положение, при котором снимаемое напряжение равно подведенному напряжению v.

[1] Акад. В. С. Кулебакин впервые подчеркнул необходимость учета энергетических соображений в практику анализа динамики систем регулирования.

Запишем уравнения автопотенциометра, полагая начальные отклонения равными нулю.

Гальванометр может быть с высокой точностью описан уравнением колебательного звена

$$(T_3^2 s^2 + 2\zeta T_3 s + 1) X_2(s) = k_2 X_1(s), \qquad (427)$$

где $X_1(s)$; $X_2(s)$ — соответственно преобразования Лапласа тока и угла отклонения рамки;

$\frac{1}{T_3}$ — собственная частота гальванометра.

Если считать усилитель *3* линейным и безинерционным, пренебречь мертвым ходом в редукторе и для асинхронного серводвигателя принять обычно применяемое уравнение, эквивалентное последовательному соединению апериодического и интегрирующего звена, то уравнение усилительной и исполнительной системы получит вид

$$(T_4 s^2 + s) X(s) = k_3 X_2(s), \qquad (428)$$

где $X(s)$ — преобразование Лапласа напряжения, снимаемого с потенциометра;

T_4 — постоянная времени серводвигателя.

Уравнение реального диференцирующего контура *6* имеет следующий вид:

$$(T_1 s + 1) X_1(s) = k_1 (1 + T_2 s)[F(s) - X(s)], \qquad (429)$$

где

$$T_2 = RC; \quad T_1 = \frac{R_г R}{R_г + R} C;$$

$R + R_г$ — сопротивление цепи гальванометра;

R и C — сопротивление и емкость диференцирующего контура *6*;

$F(s)$ — преобразование Лапласа входного напряжения.

Полагая сопротивление гальванометра малым, пренебрежем влиянием T_1, тогда

$$x_1 = k_1(v - x) + k_1 T_2 (\dot{v} - \dot{x}).$$

Средняя мощность, расходуемая на нагрев катушки гальванометра, равна

$$P_г = R_г \overline{x_1^2} = R_г \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_1^2 dt = R_г \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Big[k_1 (f - x) + k_1 T_2 \left(\frac{df}{dt} - \frac{dx}{dt}\right)\Big]^2 dt = R_г k_1^2 \overline{\Delta x^2} + R_г k_1^2 T_2^2 \overline{\Delta \dot{x}^2},$$

где $R_г$ — сопротивление катушки гальванометра;

$$\Delta x = x - f; \; f = v;$$

$\overline{\Delta x^2}$; $\overline{\Delta \dot{x}^2}$ — средние значения квадрата отклонения и квадрата производной отклонения.

Таким образом, условие, при котором мощность, рассеиваемая в катушке, не превосходит заданной величины P_0, имеет вид

$$\overline{\Delta x^2} + T_2^2\overline{\Delta \dot{x}^2} \leqslant \frac{P_0}{R_г k_1}.$$

Напряжение, снимаемое с потенциометра, пропорционально углу поворота α выходного вала редуктора сервомотора:

$$x = k_4\alpha,$$

поэтому уравнение сервомотора можно записать в таком виде:

$$T_4\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{d\alpha}{dt} = \frac{k_3}{k_4}x_2.$$

Если поделить это уравнение на T_4 и умножить на приведенный к выходному валу момент инерции подвижных частей J, то получим следующее уравнение моментов на выходном валу:

$$\frac{Jd^2\alpha}{dt^2} + \frac{J}{T_4}\cdot\frac{d\alpha}{dt} = \frac{Jk_3}{T_4k_4}x_2.$$

Средняя мощность, расходуемая на динамическое торможение, равна

$$P_м = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{Jd^2\alpha}{dt^2} + \frac{J}{T_4}\cdot\frac{d\alpha}{dt}\right)\frac{d\alpha}{dt}\,dt = \frac{J}{T_4}\overline{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2} = \frac{1}{k_4^2}\cdot\frac{J}{T_4}\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Помимо расчета мощностей элементов при проектировании систем регулирования важно бывает знать величину отклонений тех или иных координат системы. Так, например, в рассматриваемой системе необходимо знать величину отклонений луча гальванометра при данном режиме работы. Отклонение гальванометра может быть охарактеризовано средним значением $\overline{x_2^2}$.

Выбор параметров автопотенциометра произведем из условий минимума интегральной квадратической оценки $\int_0^\infty [x(t) - x(\infty)]^2 dt$ при скачкообразном изменении напряжения $v(t)$.

Зная характеристики возмущающей силы $F_0 = \overline{f^2}$; $F_1 = \overline{\frac{df^2}{dt}}$; $F_2 = \overline{\frac{d^2f^2}{dt^2}}$; . . . , определим при выбранных из условия качества переходного процесса значениях параметров мощность, рассеиваемую в гальванометре $P_г$ и в сервомоторе $P_м$, а также $\overline{x_2^2}$.

Если $T_4 = 0{,}1$ сек., $T_3 = 0{,}1$ сек., $\zeta = 0{,}75$, то согласно уравнениям (427)—(429) преобразование Лапласа напряжения x при скачкообразном изменении входного напряжения f равно

$$X(s) = \frac{b_0 + b_1s}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4}\cdot\frac{1}{s}, \tag{430}$$

где

$$a_0 = k; \quad a_1 = 1 + kT_2; \quad a_2 = 0{,}25; \quad a_3 = 0{,}025; \quad a_4 = 0{,}001;$$

$$b_0 = k; \quad b_1 = kT_2.$$

Формула (419) дает

$$J_0 = \int_0^\infty [x(t) - x(\infty)]^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2a_0^2}\left(\frac{b_0^2 \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & a_4 & 0 \\ a_0 & a_1 & -a_3 & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 & -a_4 \\ 0 & 0 & -a_1 & a_3 \end{vmatrix} + b_1^2 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_0 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & -a_4 \\ 0 & 0 & -a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 & -a_4 \\ 0 & 0 & -a_1 & a_3 \end{vmatrix}} - 2b_0b_1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k^2} \cdot \frac{1{,}31 - 0{,}25kT_2 - 0{,}025k + 5{,}25kT_2^2 - k^2T_2^3}{5{,}25 + 4{,}25kT_2 - k^2T_2^2 - 0{,}625k} - \frac{T_2}{2}.$$

Фиг. 114. Зависимость интегральной квадратической оценки J_0 от передаточного коэфициента разомкнутой системы k и постоянной времени диференцирующего контура T_2.

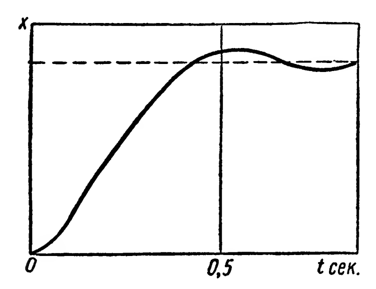
На фиг. 114 изображена зависимость интегральной квадратической оценки J_0 от передаточного коэфициента разомкнутой системы k и постоянной времени диференцирующего контура T_2. Указанная зависимость изображается семейством кривых, вдоль которых $J_0 = \text{const}$.

Из графиков (фиг. 114) следует, что оценка J_0 минимальна при $k \approx 7{,}5$ сек$^{-1}$; $T_2 = 0{,}15$ сек. При этих значениях параметров преобразование Лапласа $X(s)$ напряжения x равно

$$X(s) = \frac{7{,}5 + 1{,}13s}{7{,}5 + 2{,}13s + 0{,}25s^2 + 0{,}025s^3 + 0{,}001s^4} F(s),$$

причем в рассматриваемом случае $F(s) = \frac{1}{s}$.

На фиг. 115 приведена кривая переходного процесса, соответствующего выбранным значениям параметров.



Фиг. 115. Кривая переходного процесса.

Из графика фиг. 115 следует, что выбор параметров k и T_2 из условия минимума простейшей интегральной квадратической оценки J_0 обеспечивает удовлетворительное качество процесса регулирования в рассматриваемом автопотенциометре.

Определим теперь средние квадратические отклонения в рассматриваемой системе при произвольном медленном изменении входного напряжения f.

Из уравнений (427)—(429) при выбранных значениях параметров получаем

$$X_1(s) = k_1 \frac{1 + 0{,}4s + 6{,}25 10^{-2}s^2 + 4{,}75 10^{-3}s^3 + 1{,}5 10^{-4}s^4}{7{,}5 + 2{,}13s + 2{,}5 10^{-1}s^2 + 2{,}5 10^{-2}s^3 + 10^{-3}s^4} sF(s);$$

$$X_2(s) = k_1 k_2 \frac{1 + 2{,}5 10^{-1}s + 1{,}5 10^{-2}s^2}{7{,}5 + 2{,}13s + 2{,}5 10^{-1}s^2 + 2{,}5 10^{-2}s^3 + 10^{-3}s^4} sF(s);$$

$$\Delta X(s) = \frac{1 + 2{,}5 10^{-1}s + 2{,}5 10^{-3}s^2 + 10^{-3}s^3}{7{,}5 + 2{,}12s + 2{,}5 10^{-1}s^2 + 2{,}5 10^{-2}s^3 + 10^{-3}s^4} sF(s),$$

где $X_1(s)$; $X_2(s)$; $\Delta X(s)$ — преобразования Лапласа соответственно тока гальванометра, угла отклонения рамки и разности напряжений $\Delta x = x - f$.

Воспользуемся формулой (425), которая пригодна, очевидно, и для средних квадратических оценок; находим:

$$\overline{x^2} = F_0 + 8{,}9 10^{-3}F_1 + 3{,}86 10^{-4}F_2 - 7{,}35 10^{-6}F_3 + 2{,}18 10^{-7}F_4 + \ldots;$$

$$\overline{x_1^2} = k_1^2 (1{,}78 10^{-2}F_1 + 3{,}86 10^{-4}F_2 + 1{,}1 10^{-5}F_3 - 3{,}4 10^{-9}F_4 + 3{,}15 10^{-9}F_5 + \ldots);$$

$$\overline{x_2^2} = k_1^2 k_2^2 (1{,}78 10^{-2}F_1 + 3{,}4 10^{-4}F_2 + 8{,}53 10^{-6}F_3 - 6 10^{-8}F_4 + 2{,}57 10^{-9}F_5 + \ldots);$$

$$\overline{\Delta x^2} = 1{,}78 10^{-2}F_1 - 1{,}5 10^{-5}F_2 + 1{,}15 10^{-5}F_3 - 2{,}63 10^{-7}F_4 + 9{,}12 10^{-9}F_5 + \ldots;$$

$$\overline{\dot{x}^2} = F_1 + 8{,}9 10^{-3}F_2 + 3{,}86 10^{-4}F_3 - 7{,}35 10^{-6}F_4 + 2{,}18 10^{-7}F_5 + \ldots, \qquad (431)$$

где

$$F_0 = \overline{v^2}; \quad F_1 = \overline{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}; \quad F_2 = \overline{\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)^2}; \ldots$$

Пусть дано $F_0 = 50\, в^2$; $F_1 = 500\, в^2\ сек^{-2}$; $F_2 = 410^3\, в^2\ сек^{-4}$; $F_3 = 3{,}510^4\, в^2\ сек^{-6}$; $F_4 = 310^5\, в^2\ сек^{-8}$; $F_5 = 310^6\, в^2\ сек^{-10}, \ldots$

Эти значения примерно соответствуют синусоидальным колебаниям напряжения амплитудой 10 *в* и частотой 0,5 *гц*.

Легко убедиться, что условие сходимости рядов заведомо выполняется, если закон нарастания величин F_q при $q > 5$ остается примерно таким же, как и для первых шести номеров $\left(\text{т. е. если } \frac{F_{q+1}}{F_q} \leqslant 10\right)$.

Подставляя указанные значения в формулу (431), находим:

$$\overline{x^2} = 50 + 4{,}45 + 1{,}55 - 0{,}25 + 0{,}065 + \ldots \approx 55{,}8\, в^2;$$

$$\overline{x_1^2} = k_1^2 (8{,}9 + 1{,}545 + 0{,}385 - 0{,}001 + 0{,}009 + \ldots) \approx 10{,}8 k_1^2 a^2;$$

$$\overline{x_2^2} = k_1^2 k_2^2 (8{,}9 + 1{,}36 + 0{,}288 - 0{,}018 + 0{,}0077 + \ldots) \approx 10{,}54 k_1^2 k_2^2;$$

$$\Delta\overline{x^2} = 8{,}9 - 0{,}06 + 0{,}403 - 0{,}079 + 0{,}0274 + \ldots \approx 9{,}2\, в^2\ сек^{-2};$$

$$\overline{\dot{x}^2} = 500 + 36{,}6 + 13{,}5 - 2{,}2 + 0{,}65 + \ldots \approx 550\, в^2\ сек^{-2}.$$

Если допустимый из условия нагрева катушки гальванометра ток равен 1 *ма*, то

$$\overline{x_1^2} = 10{,}8 k_1^2 \leqslant 10^{-6},$$

откуда

$$\frac{1}{k_1} \geqslant 3{,}28 \cdot 10^3\ ом.$$

Величина $\frac{1}{k_1}$ есть сопротивление цепи гальванометра (см. фиг. 113). Выбираем $\frac{1}{k_1} = 4000$ *ом*.

Если конструкция фотоэлектрического датчика допускает отклонения луча $\sqrt{\overline{x_2^2}} \leqslant 3°$, то имеет место условие

$$\overline{x_2^2} = 10{,}54 k_1^2 k_2^2 \leqslant 27{,}5 \cdot 10^{-4},$$

откуда

$$k_2 \leqslant 64{,}5 a^{-1}.$$

Выбираем коэфициент чувствительности гальванометра $k_2 = 50\, a^{-1}$. Коэфициент усиления k_3 найдем из соотношения

$$k_1 k_2 k_3 = k = 7{,}5;$$

$$k_3 = \frac{7{,}5}{k_1 k_2} = 600\ в\ сек^{-1}.$$

Коэфициент k_4 равен падению напряжения на дуге потенциометра в 1 радиан. Примем $k_4 = 40$ *в*, тогда мощность $P_м$, расходуемая сервомотором на динамическое торможение, будет равна

$$P_м = \frac{J}{T_4} \cdot \frac{1}{k_4^2} \overline{\dot{x}^2} = \frac{J}{160} \overline{\dot{x}^2}.$$

Если момент инерции ротора сервомотора J составляет 0,1 *гсм·сек*², а коэфициент редукции равен 1000, то $J \approx 0{,}1 \cdot 1000^2 = 1$ *кгм·сек*².

Для этих значений

$$P_м = \frac{550}{160} = 3{,}44 \ кгм \cdot сек^{-1} = 33{,}6 \ вт.$$

Средняя квадратическая ошибка автопотенциометра при рассматриваемом режиме работы составляет

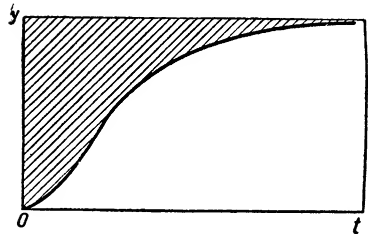
$$\sqrt{\overline{\Delta x^2}} = 3{,}02 \ в.$$

3. ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

На фиг. 116 изображен график монотонного переходного процесса в некоторой линейной системе регулирования. Отклонение регулируемой величины

$$x = y(\infty) - y(t)$$

для такого процесса монотонно уменьшается со временем. Интегральная оценка [3] $X_{00} = \int_0^\infty x dt$ представляет заштрихованную на фиг. 116 площадь, ограниченную кривой переходного процесса и прямой конечного значения $y(\infty)$. Эта площадь иногда называется площадью регулирования.



Фиг. 116. График монотонного переходного процесса.

Оценка более общего вида

$$X_{0m} = \int_0^\infty x t^m dt = \frac{1}{m+1} \int_0^\infty x d\left(t^{m+1}\right) = \int_0^\infty x(t_1)\, dt_1$$

равна площади, ограниченной кривой процесса, построенной в координатах x; $t_1 = \frac{t^{m+1}}{m+1}$. Таким образом, оценка X_{0m} тоже является как бы площадью регулирования, но для кривой, изображенной в новых координатах. Величины X_{00}, X_{01} и т. д. характеризуют определенным образом качество регулирования. Чем меньше эти величины для монотонного процесса, тем выше качество регулирования. Необходимо, однако, подчеркнуть, что столь простая связь между качеством процесса регулирования и оценками X_{0m} существует только для монотонных процессов.

Для колебательного процесса ни одна из величин X_{0m}, взятая в отдельности, не является мерой времени протекания процесса и вели-

чины отклонений. Это становится вполне очевидным, если учесть, что интегральная оценка X_{0m} представляет разность площадей, очерченных кривой переходного процесса и расположенных выше и ниже прямой предельного значения $y = y(\infty)$.

Итак, расчет параметров системы из условия минимума одной из оценок X_{0m} для колебательных систем может привести к неправильным выводам и значениям. Поэтому применение интегральных оценок X_{0m} либо сочетается с определением условий монотонности процесса, либо осуществляется несколько иным путем, чем путь отыскания условий минимума одной из оценок X_{0m}. Это другое применение линейных интегральных оценок заключается в следующем.

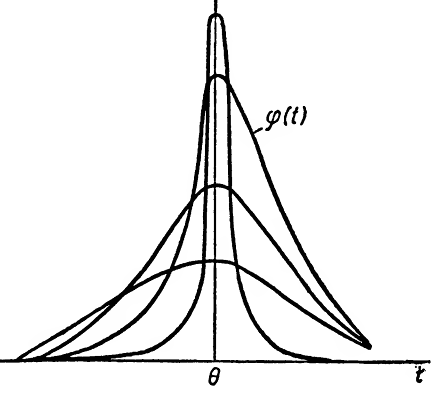
Интегральные оценки вида

$$X_{0m} = \int_0^\infty x t^m dt$$

и особенно оценки

$$X_{\alpha m} = \int_0^\infty x e^{-\alpha t} t^m dt$$

являются одним из средств приближенного решения линейных диференциальных уравнений с постоянными коэфициентами. Форма получающихся при этом решений такова, что позволяет в ряде случаев производить выбор параметров линейных систем автоматического регулирования.



Фиг. 117. Функция „веса" $\varphi(t)$.

Рассмотрим это применение для линейных интегральных оценок вида $X_{\alpha m}$. Известно, что если $\delta(t)$ — так называемая импульсная функция (см. главу V)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0; \\ \infty & \text{при } t = 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1,$$

то любую встречающуюся в рассматриваемых задачах функцию можно представить в виде

$$x(\theta) = \frac{\int_0^\infty x(t)\,\delta(t-\theta)\,dt}{\int_0^\infty \delta(t-\theta)\,dt}. \qquad (432)$$

Если вместо импульсной функции $\delta(t-\theta)$ подставить непрерывную функцию $\varphi(t)$, имеющую максимум в точке $t = \theta$ (фиг. 117), то равенство (432) уступает место приближенному равенству, тем более точному, чем острее максимум функции $\varphi(t)$.

В качестве функции „веса“ $\varphi(t)$ можно выбрать функцию вида

$$\varphi(t) = t^m e^{-\alpha t}.$$

Эта функция имеет максимум в точке $t = \frac{m}{\alpha}$ тем более острый, чем больше m.

Таким образом, получаем приближенное равенство

$$x\left(\frac{m}{\alpha}\right) \approx \frac{\int\limits_0^\infty x e^{-\alpha t} t^m dt}{\int\limits_0^\infty e^{-\alpha t} t^m dt} = \frac{X_{\alpha m}}{\frac{m!}{\alpha^{m+1}}}.$$

Однако, в силу того что функция $t^m e^{-\alpha t}$ несимметрична относительно точки максимума, более точным обычно оказывается соотношение

$$x\left(\frac{m+1}{\alpha}\right) \approx \frac{X_{\alpha m}}{\frac{m!}{\alpha^{m+1}}}. \tag{433}$$

Интегральная оценка $X_{\alpha m}$ выражается через преобразование Лапласа функции $x(t)$. В самом деле, диференцируя под знаком интеграла, имеем

$$\left[\frac{d^m}{ds^m} X(s)\right]_{s=\alpha} = \frac{d^m}{d\alpha^m} \int\limits_0^\infty x(t) e^{-\alpha t} dt = \int\limits_0^\infty x(t) \frac{d^m}{d\alpha^m} e^{-\alpha t} dt =$$

$$= (-1)^m \int\limits_0^\infty x(t) e^{-\alpha t} t^m dt = (-1)^m X_{\alpha m}, \tag{434}$$

где $x(t)$ — преобразование Лапласа функции $x(t)$.

Заменяя $\frac{1}{\alpha}$ через τ, из уравнений (433) и (434) находим [9]:

$$x[(m+1)\tau] \approx (-1)^m \frac{1}{m!\,\tau^{m+1}} \left[\frac{d^m X(s)}{ds^m}\right]_{s=\frac{1}{\tau}}. \tag{435}$$

Заметим, что величина $\frac{1}{m!}\left[\frac{d^m X(s)}{ds^m}\right]_{s=\frac{1}{\tau}}$ есть коэфициент при m-й степени s в разложении[1]

$$X\left(s + \frac{1}{\tau}\right) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots,$$

поэтому

$$\tilde{x}[(m+1)\tau] \approx (-1)^m \frac{c_m}{\tau^{m+1}};$$

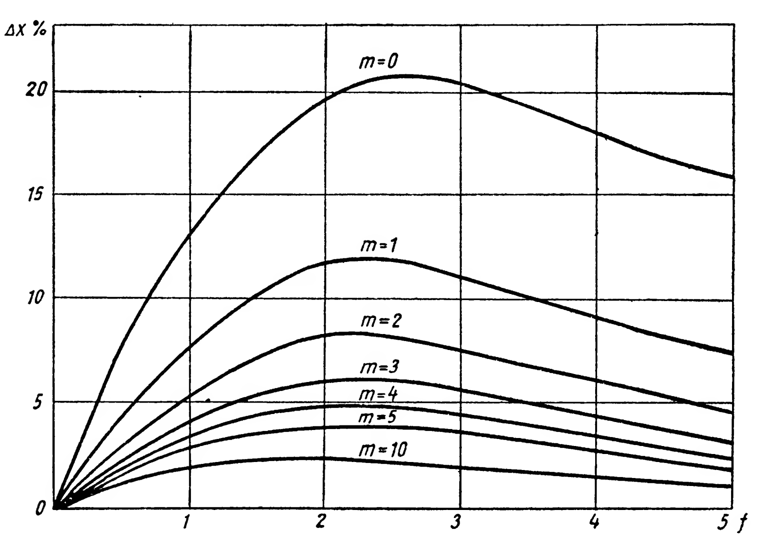
$$X\left(s + \frac{1}{\tau}\right) = \tau\,[\tilde{x}(\tau) - \tilde{x}(2\tau)\,\tau s + \tilde{x}(3\tau)\,\tau^2 s^2 - \ldots], \tag{436}$$

---

[1] Тот случай, когда $X(s)$ имеет полюс, в точке $s = \frac{1}{\tau}$ не рассматриваем.

где $\tilde{x}(\tau), \tilde{x}(2\tau), \ldots$ — приближенные значения функции $x(t)$ в моменты времени $\tau, 2\tau, \ldots$

Преобразование Лапласа $X\left(s+\frac{1}{\tau}\right)$ интересующей нас величины обычно представляет отношение полиномов или рядов по s, поэтому коэфициенты c_m и приближенные значения $\tilde{x}(\tau)$; $\tilde{x}(2\tau)$; ... можно определять посредством деления соответствующих полиномов или рядов.



Фиг. 118. Кривые зависимости погрешности Δx в определении ординаты кривой переходного процесса от порядка производной m и значения показателя f.

Формулы (435) и (436) удобны для приближенного определения кривых переходных процессов при известных числовых значениях коэфициентов преобразования Лапласа. Для применения формул (435) и (436) существенно знать, насколько значение $\tilde{x}[(m+1)\tau]$ отличается от $x[(m+1)\tau]$. Оценим разность $\Delta x = \tilde{x}[(m+1)\tau] - x[(m+1)\tau]$ для показательной функции $x(t) = e^{-\lambda t}$, где λ — вещественное число. Имеем

$$\Delta x = \frac{\int\limits_0^\infty e^{-\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)t} t^m dt}{\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau}} t^m dt} - e^{-\lambda(m+1)\tau} = e^{-\lambda(m+1)\tau}\left[\frac{e^{\lambda(m+1)\tau}}{(1+\lambda\tau)^{m+1}} - 1\right].$$

На фиг. 118 изображены кривые зависимости погрешностей от порядка производной m и значения показателя $f = (m+1)\lambda\tau$. Из этих графиков следует, в частности, что формулы (435) и (436) при $m = 4$ дают значение рассматриваемой величины с точностью не менее 5%

максимального значения. При $m=10$ абсолютная ошибка не превышает 2,5%. При $m=0$ абсолютная ошибка достигает 21%. Следует при этом отметить, что графики фиг. 118 относятся к частному, хотя и весьма характерному для переходных процессов, виду функции.

Интегральные оценки вида $X_{0m}=\int\limits_0^\infty x(t)\,t^m dt$ являются частным случаем оценок $X_{\alpha m}$. Так как оценки X_{0m} получаются из оценок $X_{\alpha m}$ при стремлении $\alpha=\frac{1}{\tau}$ к нулю, то формула (436) дает основание предполагать, что оценки X_{0m} могут быть применены для нахождения решений уравнений при $t\to\infty$.

Покажем, что это действительно так. Преобразование Лапласа $X(s)$ регулируемой величины $x(t)$ при нулевых начальных условиях может быть представлено в виде

$$X(s)=Y(s)F(s), \tag{437}$$

где $Y(s)$ — передаточная функция замкнутой системы;

$F(s)$ — преобразование Лапласа возмущающего воздействия.

Если передаточная функция не имеет полюса в точке $s=0$, то она в окрестности этой точки может быть представлена рядом

$$Y(s)=Y(0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{dY}{ds}\right)_{s=0}s+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2Y}{ds^2}\right)_{s=0}s^2+\ldots=$$

$$=X_{00}-\frac{1}{1!}X_{01}s+\frac{1}{2!}X_{02}s^2-\ldots,$$

где

$$X_{0m}=(-1)^m\left(\frac{d^mY}{ds^m}\right)_{s=0}=(-1)^k\left[\frac{d^m}{ds^m}\int\limits_0^\infty k(t)\,e^{-st}dt\right]_{s=0}=$$

$$=\int\limits_0^\infty k(t)\,t^m dt;$$

$k(t)$ — импульсная переходная функция.

Подставляя это выражение для $Y(s)$ в формулу (437) и переходя к оригиналам, получим

$$x(t)=X_{00}f-\frac{1}{1!}X_{01}f'+\frac{1}{2!}X_{02}f''-\ldots \tag{438}$$

Таким образом, коэфициенты разложения $x(t)$ в ряд по производным возмущающей функции равны коэфициентам разложения по степеням s передаточной функции и пропорциональны линейным оценкам X_{00}; X_{01} и т. д.

Ряд в правой части равенства (438) сходится при медленно меняющихся возмущающих функциях. Формулу (438) можно получить еще следующим образом. Если передаточная функция является дробно-рациональной функцией вида

$$Y(s)=\frac{b_0+b_1s+b_2s^2+\ldots+b_ms^m}{a_0+a_1s+a_2s^2+\ldots+a_ns^n},$$

то уравнение (437) соответствует диференциальному уравнению (423). Будем искать частное решение неоднородного уравнения (423) в виде ряда

$$x = C_0 f + C_1 f' + C_2 f'' + \dots, \tag{439}$$

полагая ряд n раз диферецируемым. Коэфициенты C_0, $C_1, \dots$ этого ряда часто именуют коэфициентами ошибок.

Подставляя выражение (439) для x в уравнение (438) и приравнивая коэфициенты при производных f одинаковых порядков, получаем

$$\begin{gathered} a_0 C_0 = b_0; \\ a_1 C_0 + a_0 C_1 = b_1; \\ \dots\dots\dots \\ a_m C_0 + a_{m-1} C_1 + \dots + a_1 C_{m-1} + a_0 C_m = b_m; \\ a_{m+1} C_0 + a_m C_1 + a_{m-1} C_2 + \dots + a_1 C_m + a_0 C_{m+1} = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n C_0 + a_{n-1} C_1 + \dots + a_0 C_n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n C_q + a_{n-1} C_{q+1} + \dots + a_0 C_{n+q} = 0. \\ \dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{440}$$

Эти уравнения позволяют последовательно определить коэфициенты C_0; C_1; $C_2, \dots$ и величины X_{00}; $X_{01}; \dots$, которые связаны с указанными коэфициентами соотношением

$$X_{0m} = (-1)^m m!\, C_m.$$

Доказательство условия сходимости ряда (438) может быть выполнено аналогично рассмотренному доказательству для интегральных квадратических оценок. Для равномерной сходимости ряда (438) достаточно, чтобы для всех q, больших q_0, выполнялось неравенство

$$M_{q+1} < \rho M_q,$$

где ρ — модуль наименьшего по модулю корня уравнения;

M_q — верхняя граница абсолютной величины производной $f^{(q)}_{(t)}$.

Чем быстрее сходится последовательность C_0; $C_1; \dots$, тем выше быстродействие системы. Наоборот, для получения требуемого быстродействия необходимо обеспечить некоторую скорость убывания коэфициентов ошибок. Поэтому выбор параметров систем регулирования в некоторых случаях можно производить, задавая значения или скорость убывания коэфициентов ошибок. Можно, в частности, пытаться так подобрать параметры системы, чтобы некоторые из коэфициентов ошибок обратились в нуль.

При применении такого способа необходимо иметь в виду следующее. Во-первых, равенство нулю всех m первых коэфициентов ошибок означает астатичность m-го порядка и может быть обеспечено лишь подбором соответствующей структурной схемы системы. Во-вторых, обращение в нуль некоторого числа коэфициентов ошибок может иметь место

как для устойчивой, так и для неустойчивой системы. Поэтому выбор параметров из условий равенства нулю некоторых коэфициентов ошибок должен сопровождаться проверкой устойчивости и качества переходных процессов при выбранных значениях параметров.

Таким образом, применение указанного способа требует осторожности. Однако определение значений параметров, обращающих в нуль коэфициенты ошибок с невысокими порядковыми номерами, настолько просто, что подобный предварительный расчет для многих систем оказывается целесообразным.

4. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК

Для иллюстрации применения линейных интегральных оценок рассмотрим динамические ошибки указанного выше автопотенциометра. Передаточная функция для этой системы имеет вид

$$Y(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4},$$

где $a_0 = k$; $a_1 = 1 + kT_2$; $a_2 = 2\zeta T_3 + T_4$; $a_3 = T_3^2 + 2\zeta T_3 T_4$; $a_4 = T_4 T_3^2$; $b_0 = k$; $b_1 = kT_2$; $k = k_1 k_2 k_3$.

Примем $T_4 = 0{,}1$ сек.; $T_3 = 0{,}1$ сек.; $\zeta = 0{,}75$; преобразование Лапласа $X(s)$ при скачкообразном изменении входного напряжения f будет иметь вид

$$X(s) = \frac{k + kT_2 s}{k + (1 + kT_2)\, s + 0{,}25 s^2 + 2{,}5 10^{-2} s^3 + 10^{-3} s^4} \cdot \frac{1}{s}.$$

Требуется выбрать значения коэфициента усиления k и постоянной диференцирующего звена T_2, обеспечивающие приемлемое качество переходного процесса. Согласно формулам (440) коэфициенты ошибок в данном случае равны

$$C_0 = 1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{k};$$

$$C_2 = \frac{1}{k}\left(T_2 = + \frac{1}{k} - 0{,}25\right);$$

$$C_3 = -\frac{1}{k}\left[\left(T_2 + \frac{1}{k}\right)^2 + 0{,}025 - 0{,}25\left(T_2 + \frac{2}{k}\right)\right];$$

. . . .

Определим значения параметров k и T_2, при которых коэфициенты ошибок C_2 и C_3 обращаются в нуль. Решая уравнения

$$T_2 + \frac{1}{k} - 0{,}25 = 0;$$

$$\left(T_2 + \frac{1}{k}\right)^2 + 0{,}025 - 0{,}25\left(T_2 + \frac{2}{k}\right) = 0,$$

получаем $T_2 = 0{,}15$ сек.; $k = 10$ сек$^{-1}$. Применив любой из критериев устойчивости, убеждаемся, что найденные значения соответствуют области

устойчивости. Используя указанный выше способ, найдем приближенное выражение переходной функции системы, т. е. приближенное выражение для напряжения $x(t)$, снимаемого с потенциометра, при скачкообразном изменении входного напряжения. Преобразование Лапласа переходной функции при выбранных значениях параметров имеет вид

$$X(s)=\frac{10+1{,}5s}{10+2{,}5s+0{,}25s^2+0{,}025s^3+0{,}001s^4}\cdot\frac{1}{s}.$$

Предполагая, что время регулирования в рассматриваемой системе существенно больше 0,1 сек., примем $\tau=0{,}1$ сек., тогда

$$X\left(s+\frac{1}{\tau}\right)=X(s+10)=\frac{25+1{,}5s}{950+285s+35s^2+2{,}25s^3+0{,}075s^4+0{,}001s^5}=$$

$$=2{,}63\,10^{-2}-6{,}31\,10^{-3}s+9{,}25\,10^{-4}s^2-1{,}08\,10^{-4}s^3+$$
$$+1{,}13\,10^{-5}s^4-1{,}20\,10^{-6}s^5+\ldots$$

Приближенные значения интересующей нас функции $x(t)$ будут равны:

$$x(0{,}1)\approx\tilde{x}(0{,}1)=\frac{2{,}63\,10^{-2}}{\tau}=0{,}263;$$

$$x(0{,}2)\approx\tilde{x}(0{,}2)=\frac{6{,}31\,10^{-3}}{\tau^2}=0{,}631;$$

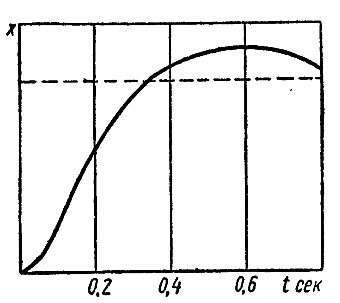
$$x(0{,}3)\approx\tilde{x}(0{,}3)=\frac{9{,}25\,10^{-4}}{\tau^3}=0{,}925;$$

$$x(0{,}4)\approx\tilde{x}(0{,}4)=\frac{1{,}08\,10^{-4}}{\tau^4}=1{,}08;$$

$$x(0{,}5)\approx\tilde{x}(0{,}5)=\frac{1{,}13\,10^{-5}}{\tau^5}=1{,}13;$$

$$x(0{,}6)\approx\tilde{x}(0{,}6)=\frac{1{,}20\,10^{-6}}{\tau^6}=1{,}2;$$

. . . .



Фиг. 119. Вычисленная кривая переходного процесса.

На фиг. 119 изображен график переходной функции системы согласно полученным приближенным значениям. Проводя аналогичное построение для меньшего интервала τ (скажем, $\tau=0{,}07$ сек. или $\tau=0{,}05$ сек.) или находя точное решение уравнения, можно убедиться, что найденная при $\tau=0{,}1$ приближенная переходная функция мало отличается от точной переходной функции. Небольшой объем вычислительной работы является несомненным достоинством рассмотренного приближенного способа построения переходных процессов.

График фиг. 119 показывает, что при выбранных значениях параметров $T_2=0{,}15$ сек., $k=10$ сек$^{-1}$ переходная функция имеет колебательный характер, причем перерегулирование довольно велико. Это дает основание предполагать, что выбранное значение параметров не является оптимальным с точки зрения качества процесса регулирования, хотя и сравнительно близким к оптимальным значениям. Уменьшив коэфициент усиления k и произведя построения переходной функции, можно подбором найти оптимальные значения параметров. Более точное решение задачи выбора параметров дает рассмотренный выше метод интегральных квадратических оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельштам Л. И., Полное собрание трудов, т. 1, 1948, стр. 173.
2. Харкевич А. А., „Журнал технической физики" № 7, 1937.
3. Кулебакин В. С., „Автоматика и телемеханика" № 6, 1941.
4. Моисеев Н. Д., „Записки семинара по устойчивости движения", вып. 3, ВВИА им. Жуковского, 1948.
5. Красовский А. А., О степени устойчивости линейных систем, „Труды ВВИА им. Жуковского", 1948.
6. Фельдбаум А. А. „Автоматика и телемеханика" № 1, 1948.
7. Красовский А. А., Интегральные оценки качества процесса регулирования, Машгиз, 1949.
8. Цыпкин Я. З., Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях, Госэнергоиздат, 1951.
9. Widder N., The inversion of the Laplace integral and the related moment problem, „Trans. Amer. Math. Soc.", 1934, p. 107—200.
10. Теория следящих систем, ИИЛ, 1951.

ГЛАВА XXI

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ ИМПУЛЬСНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В системах импульсного регулирования управление исполнительным устройством осуществляется не непрерывно, а через равноотстоящие друг от друга (точно или приближенно) моменты времени прямоугольными импульсами, параметры которых (высота, длительность, знак) зависят от значения отклонения регулируемой величины (или в общем случае — отклонения и производных, и интегралов его и т. д.) в дискретные равноотстоящие моменты времени. Физически это значит, что в системах импульсного регулирования цепь регулирования подвергается принужденному периодическому размыканию. Это обстоятельство позволяет весьма просто осуществить многоточечное регулирование и в ряде случаев получить более благоприятный характер процесса регулирования.

Из-за принужденного периодического размыкания цепи регулирования, являющегося характерным свойством систем импульсного регулирования, не представляется возможным описать процессы в них одними и теми же диференциальными уравнениями, как это имело место, например, для систем непрерывного регулирования. Поэтому исследование систем импульсного регулирования требует несколько иного подхода.

Изучению систем импульсного регулирования был посвящен ряд работ отечественных ученых: Н. Е. Жуковского, А. И. Сидорова, Я. И. Грдина (системы регулирования на отсечку), Ю. Г. Корнилова (системы с контактным гальванометром) и др.

В настоящей главе излагается методика исследования систем импульсного регулирования, основанная на использовании дискретного преобразования Лапласа, которая формально подобна методике исследования систем непрерывного регулирования.

Ограниченный объем главы не позволяет привести доказательства основных соотношений, необходимых для исследования и расчета систем импульсного регулирования. Их можно найти в соответствующей литературе [1], [2], [3].

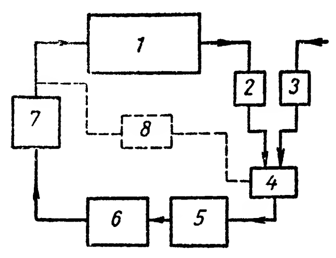
1. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ ИМПУЛЬСНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Структурная схема системы импульсного регулирования приведена на фиг 120, где обозначено: *1* — регулируемый объект, *2* — измерительное устройство, *3* — задающее устройство, *4* — сравнивающее устройство, *5* — управляющее устройство, *6* — импульсный элемент, *7* — исполнительное устройство, *8* — внутренняя связь.

От системы непрерывного регулирования система импульсного регулирования отличается наличием в ней импульсного элемента вместо обычного усилителя. Входной величиной импульсного элемента является сигнал, вырабатываемый управляющим устройством,— управляющий сигнал, который определяет собой закон регулирования.

Выходной величиной импульсного элемента является последовательность равноотстоящих друг от друга прямоугольных импульсов, которые определяются высотой, длительностью и знаком (полярностью).

Импульсный элемент преобразует, вообще говоря, непрерывно изменяющуюся выходную величину в последовательность равноотстоящих друг от друга на постоянную величину[1] T_p импульсов, параметры которых зависят от значений входной переменной в моменты времени $t = nT_p$, называемые моментами съема. Величина T_p называется ***интервалом регулирования или периодом чередования*** импульсов, а n представляет целое неотрицательное число.



Фиг. 120. Структурная схема системы прерывистого регулирования.

При этом энергия последовательности импульсов, являющихся выходными переменными импульсного элемента, обычно много больше энергии входной переменной благодаря наличию в нем дополнительного источника энергии. Таким образом, импульсный элемент является усилителем.

В зависимости от того, какие из параметров импульсов изменяются, системы импульсного регулирования можно подразделить на три типа.

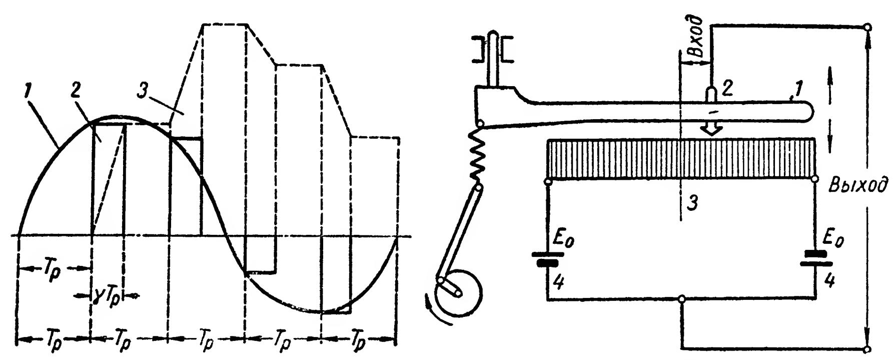
К первому типу относятся системы с импульсным элементом, преобразующим входную величину в последовательность импульсов, *высота* которых пропорциональна значениям его входной величины в моменты съема (фиг. 121).

Длительность импульсов, равная $\gamma T_p (\gamma \leqslant 1)$, называется *рабочим интервалом*, так как в течение этого промежутка времени импульсы воздействуют на исполнительное устройство. Схематическое изображение импульсного элемента системы импульсного регулирования первого типа приведено на фиг. 122. Импульсный элемент выполнен в виде прямой падающей дужки *1*, совершающей периодическое движение и прижимающей указатель *2* к той или иной точке прямоугольного сопротивления *3*, к которому присоединены батареи *4* с равным напряжением E_0. Входной величиной импульсного элемента является смещение указателя относительно средней точки прямоугольного сопротивления. Выходной величиной являются импульсы напряжения постоянной длительности, но различные по величине (и знаку) в зависимости от отклонения указателя от средней точки в моменты прижима его падающей дужкой.

Ко второму типу относятся системы с импульсным элементом, преобразующим входную переменную в последовательность импульсов, *длительность* которых пропорциональна значениям его входной вели-

[1] Точно или приближенно.

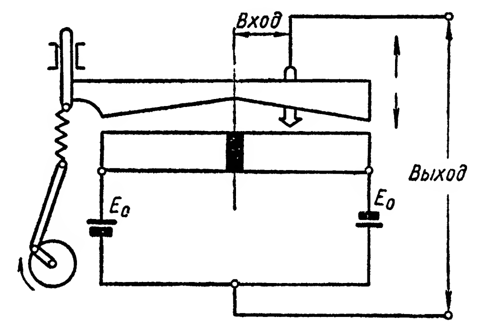
чины в моменты съема (фиг. 123). В этом случае рабочий интервал γT_p является переменным. Схематическое изображение импульсного элемента системы импульсного регулирования второго типа приведено на фиг. 124. Импульсный элемент выполнен в виде скошенной падающей дужки *1*, совершающей периодическое движение и прижимающей ука-



Фиг. 121. Входная (*1*) и выходная (*2*) величины импульсного элемента систем первого типа.

Фиг. 122. Импульсный элемент системы прерывистого регулирования первого типа.

затель *2* к контактной пластине *3*, изолированной в средней точке и соединенной с батареями *4* равного напряжения. Входной величиной импульсного элемента, как и ранее, является смещение указателя относительно средней точки. Выходной величиной являются импульсы напряжения постоянной высоты, но различные благодаря скосам падающей дужки по длительности



Фиг. 123. Выходная (*1*) и входная (*2*) величины импульсного элемента систем второго типа.

Фиг. 124. Импульсный элемент системы прерывистого регулирования второго типа.

(и знаку) в зависимости от отклонения указателя от средней точки в моменты прижима его падающей дужкой.

Наконец, к третьему типу относятся системы с импульсным элементом, преобразующим входную величину в последовательность импульсов постоянной высоты и длительности, но с различными *знаками* (*полярностями*), зависящими от знаков входной величины в моменты съема (фиг. 125).

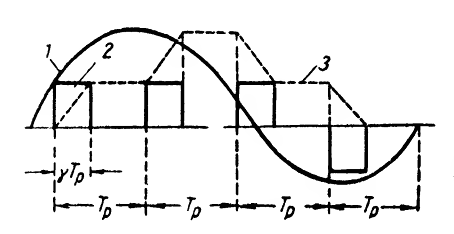
Схематическое изображение импульсного элемента систем третьего типа приведено на фиг. 126. Этот импульсный элемент отличается от

импульсного элемента систем второго типа лишь тем, что скошенная падающая дужка заменена прямой падающей дужкой.

В системах импульсного регулирования первого типа скорость серводвигателя, являющегося исполнительным устройством, изменяется в каждом рабочем интервале пропорционально значению входной величины импульсного элемента в моменты съема. В зависимости от скорости в каждом рабочем интервале изменяется и ход серводвигателя (кривая *3* на фиг. 121).

В системах импульсного регулирования второго типа скорость серводвигателя постоянна; в зависимости от длительности импульсов в каждом рабочем интервале меняется время, а значит и ход серводвигателя (кривая *3* на фиг. 123).

В системах импульсного регулирования третьего типа ско-



Фиг. 125. Входная (*1*) и выходная (*2*) величины импульсного элемента систем третьего типа.

Фиг. 126. Импульсный элемент системы прерывистого регулирования третьего типа.

рость и время хода серводвигателя постоянны. В каждом рабочем интервале ход серводвигателя постоянен.

Системы импульсного регулирования первого и второго типов являются аналогами линейных систем непрерывного регулирования, так как воздействие на исполнительное устройство пропорционально величине управляющего сигнала.

Системы импульсного регулирования третьего типа являются аналогами релейных систем регулирования.

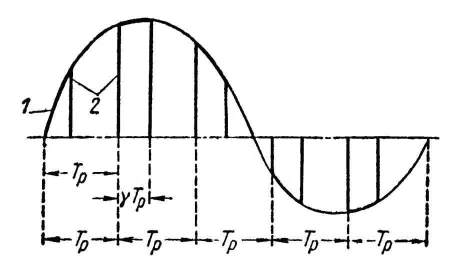
В приведенную выше классификацию систем импульсного или прерывистого регулирования не вошли системы с прерывателями или ключами, в которых цепь регулирования принужденно периодически замыкается и которые в рабочем интервале ничем не отличаются от систем непрерывного регулирования.

Импульсным элементом в этих системах является ключ или прерыватель. Выходная величина импульсного элемента представляет импульсы, „вырезаемые“ из входной величины, уже непрямоугольной формы (фиг. 127). Если рабочий интервал γT_p равен интервалу регулирования T_p ($\gamma = 1$), что физически означает устранение прерывателя или ключа, то эти системы превращаются в системы непрерывного регулирования. Если же рабочий интервал достаточно мал ($\gamma \ll 1$), так что можно считать импульсы примерно прямоугольными, то эта система превращается в систему импульсного регулирования первого типа.

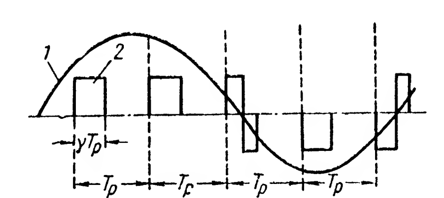
Если снабдить прерывателем или ключом систему релейного регулирования, то такая система будет отличаться от систем импульсного регулирования тем, что полярность импульса может в рабочем интервале меняться при переходе входной величины импульсного элемента через нуль (фиг. 128).

Указанные системы, не вошедшие в классификацию, далее не рассматриваются.

Исходя из описанного выше характера действия импульсных элементов, принцип работы систем импульсного регулирования можно осуществлять следующим образом (см. фиг. 120). Измерительный элемент непрерывно измеряет регулируемую величину. Измеренная регулируемая величина сопоставляется с заданным значением в сравнивающем устройстве и разность их, т. е. отклонение регулируемой величины, воздействует на управляющее устройство, в котором формируется управляющий сигнал. Управляющий сигнал воздействует на импульсный элемент. В



Фиг. 127. Входная (*1*) и выходная (*2*) величины импульсного элемента в виде ключа.



Фиг. 128. Входная (*1*) и выходная (*2*) величины релейного элемента с ключом.

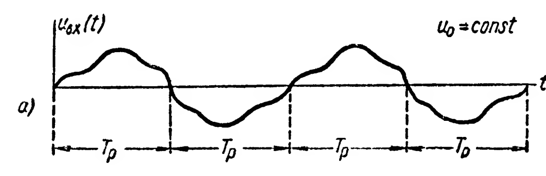
равноотстоящие друг от друга моменты времени $t = n\ T_p$, ($n = 0$, 1, 2...) импульсный элемент воспроизводит последовательность импульсов, высота или длительность которых (в зависимости от того, является ли рассматриваемая система системой первого или второго типов), пропорциональна управляющему сигналу, а полярность их зависит от полярности управляющего сигнала (в системах третьего типа). Эти импульсы воздействуют на исполнительное устройство (серводвигатель), которое изменяет положение регулирующего органа.

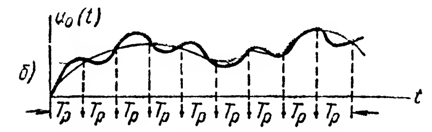
Таким образом, в системах импульсного регулирования передача управляющего сигнала на исполнительное устройство происходит путем модуляции импульсов управляющим сигналом. В системах первого типа модулируется высота импульсов (амплитудно-импульсная модуляция). В системах второго типа модулируется длительность или ширина импульсов (модуляция по длительности или широтно-импульсная модуляция). В системах третьего типа модулируется полярность — знак импульсов.

Укажем здесь на некоторые свойства систем импульсного регулирования, которые следуют непосредственно из принципа их работы.

1. Если на систему импульсного регулирования действует периодическое возмущение (изменение нагрузки, настройки и т. п.), полупериод которого кратен интервалу регулирования T_p, то может оказаться, что регулятор не будет реагировать на изменения регулируемой

величины, вызванные этим возмущением. Действительно, в этом случае входная величина (управляющая величина) импульсного элемента будет периодической (фиг. 129,*а*). Предположим, что моменты съема совпадут с моментами прохождения выходной величины через нуль, тогда выходная величина импульсного элемента тождественно равна нулю, и воздействие на исполнительное устройство будет отсутствовать, т. е. физически будет отсутствовать система регулирования. Поэтому удвоенный интервал регулирования $2T_p$ должен быть меньше периода колебаний возмущения (изменения нагрузки) и собственных колебаний линейной части системы. Выполнение этого требования необходимо также и для того, чтобы последовательность импульсов достаточно точно отображала существенные черты управляющего сигнала.





Фиг. 129. К пояснению свойств систем прерывистого регулирования.

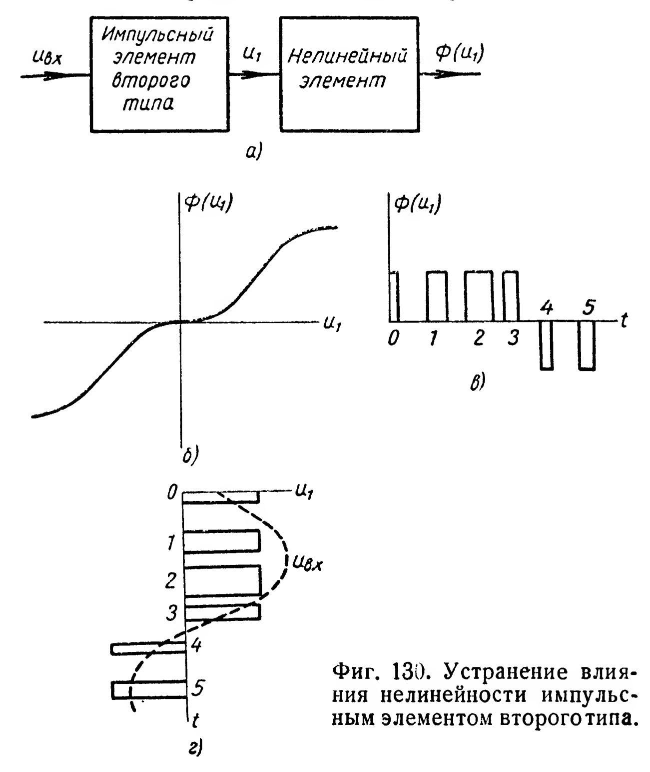
С другой стороны, это свойство может быть использовано для устранения, или, как говорят, фильтрации, высокочастотных периодических колебаний, которые могут быть положены на управляющий сигнал (настройку). Выбирая интервал регулирования кратным периоду этих высокочастотных колебаний (фиг. 129,*б*), мы получим, если моменты съема совпадут с моментами перемены знака высокочастотных колебаний, полное отсутствие воздействия их на исполнительное устройство, тогда как сам управляющий сигнал будет воздействовать на исполнительное устройство.

2. Если на систему импульсного регулирования воздействует возмущение вида единичного скачка (например, сброс нагрузки, мгновенное изменение настройки), то регулируемая величина в установившемся режиме в системах с астатическим исполнительным устройством (т. е. исполнительным устройством, содержащим интегрирующее звено) будет постоянной в любой момент времени, а системы со статическим исполнительным устройством ($\gamma < 1$) будут испытывать колебания с периодом, равным интервалу регулирования T_p. Последнее следует из того, что в установившемся режиме в первом случае жесткая связь между величиной управляющего сигнала и положением регулирующего органа отсутствует, а во втором случае существует.

3. В системах импульсного регулирования третьего типа регулируемая величина всегда испытывает колебания, т. е. рабочим режимом этих систем являются автоколебания. Действительно, при любом сколь угодно малом отклонении регулируемой величины от заданного значения импульсный элемент в каждом интервале регулирования будет с одинаковой интенсивностью воздействовать на исполнительное устройство, которое в свою очередь воздействует на регулируемый объект и вызывает отклонение регулируемой величины в противоположную сторону,

4. В системах импульсного регулирования второго и третьего типов с астатическим исполнительным устройством (т. е. включающим интегрирующее звено), мощность последнего может быть полностью использована, так как серводвигатель в этом случае работает в режиме постоянной скорости.

В системах импульсного регулирования первого типа полное использование мощности происходит только при наибольших значениях



Фиг. 130. Устранение влияния нелинейности импульсным элементом второго типа.

управляющего сигнала, ибо в этом случае скорость серводвигателя, пропорциональная управляющему сигналу, в различных интервалах регулирования различна.

5. Импульсный элемент второго типа, воздействующий на нелинейный элемент с симметричной характеристикой, устраняет его нелинейные свойства. Последнее следует из того очевидного факта, что входная величина нелинейного элемента, являющаяся выходной величиной импульсного элемента, неизменна в рабочем интервале, а на длительность импульсов нелинейность не влияет (фиг. 130).

В промышленной автоматике для регулирования сравнительно медленно протекающих процессов (температура, концентрация, давление) широко применяются системы импульсного или прерывистого регулирования второго и третьего типов.

В измерительной и радиолокационной технике, наоборот, в большинстве случаев применяются системы импульсного регулирования первого типа.

Практически применяемые импульсные элементы в системах импульсного регулирования отличаются своей конструкцией от приведенных выше их схематических изображений, поясняющих принцип действия.

В приведенной ниже табл. 2 изображен ряд типовых импульсных элементов и дано краткое пояснение к ним.

Таблица 2

№		Тип импульсного элемента	Пояснения
1	I	Двойная падающа і дужка	Измерительное устройство *4* поворачивает стрелки *2* и *3*, связанные пружиной *5*. Благодаря периодическому срабатыванию электромагнита *6* падающие дужки поочередно прижимают стрелки к сопротивлению *1*, изменяя тем самым высоту импульсов напряжения в цепи. $\gamma = 1$; $T_p \approx 10$ сек.
2	I	Двусторонняя фиксирующая схема	Схема применяется в импульсной технике для преобразования непрерывного звукового сигнала *1* в импульсы *3* изменяющейся высоты. Фиксирующие импульсы *2* определяют период T_p
3	II	Ступенчатая падающая дужка с ртутными контактами	Измерительное устройство *1* (гальванометр) поворачивает стрелку *2*. Периодически движущаяся падающая дужка *3*, прижимая стрелку, опрокидывает ртутные контакты. Длительность замыкания их пропорциональна углу отклонения стрелки *2* от среднего положения

№		Тип импульсного элемента	Пояснения
4	II	Падающая дужка с контактными шайбами	Измерительное устройство *1* поворачивает стрелку *2*. Периодически движущаяся падающая дужка *3*, прижимая стрелку к рычагу *4*, поворачивает его, а вместе с ним и контактный рычаг *5*. Вращающиеся контактные секторы *6* образуют контакт с контактным рычагом, возвращая его в горизонтальное положение. Длительность контакта пропорциональна углу отклонения стрелки *2* от среднего положения
5	II	Падающая дужка с золотником	Измерительное устройство поворачивает стрелку *1*, которая периодически прижимается падающей дужкой к рычагу *2* или *2'*. Благодаря повороту рычагов поршень золотника перемещается, открывая отверстие для прохода масла в сервомотор. Длительность открытия отверстий пропорциональна углу отклонения стрелки *1* от среднего положения
6	II	иференциальное реле	Измерительное устройство *1* поворачивает стрелку с контактами *2*, которые замыкаются с вращающимися зубчатыми шайбами *3* и *3'*. Длительность замыкания пропорциональна углу отклонения стрелки от среднего положения

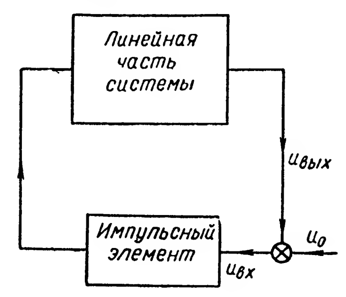
№		Тип импульсного элемента	Пояснения
7	II	Импульсный элемент регулятора напряжения СН-91	Измерительное устройство *1* (моментный двигатель) поворачивает контактную систему *2* и зубья вращающейся звездочки *3*, начинает соприкасаться с контактами *4* на промежуток времени, пропорциональный углу отклонения контактной системы от вертикальной оси. При больших углах поворота контактной системы входит в соприкосновение контактный диск *5*, образующий непрерывный контакт
8	II	Фотоэлектрический импульсный элемент Чугунова	Измерительное устройство поворачивает зеркальце *1*, отклоняющее световой луч. Этот луч, отражаясь от периодически качающегося зеркальца, попадает на фотоэлемент *3*, управляющий вместе с контактами $К_л$ и $К_п$ углом зажигания тиратронов. В анодных цепях последних включены обмотки двигателя. Время включения двигателя пропорционально углу отклонения зеркальца *1* от среднего положения
9	II	Импульсный элемент электронного регулятора соотношения мазут — воздух ЭРС-60	Измерительное устройство поворачивает рычаг *1*. Конец этого рычага, приподнимаясь радиальным срезом лекала *2* или *3*, опрокидывает ртутный контакт *4*. Длительность замыкания пропорциональна углу отклонения рычага *1* от среднего положения

Продолжение табл. 2

№		Тип импульсного элемента	Пояснения
10	II	Импульсный элемент с колеблющейся шайбой	Измерительное устройство (мембранное) поворачивает при помощи диференциала периодически колеблющийся диск *1*. Выступы диска, касаясь роликов *2*, опрокидывают ртутный контакт *3*. Длительность замыкания контакта пропорциональна углу поворота оси колебаний диска
11	II	Импульсный элемент в виде системы из двух реле	Реле *1* включается и выключается от импульсов телеизмерения, длительность которых пропорциональна измеряемой величине, а реле *2* — под действием постоянных по длительности импульсов. Цепь исполнительного устройства замыкается только при разности длительностей этих импульсов и на время, пропорциональное этой разности
12	III	Прямая падающая дужка с ртутными контактами	Измерительное устройство *1* (гальванометр) поворачивает стрелку *2*. Периодически движущаяся прямая падающая дужка *3*, прижимая стрелку к ртутным контактам, опрокидывает их. Длительность замыкания их постоянна

2. УРАВНЕНИЯ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ ИМПУЛЬСНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Структурную схему систем импульсного регулирования (см. фиг. 120) можно всегда представить в более удобном для дальнейшего изложения виде (фиг. 131). К линейной части системы относятся все элементы системы, за исключением импульсного элемента. Линейная часть системы представляет собой часть разомкнутой на входе импульсного элемента системы импульсного регулирования, не содержащей импульсного элемента [1]. Далее предположим, что внешнее возмущение $u_0(t)$ приложено ко входу импульсного элемента. Это не является ограничением, ибо возмущения, приложенные в любой точке линейной части, можно всегда привести (пересчитать) ко входу импульсного элемента.



Фиг. 131. Схематические изображения систем прерывистого регулирования.

Если к какой-либо точке системы приложено внешнее воздействие, то это воздействие вызывает реакцию на входе импульсного элемента, которая может быть тем или иным известным способом вычислена. При этом обычно затруднений не возникает, так как рассматривается часть линейной разомкнутой системы. Эта реакция и является воздействием, приведенным ко входу импульсного элемента.

Линейная часть системы характеризуется передаточной функцией $W(s)$, которая зависит от передаточных функций отдельных звеньев $W_i(s)$ и составляется по известным правилам. Рассматривая линейную часть системы с сосредоточенными постоянными, передаточную фукцию $W(s)$ можно представить в виде

$$W(s) = \Psi[W_i(s)] = \frac{M(s)}{D(s)},$$

где $M(s)$ и $D(s)$ — многочлены от s, причем степень l_1 многочлена $M(s)$ не превышает степени l многочлена $D(s)$. Передаточную функцию $W(s)$ легко найти, применяя преобразование Лапласа к диференциальным уравнениям линейной части цепи, или непосредственно из диференциальных уравнений после замены в них $\frac{d^k}{dt^k}$ на s^k.

Импульсный элемент характеризуется интервалом регулирования T_p, скважностью γ, являющейся отношением длительности импульса γT_p к интервалу регулирования T_p, и коэфициентом усиления k_u, представляющим отношение выходной величины импульсного элемента к входной в моменты съема $t = nT_p$.

[1] В дальнейшем под разомкнутой системой импульсного регулирования подразумевается всегда система, разомкнутая на выходе импульсного элемента.

В системах импульсного регулирования первого типа (и третьего типа) $\gamma = \text{const}$. В системах второго типа

$$\gamma = \varkappa \left| u_{вх}(nT) \right|,$$

где $\varkappa$ — коэфициент пропорциональности.

Воздействие на линейную часть системы определяется значениями $u_{вх}(t)$ в моменты съема $t = nT_p$. Для замкнутой системы величина $u_{вх}(t)$ равна разности между воздействием $u_0(t)$ и выходной величиной $u_{вых}(t)$ при $t = nT_p$, т. е.

$$u_{вх}(nT_p) = u_0(nT_p) - u_{вых}(nT_p).$$

Далее будет удобнее рассматривать процессы как функции относительного времени $\frac{t}{T_p}$. При таком изменении масштаба времени относительный интервал регулирования будет равен единице, относительная длительность импульсов будет равна скважности γ, а моменты съема τ станут равными n.

Для перехода к относительному времени заменим в передаточной функции линейной части системы s на $\frac{q}{T_p}$[1] так, что

$$W(q) = \frac{M(q)}{D(q)}, \tag{441}$$

где $q = T_p s$.

В этом случае для замкнутой системы будем иметь

$$u_{вх}[n] = u_0[n] - u_{вых}[n], \tag{442}$$

где под $u[n]$ подразумевается функция, совпадающая с $u(t)$ в моменты $t = n$, а между ними остающаяся постоянной [1]. Для составления уравнений замкнутой системы импульсного регулирования воспользуемся дискретным преобразованием Лапласа, определяемым соотношением[2]

$$U^*(q) = D\{u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} u[n],$$

где $u[n]$ — ступенчатая функция (оригинал);

$U^*(q)$ — изображение ступенчатой функции.

Символ $D\{...\}$ обозначает операцию дискретного преобразования Лапласа [1].

Дискретное преобразование Лапласа по отношению к системам импульсного регулирования играет ту же роль, что и обычное преобразование к системам непрерывного регулирования.

Подвергая соотношение (442) дискретному преобразованию Лапласа, получим

$$U^*_{вх}(q) = U^*_0(q) - U^*_{вых}(q). \tag{443}$$

---

[1] Здесь используется так называемая теорема подобия преобразования Лапласа.

[2] См. приложение.

Второе уравнение, связывающее изображения входной величины импульсного элемента $U^*_{вх}(q) = D\{u_{вх}[u]\}$ и выходной величины линейной части системы $U^*_{вых}(q) = D\{u_{вых}[n]\}$ в моменты съема $\bar{t} = n$, для систем импульсного регулирования первого и второго типов можно, как показано в [1], записать в виде

$$U^*_{вых}(q) = W^*(q)\, U^*_{вх}(q). \tag{444}$$

Это уравнение является *уравнением разомкнутой системы импульсного регулирования, а $W^*(q)$ представляет передаточную функцию разомкнутой системы прерывистого регулирования.*

Передаточная функция $W^*(q)$ может быть найдена по передаточной функции линейной части системы $W(q)$ при помощи формулы

$$W^*(q) = \bar{k} \sum_{\nu=1}^{l} C_\nu \frac{e^{q_\nu}}{e^q - e^{q_\nu}}, \tag{445}$$

где

$$C_\nu = \frac{M(q_\nu)}{D'(q_\nu)} \cdot \frac{1 - e^{-q_\nu \gamma}}{\gamma q_\nu} = c_\nu \left(1 - e^{-q_\nu \gamma}\right)$$

при $q_\nu \neq 0$;

$$C_l = \frac{M(0)}{D'(0)} \gamma \tag{446}$$

при $q_l = 0$, $q_\nu \neq 0$ и $\bar{k} = k_u \gamma$ для систем импульсного регулирования первого типа, а для систем импульсного регулирования второго типа

$$C_\nu = \frac{M(q_\nu)}{D'(q_\nu)} = c_\nu q_\nu \tag{447}$$

и

$$\bar{k} = k_u \varkappa,$$

причем для систем второго типа предполагается, что $\gamma \ll 1$.

Это значит, что рассматривают малые изменения управляющего сигнала (входной величины импульсного элемента) или пренебрегают длительностью включения исполнительного устройства.

В выражениях (445) — (447) через q_ν обозначены полюсы передаточной функции линейной части системы $W(q)$, т. е. корни уравнения $D(q) = 0$, которые предполагаются отличными друг от друга. В тех случаях, когда линейная часть системы не содержит внутренних обратных связей, эти полюсы выражаются через параметры звеньев линейной части.

В иных случаях, например, когда линейная часть сложна, более удобным может оказаться иное выражение передаточной функции $W^*(q)$, которое можно получить из уравнения (445) после некоторых преобразований:

$$W^*(q) = \bar{k} g_1 + \bar{k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} W(q + 2\pi m j) \frac{1 - e^{(q+2\pi m j)\gamma}}{(q + 2\pi m j)\gamma} \tag{448}$$

для систем первого типа и

$$W^*(q) = \bar{k}g_2 + \bar{k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} W(q + 2\pi mj) \tag{449}$$

для систем второго типа.

Величины

$$g_1 = \frac{1}{2} \lim_{q \to \infty} W(q) \quad \text{и} \quad g_2 = \frac{1}{2} \lim_{q \to \infty} qW(q)$$

обычно равны нулю.

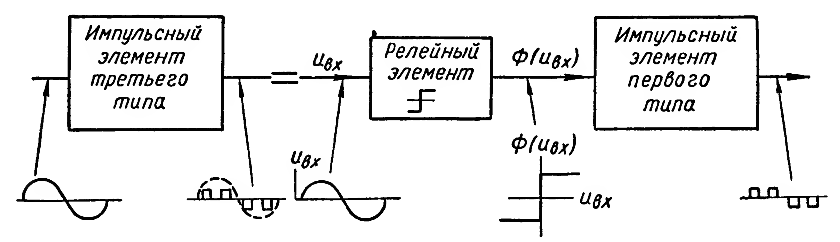
Выражения (448) и (449) определяют передаточную функцию разомкнутой системы импульсного регулирования непосредственно через передаточные функции линейной части.

Уравнение разомкнутой системы импульсного регулирования третьего типа запишется аналогично выражению (444) в виде

$$U^*_{вых}(q) = W^*(q) D\{\Phi(u_{вх}[n])\}, \tag{450}$$

Фиг. 132. Характеристика релейного элемента.

где $\Phi(u_{вх})$ — характеристика релейного элемента (фиг. 132), а $W^*(q)$ попрежнему определяется формулами (445) или (448) и (449). Это следует из того, что импульсный элемент системы третьего типа эквивалентен последовательному соединению релейного элемента и импульсного элемента систем первого типа (фиг. 133).



Фиг. 133. Эквивалентность импульсного элемента третьего типа последовательному соединению релейного элемента и импульсного элемента первого типа.

Исключая из уравнений (443) и (444) $U^*_{вх}(q)$, получим *уравнение замкнутых систем импульсного регулирования первого и второго типов* в следующей форме:

$$U^*_{вых}(q) = \frac{W^*(q)}{1 + W^*(q)} U^*_0(q). \tag{451}$$

Если значение $U^*_{вых}(q)$ из выражения (451) подставить в (443), то получим уравнение относительно входной переменной импульсного элемента (сигнала управления)

$$U^*_{вх}(q) = \frac{1}{1 + W^*(q)} U^*_0(q). \tag{452}$$

Уравнения (451) и (452), аналогичные по форме уравнениям системы непрерывного регулирования, определяют процессы в дискретные моменты времени $\bar{t} = n$, т. е. в моменты съема.

Выражения

$$K^*_{з,1}(q) = \frac{1}{1 + W^*(q)} \quad \text{и} \quad K^*_{з,2}(q) = \frac{W^*(q)}{1 + W^*(q)} \tag{453}$$

определяют собой соответствующие передаточные функции замкнутых систем импульсного регулирования первого и второго типов[1].

Уравнение замкнутой системы импульсного регулирования третьего типа получим после подстановки в уравнение (450) значения $u_{вх}[n]$ из формулы (442) или $U^*_{вых}(q)$ из формулы (443) в виде

$$U^*_{вых}(q) = W^*(q) D\{\Phi(u_0[n] - u_{вых}[n])\} \tag{454}$$

или

$$U^*_{вх}(q) = U^*_0(q) - W^*(q)\{\Phi(u_{вх}[n])\}. \tag{455}$$

В отличие от уравнений систем импульсного регулирования первого и второго типов, которые являются линейными, уравнения систем импульсного регулирования третьего типа нелинейны.

Приведенные уравнения (451), (452) и (454) охватывают и тот случай, когда линейная часть системы содержит звенья, характеризуемые постоянным запаздыванием τ.

Если звено запаздывания включено последовательно с линейной частью, то передаточная функция такого соединения будет равна

$$W_\tau(q) = W(q)\, e^{-q\bar{\tau}},$$

где $\bar{\tau} = \frac{\tau}{T_p}$ — относительное время запаздывания.

Вместо передаточной фукции $W^*(q)$ в уравнения систем импульсного регулирования следует подставлять

$$W^*_\tau(q) = \bar{k} \sum_{\nu=1}^{l} C_\nu e^{q_\nu (k-1-\bar{\tau})} \frac{e^{\ \nu}}{e^q - e^{q_\nu}} e^{-(k-1)q}, \tag{456}$$

где C_ν определяется выражениями (446) или (447) при

$$k - 1 \leqslant \bar{\tau} < k - \gamma^*$$

или

$$W^*_\tau(q) = \bar{k} \sum_{\nu=1}^{l} C_\nu \left\{ \frac{e^q - e^{(1-\gamma)}}{e^q - e^{q_\nu}} e^{q_\nu (k-\bar{\tau})} - 1 \right\} e^{-kq}, \tag{457}$$

---

[1] Они совпадают с Φ_ε и Φ соответственно для систем непрерывного регулирования, если считать, что измерительное устройство безинерционно.

где

$$c_\nu = \frac{M(q_\nu)}{D'(q_\nu)\, q_\nu}$$

при $k-\gamma \leqslant \bar{\tau} < k$[1].

Если звено запаздывания включено любым иным образом в линейную часть системы, то передаточная функция линейной части может быть представлена в виде

$$W_\tau(q) = W_{\text{I}}(q)\, e^{-q\bar{\tau}} + W_{\text{II}}(q), \tag{458}$$

и тогда в уравнения систем импульсного регулирования вместо $W^*_{\text{II}}(q)$ следует подставлять

$$W^*_\tau(q) = W^*_{\text{I},\tau}(q) + W^*_{\text{II}}(q),$$

где $W^*_{5,\tau}(q)$ определяется по формулам (456) и (457), а $W^*_2(q)$ — по формуле (445).

Для систем первого и третьего типов функция $W^*_\tau(q)$ в зависимости от величины $\bar{\tau}$ определяется формулами (456) или (457) при $\gamma < 1$ или (456) при $\gamma = 1$, для систем второго типа (так как $\gamma \ll 1$) — формулой (456). Что же касается выражений для передаточных функций (448) и (449), то они остаются справедливыми и при наличии запаздывания, если в правые части этих выражений подставлять функцию $W_\tau(q)$, определяемую формулой (458).

Отметим некоторые свойства передаточных функций систем импульсного регулирования. Как видно из приведенных выше выражений, $W^*(q)$ является функцией e^q. $W^*(q)$ имеет l полюсов e^{q_ν} и бесконечное число полюсов q, отличающихся от q_ν на $\pm 2\pi m j$, так как $e^{q_\nu + 2\pi m j} = e^{q_\nu}$. Назовем полюсы, расположенные в полосе $-\pi \leqslant Jmq < \pi$, основными. В дальнейшем нас будут интересовать лишь основные полюсы.

Для составления уравнений систем импульсного регулирования необходимо:

а) найти передаточную функцию линейной части системы и подстановкой $s = \frac{q}{T_p}$ привести ее к безразмерной форме

$$W(q) = \frac{M(q)}{D(q)};$$

б) по этой передаточной функции $W(q)$ определить передаточную функцию разомкнутой системы импульсного регулирования $W^*(q)$, используя соответствующие формулы: при отсутствии запаздывания — (445), при наличии запаздывания — (456) и (457) или в любом случае — (448) и (449);

в) подставить $W^*(q)$ в соответствующее тому или иному типу систем уравнение (451), (452) и (454).

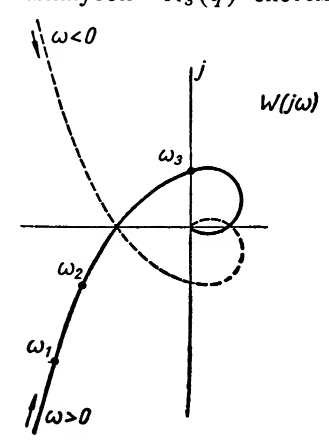
---

[1]) Отметим, что при $q_l = 0$ после раскрытия неопределенности слагаемое при $\nu = l$ будет иметь вид

$$\frac{M(0)}{D'(0)}\left[(k-\bar{\tau}) - \frac{1-\gamma}{e^q - 1}\right].$$

Приведенные выше уравнения систем импульсного регулирования описывают процессы в дискретные моменты времени $\tau = n$, т. е. моменты съема. Небольшое видоизменение этих уравнений позволяет описать процессы в любые моменты времени [1]. Здесь, однако, мы на этом не будем останавливаться.

Если в выражения передаточных функций разомкнутой $W^*(q)$ или замкнутой $\overset{*}{K_з}(q)$ систем импульсного регулирования подставить $q = jx$, где $x = \omega T_p$ — относительная частота, то получим соответствующие частотные характеристики.



Фиг. 134. Амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части системы.

Эти частотные характеристики полностью определяются изменением относительной частоты x в интервале $-\pi < x \leqslant \pi$ или, как будет видно далее, в интервале $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Частотные характеристики играют важную роль как при исследовании устойчивости, так и при исследовании качества систем импульсного регулирования. Поэтому остановимся вкратце на способах построения частотных характеристик.

Для построения частотной характеристики разомкнутой системы импульсного регулирования $W^*(jx)$ воспользуемся выражениями (448) и (449)[1].

Полагая в этих выражениях $q = jx$ и принимая для простоты $g_1 = g_2 = 0$, получим после простых преобразований выражения для частотных характеристик

$$W^*(jx) = \overset{\bullet}{\bar{k}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} W[j(x + 2\pi m)] \frac{\sin \frac{x + 2\pi m}{2}\gamma}{\frac{x + 2\pi m}{2}\gamma} e^{-j\frac{x+2\pi m}{2}\gamma}, \quad (459)$$

если система первого типа, и

$$W^*(jx) = \bar{k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} W[j(x + 2\pi m)], \quad (460)$$

если система второго типа.

Формулы (459) и (460) определяют частотную характеристику разомкнутой системы импульсного регулирования $W^*(jx)$ через частотную характеристику ее линейной части $W(jx)$ при различных значениях частоты. Поэтому $W^*(jx)$ может быть построена следующим образом. Рассмотрим вначале выражение частотной характеристики $W^*(jx)$ для систем второго типа уравнения (460). Пусть частотная характеристика линейной части $W(j\omega)$ имеет вид, графически изображенный на фиг. 134. Сплошная кривая соответствует $\omega > 0$, а пунктирная кривая (симметричная) соответствует $\omega < 0$.

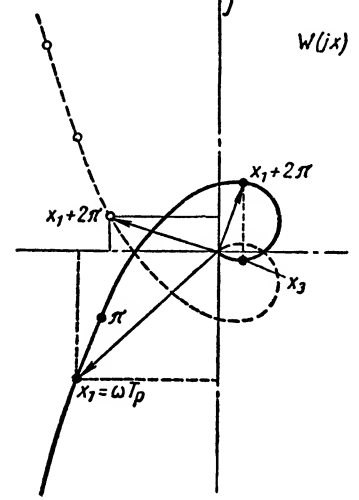
---

[1]) Использование для этой цели выражений $W^*(q)$, определяемых формулами (445) и (456), подробно описано в работах [1].

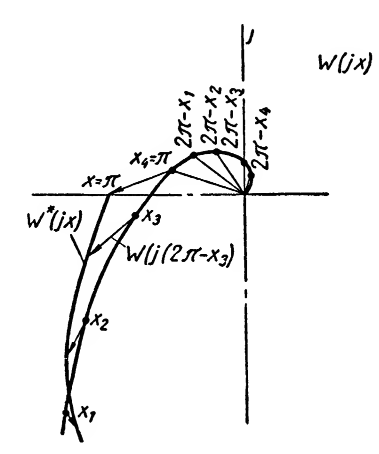
Задаваясь значением интервала регулирования T_p, нанесем на частотную характеристику вместо значений ω значения x, исходя из соотношения $x = \omega T_p$. При изменении интервала регулирования T_p оцифровка x будет изменяться [для астатических систем при этом будет пропорционально изменяться масштаб частотной характеристики $W(jx)$ линейной части] (фиг. 135).

Задаваясь теперь значением $x = x_1 \leqslant \pi$, отмечаем на частотной характеристике линейной части $W(jx)$ точки x_1; $x_1 - 2\pi$; $x_1 - 4\pi$; ...; $x_1 + 2\pi$; $x_1 + 4\pi$; ... и т. д. Сумма векторов, проведенных из начала координат к этим точкам, согласно уравнению (460) определяет значение искомой частотной характеристики $W^*(jx)$ при $x = x_1$ (фиг. 136).

Эти векторы можно складывать не геометрически, а суммировать отдельно действительные и мнимые части их.



Фиг. 135. К построению $W^*(jx)$ по $W(jx)$.



Фиг. 136. Построение $W^*(jx)$ по $W(jx)$ по формуле $W^*(jx) = W(jx) + W(j(2\pi - x))$

Так как при достаточно больших x модуль частотной характеристики линейной части $|W(jx)|$ обычно стремится к нулю, то в выражении (460) можно ограничиться небольшим числом слагаемых, часто равным двум, и тогда

$$W^*(jx) \approx k\{W(jx) + W(j(x - 2\pi))\}. \tag{461}$$

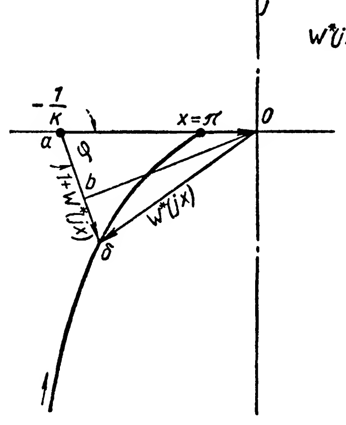
В этом случае построение $W^*(jx)$ особенно просто. В каждой точке $x_i < \pi$ частотной характеристики линейной части системы $W(jx)$, как из начала, проводится вектор $W(j(x_i - 2\pi))$ (фиг. 136).

Кривая, соединяющая концы этих векторов, увеличенных в $\bar{k}$ раз, и определяет $W^*(jx)$.

Для систем импульсного регулирования первого типа отличие в построении $W^*(jx)$ состоит лишь в повороте соответствующих векторов

на углы $\frac{x+2\pi m}{2}\gamma$ и уменьшении модулей их в $\frac{\sin\frac{x+2\pi m}{2}\gamma}{\frac{x+2\pi m}{2}\gamma}$ раз ($m=0$; ± 1; ± 2; ...). Величина $\frac{\sin\frac{x+2\pi m}{2}\gamma}{\frac{x+2\pi m}{2}\gamma}=\frac{\sin z}{z}$ определяется по соответствующим таблицам (см., например, [7]).

Частотные характеристики замкнутой системы импульсного регулирования получаются из передаточных функций (453) после замены в них q на jx.



Фиг. 137. К построению частотных характеристик замкнутой системы.

Вводя нормированную частотную характеристику

$$\overline{W}^*(q)=\frac{W^*(q)}{k},$$

где k — общий множитель, не зависящий от частоты, запишем выражения для частотных характеристик в виде

$$K^*_{з,1}(jx)=\frac{1}{1+k\overline{W}^*(jx)}=\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}+\overline{W}^*(jx)};$$

$$K^*_{з,2}(jx)=\frac{k\overline{W}^*(jx)}{1+k\overline{W}^*(jx)}=$$

$$=\frac{k}{k+\frac{1}{\overline{W}^*(jx)}}. \qquad (462)$$

Так как частотные характеристики $K^*_з(jx)$ и $\overline{W}^*(jx)$ связаны между собой однозначно, то легко по частотной характеристике $\overline{W}^*(jx)$ геометрически построить частотные характеристики замкнутой системы импульсного регулирования $K^*_з(jx)$, как это производится в теории непрерывного регулирования (см. главу XV). Из фиг. 137, на которой изображена частотная характеристика импульсного регулирования $\overline{W}^*(jx)$, очевидно, что для данного значения x

$$\overline{W}^*(jx)=\overrightarrow{O\delta};\quad \frac{1}{k}=\overrightarrow{aO}.$$

Сумма этих векторов равна

$$\overrightarrow{a\delta}=\overrightarrow{aO}+\overrightarrow{O\delta}=\frac{1}{k}+\overline{W}^*(jx).$$

Таким образом, при заданном значении x

$$K^*_{з,1}(jx)=\frac{\overrightarrow{aO}}{\overrightarrow{a\delta}}=\left|\frac{aO}{a\delta}\right|e^{-j\varphi},$$

где aO и $a\delta$ — модули;

O и φ — фазы векторов $\overrightarrow{aO}$ и $\overrightarrow{a\delta}$.

Модуль частотной характеристики $|K_{з,1}(jx)|$ замкнутой системы импульсного регулирования равен отношению постоянного отрезка aO к отрезку $O\delta$, а фаза равна углу между векторами $\overrightarrow{aO}$ и $\overrightarrow{a\delta}$. Из этого построения можно также получить вещественную и мнимую частотные характеристики. Так как

$$K_{з,1}^{*}(jx) = |K_{з}(jx)|\, e^{-j\varphi} = P^{*}(x) + jQ^{*}(x),$$

то

$$\left.\begin{aligned} P^{*}(x) &= |K_{з}^{*}(jx)| \cos\varphi = \frac{aO\cos\varphi}{a\delta} = \frac{ab}{a\delta}; \\ Q^{*}(x) &= -|K_{з}^{*}(jx)| \sin\varphi = -\frac{aO\sin\varphi}{a\delta} = \frac{Ob}{a\delta}. \end{aligned}\right\} \quad (463)$$

Все эти построения почти без изменений остаются при вычислении $K_{з,2}^{*}(jx)$ по обратной частотной характеристике $\frac{1}{\overline{W}(jx)}$.

Частотные характеристики используются далее для анализа устойчивости и качества систем импульсного регулирования.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ИМПУЛЬСНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В устойчивой (линейной) системе любое ограниченное возмущение вызывает ограниченное изменение величин, характеризующих состояние системы.

В случае систем импульсного регулирования эти свойства относятся к рассматриваемым дискретным значениям некоторых величин (например, входной величины импульсного элемента) в моменты съема, описывающихся ступенчатыми функциями (см. приложение).

Пусть ступенчатая функция

$$u[n] = u_{cm}[n]$$

характеризует невозмущенное состояние системы импульсного регулирования первого или второго типов. В частности, $u_{cm}[n]$ может быть постоянной. Если по какой-либо причине состояние системы изменится, то после устранения этой причины

$$u[n] = u_{cm}[n[+ \delta u[n].$$

Величина $\delta u[n]$ характеризует свободные колебания системы и может быть представлена в виде

$$\delta u[n] = \sum_{\nu=1}^{l} d_{\nu} e^{q_{\nu} n},$$

где d_{ν} — постоянные числа;

q_{ν} — основные полюсы передаточных функций замкнутой системы, т. е. корни уравнения

$$\psi^{*}(q) = 1 + W^{*}(q).$$

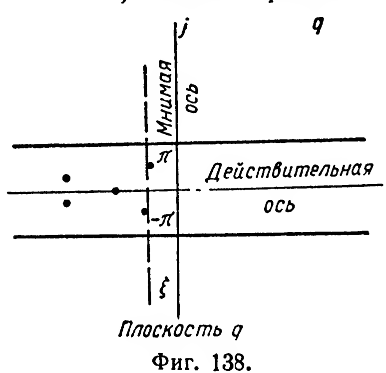
Если представить $W^*(q)$ в виде

$$W^*(q) = \frac{M^*(q)}{D^*(q)},$$

то q_ν будут основными корнями уравнения

$$G^*(q) = D^*(q) + M^*(q) = 0,$$

которое является аналогом *характеристического уравнения*. Очевидно, система будет устойчивой, если с ростом n $\delta u[n]$ стремится к нулю. Необходимое и достаточное условие устойчивости состоит в том, чтобы все *основные корни характеристического уравнения* $G^*(q) = 0$, или, что то же, *полюсы передаточной функции замкнутой системы, имели отрицательные действительные части, или, иначе говоря, чтобы эти полюсы лежали в левой части полосы* $-\pi < Jmq \leqslant \pi$ *плоскости* q (фиг. 138).



Фиг. 138.

В отличие от теории непрерывного регулирования в теории импульсного регулирования роль левой части плоскости корней играет левая часть полосы $-\pi < Jmq \leqslant \pi$ $Req < 0$) (фиг. 138).

Так как основные полюсы $W^*(q)$ совпадают с полюсами $W(q)$, то мы приходим к заключению: *если линейная часть системы импульсного регулирования устойчива, то устойчива и сама разомкнутая система импульсного регулирования.* Иначе говоря, добавление импульсного элемента к линейной части не изменяет устойчивости. Этот вывод физически очевиден.

Для анализа устойчивости замкнутых систем импульсного регулирования применяются критерии устойчивости, которые позволяют определить, устойчива система или нет, без необходимости непосредственного вычисления корней характеристического уравнения.

Приведем формулировки критериев устойчивости систем импульсного регулирования, которые аналогичны критериям устойчивости систем непрерывного регулирования. Доказательства этих критериев устойчивости можно найти в работах [1].

а) Аналог критерия Рауса — Гурвица

Пусть

$$G^*(q) = a_l e^{lq} + a_{l-1} e^{(l-1)q} + \cdots + a_1 e^q + a_0 = 0$$

характеристическое уравнение системы импульсного регулирования. Обозначим

$$b_k = \sum_{\mu=0}^{l} a_{l-\mu} \left[\binom{l-\mu}{1} - \binom{\mu}{1}\binom{l-\mu}{k-1} + \binom{\mu}{2}\binom{l-\mu}{k-2} - \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + (-1)^{k-1}\binom{\mu}{k-1}\binom{l-\mu}{1} + (-1)^k \binom{\mu}{k} \right],$$

где

$$\binom{\mu}{k} = \frac{\mu\,!}{k!\,(\mu - k)\,!}.$$

Для того чтобы система импульсного регулирования была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$b_0 > 0,\; b_1 > 0,\; \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} > 0;\; \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 \\ b_0 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix} > 0 \qquad (464)$$

и т. д. В раскрытом виде эти условия обозначаются следующим образом:

для $l = 1$

$$b_0 = a_1 + a_0; \quad b_1 = a_1 - a_0,$$

и, следовательно,

$$a_1 + a_0 > 0; \quad a_1 - a_0 > 0; \qquad (465)$$

для $l = 2$

$$b_0 = a_2 + a_1 + a_0;$$
$$b_1 = 2(a_2 - a_0);$$
$$b_2 = a_2 - a_1 + a_0,$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} a_2 + a_1 + a_0 > 0; \\ a_2 - a_0 > 0; \\ a_2 - a_1 + a_0 > 0; \end{aligned}\right\} \qquad (466)$$

для $l = 3$

$$b_0 = a_3 + a_2 + a_1 + a_0;$$
$$b_1 = 3(a_3 - a_0) + a_2 - a_1;$$
$$b_2 = 3(a_3 + a_0) - a_2 - a_1;$$
$$b_3 = a_3 - a_2 + a_1 - a_0,$$

и, следовательно, после упрощений получаем

$$\left.\begin{aligned} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 > 0; \\ a_3 - a_2 + a_1 - a_0 > 0; \\ a_3^2 + a_0^2 + a_2 a_0 - a_3 a_2 > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (467)$$

б) Аналог критерия Михайлова

Если подставить $q = jx$ в многочлен $G^*(q)$, где $x = \omega T_p$, и отделить действительную и мнимую части, то получим

$$G^*(jx) = a_l e^{ljx} + a_{l-1} e^{(l-1)jx} + \cdots + a_1 e^{jx} a_0 =$$
$$= u^*(x) + jv^*(x),$$

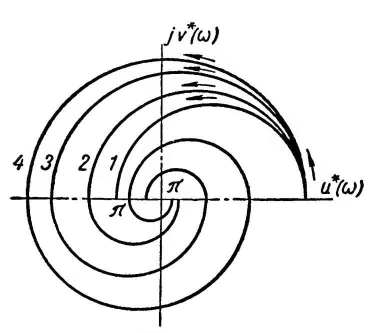
где

$$u^*(x) = a_l \cos lx + a_{l-1} \cos (l-1) x + \cdots + a_1 \cos x + a_0;$$

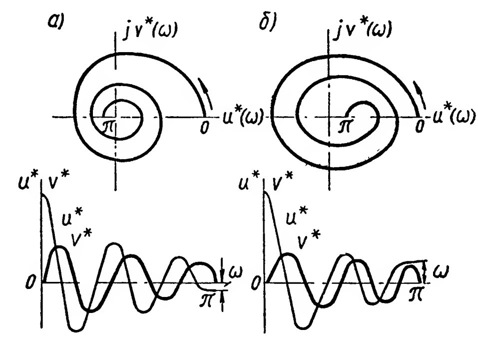
$$v^*(x) = a_l \sin lx + a_{l-1} \sin (l-1) x + \cdots + a_1 \sin x;$$

$u^*(x)$ и $v^*(x)$, а значит и $G^*(x)$, являются периодическими функциями x и полностью определяются при изменении x в интервале $-\pi < x \leqslant \pi$.

При изменении x в этом интервале вектор $\overline{G}^*(jx)$ описывает своим концом кривую, которая называется характеристической кривой или годографом, причем годограф симметричен относительно действительной оси при $-\pi < x < 0$ и $0 < x < \pi$.



Фиг. 139. Характеристические кривые устойчивых систем ($l = 1, 2, 3, 4$).



Фиг. 140. Характеристические кривые и их действительные и мнимые части:

а — для устойчивых систем; *б* — для неустойчивых систем ($l = 5$).

Для того чтобы система импульсного регулирования была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при возрастании x *от* 0 *до* π *характеристическая кривая, начиная с положительной части действительной оси, последовательно обходила* $2l$ *квадрантов против часовой стрелки, где* l — *степень характеристического уравнения, или, что эквивалентно, чтобы* $u^*(x)$ *и* $v^*(x)$ *имели в интервале* $0 < x < \pi l$ *действительных перемежающихся корней и чтобы при* $x = 0$ *было* $u^*(0) > 0$ и $v^{*\prime}(0) > 0$.

На фиг. 139 графически изображен примерный вид характеристических кривых, соответствующих устойчивым системам импульсного регулирования для $l = 1, 2, 3, 4$. На фиг. 140 изображены характеристические кривые $G^*(jx)$, $u^*(x)$ и $v^*(x)$ для устойчивой и неустойчивой систем импульсного регулирования при $l = 5$.

Приведенные формулировки аналогичны формулировкам критерия Михайлова для систем непрерывного регулирования.

в) Аналог частотного критерия Найквиста — Михайлова

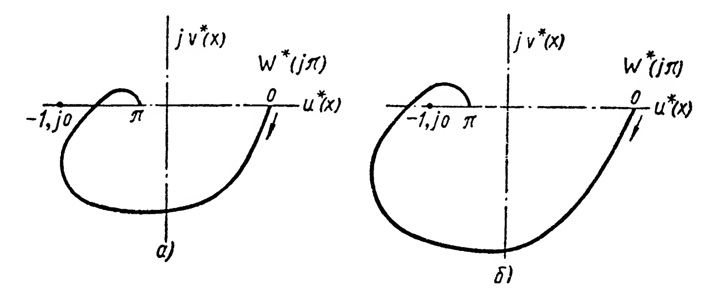
Рассмотрим передаточную функцию разомкнутой системы импульсного регулирования $W^*(jx)$. Отделяя в ней вещественную часть $u^*(x)$ от мнимой $v^*(x)$, получим

$$W^*(jx) = u^*(x) + jv^*(x).$$

При изменении x от 0 до π конец вектора описывает кривую, называемую амплитудно-фазовой частотной характеристикой.

Предполагая, что линейная часть системы устойчива, можно сформулировать критерий устойчивости следующим образом.

Система импульсного регулирования устойчива, если амплитудно-фазовая частотная характеристика не охватывает точку -1; $j0$.

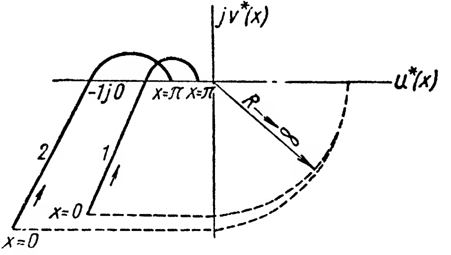


Фиг. 141. Амплитудно-фазовые частотные характеристики устойчивой разомкнутой системы прерывистого регулирования соответствуют:

а — устойчивой замкнутой системе; *б* — неустойчивой замкнутой системе.

На фиг. 141 изображены амплитудно-фазовые частотные характеристики, соответствующие устойчивой (фиг. 141, *а*) и неустойчивой (фиг. 141, *б*) системам импульсного регулирования.

Если линейная часть системы нейтральна (т. е. передаточная функция ее имеет r' полюсов, равных нулю), то формулировка критерия устойчивости остается без изменений, однако при построении амплитудно-фазовой частотной характеристики следует дополнить ее дугой окружности бесконечно большого радиуса, центральный угол которой равен $+\frac{\pi}{2}r'$, как это показано на фиг. 142 для случая $r'=1$. Годограф амплитудно-фазовой частотной характеристики —1 соответствует устойчивой системе, а —2—неустойчивой системе импульсного регулирования.

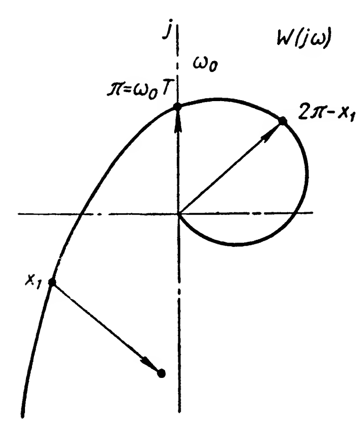


Фиг. 142. Амплитудно-фазовые частотные характеристики нейтральной разомкнутой системы прерывистого регулирования соответствуют:

1 — устойчивой замкнутой системе; *2* — неустойчивой замкнутой системе.

Наконец, если линейная часть системы неустойчива (т. е. передаточная функция ее имеет r полюсов с положительной действительной частью), то в этом случае система импульсного регулирования будет устойчивой, если годограф частотной характеристики охватывает точку -1, $j0$ в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки) $\frac{r}{2}$ раз. При $r=0$ мы приходим к предыдущей формулировке.

Заметим, что для нормированной частотной характеристики функцию точки $-1, j0$ выполняет точка $-\frac{1}{k}, j0$.



Фиг. 143. К стабилизации систем введением импульсного элемента.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика, не нормированная $W^*(jx)$ или нормированная $\overline{W}^*(jx)$, может быть построена по приведенным выше формулам аналитически или графически, исходя из амплитудно-фазовой частотной характеристики линейной части.

Отметим в заключение, что введение импульсного регулирования может явиться сильным средством стабилизации систем и улучшения их динамических свойств, если амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части, начиная с некоторой частоты, проходит через I и IV квадранты (фиг. 143). Такой частотной характеристикой обладают, например, системы с запаздыванием, системы с распределенными параметрами и т. д.

Это непосредственно следует из указанного выше способа построения $W^*(jx)$ по $W(jx)$. Интервал регулирования при этом выбирается из условия

$$T_p \geqslant \frac{\pi}{\omega_0}.$$

4. ПРОЦЕСС РЕГУЛИРОВАНИЯ В СИСТЕМАХ ИМПУЛЬСНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

После исследования устойчивости систем импульсного регулирования рассмотрим процессы регулирования в них.

Уравнение системы импульсного регулирования

$$U_{вx}^*(q) = \frac{1}{1 + W^*(q)} U_0^*(q)$$

можно привести к виду

$$U_{вx}^*(q) = \frac{H^*(q)}{G^*(q)} U_0^*(q), \tag{468}$$

где $H^*(q)$ — многочлен степени l_2;

$G^*(q)$ — многочлен степени l, соответствующий характеристическому уравнению.

Предположим, что $u_0[n]$ имеет вид единичного скачка, т. е.

$$u_0[n] = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 0, 1, 2\ldots; \\ 0 \text{ при } n < 0, \end{cases}$$

тогда входная величина импульсного элемента может быть найдена по выражению [1]

$$u_{вх}[n]=\frac{H^*(0)}{G^*(0)}+\sum_{\nu=1}^{l}\frac{H^*(q_\nu)}{(e^{q_\nu}-1)\dot{G}^*(q_\nu)}e^{q_\nu n}, \tag{469}$$

где q_ν — основные корни характеристического уравнения, т. е. основные полюсы передаточной функции замкнутой системы, а

$$\dot{G}^*(q_\nu)=\left[\frac{dG^*(q)}{de^q}\right]_{q=q_\nu}.$$

Эта формула определяет процесс регулирования в моменты съема $\bar{t}=n=0, 1, 2\ldots$

Если система устойчива, то действительные части q_ν — основных корней характеристического уравнения отрицательны и все слагаемые в $u_{вх}[n]$, содержащие $e^{q_\nu n}$, с ростом n будут стремиться к нулю. Предел, к которому стремится $u_{вх}[n]$, будет равен

$$u_{вх}[\infty]=\lim_{n\to\infty}u_{вх}[n]=\frac{H^*(0)}{G^*(0)}=\frac{1}{1+W^*(0)}. \tag{470}$$

Эта величина характеризует статическое (установившееся) отклонение входной величины импульсного элемента. $u_{вх}[\infty]$ отлично от нуля при $W^*(0)\neq\infty$ и обращается в нуль, когда $W^*(0)=\infty$. Последний случай имеет место тогда, когда исполнительное устройство содержит интегрирующее звено.

Построение процесса по формуле (469) связано с необходимостью вычисления корней характеристического уравнения $G^*(q)=0$, что при $l>3$ является чрезвычайно громоздкой операцией. Приведем иное выражение, свободное от этих недостатков и позволяющее построить процесс при любом воздействии.

Если передаточную функцию замкнутой системы представить в виде

$$\frac{H^*(q)}{G^*(q)}=\frac{b_0+b_1e^q+\ldots+b_{l_2-1}e^{q(l_2-1)}b_{l_2}e^{ql_2}}{a_0+a_1e^q+\ldots+a_{l-1}e^{q(l-1)}+a_le^{ql}};$$

$$(l\geqslant l_2),$$

то можно показать [1], что

$$u_{вх}[n]=\sum_{k=0}^{n-l+l_2}\Gamma_k u_0[n-(l-l_2+k)], \tag{471}$$

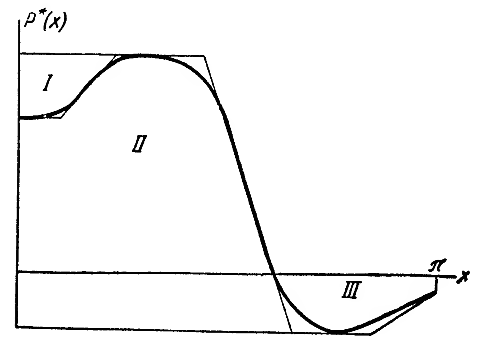
где коэфициенты Γ_k определяются по коэфициентам a_l, b_l передаточной функции из рекуррентного соотношения

$$\Gamma_k=\frac{1}{a_l}\left\{b_{l_2-k}-\sum_{\mu=1}^{l}\Gamma_{k-\mu}a_{l-\mu}\right\} \tag{472}$$

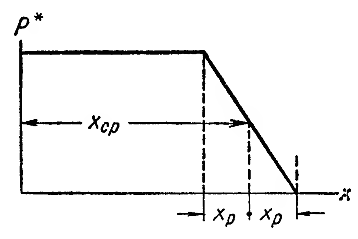
($b_{l_2-k}\equiv 0$ при $k>l_2$, $a_{l-\mu}\equiv 0$ при $\mu>l$).

Таким образом, определение процесса регулирования в моменты съема $\bar{t}=n$ сводится к вычислению коэфициентов Γ_k. Выражение (471) определяет процесс регулирования (для $\bar{t}=n$) при любой форме $u_0[n]$. Если $u_0[n]$ имеет вид единичного скачка, то $u_0[n-(l-l_2+k)]$ равно 1 при $k \leqslant n-l+l_2$ и 0 при $k > n-l+l_2$, и значения процесса находятся простым суммированием Γ_k. При заданных значениях параметров системы вычисление процесса по выражению (471) не представляет труда.

Процесс можно, наконец, определить графо-аналитическим методом по амплитудно-фазовой частотной характеристике. Для этой цели по $W^*(jx)$ указанным выше способом строится вещественная частотная характеристика. Применяя



Фиг. 144. К построению процесса по вещественной частотной характеристике.



Фиг. 145. Трапецоидальная вещественная частотная характеристика.

к ней известный способ трапеций, широко распространенный в теории непрерывного регулирования [7] (фиг. 144), найдем [4]

$$\Gamma_k = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{m} A_\mu \left(\frac{\sin x_{cp,\,\nu} n}{x_{cp,\,\nu} n} \right) \left(\frac{\sin x_{p,\,\nu} n}{x_{p,\,\nu} n} \right), \tag{473}$$

где A_μ — площадь трапеции, а остальные обозначения ясны из фиг. 145.

Пользуясь таблицами $\frac{\sin \varphi}{\varphi}$, определяем Γ_k, а затем, как указано выше, и интересующий нас процесс.

5. КОСВЕННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА В СИСТЕМАХ ИМПУЛЬСНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Как и в теории непрерывного регулирования, для выбора параметров системы автоматического регулирования важную роль играют косвенные методы оценки качества процесса регулирования, не требующие построения последнего. Мы вкратце рассмотрим две такие оценки: степень устойчивости и интегральные оценки.

а) Степень устойчивости

Чем больше по абсолютной величине действительные части полюсов q_ν, тем быстрее затухают составляющие процесса $e^{q_\nu n}$ с ростом n. Как и в случае систем непрерывного регулирования, быстрота затухания про-

цесса устойчивой системы в некоторых случаях (см. главу XIX) может быть охарактеризована абсолютной величиной действительной части ближайшего к мнимой оси комплексной плоскости q корня характеристического уравнения

$$G^*(q) = D^*(q) + M^*(q) = 0. \tag{474}$$

Эту величину мы назовем степенью устойчивости и обозначим ее через ξ, так что

$$\xi = \min |Re\, q_\nu| \tag{475}$$

(см. фиг. 138).

Степень устойчивости является относительной величиной, так как процессы выражаются в функции относительного времени $\bar{t} = n = \frac{t}{T_p}$. Абсолютная величина степени устойчивости, очевидно, будет равна

$$\xi_a = \frac{\xi}{T_p}.$$

Для определения степени устойчивости достаточно подставить в передаточную функцию $W^*(q)$ разомкнутой системы импульсного регулирования $q - \xi$ вместо q и полученную таким образом передаточную функцию рассматривать как передаточную функцию некоторой новой системы, граница устойчивости которой соответствует линии равной степени устойчивости исследуемой системы. Точно так же как и в теории непрерывного регулирования, задача сводится к исследованию устойчивости этой новой системы, последнее же может быть проведено на основании критериев устойчивости, приведенных выше.

В отличие от систем непрерывного регулирования, обладающих всегда конечной степенью устойчивости, в системах импульсного регулирования степень устойчивости может достигать бесконечности. Бесконечная степень устойчивости соответствует тому, что действительные части корней уравнения $G^*(q) = 0$, которое мы выпишем в явном виде

$$G^*(q) = a_l e^{ql} + a_{l-1} e^{q(l-1)} + \ldots + a_1 e^q + a_0 = 0,$$

равны $-\infty$. Очевидно, что условия, при которых достигается бесконечная степень устойчивости, имеют вид

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{l-1} = 0, \tag{476}$$

так как в этом случае все корни уравнения

$$G^*(q) = a_l e^{ql} = 0$$

равны $-\infty$. Если задан оператор разомкнутой системы

$$W^*(q) = \frac{M^*(q)}{D^*(q)} = \frac{b_0' + b_1' e^q + \ldots + b_{l_1-1}' e^{q(l_1-1)} + b_{l_1}' e^{ql_1}}{a_0' + a_1' e^q + \ldots + a_{l-1}' e^{q(l-1)} + a_l' e^{ql}}, \tag{477}$$

$$(l_1 \leqslant l),$$

то условия (476), при которых достигается бесконечная степень устойчивости, согласно равенствам (476) и (477) примут вид [1]

$$a'_0 = -b'_0;\; a'_1 = -b'_1;\; \ldots;\; a'_{l-1} = b'_{l-1}. \quad (478)$$

При бесконечной степени устойчивости процесс регулирования при возмущениях вида единичного скачка заканчивается в конечное число интервалов регулирования.

Действительно, если $a_0 = a_1 = \ldots, = a_{l-1} = 0$, то из рекуррентного соотношения получаем

$$\Gamma_k = \frac{b_{l_2-k}}{a_l}$$

при $k < l_2$;

$$\Gamma_k = 0$$

при $k > l_2$, и в этом случае по формуле (471) будем иметь

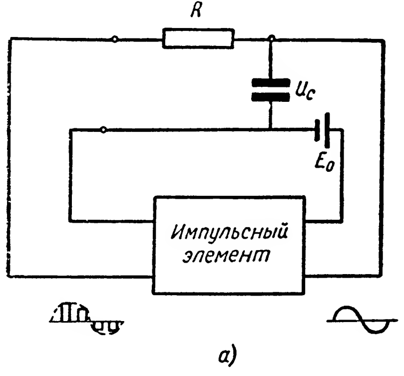
$$u_{вх}[n] = -\sum_{k=0}^{n-l+l_2} \frac{b_{l_2-k}}{a_l} 1[n-k-l+l_2]$$

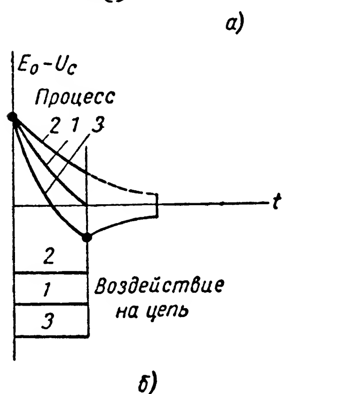
при $n < l$, а значит и $k \leqslant l_2$, и

$$u_{вх}[n] = \sum_{k=0}^{l_2} \frac{b_{l_2-k}}{a_l} = \frac{1}{1+W^*(0)} = u_{вх}[\infty]$$

при $n \geqslant l$.

$u_{вх}[n]$ при $n \geqslant l$ не зависит от n. В частности, если $W^*(0) = \infty$, то $u_{вх}[n] \equiv 0$ при $n \geqslant l$.





Фиг. 146. К пояснению физического смысла бесконечной степени устойчивости.

Отсюда мы заключаем, что в системе с бесконечной степенью устойчивости процесс регулирования оканчивается по истечении конечного числа интервалов $n = l$.

Поясним физически смысл бесконечной степени устойчивости.

Рассмотрим регулируемый объект, описываемый уравнением первого порядка. На фиг. 146, *а* этот объект представлен в виде электрической цепи. Напряжение u_c на емкости C сравнивается с эталонным напряжением E_0, и разность их воздействует на импульсный элемент. Импульсный элемент воздействует на вход цепи импульсами, высота или длительность которых зависит от разности $E_0 - u_c$. Можно подобрать параметры импульсного

[1] Часть из коэфициентов b' может быть равна нулю.

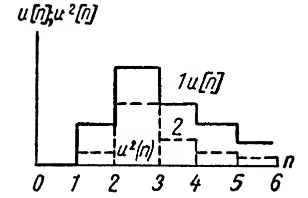
элемента (т. е. воздействующих импульсов) так, чтобы процесс регулирования заканчивался в течение одного интервала, как это показано на фиг. 146, *б*, и для системы первого типа (кривые *1*). При иных значениях параметров процесс не будет заканчиваться в конечный промежуток времени (кривые *2* и *3*), так как к началу следующего интервала будет иметь место отклонение.

Условия (476) или (478) назовем *условиями конечной длительности процесса регулирования*. Параметры, удовлетворяющие этим условиям, назовем оптимальными с точки зрения бесконечной степени устойчивости. Конечно, не для всякой системы существуют оптимальные параметры.

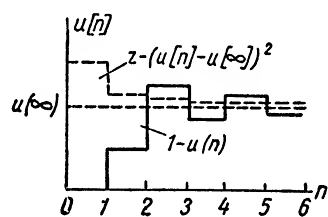
б) Аналоги интегральных оценок

Динамические свойства переходного процесса, т. е. процесса регулирования, возникающего вследствие возмущения вида единичного скачка, можно оценить величинами

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \{u[n] - u[\infty]\}; \quad I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \{u[n] - u[\infty]\}^2,$$



Фиг. 147. Площадь отклонения (*1*) и площадь квадрата отклонения (*2*) процесса при $u[\infty] = 0$.



Фиг. 148. Площадь отклонения (*1*) и площадь квадрата отклонения (*2*) процесса при $u[\infty] \neq 0$.

которые являются аналогами соответствующих интегральных оценок в теории непрерывного регулирования (см. главу XX).

В тех случаях, когда статическое отклонение $u_{вх}[\infty] = 0$, что часто встречается в системах импульсного регулирования,

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} u_{вх}[n]; \quad I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} u_{вх}^2[n]. \tag{479}$$

I_1 — площадь, заключенная между ступенчатой функцией, описывающей процесс в системе импульсного регулирования $u[n]$, и установившимся значением ее, т. е. площадь отклонения ступенчатой функции от ее предельного значения (фиг. 147 и 148).

I_2 — площадь квадрата этого отклонения (фиг. 147 и 148). Отметим, что I_1 и I_2 являются относительными величинами. Для получения абсолютных величин их следует умножить на T_p.

Можно показать [1], что

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} u_{вх}[n] = U_{вх}^*(0) = \left[\frac{d}{de^q} \cdot \frac{1}{1+W^*(q)}\right]_{q=0}. \tag{480}$$

Очевидно, что I_1 может быть пригодна для оценки неколебательных процессов. Оценка I_2 лишена этого недостатка.

Приведем выражение, позволяющее вычислить I_2 непосредственно по коэфициентам передаточной функции замкнутой системы. Пусть

$$U_{вх}^*(q) = \frac{H^*(q)}{G^*(q)} U_0^*(q) = \frac{H_1^*(q)(e^q - 1)}{G^*(q)} U(q)$$

(в этом случае $u_{вх}[\infty] = \frac{H(0)}{G^*(0)} = 0$); $U_0^*(q)$ — изображение единичного скачка;

$$G^*(q) = a_l e^{ql} + a_{l-1} e^{q(l-1)} + \ldots + a_1 e^q + a_0 = 0$$

характеристическое уравнение и

$$H_1^*(q) = d_{l_2-1} e^{q(l_2-1)} + d_{l_2-2} e^{q(l_2-2)} + \ldots + d_0,$$

тогда при $l = l_2 = 1$

$$I_2 = \frac{d_0^2}{a_1^2 - a_0^2}, \tag{481}$$

при $l = l_2 = 2$

$$I_2 = \frac{\left(d_1^2 + d_0^2\right)(a_2 + a_1) - 2d_0 d_1 a_1}{(a_2 - a_0)\left[(a_2 + a_0)^2 - a_1^2\right]}. \tag{482}$$

I_2 является функцией параметров системы импульсного регулирования. Значения параметров, при которых I_2 достигает наименьшей величины, назовем оптимальными с точки зрения оценки I_2.

I_2 можно также определить графически по частотной характеристике замкнутой системы.

Можно показать, что

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{H_1^*(jx)}{G^*(jx)} \right|^2 dx, \tag{483}$$

т. е. I_2 равно площади квадрата модуля $\frac{H_1^*(jx)}{G^*(jx)}$.

6. НЕПРЕРЫВНОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ КАК ГРАНИЦА ИМПУЛЬСНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

При стремлении интервала регулирования к нулю $T_p \to 0$, естественно ожидать, что свойства системы импульсного регулирования будут приближаться к свойствам соответствующей системы непрерывного регулирования.

Исходя из выражений (448) (459), можно показать, что

$$\lim_{T_p \to 0} W^*(T_p s) = \bar{k} W(s), \tag{484}$$

где $W^*(T_p s) = W^*(q)$ — передаточная функция разомкнутой системы прерывистого регулирования;

$W(s)$ — передаточная функция линейной части системы.

$$\bar{k} = k_u$$

для систем первого типа;

$$\bar{k} = k_u \varkappa$$

для систем второго типа.

Действительно, при заданном значении $x = x_1 = \omega T_p$ чем меньше T_p, тем больше значение $\omega_1 = \frac{x_1}{T_p}$. Если для $\omega > \omega_1$ модуль частотной характеристики линейной части очень мал и значениями $|W(j\omega)|$ при $\omega > \omega_1$ можно пренебречь, то из уравнений (459) и (460) следует, что

$$W^*(jx) = W^*(j\omega T_p) \approx \bar{k} W(j\omega) \tag{485}$$

при $0 < \omega < \frac{\pi}{T_p}$, а значит, и для передаточных функций справедливо соотношение (484).

Таким образом, при стремлении интервала регулирования к нулю передаточная функция разомкнутой системы импульсного регулирования $W^*(q) = W^*(T_p s)$ как первого, так и второго типов стремится к передаточной фунции системы непрерывного регулирования, состоящей из линейной части и (вместо импульсного элемента) линейного усилителя с коэфициентом усиления $\bar{k}$, а так как форма уравнений для замкнутых систем импульсного и непрерывного регулирования тождественна, то отсюда следует, *что при $T_p \to 0$ уравнения систем импульсного и непрерывного регулирования совпадают.* Следовательно, с этой точки зрения *непрерывное регулирование является границей импульсного регулирования.*

В силу непрерывной зависимости $W^*(T_p s)$ от T_p можно заключить, что при T_p, отличном от нуля, но достаточно малом, так что для наибольшего по абсолютной величине или модулю $q_\nu = p_\nu T_p$ выполняется неравенство

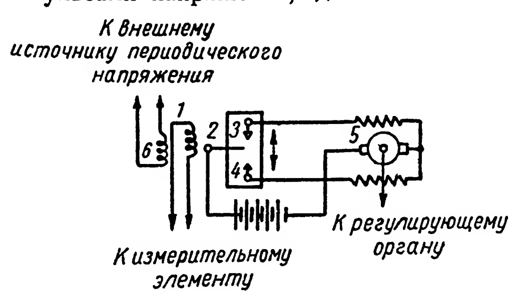
$$T_p |Re\, p_\nu|_{\max} \ll 1, \tag{486}$$

свойства систем импульсного регулирования мало отличаются от свойств соответствующих систем непрерывного регулирования, т. е. систем в которых вместо импульсного элемента находится линейный усилитель. Именно этот факт наряду с некоторыми обстоятельствами конструктивного характера лежал в основе применения принципа импульсного регулирования объектов с медленно изменяющимися процессами.

С другой стороны, этот факт просто и наглядно объясняет линеаризацию релейных систем автоматического регулирования при наложении на них внешних периодических колебаний высокой частоты [5].

Рассмотрим контактное устройство (например, поляризованное реле), управляющее двигателем *5* (фиг. 149). Положение подвижного контакта *2*

определяется напряжением, подводимым к обмотке *1* от измерительного элемента, которое пропорционально отклонению регулируемой величины от заданного значения. Придадим теперь жестко связанным между собой контактам *3* и *4* колебательное движение (например, при помощи кулачка) по синусоидальному или близкому к треугольному закону с амплитудой, примерно равной (несколько меньшей) половине расстояния между контактами *3* и *4*. Тогда при отклонениях регулируемой величины и, значит, изменении положения контакта *2*, не превышающего амплитуды наложенных колебаний, двигатель будет управляться импульсами напряжения, длительность которых примерно пропорциональна отклонению регулируемой величины.



Фиг. 149. К линеаризации релейных систем.

Тот же эффект можно получить, если контакты *3* и *4* оставить неподвижными, а на дополнительную обмотку реле *6* подать от внешнего источника напряжение соответствующей формы и амплитуды.

Наложение тем или иным способом внешних колебаний, таким образом, превращает релейную систему автоматического регулирования в систему импульсного регулирования второго типа.

Если частота внешних колебаний достаточно высока, то интервал регулирования будет достаточно мал, и при выполнении неравенства (486) наша система будет вести себя как линейная система непрерывного регулирования.

7. СИСТЕМЫ ИМПУЛЬСНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ТРЕТЬЕГО ТИПА

Как было отмечено выше, системы импульсного регулирования третьего типа являются нелинейными системами, склонными к автоколебаниям.

В системах, содержащих в исполнительном устройстве интегрирующее звено, амплитуда этих автоколебаний уменьшается с уменьшением их периода. Поэтому с точки зрения уменьшения амплитуды следует выбирать параметры системы так, чтобы период автоколебаний был наименьшим, т. е. равным $\bar{t}_n = 2$, или $\bar{t}_n = 2T_p$.

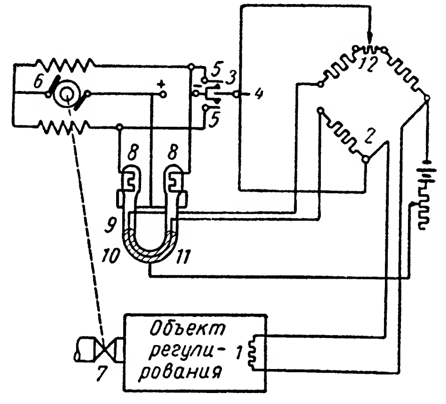
Мы не будем приводить здесь подробного анализа исследования автоколебаний, аналогичного во многих отношениях анализу обычных релейных систем (см. главу XXXVII), отметим лишь, что при стремлении T_p к нулю система импульсного регулирования третьего типа стремится к обычной релейной системе. Это становится очевидным после рассмотрения эквивалентной схемы импульсного элемента третьего типа (фиг. 133). Сведения об исследовании систем такого типа можно почерпнуть из соответствующей литературы [8].

8. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ТИПОВЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

Приведем здесь вкратце основные свойства и расчетные графики типовых систем автоматического регулирования температуры.

Схема системы автоматического регулирования температуры с упругой обратной связью приведена на фиг. 150 *.

Измерение температуры производится термометром сопротивления *1*, являющегося одним из плеч моста *2*. В диагональ моста включена рамка гальванометра *3* падающей дужки (см., например, фиг. 125), которая на фиг. 150 изображена схематически. При смещении указателя *4*, что соответствует изменению температуры объекта регулирования, замыкается один из контактов *5* и приводит в движение реверсивный мотор *6* постоянного тока, который изменяет положение клапана *7*, регулирующего подачу топлива (или нагревающего агента).



Фиг. 150. Схема системы автоматического регулирования температуры с упругой обратной связью.

Одновременно с вращением реверсивного мотора *6* нагревается одно из сопротивлений *8*. Благодаря этому газ в той части U-образной трубки, где находится это сопротивление, расширяется, понижая в ней уровень ртути *9*, и, следовательно, сопротивление, например *10*, включенное в одно из плеч моста, увеличивается. При этом уровень ртути во второй части U-образной трубки повышается и тем самым уменьшает сопротивление *11*, включенное в смежное плечо моста.

Вызываемый этим изменением разбаланс моста создает дополнительный корректирующий импульс. По окончании процесса регулирования равновесие моста всегда соответствует заданному значению регулируемой величины.

Величина номинальной температуры, которая должна поддерживаться регулятором, устанавливается задатчиком *12* температуры. Управление реверсивным мотором, а значит и клапаном, производится импульсами, длительность которых зависит от длительности замыкания контактов, т. е. от значения регулируемой величины в определенные равноотстоящие друг от друга моменты времени.

В системах первого типа, схем которых мы не приводим, будет изменяться не длительность, а величина импульсов.

---

* Различные схемы и конструкции упругой обратной связи описаны, например, в [6].

Структурная схема системы приведена на фиг. 151. Элементы системы имеют следующие передаточные функции сервомотора (реверсивный мотор):

$$W_1(s)=\frac{1}{T_c s},$$

где T_c — время сервомотора; объект регулирования

$$W_2(s)=\frac{1}{T_a s+1}e^{-\tau s},$$

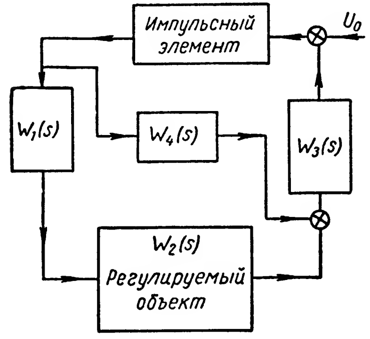
где T_a — постоянная времени; τ — время запаздывания объекта измерительного элемента (гальванометр и мостик), который (элемент) мы предполагаем идеальным;

$$W_3(s)=k_3,$$

(где k_3 — коэфициент пропорциональности измерительного элемента); упругая обратная связь

$$W_4(s)=\frac{\rho}{T_y s+1},$$

где T_y — постоянная времени, а ρ — коэфициент обратной связи.



Фиг. 151. Структурная схема системы, изображенной на фиг. 150.

Как видно из структурной схемы разомкнутой системы прерывистого регулирования (фиг. 151), передаточная функция линейной части разомкнутой системы будет равна

$$W(s)=\{W_1(s)W_2(s)+W_4(s)\}W_3(s).$$

Подставляя выражения для $W_i(s)$ $(i=1, 2, 3, 4)$, получаем после перехода к безразмерным величинам

$$W(q)=\frac{k_0\beta\beta_c}{q(q+\beta)}e^{-\bar{\tau}q}+\frac{k_0\rho\beta_y}{q+\beta_y}, \tag{487}$$

где обозначено

$$\beta=\frac{T_p}{T_a};\quad \beta_c=\frac{T_p}{T_c};\quad \beta_y=\frac{T_p}{T_y};\quad \bar{\tau}=\frac{\tau}{T_p};$$

$$q=sT_p;\quad k_0=k_3\bar{k}.$$

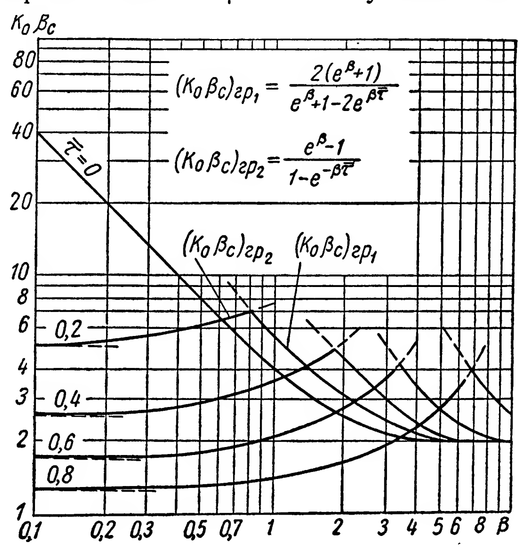
Пользуясь теорией, изложенной в предыдущих разделах, можно найти $W_\tau^*(q)$, исследовать устойчивость, найти оптимальные параметры с той или иной точки зрения и построить процесс регулирования.

Мы приведем лишь результаты исследования и расчетные графики, выраженные в безразмерных величинах.

1) Системы импульсного регулирования без обратной связи ($\rho = 0$)

а) Устойчивость

Границы областей устойчивости $(k_0\beta_c)_{гр}$ как функция β при различных значениях $\bar{\tau}$ для систем импульсного регулирования второго типа приведены на фиг. 152. Области устойчивости лежат ниже соответствующих границ. Пунктиром указана граница устойчивости соответствующей системы непрерывного регулирования с запаздыванием. Отсюда видно, что при $\bar{\tau} < 1$ в широком интервале значений β область устойчивости систем импульсного регулирования по $k_0\beta_c$ больше области устойчивости соответствующей системы непрерывного регулирования с запаздыванием. Интервал этих значений β уменьшается одновременно с уменьшением $\bar{\tau}$. С ростом β граница устойчивости монотонно уменьшается при $\bar{\tau} = 0$, а при $0 < \bar{\tau} < 1$ вначале возрастает, достигая при некотором значении максимума, а затем уменьшается.



Фиг. 152. Границы устойчивости системы прерывистого регулирования при наличии запаздывания в регулируемом объекте $0 < \tau < 1$ и при $\tau = 0$.

При значениях β, близких к максимуму, область устойчивости системы импульсного регулирования с запаздыванием больше, чем системы без запаздывания.

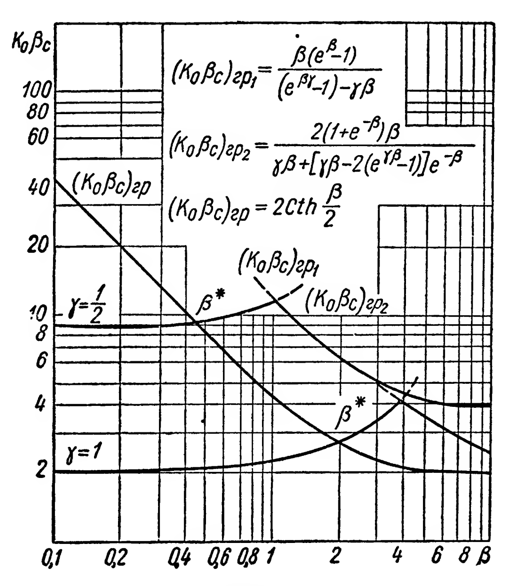
На фиг. 153 изображены границы устойчивости системы первого типа без запаздывания и для сопоставления приведена граница устойчивости системы второго типа без запаздывания. В интервале $0 < \beta < \beta^*$ область устойчивости систем первого типа меньше областей устойчивости систем второго типа, а в интервале $\beta^* < \beta$ — больше.

С ростом γ область устойчивости систем первого типа уменьшается. С ростом β граница устойчивости возрастает, достигая при некотором значении β максимума, а затем уменьшается.

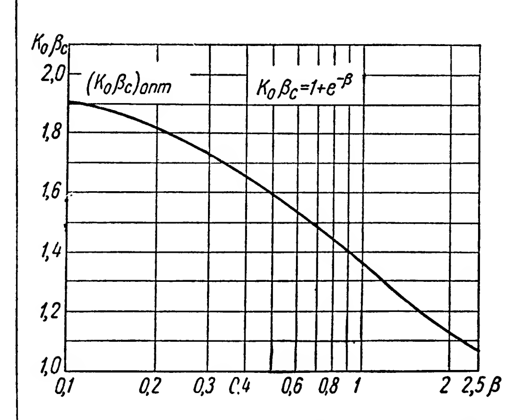
б) Оптимальные параметры

В системе импульсного регулирования без упругой обратной связи бесконечная степень устойчивости недостижима.

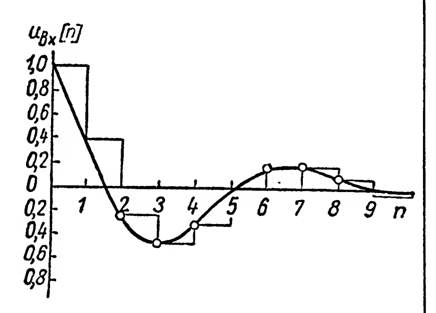
Оптимальные параметры, при которых I_2 достигает минимума, определяются из графика фиг. 154. На фиг. 155 приведен процесс при $\beta = 0,5$ и оптимальном значении параметра $k_0\beta_c = 1,61$, найденном из графика фиг. 154.



Фиг. 153. Границы устойчивости системы прерывистого регулирования первого и второго типов при $\tau = 0$.



Фиг. 154. Зависимость $(k_0\beta)_{опт}$ от β, при которой I_2 достигает минимума.



Фиг. 155. Изменение $u_{вх}$ при изменении u_0 скачком в системе автоматического регулирования температуры без упругой связи.

Пунктир — ступенчатая функция $u_{вх}[n]$, сплошная кривая — действительный процесс.

2) Системы импульсного регулирования с упругой обратной связью

а) Устойчивость

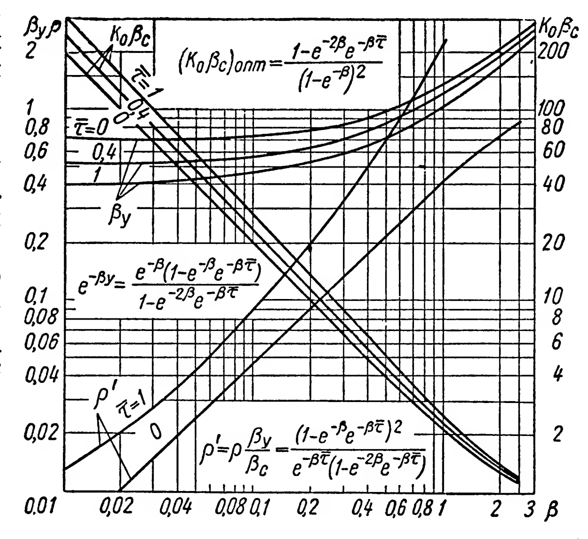
Можно показать, что введение упругой и в частном случае жесткой обратных связей уменьшает область устойчивости системы импульсного регулирования без запаздывания.

При наличии запаздывания регулируемого объекта область устойчивости может увеличиваться.

б) Оптимальные параметры

Введение упругой обратной связи позволяет выбрать оптимальные параметры, при которых достигается бесконечная степень устойчивости.

Зависимости $k\beta_c$, β_y, ρ' от β и $\bar{\tau}$, при которых достигается бесконечная степень устойчивости, приведены на фиг. 156. Чем больше $\bar{\tau}$, тем оптимальные значения ρ' и $k_0\beta_c$ больше, а β_y меньше при постоянном значении β. Физически это значит, что для достижения бесконечной степени устойчивости при больших значениях $\bar{\tau}$ действие регулятора и упругой обратной связи должно быть более интенсивным.



Фиг. 156. Зависимость $(k_0\beta_c)_{опт}$; β_y; ρ' от β и $\bar{\tau}$, при которых достигается бесконечная степень устойчивости в системе с упругой обратной связью.

С уменьшением $\beta = \frac{T_p}{T_a}$ оптимальное значение $k_0\beta_c$ значительно возрастает. Поэтому при малых значениях интервала регулирования T_p по сравнению с постоянной времени объекта T_a получение бесконечной степени устойчивости затруднительно из-за невозможности практического достижения весьма больших значений $k_0\beta_c$.

Из этих графиков, если их сопоставить с графиками границы устойчивости системы без обратной связи, но с запаздыванием, видно что оптимальные значения $k_0\beta_c$ всегда лежат ниже границы устойчивости $(k_0\beta_c)_{гр}$ системы без запаздывания, но могут быть выше границы устойчивости системы с запаздыванием $(k_0\beta_c)_{гр}$, откуда и следует, что введение упругой обратной связи может увеличить область устойчивости.

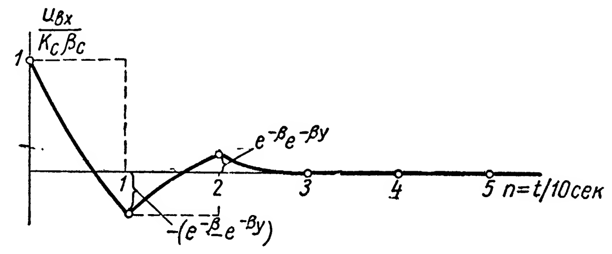
В частности, это происходит при оптимальных значениях параметров ρ' и β_y.

Произведем расчет системы с упругой обратной связью при $\bar{\tau}=0$ и $\beta=\frac{T_p}{T_a}=0,1$.

По графику фиг. 157 находим оптимальные параметры $k_0\beta_c=20$; $\beta_y=0,47$; $\rho'=\rho\frac{\beta_y}{\beta_c}=0,05$.

Процесс регулирования при возмущениях вида единичного скачка ($u_{вх}$ [n] — отклонение), построенный при оптимальных параметрах, будет протекать согласно фиг. 158. Если $T_p=10$ сек., то длительность процесса регулирования будет

$$t_{дл}=3T_p=30 \text{ сек.}$$



Фиг. 157. Изменение $u_{вх}$ при изменении $u_{вх}$ скачком в системе автоматического регулирования температуры с упругой обратной связью при оптимальных параметрах, соответствующих бесконечной степени устойчивости.

Пунктир — ступенчатая функция. Сплошная кривая — действительный процесс.

Расчет оптимальных параметров, при которых процесс будет заканчиваться в заданный промежуток времени, производится следующим образом. Зная число циклов, по истечении которых процесс заканчивается (в данном случае $n=l=3$), находим

$$T_p=\frac{t_{дл}}{l}.$$

По значениям T_a и $\bar{\tau}$ регулируемого объекта вычисляем

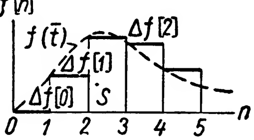
$$\beta=\frac{T_p}{T_a}; \quad \tau=\frac{T}{T_p}$$

и далее по графику (фиг. 152) определяем $k_0\beta_c$; ρ'; β_y, из которых находим k_0, T_c, T_y и ρ.

Приведенные графики могут быть использованы для расчета типовых систем регулирования, подобных рассмотренным, или систем, передаточная функция линейной части которых может быть приведена к виду (487).

Ступенчатой функцией называется функция, значения которой изменяются только при целых значениях аргумента ($n = 0, 1, 2, \dots$), внутри же этих значений она остается постоянной (рис. 158). Будем обозначать ступенчатую функцию символом $f[n]$ и принимать значение ее в точках разрыва равным

$$f[n] = \lim_{\varepsilon \to 0} f(n+\varepsilon) \quad (\varepsilon > 0). \tag{488}$$



Фиг. 158. Ступенчатая функция $f[n]$, соответствующая функции $f(\bar{t})$.

Кроме того, будем предполагать, что ступенчатая функция тождественно равна нулю при отрицательных значениях аргумента.

Рассмотрим ряд

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n], \tag{489}$$

где $q = \sigma + jx$ — комплексное число. Нетрудно показать, что существует такое число σ_0, называемое *абсциссой сходимости*, что ряд (489) абсолютно сходится при $\mathrm{Re}\, q = \sigma > \sigma_0$ и расходится при $\mathrm{Re}\, q = \sigma < \sigma_0$. Очевидно, что абсциссой сходимости для ступенчатой функции, удовлетворяющей условию

$$|f[n]| < Me^{\sigma_1 n}, \tag{490}$$

где M и σ — постоянные числа, не зависящие от n, будет $\sigma_0 > \sigma_1$. Соотношение (489) устанавливает соответствие между ступенчатой функцией $f[n]$, называемой *оригиналом*, и функцией комплексного переменного $F^*(q)$, называемой *изображением* ступенчатой функции $f[n]$. Это соответствие будем кратко записывать в виде

$$F^*(q) = D\{f[n]\} \quad \text{или} \quad F^*(q) \div\to f[n], \tag{491}$$

Преобразование ступенчатых функций, определяемое соотношением (489), назовем *дискретным преобразованием Лапласа*[1].

Рассмотрим основные свойства дискретного преобразования Лапласа.

1. *Теорема линейности*:

$$D\left\{\sum_{\nu=1}^{\mu} a_\nu f[n]\right\} = \sum_{\nu=1}^{\mu} a_\nu D\{f_\nu[n]\} = \sum_{\nu=1}^{\mu} a_\nu F_\nu(q), \tag{492}$$

где

$$F_\nu^*(q) \div\to f_\nu[n]$$

и a_ν — постоянные.

Эта теорема непосредственно вытекает из определения дискретного преобразования Лапласа (489).

---

[1] Можно было бы определить преобразованием Лапласа ступенчатых функций (см. главы § V), как это сделано, например, в книгах М. Гарднера и Д. Бернса, Б. В. Булгакова, А. И. Лурье. Однако определение (489) более удобно для нашей цели.

2. *Теорема сдвига*:

$$D\{f[n+k]\} = e^{qk}\left[F^*(q) - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-qn} f[n]\right]; \tag{493}$$

$$D\{f[n-k]\} = e^{-qk} F^*(q). \tag{494}$$

По определению (489)

$$D\{f[n+k]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n+k];$$

полагая $n_1 = n + k$ и, значит, $n = n_1 - k$, имеем

$$D\{f[n+k]\} = \sum_{n_1=k}^{\infty} e^{-q(n_1-k)} f[n_1] = e^{qk}\left[\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-qn_1} f[n_1] - \sum_{n_1=0}^{k-1} e^{-qn_1} f[n_1]\right].$$

Первая сумма в правой части последнего равенства равна $F^*(q)$. Меняя во второй сумме n_1 на n, получаем формулу (493). Аналогичным образом

$$D\{f[n-k]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n-k] = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-qn} f[n-k],$$

так как $f[n-k] \equiv 0$ при $n < k$.

Полагая теперь $n - k = n_1$ и, значит, $n = n_1 + k$, имеем

$$D\{f[n-k]\} = \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-q(n_1+k)} f[n_1] = e^{-qk} \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-qn_1} f[n_1] = e^{-qk} F^*(q).$$

3. *Теорема смещения*:

$$D\left\{e^{\pm\alpha n} f[n]\right\} = F^*(q \mp \alpha); \tag{495}$$

$$D\left\{e^{\pm\alpha n} f[n]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn}\left(e^{\pm\alpha n} f[n]\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(q\mp\alpha)} f[n] = F^*(q \mp \alpha).$$

4. *Теорема о диференцировании по параметру*:

$$D\left\{\frac{df[n, \lambda]}{d\lambda}\right\} = \frac{dF^*(d, \lambda)}{d\lambda} \tag{496}$$

следует непосредственно из теоремы линейности.

5. *Теорема умножения ступенчатой функции на* n^k:

$$D\left\{n^k f[n]\right\} = (-1)^k \frac{d^k F^*(q)}{dq^k}. \tag{497}$$

Диференцируя обе части равенства (489) k раз по q, получаем

$$\frac{d^k F^*(q)}{dq^k} = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} n^k f[n] = (-1)^k D\left\{n^k f[n]\right\},$$

откуда следует равенство (497).

6. *Теорема свертывания*:

$$D\left\{\sum_{m=0}^{n} f_1[n-m] f_2[m]\right\} = D\left\{\sum_{m=0}^{n} f_1[m] f_2[n-m]\right\} =$$

$$= D\{f_1[n]\} D\{f_2[n]\} = F_1^*(q) F_2^*(q). \tag{498}$$

Умножая равенство (489) на $F_2(q)$, имеем

$$F_1^*(q)\,F_2^*(q) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-qm} F_2(q) f_1[m].$$

Но согласно теореме сдвига

$$e^{-qm} F_2^*(q) \div\to \begin{cases} 0 & n < m \\ f_2[n-m] & n > m. \end{cases}$$

Следовательно,

$$F_1^*(q)\,F_2^* \div\to \sum_{m=0}^{n} f_1[m]\,f_2[n-m].$$

Полагая $n - m = m_1$ и, значит $m = n - m_1$, получаем

$$F_1^*(q)\,F_2^*(q) \div\to \sum_{m=0}^{n} f_1[n-m_1]\,f_2[m_1];$$

последние соотношения и доказывают теорему свертывания.

7. *Изображение разностей*:

$$D\{\Delta f[n]\} = (e^q - 1)\,F^*(q) - e^q f[0]; \tag{499}$$

$$D\left\{\Delta^k f[n]\right\} = (e^q - 1)^k F^*(q) - e^q \sum_{\nu=0}^{k-1} (e^q - 1)^{k-1-\nu} \Delta^\nu f[0]^{1)}. \tag{500}$$

Разности (фиг. 158)

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n]; \quad \Delta^k f[n] = \Delta^{k-1} f[n+1] - \Delta^{k-1} f[n] \tag{501}$$

по отношению к ступенчатой функции играют ту же роль, что и производные по отношению к непрерывной функции. Применяя к первой из формул (501) дискретное преобразование Лапласа, получим

$$D\{\Delta f[n]\} = D\{f[n+1]\} - D\{f[n]\} = D\{f n+1]\} - F^*(q).$$

Согласно теореме сдвига

$$D\{f[n+1]\} = e^q F^*(q) - e^q f[0];$$

следовательно, после подстановки в предыдущее соотношение получаем формулу (499):

$$D\{\Delta f[n]\} = (e^q - 1)\,F^*(q) - e^q f[0].$$

Аналогичным образом

$$D\{\Delta^2 f[n]\} = D\{\Delta\Delta f[n]\} = (e^q - 1)\,D\{\Delta f[n]\} - e^q \Delta f[0].$$

Воспользовавшись соотношением (499), получаем

$$D\{\Delta^2 f[n]\} = (e^q - 1)^2 F(q) - e^q (e^q - 1) f[0] - e^q \Delta f[0].$$

Продолжая далее указанный процесс, приходим к выражению (500).

Разрешая выражение (500) относительно $F(q)$, получим формулу, которая очень удобна для нахождения изображений различных ступенчатых функций:

$$F^*(q) = \frac{e^q}{(e^q - 1)^k} \sum_{\nu=0}^{k-1} (e^q - 1)^{k-1-\nu} \Delta^\nu f[0] + \frac{1}{(e^q - 1)^k} D\left\{\Delta^k f[n]\right\}. \tag{502}$$

---

1) Здесь $\Delta^0 f[0] = f[0]$.

8. *Предельные значения ступенчатой функции*:

$$\lim_{n \to \infty} f[n] = \lim_{q \to 0} (e^q - 1) F^*(q)\,^{1)}; \tag{503}$$

$$\lim_{n \to 0} f[n] = \lim_{q \to \infty} F^*(q). \tag{504}$$

Рассмотрим

$$D\{\Delta f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} \Delta f[n] = (e^q - 1) F^*(q) - e^q f[0]. \tag{505}$$

При $q \to 0$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta f[n] = \lim_{q \to 0} [(e^q - 1) F^*(q) - e^q f[0]].$$

Но

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta f[n] = \sum_{n=0}^{\infty} [f[n+1] - f[n]] = \lim_{n \to \infty} f[n] - f[0].$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} f[n] - f[0] = \lim_{q \to 0} (e^q - 1) F^*(q) - f[0],$$

откуда по сокращению $f[0]$ следует формула (503). Рассмотрим снова формулу (505), умножив предварительно обе части равенства на e^{-q}:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-q(n+1)} f[n] = (1 - e^{-q}) F^*(q) - f[0].$$

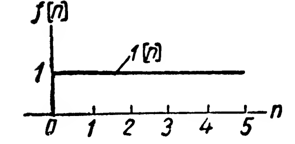
При $q \to \infty$ сумма, стоящая в правой части этого равенства, равна нулю, и, следовательно,

$$f[0] = \lim_{q \to \infty} (1 - e^{-q}) F^*(q) = \lim_{q \to \infty} F^*(q).$$

9. *Площадь ступенчатой функции.*

Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} f[n] = 0$, тогда площадь S ступенчатой функции (фиг. 158) равна

$$S = F^*(0). \tag{506}$$



Фиг. 159. Единичная ступенчатая функция (постоянная).

Действительно, полагая в основном соотношении (489) $q = 0$, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} f[n] = F^*(0) = S. \tag{507}$$

Найдем изображения некоторых ступенчатых функций.

1. $f[n] = 1[n] = \begin{cases} 0 & \text{при } n < 0, \\ 1 & \text{при } n \geqslant 0. \end{cases}$

Это так называемая единичная ступенчатая функция (фиг. 159). Применим формулу (502), полагая в ней $k = 1$ и

$$\Delta^0 f[0] = f[0] = 1; \quad \Delta f[n] = f[n+1] - f[n] \equiv 0,$$

тогда получаем

$$D\{1[n]\} = \frac{e^q}{e^q - 1}. \tag{508}$$

В этом случае абсцисса сходимости равна $\sigma_0 = 0$.

---

1) Если $\lim\limits_{n \to \infty} f[n]$ существует.

2. $f[n] = 1_u[n] = 1[n] - 1[n-1]$ — единичный импульс (фиг. 160). На основании теоремы линейности и теоремы запаздывания имеем

$$D\{1_u[n]\} = D\{1[n]\} - e^{-q} D\{1[n]\} = \frac{e^q}{e^q - 1} - \frac{1}{e^q - 1} = 1 \quad (\sigma_0 = 0), \tag{509}$$

т. е. изображение единичного импульса есть постоянная, равная единице.

3. $f[n] = e^{\alpha n}$ (фиг. 161).

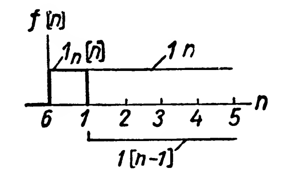
Воспользовавшись изображением $1[n]$ и теоремой смещения, получаем

$$D\{e^{\alpha n}\} = D\{e^{\alpha n} 1[n]\} = \frac{e^{q-\alpha}}{e^{q-\alpha} - 1} = \frac{e^q}{e^q - e^\alpha} \quad (\sigma_0 = \lambda). \tag{510}$$

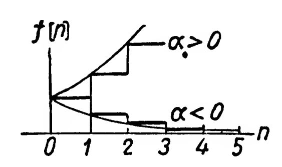
4. $f[n] = ne^{\alpha n}$.

Применяя теорему о диференцировании по параметру к функции $e^{\alpha n}$, получаем

$$D\{ne^{\alpha n}\} = D\left\{\frac{de^{\alpha n}}{d\alpha}\right\} = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{e^q}{e^q - e^\alpha}\right) = \frac{e^q}{(e^q - e^\alpha)^2}. \tag{511}$$



Фиг. 160. Единичный импульс. Образование его как разности двух единичных ступенчатых функций.



Фиг. 161. Экспоненциальная ступенчатая функция при $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$. Здесь же указана соответствующая непрерывная экспоненциальная функция.

В конце приложения приведена таблица изображений ступенчатых функций, дополняющая соотношения, приведенные здесь. Как нетрудно видеть, изображения ступенчатых функций являются функциями не просто q, а e^q. Это является характерным свойством их.

Желая подчеркнуть это свойство и одновременно сохранить символику обычного преобразования Лапласа, мы изображения ступенчатых функций снабжаем значком *.

Нахождение оригинала по изображению.

В общем виде изображение может быть представлено в виде дробно-рациональной функции

$$F^*(q) = \frac{H^*(q)}{G^*(q)}, \tag{512}$$

где $H^*(q)$ и $G^*(q)$ суть полиномы по e^q и степень $H(q)$ не выше степени $G(q)$.

Формулы разложения.

Пусть $F^*(q)$ имеет l полюсов e^{q_ν} или, что то же самое, q_ν [эти l полюсов являются корнями уравнения $G^*(q) = 0$][1]. Тогда $F^*(q)$ можно представить в виде

$$F^*(q) = \frac{H^*(q)}{G^*(q)} = \sum_{\nu}^{l} \frac{c_\nu}{e^q - e^{q_\nu}},$$

[1]) В последнем случае имеются в виду полюсы q_ν, лежащие в полосе $-\pi < \operatorname{Im} q < \pi$. Эти полюсы мы назовем основными. Все остальные полюсы (их бесчисленное множество) имеют мнимую часть, отличающуюся от мнимой части основных полюсов на $2\pi m$, где m — любое целое число, отличное от нуля.

если полагать, что среди корней уравнения $G(q)=0$ кратных корней и корней, равных нулю, нет. Для определения c_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, l$) умножим обе части равенства на $e^q - e^{q_\mu}$ и, полагая $q = q_\mu$, т. е. $e^q = e^{q_\mu}$, получаем

$$c_\mu = \left[\frac{H^*(q)}{G^*(q)}(e^q - e^{q_\mu})\right]_{q=q_\mu} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, l).$$

При $q = q_\mu$ $G^*(q_\mu) = 0$. Раскрывая неопределенность, получаем

$$c_\mu = \frac{H^*(q_\mu)}{\left[\frac{dG^*(q)}{de^q}\right]_{q=q_\mu}} = \frac{H^*(q_\mu)}{\dot{G}^*(q_\mu)}, \tag{513}$$

где точка над G^* означает диференцирование по e^q. Таким образом, разложение принимает вид

$$\frac{H^*(q)}{G^*(q)} = \sum_{\nu=1}^{l} \frac{H^*(q_\nu)}{\dot{G}^*(q_\nu)} \cdot \frac{1}{e^q - e^{q_\nu}}. \tag{514}$$

Замечая, что [1]

$$\frac{1}{e^q - e^{q_\nu}} = \frac{e^q}{e^q - e^{q_\nu}} e^{-q} \risingdotseq e^{q_\nu(n-1)},$$

получаем, переходя от изображения к оригиналу,

$$f[n] = \sum_{\nu=1}^{l} \frac{H^*(q_\nu)}{e^{q_\nu}\dot{G}^*(q_\nu)} e^{q_\nu n}. \tag{515}$$

Рассмотрим еще важный случай, когда $F^*(q)$ имеет полюс $q = 0$:

$$F^*(q) = \frac{H^*(q)}{G^*(q)} \cdot \frac{e^q}{e^q - 1}. \tag{516}$$

В этом случае, пользуясь формулой (504), получаем

$$\frac{H^*(q)}{G^*(q)} \cdot \frac{e^q}{e^q - 1} = \sum_{\nu=1}^{l} \frac{H^*(q_\nu)}{\dot{G}^*(q_\nu)} \cdot \frac{e^q}{(e^q - e^{q_\nu})(e^q - 1)}. \tag{517}$$

Замечая, что [2]

$$\frac{e^q}{(e^q - e^{q_\nu})(e^q - 1)} = \frac{1}{1 - e^{q_\nu}}\left\{\frac{e^q}{e^q - 1} - \frac{e^q}{e^q - e^{q_\nu}}\right\} \div\rightarrow \frac{1}{1 - e^{q_\nu}}(1 - e^{q_\nu n}),$$

и переходя от изображения к оригиналу, получаем

$$f[n] = \sum_{\nu=1}^{l} \frac{H^*(q_\nu)}{\dot{G}^*(q_\nu)(1 - e^{q_\nu})} + \sum_{\nu=1}^{l} \frac{H^*(q_\nu)}{(e^{q_\nu} - 1)\dot{G}^*(q_\nu)} e^{q_\nu n}. \tag{518}$$

---

[1] См. таблицу. Здесь использована теорема сдвига.

[2] См. таблицу.

Соответствие между оригиналами и изображениями в дискретном преобразовании Лапласа

Оригинал $f[n] = D^{-1}\{F(n)\}$	Изображение $F^*(q) = D\{f[n]\}$	Оригинал $f(n) = D^{-1}\{F(q)\}$	Изображение $F^*(q) = D\{f(n)\}$
$1_и[n]$	1	$\sin xn$	$\frac{e^q \sin x}{e^{2q} - 2e^q \cos x + 1}$
$1[n]$	$\frac{e^q}{e^q - 1}$	$\frac{1}{e^{\alpha_1} - e^{\alpha_2}}\left(e^{\alpha_1 n} - e^{\alpha_2 n}\right)$	$\frac{e^q}{(e^q - e^{\alpha_1})(e^q - e^{\alpha_2})}$
n	$\frac{e^q}{(e^q - 1)^2}$	$\frac{1}{1 - e^\alpha}(1 - e^{\alpha n})$	$\frac{e^q}{(e^q - 1)(e^q - e^\alpha)}$
n^2	$\frac{e^q}{(e^q - 1)^3}(e^q + 1)$	$\frac{n}{1 - e^\alpha} - \frac{1 - e^{\alpha n}}{(1 - e^\alpha)^2}$	$\frac{e^q}{(e^q - 1)^2 (e^q - e^\alpha)}$
$e^{\alpha n}$	$\frac{e^q}{e^q - e^\alpha}$	$\sum_{\nu=1}^{l} \frac{H^*(q_\nu)}{e^{q_\nu} \dot{G}^*(q_\nu)} e^{q_\nu n}$	$\frac{H^*(q)}{G^*(q)}$
$ne^{\alpha(n-1)}$	$\frac{e^q}{(e^q - e^\alpha)^2}$	$\frac{H^*(0)}{G^*(0)} + \sum_{\nu=1}^{l} \frac{H^*(q_\nu)}{(e^{q_\nu} - 1)\dot{G}^*(q_\nu)} e^{q_\nu n}$	$\frac{H^*(q)}{G^*(q)} \cdot \frac{e^q}{e^q - 1}$
$n^2 e^{\alpha(n-1)}$	$\frac{e^q}{(e^q - e^\alpha)^3}(e^q + e^\alpha)$		
e^{jxn}	$\frac{e^q}{e^q - e^{jx}}$	$\frac{H^*(jx)}{G^*(jx)} e^{jxn} + \sum_{\nu=1}^{l} \frac{H^*(q)}{(e^{q_\nu} - e^{jx})\dot{G}^*(q_\nu)} e^{q_\nu n}$	$\frac{H^*(q)}{G^*(q)} \cdot \frac{e^q}{e^q - e^{jx}}$
$\cos xn$	$\frac{(e^q - \cos x)\, e^q}{e^{2q} - 2e^q \cos x + 1}$		

Примечание. Точка над G^* означает производную G^* по e^q.

Полагая в формуле (504) $q = 0$, имеем

$$\frac{H^*(0)}{G^*(0)} = \sum_{\nu=1} \frac{H^*(q_\nu)}{(1 - e^{q_\nu})\, \dot{G}^*(q_\nu)}.$$

Следовательно, окончательно

$$f[n] = \frac{H^*(0)}{G^*(0)} + \sum_{\nu=1}^{l} \frac{H^*(q_\nu)}{(e^{q_\nu} - 1)\, \dot{G}^*(q_\nu)} e^{q_\nu n}. \tag{519}$$

Последняя формула является аналогом хорошо известной формулы Хевисайда.

Аналогичным образом можно получить формулы разложения в том случае, когда имеются кратные корни, чисто мнимые корни и т. д. Мы этих случаев здесь не будем рассматривать (часть из них приведена в таблице).

Интегрированием в пределах от $\sigma - j\pi$ до $\sigma + j\pi$ выражения (489) можно показать, что имеет место формула обращения

$$f[n] = D^{-1}\{F^*(q)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\pi}^{\sigma_0 + j\pi} F^*(q)\, e^{qn} dq. \tag{520}$$

Формула обращения (520) для ступенчатых функций является аналогом формулы обращения в обычном преобразовании Лапласа и решает задачу о нахождении оригинала по изображению в общем виде

Пользуясь формулой обращения и привлекая теорию вычетов, нетрудно из нее получить приведенные выше формулы разложения аналогично тому, как это сделано в теории преобразования Лапласа.

Обладая специфическими особенностями, дискретное преобразование Лапласа применимо для описания и исследования систем прерывистого регулирования почти с той же легкостью, с которой применимо обычное преобразование Лапласа для исследования систем непрерывного регулирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цыпкин Я. З., Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях, ГЭИ, 1951.
2. Ольденбург Р и Сарториус Г., Динамика автоматического регулирования, ГЭИ, 1948.
3. Теория следящих систем, ИИЛ, 1951.
4. Корнилов Ю. Г., статья в сб. ЦКТИ „Автоматическое регулирование“, вып. 2, кн. 19, Машгиз 1951.
5. Бесекерский В. А., „Автоматика и телемеханика“ № 6, 1947.
6. Герасимов С. Г., Дудников Е. Г., Чистяков С. Ф., Автоматическое регулирование котельных установок, Энергоиздат, 1950.
7. Солодовников В. В., Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, ГИТТЛ, М. 1952.
8. Долголенко Ю. В., „Инженерный сборник“, вып. 13, 1953.

РАЗДЕЛ IV

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В предыдущих главах, посвященных анализу качества систем автоматического регулирования, предполагалось, что воздействия представляют заданные функции времени. Часто исследование поведения системы под влиянием таких воздействий оказывается практически вполне достаточным.

Однако иногда предположение о том, что воздействие, вызвавшее переходный процесс, является заданной функцией времени, т. е. функцией, значение которой в любой будущий момент времени t однозначно определяется ее изменениями в предыдущие моменты времени, не дает возможности достаточно полно описать реальные условия работы системы и правильно подойти к вопросу о выборе ее характеристик.

Действительно, рассмотрим любую систему автоматического регулирования. Воздействия, которым она подвержена в реальных условиях ее работы, обычно представляют не заданные функции времени, а функции, для которых нельзя заранее установить с полной определенностью их зависимость от времени. Это следует из того очевидного соображения, что сама необходимость в регулировании, основанном на измерении сигнала ошибки или отклонения регулируемой величины от заданного значения, возникает лишь в тех случаях, когда заранее нельзя предугадать закона изменения воздействия. Ясно, что если бы нам, например, было известно, какие именно сбросы и набросы нагрузки и в какие именно моменты времени произойдут в цепи генератора, вращаемого турбиной, то для поддержания постоянного числа оборотов вместо автоматического регулятора скорости можно было бы применить программный механизм, изменяющий соответствующим образом количество пара или воды, поступающее в турбину.

Таким образом, воздействия, приложенные к системам регулирования, представляют не заданные, а случайные непрерывно изменяющиеся функции времени, так как ни знание величины воздействия в любой исходный момент времени, ни даже знание всех его предыдущих изменений не позволяют однозначно определить закон изменения воздействия в последующие моменты времени. Поэтому методы анализа и синтеза систем автоматического регулирования при наличии случайных непрерывно изменяющихся воздействий имеют большой практический интерес.

Каким же образом следует подойти к вопросу о построении теории систем автоматического регулирования при наличии непрерывно изменяющихся воздействий?

Можно указать следующие направления развития методов решения этого вопроса.

Первое направление основано на введении в рассмотрение статистических характеристик воздействий. Этими характеристиками обычно служат корреляционные функции и спектральные плотности (см. ниже), определяемые обычно из эксперимента. Математической основой этого направления является теория стационарных случайных процессов, разработанная А. Н. Колмогоровым и А. Я. Хинчиным [4], [5], [6]. Здесь необходимо также указать на общую теорию случайных функций, разработанную В. С. Пугачевым [12].

В главе XXII — первой главе настоящего раздела — излагаются некоторые сведения из теории стационарных случайных процессов. Это необходимо для уяснения метода анализа и синтеза систем автоматического регулирования, находящихся под влиянием стационарных случайных воздействий, описанного в главах XXII и XXIII.

Второе направление, связанное с работами Н. Д. Моисеева [1] и Б. В. Булгакова [2], основывается на единственном и притом весьма общем предположении относительно возмущающих воздействий. Это предположение не требует статистической обработки воздействий и заключается в том, что возмущающие воздействия ограничены по модулю, а в остальном могут быть практически любыми однозначными функциями.

Следуя этому направлению, можно, например, определить максимальное воздействие или накопленное отклонение системы, т. е. определить поведение системы при наихудших условиях, которые, однако, могут существенно отличаться от реально возможных условий и поэтому привести к весьма завышенной оценке максимального отклонения.

Этому кругу вопросов посвящена глава XXIV.

Наконец, в последней XXV главе настоящего раздела показывается, каким образом можно подойти к вопросу об ориентировочном выборе параметров систем регулирования, когда условия работы объекта регулирования очень мало изучены или весьма непостоянны.

Эта глава связана с главой XX предыдущего раздела и затрагивает вопросы как качества, так и динамической точности. Здесь показывается, что при определенных условиях воздействия в виде дельта-функции и ступенчатой функции могут рассматриваться как наиболее неблагоприятные.

Сейчас еще трудно сформулировать критерий, точно определяющий условия, когда при анализе систем регулирования можно ограничиться рассмотрением обычных переходных процессов, вызванных заданными воздействиями, и когда этот процесс необходимо рассматривать как непрекращающийся случайный процесс, применительно к которому обычное понятие качества, связанное с такими представлениями, как, например, время переходного процесса, величина перерегулирования и т. д., теряет смысл. Следовательно этот вопрос необходимо решать, исходя из анализа конкретных условий работы системы и предъявляемых к ней технических требований.

Однако все же ясно, что рассмотрение процесса регулирования как случайного процесса мало целесообразно, если воздействия представляют импульсы или внезапные изменения входа, хотя и имеющие случайную

величину и возникающие в случайные моменты времени, но разделенные промежутками, достаточными для того, чтобы система успевала до появления каждого следующего импульса приходить в установившееся состояние, или, если воздействия являются функциями, которые можно подразделить на участки и апроксимировать в пределах каждого из участков типовыми функциями так, чтобы система на протяжении каждого из участков успевала достигнуть установившегося состояния.

Наоборот, если воздействия имеют характер непрерывно хаотически колеблющихся функций и процесс воспроизведения нельзя рассматривать как ряд следующих друг за другом переходов из одного установившегося состояния в другое (или прежнее), то применение методов, основанных на понятии динамической точности, становится, повидимому, вполне целесообразным.

Итак, если предыдущий III раздел был посвящен изложению методов решения проблемы качества, то задача настоящего раздела (по крайней мере первых его трех глав) состоит в том, чтобы ввести читателя в тот круг вопросов, который связан с решением другой основной проблемы теории регулирования, а именно проблемы динамической точности.

Проблему динамической точности можно определить как проблему анализа и синтеза систем автоматического регулирования, находящихся под влиянием таких непрерывно изменяющихся воздействий (сведения о которых могут быть весьма ограниченными), когда понятие о переходном процессе теряет смысл, и полной характеристикой неустановившегося процесса, происходящего в системе, может служить абсолютное значение разности $|\varepsilon(t)|$ между требуемым и действительным значением регулируемой величины в заданном интервале $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$.

Следует подчеркнуть, что содержание раздела еще раз указывает на важность исследования характера воздействий, прикладываемых к системам регулирования, работающих в самых различных условиях. Разработка методов расчета, позволяющих учитывать специфику этих воздействий, является одним из важнейших направлений, в которых должно происходить дальнейшее развитие теории регулирования.

ГЛАВА XXII

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ИЗ ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К АНАЛИЗУ ТОЧНОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Качество работы многих систем автоматического регулирования существенно зависит от помех и шумов, накладывающихся на управляющее воздействие (полезный входной сигнал) и уменьшающих точность его воспроизведения.

Причины образования помех и шумов, являющихся, конечно, случайными функциями, могут быть самыми различными. Рассмотрим, например, ламповый усилитель, представляющий собой необходимый элемент большинства следящих систем и многих регуляторов.

Хорошо известно, что даже тогда, когда на его входе нет никакого полезного сигнала, напряжение на его выходе колеблется или флюктирует относительно некоторого среднего значения. Эти флюктуации создаются большим числом различных факторов, к числу которых можно отнести, например:

а) тепловые шумы, вызываемые беспорядочным движением электронов в проводниках;

б) дробовой эффект, создаваемый тем, что число электронов, испускаемых нитью лампы в единицу времени, колеблется относительно некоторого среднего значения;

в) шумы, происходящие в контактах;

г) шумы, создаваемые источниками питания;

д) шумы, создаваемые генерацией автоколебаний в местных паразитных цепях обратной связи и т. д.

Работу системы автоматического регулирования, находящейся под влиянием управляющего или задающего и возмущающего воздействий, какой бы характер они ни имели, можно сравнить с работой лампового усилителя, на вход которого попадают не только полезные сигналы, но и помехи.

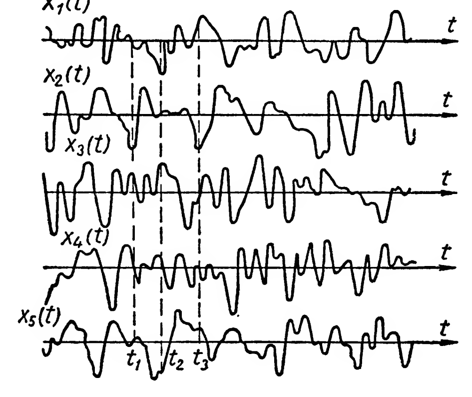
Рассмотрим, например, систему автоматического регулирования самолет — автопилот. В ней полезным сигналом могут являться сигналы, поступающие на вход автопилота и определяющие требуемый закон движения самолета, а помехами — непрерывные случайные изменения лобового сопротивления и подъемной силы самолета вследствие хаоти-

ческого движения частиц воздуха, колебаний плотности атмосферы и других причин.

Задача настоящей главы состоит в том, чтобы ознакомить читателя со статистическим методом анализа динамической точности систем автоматического регулирования при наличии помех. Для понимания основ этого метода необходимо знание теории стационарных случайных процессов. Поэтому, прежде чем переходить к изложению метода, нам необходимо будет остановиться на некоторых понятиях и сведениях из этой теории.

1. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ[1]

Предположим, что мы располагаем достаточно большим числом осциллограмм, полученных при одних и тех же условиях и представляющих, например, запись флюктуаций напряжения на выходе лампового усилителя. Флюктуации напряжения, записанные на осциллограммах, характеризуются некоторыми функциями $x_1(t)$; $x_2(t)$; ...; $x_N(t)$ (фиг. 1), которые, несмотря на то, что они получены при одинаковых условиях работы, будут отличаться друг от друга, так как трудно себе представить, чтобы все явления, ведущие к образованию этих флюктуаций, протекали одинаково для всех осциллограмм.



Фиг. 1. Осциллограммы флюктуации напряжения.

Величина напряжения на выходе усилителя есть случайная величина, которая, если нас интересует протекание рассматриваемого явления во времени, может быть подвергнута анализу при помощи обычных методов теории вероятностей.

Случайная величина в теории вероятностей считается заданной, если известна ее функция распределения. В рассматриваемом случае функция распределения может быть определена следующим образом.

Определим при помощи имеющихся осциллограмм достаточно большое число N наблюдавшихся значений напряжения ξ_1; ξ_2; ξ_3; ...; ξ_N.

Будем откладывать вдоль оси абсцисс величину напряжения ξ, а вдоль оси ординат — отношение числа ν измеренных значений ξ, меньших или равных, к общему числу N измеренных значении ξ.

Полученная таким образом кривая $F(x)$ (фиг. 2) и будет кривой распределения для величины напряжения. Ордината кривой $F(x)$, соот-

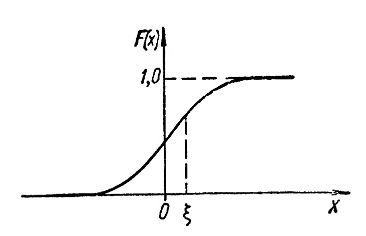
[1] Читатель, желающий более углубленно ознакомиться с вопросами теории вероятностей, излагаемыми в п. 1—3, отсылается к соответствующим курсам. См., например, [7], [8].

ветствующая значению $\xi = x$, определяет вероятность того, что величина напряжения ξ не превышает значения x. Очевидно, что функция распределения $F(x)$ есть неубывающая функция x, обладающая свойствами

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1; \qquad F(-\infty) = 0; \quad F(+\infty) = 1. \tag{1}$$

Действительно, вероятность того, что напряжение будет равно $-\infty$, равна нулю, вероятность того, что величина напряжения заключена в пределах $(-\infty, +\infty)$, равна единице, и вероятность того, что значение напряжения заключено в пределах $(-\infty, x)$, при возрастании x может только возрастать.

Функции распределения вероятности $F(x)$ можно дать простую физическую интерпретацию, если представить себе единицу массы, распре-



Фиг. 2. Функция распределения.

Фиг. 3. Плотность распределения.

деленную вдоль прямой так, чтобы количество массы, сосредоточенное во всех точках прямой, находящихся слева от точки $x = \xi$, равнялось $F(\xi)$.

Производная (фиг. 3)

$$\frac{dF(x)}{dx} = w(x) \tag{2}$$

в точке $\xi = x$, если она существует, называется плотностью вероятности случайной величины x и представляет плотность единичной массы в рассматриваемой точке.

Вероятность того, что величина ξ принимает значение, принадлежащее интервалу $x < \xi < x + \Delta x$, для малых Δx равна $w(x)\Delta x$.

Этот диференциал называется элементом вероятности данного распределения.

Функция распределения $F(x)$ или плотность распределения вероятности $w(x)$ полностью определяют случайную величину.

Однако, так же как в теории переходных процессов, иногда достаточно знать не самый переходный процесс, а лишь некоторые его числовые характеристики, например показатели качества или коэфициенты ошибки, так и при изучении случайных величин иногда достаточно знать лишь некоторые числовые характеристики функции распределения, которыми обычно служат моменты этой функции.

Определение понятия моментов функции распределения и понятия среднего значения или математического ожидания случайной величины дается ниже.

2. СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ И МОМЕНТЫ. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть измеренные значения случайной величины x равны $x_1; x_2; \dots; x_N$ и пусть p_k есть вероятность того, что величина x имеет значение, равное x_k.

Средним значением, или математическим ожиданием, M величины x называется сумма

$$Mx = \sum_{k=1}^{N} p_k x_k. \tag{3}$$

Точно так же, если $f(x)$ представляет функцию случайной величины x, измеренные значения которой равны $x_1; x_2; \dots; x_N$, то ее средним значением или математическим ожиданием, называется сумма

$$Mf = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x_k). \tag{4}$$

Рассмотрим теперь способ определения среднего значения Mx по заданной плотности распределения $w(x)$.

Так как число измеренных значений x в интервале от x_i до $x_i + \Delta x_i$, отнесенное к общему числу измеренных значений x, приближенно равно $w(x_i)\Delta x_i$, а значение величины x в этом интервале приближенно равно x_i, то среднее значение приближенно определяется выражением

$$Mx = \sum x_i w(x_i) \Delta x_i.$$

В пределе при $\Delta x_i \to 0$ получим точную формулу для среднего значения:

$$Mx = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x)\, dx. \tag{5}$$

Точно так же среднее значение величины $f(x)$, являющееся функцией от x, определяется выражением

$$Mf = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) w(x)\, dx. \tag{6}$$

Если для некоторого целого положительного числа ν функция $x^\nu w(x)$ интегрируема на $(-\infty, +\infty)$, то выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^\nu w(x)\, dx \tag{7}$$

называется *моментом порядка* ν величины x. Момент первого порядка

$$m_0 = d_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x)\, dx \tag{8}$$

равен среднему значению или математическому ожиданию самой случайной величины.

Если α — постоянная, то выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha)^{\nu} w(x)\, dx \tag{9}$$

называется моментом порядка ν величины x относительно точки α.

Моменты относительно точки $\alpha = m_0$, определяемой формулой (8), называются центральными моментами:

$$\mu_{\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^{\nu} w(x)\, dx. \tag{10}$$

На практике особенно часто пользуются следующими характеристиками распределения.

Среднее

$$m_0 = Mx = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x)\, dx \tag{11}$$

первый момент распределения, есть среднее значение самой случайной величины.

Среднее m_0 имеет простую физическую интерпретацию: это — абсцисса центра тяжести единичной массы, распределенной вдоль прямой по закону, определяемому функцией $w(x)$.

Срединным (или вероятным) значением b случайной величины x называется ее значение на границах интервала, вероятность нахождения внутри которого равна 0,5. Итак, величина b может быть определена из равенства

$$\int_{-b}^{b} w(x)\, dx = 0{,}5. \tag{12}$$

Среднее значение квадрата случайной величины

$$Mx^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x)\, dx \tag{13}$$

является моментом второго порядка случайной величины.

Отклонением случайной величины Δx называется разность

$$\Delta x = x - m_0.$$

Если известно типичное значение случайной величины, например ее среднее значение m_0, то часто бывает необходимым вычислить некоторый параметр, показывающий, насколько широко разбросаны значения этой величины по каждую сторону от типичного значения. Параметр такого рода называется характеристикой рассеяния.

В качестве меры рассеяния относительно среднего значения m_0 обычно рассматривается второй центральный момент:

$$\beta_2 = M(x-m_0)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_0)^2 w(x)\, dw. \tag{14}$$

Он называется д и с п е р с и е й случайной величины.

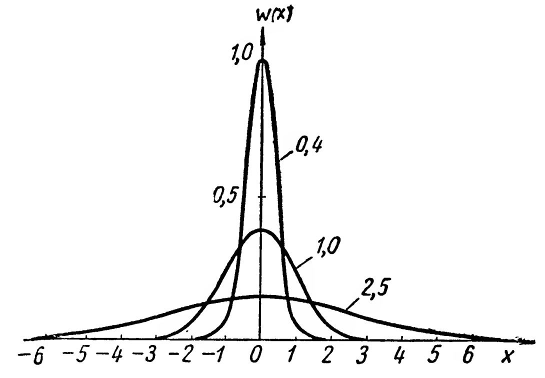
Если среднее значение $m_0 = 0$, то дисперсия сводится к среднему от квадрата случайной величины.

Чтобы иметь характеристику рассеяния той же размерности, что и сама случайная величина ξ, часто предпочитают рассматривать неотрицательное значение квадратного корня из β_2, которое называется *стандартным или средним квадратическим отклонением* и обозначается через c.

Заметим, что наиболее часто встречающимся распределением является так называемое нормальное распределение.

Случайная величина x называется нормально распределенной с параметрами m_0, c, если плотность вероятности имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_0)^2}{2c^2}}. \quad (15)$$



Фиг. 4. Кривые нормального распределения при различных значениях стандартного отклонения $C = 0{,}4$; $1{,}0$; $2{,}5$.

Величины m_0 и c обозначают среднее значение и стандартное или среднее квадратическое отклонение.

Изменение значения m вызывает только смещение кривой $w(x)$ вдоль оси абсцисс без изменения ее формы, тогда как изменение величины c вызывает изменение масштаба вдоль обеих координатных осей, причем площадь, заключенная между кривой $w(x)$ и осью абсцисс, остается, конечно, равной единице (фиг. 4).

Чем меньше c, тем бóльшая часть массы сосредоточена в окрестности точки $x = m_0$.

3. СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ [9], [10], [11], [12]

Нами были приведены некоторые элементарные сведения из теории вероятностей, связанные с понятием случайной величины.

Однако в дальнейшем нас будут интересовать не случайные величины, а случайные процессы, т. е. явления, протекающие во времени. Для анализа случайных процессов необходим специальный математический аппарат, созданный в работах Е. Е. Слуцкого, А. Н. Колмогорова [5], [6], А. Я. Хинчина [4] и В. С. Пугачева [12].

Случайной функцией $x(t)$ аргумента t называется функция, значения которой являются случайными величинами.

Случайная функция $x(t)$ считается заданной, если известны ее n-мерные функции распределения или соответствующие им плотности распределения.

Понятие n-мерной плотности распределения можно пояснить следующим образом.

Как уже указывалось, осциллограммы на фиг. 1 характеризуются некоторыми случайными функциями $x_1(t)$, $x_2(t)$, . . . Рассмотрим какой-либо определенный момент времени t и определим, какая доля из общего

числа функций $x_i(t)$ имеет в этот момент времени значение, заключенное между x и $x+\Delta x$. Эта доля зависит от t и пропорциональна Δx при малых Δx. Обозначим ее через $w_1(x, t)$ и назовем функцию $w_1(x, t)$ *одномерной плотностью распределения вероятности.* Рассмотрим теперь всевозможные пары значений x, наблюдавшиеся в два различных момента времени t_1 и t_2. Долю пар значений x, для которой величина x заключена между $(x_1, x_1+\Delta x_1)$ при $t=t_1$ и между $(x_2, x+\Delta x_2)$ при $t=t_2$, отнесенная к общему числу наблюдавшихся пар значений, обозначим через $w_2(x, t_1; x_2, t_2)\Delta x_1 \Delta x_2$ и назовем *двухмерной плотностью распределения вероятности.* Этот процесс можно продолжить и определить трехмерную, четырехмерную и все последующие плотности распределения вероятности.

Итак, мы видим, что случайный процесс можно характеризовать некоторыми плотностями распределения вероятности, полностью определяющими его в статистическом смысле.

Действительно, если нам известны:

1) вероятность нахождения любой из функций $x(t)$, входящих в совокупность функций, характеризующих рассматриваемый случайный процесс, в момент $t=t_1$ в интервале $(x, x+\Delta x)$, равная

$$w_1(x, t)\Delta x; \tag{16}$$

2) вероятность нахождения любой из функций $x(t)$ в интервале $(x_1, x_1+\Delta x_1)$ в момент времени $t=t_1$ и в интервале $(x_2, x_2+\Delta x_2)$ в момент времени $t=t_2$, равная

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2)\Delta x_1 \Delta x_2; \tag{17}$$

3) вероятность нахождения значения любой из функций $x(t)$ в интервале $(x_1, x_1+\Delta x_1)$ в момент времени $t=t_1$, в интервале $(x_2, x_2+\Delta x_2)$ в момент времени $t=t_2$, в интервале $(x_3, x_3+\Delta x_3)$ в момент времени $t=t_3$, равная

$$w_3(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) \tag{18}$$

и т. д., т. е. если нам известны функции w_k при любом k, то можно считать, что мы знаем все о случайном процессе.

Подводя итог, можно дать следующее определение случайного процесса.

Если в результате различных наблюдений над процессом, производимых при одном и том же комплексе принимаемых во внимание условий, получаются различные функции $x(t)$, для каждой из которых зависимость переменной x от аргумента t неизвестна и могут быть определены лишь n-мерные функции распределения или плотности вероятности для значений переменных $x(t)$ в различные моменты времени, то процесс называется стохатическим или случайным.

Из сказанного ясно уже отмеченное нами обстоятельство, что статистический метод изучения случайных процессов ставит себе задачей не изучение каждой из функций $x(t)$, входящей в совокупность функций, характеризующих этот процесс, а изучение свойств всей совокупности функций в целом.

4. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

В общем случае для экспериментального определения n-мерных функций плотности вероятности, характеризующих случайный процесс, необходимо располагать большим числом функций $x(t)$, полученных из большого числа наблюдений над подобными системами, чтобы затем определить вероятность нахождения величины x в любом интервале $(x, x+\Delta x)$ в момент времени t.

Трудности математического описания и экспериментального исследования такого рода случайных процессов, на которые не наложено никаких ограничивающих предположений, очевидны. Поэтому обычно рассматриваются те или иные виды случайных процессов, удовлетворяющих определенным допущениям. Среди таких процессов значительное внимание уделялось так называемым процессам Маркова. Отличительная особенность процессов Маркова [4], состоит в том, что в каждый данный момент времени дальнейший ход такого процесса обусловливается только состоянием его в этот момент независимо от характера течения процесса в предшествовавший период. При такого рода процессах наше суждение о будущем нисколько не меняется в случае возможного расширения знаний относительно предшествовавшего течения событий. Эти процессы сравнительно легко поддаются математической обработке и в то же время во многих приложениях (радиоактивный распад, телефония и др.) хорошо согласуются с действительностью.

Однако значительно более многочисленными являются такие физические и технические вопросы, при которых предыдущее течение процесса имеет существенное значение для суждения о его дальнейшем развитии и не может быть опущено даже в случае приближенной трактовки вопроса (так, например, если бы мы стали рассматривать движение самолета в пространстве как процесс Маркова, то это, очевидно, означало бы, что мы не принимаем в расчет его инерции).

Среди случайных процессов, в которых предыдущее течение события в существенной мере определяет те заключения, которые мы можем сделать о будущем, нужно в первую очередь выделить стационарные случайные процессы. Основательное изучение этих процессов, без сомнения, должно быть положено в основу всякого более общего исследования в этой области.

Понятие „стационарный случайный процесс“ употребляется тогда, когда система, в которой протекает случайный процесс, остается неизменной во времени, т. е. когда вид функций распределения вероятности не зависит от смещения начала отсчета вдоль оси времени, в противоположность более общим случайным процессам, когда функция распределения зависит от момента времени, для которого она определяется.

Более точное определение стационарного случайного процесса может быть сформулировано следующим образом [4].

Случайный процесс, определяемый совокупностью переменных $x(t)$, *называется стационарным в том случае, если функция распределения вероятности двух групп значений этих переменных* $[x(t_1); x(t_2); \ldots; x(t_n)]$ *и* $[x(t_1+\tau); x(t_2+\tau); \ldots x(t_n+\tau)]$ *тождественны друг с другом, причем число n, моменты времени*

t_1, t_2 ... *и промежуток* τ *могут быть выбраны совершенно произвольно.*

В случае стационарных случайных процессов определение функций распределения вероятности упрощается в том отношении, что все они могут быть определены из результатов наблюдения над одной единственной системой, а не над многими, но в течение достаточно долгого промежутка времени.

Действительно, так как в этом случае функции распределения не зависят от начала отсчета времени, то можно предположить, что экспериментальную запись кривой $x(t)$, полученную из наблюдения над одной системой в течение достаточно долгого промежутка времени, можно разбить на ряд отрезков длиной T, где T велико по сравнению со всеми „периодами", которые имеются в исследуемом процессе, и считать, что функциями, характеризующими процесс, являются части кривой $x(t)$ на протяжении каждого из отрезков T.

Это весьма существенное упрощение.

В заключение характеристики стационарных случайных процессов отметим еще одно важное их свойство.

При случайных процессах следует отличать средние значения по совокупности, т. е. средние значения, определенные на основании наблюдений над многими подобными системами в один и тот же момент времени, от средних по времени, т. е. от средних значений, определенных на основании наблюдения над одной из этих систем для достаточно большого числа последующих моментов времени.

Однако для стационарных случайных процессов оба способа усреднения дают один и тот же результат, и поэтому можно пользоваться любым из них.

Так, например, среднее значение для совокупности функций $x(t)$ в момент времени t можно определить при помощи выражения

$$Mx = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x, t)\, dx, \tag{19}$$

если известна плотность распределения $w(x, t)$.

Из способа определения Mx ясно, что эта величина зависит от момента времени t, для которого она определяется, среднее же по времени

$$\overline{x} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt \tag{20}$$

будет, вообще говоря, неодинаковым для различных функций совокупности и не зависит от времени.

Однако если случайный процессс стационарен, то оба способа усреднения должны давать один и тот же результат независимо от момента времени, в который вычисляется среднее для совокупности, и независимо от выбора функции, входящей в совокупность, для которой вычисляется среднее по времени, т. е.

$$Mx = \overline{x}. \tag{21}$$

То же относится и к моментам функции $x(t)$ более высоких порядков. Так, например, момент n-го порядка

$$Mx^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n w(x, t)\, dx \tag{22}$$

в случае стационарного случайного процесса равен среднему по времени от x^n:

$$\overline{x^n} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [x(t)]^n dt, \tag{23}$$

т. е.

$$\overline{x^n} = Mx^n. \tag{24}$$

5. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ [9], [10], [11]

Стационарная случайная функция считается полностью заданной, если известны все ее n-мерные функции распределения. Однако экспериментальное определение этих функций, равно как и расчеты, на них основанные, оказываются слишком сложными и громоздкими. Поэтому естественно стремление ограничиться при изучении стационарных случайных процессов не всеми n-мерными функциями распределения, а простейшими, какими являются две первые из них, а именно среднее значение или математическое ожидание функции $x(t)$

$$Mx(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x, t)\, dx, \tag{25}$$

и математическое ожидание для функции $x(t)\; x(t+\tau)$

$$M\{x(t)\, x(t+\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\, x_2(t+\tau)\, w(x_1,\ t;\ x_2,\ t+\tau)\, dx_1 dx_2. \tag{26}$$

Если процесс стационарен, то плотность распределения $w(x, t)$ не зависит от времени, и мы можем написать:

$$Mx = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x)\, dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt = \text{const} = \overline{x}. \tag{27}$$

Двухмерная плотность вероятности $w(x_1,\ t;\ x_2,\ t+\tau)$ в случае стационарности процесса зависит лишь от разности $t+\tau-t=\tau$, и тогда

$$M\{x(t+\tau)\, x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t+\tau)\, x_2(t)\, w(x_1,\ x_2;\ \tau)\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t+\tau)\, x(t)\, dt. \tag{28}$$

Функция (28) называется корреляционной функцией. Будем ее обозначать через $R(\tau)$. Итак,

$$R(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1(t+\tau)\, x_2(t)\, w(x_1,\ x_2;\ \tau)\, dx_1,\ dx_2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} x(t+\tau)\, x(t)\, dt = \overline{x(t+\tau)\, x(t)}. \tag{29}$$

В дальнейшем будут рассматриваться лишь те свойства стационарных случайных функций, которые определяются одной постоянной (27) и одной функцией (29) одного переменного τ.

Относительно формулы (29) необходимо сделать некоторые замечания.

Первая строка этой формулы приравнивается второй строке согласно эргодической теореме.

Знак предела означает следующее: при достаточно большом T вероятность того, что погрешность определения функции интегралом во второй строке выражения (29) будет больше данной сколь угодно малой величины, — бесконечно мала. Выражение (29) относится лишь к случайным функциям со средним значением, равным нулю. Однако при корреляционном анализе этим выражением пользуются и в более общем случае.

Исходя из того, что при такого рода рассмотрении все остальные плотности распределения нас не интересуют, следует несколько изменить определение стационарности, данное выше, и считать, что *процесс является стационарным, если среднее значение характеризующих его случайных функций является постоянной величиной, а их корреляционная функция зависит лишь от величины промежутка времени τ между рассматриваемыми значениями этих функций.*

Согласно этому определению в стационарности случайного процесса можно убедиться следующим образом.

Предположим, что мы располагаем рядом осциллограмм случайного процесса (см. фиг. 1). Если найденные в результате обработки осциллограммы плотности распределения вероятности $w(x,\ t)$; $w(x_i,\ x_k;\ t,\ t+\tau)$ оказываются одними и теми же для любого момента времени t и любого фиксированного τ, то процесс является стационарным, если же плотности распределения зависят от момента времени t, для которого они определяются, то процесс является нестационарным.

Поясним физический смысл понятия корреляционной функции.

Как мы видели, корреляционная функция определяет вероятность того, что если случайная функция $x(t)$ в момент t имеет значение x_1, то в момент $t+\tau$ она имеет значение x_2, т. е. характеризует взаимную связь между $x(t)$ и $x(t+\tau)$.

Предположим, например, что случайная функция $x(t)$ со средним значением, равным нулю, есть выход следящей системы. Ясно, что значение $x(t+\tau)$ должно зависеть от значения $x(t)$ в предшествующий момент времени, так как можно считать, что значение $x(t+\tau)$ имеет

составляющую, зависящую как от начального значения x при t, так и от параметров системы.

Таким образом, если τ мало по сравнению с постоянными времени системы, то $x(t+\tau)$ мало отличается от $x(t)$, взаимная связь между значениями $x(t+\tau)$ и $x(t)$ велика и $R(\tau)$ близка к единице. Другими словами, при очень малых τ вероятность того, что значение функции $x(t+\tau)$ мало отличается от значения $x(t)$, близка к единице, т. е. близка к достоверности. По мере увеличения τ составляющая $x(t)$, определяемая начальным значением $x(t)$, при $t=0$ затухает, связь между величинами $x(t)$ и $x(t+\tau)$ ослабевает, они делаются взаимно независимыми, и функция $R(\tau)$ стремится к нулю. Другими словами, при достаточно больших τ вероятность того, что величина $x(t+\tau)$ будет мало отличаться от величины $x(t)$, практически равна нулю.

Укажем некоторые свойства корреляционной функции.

1) Корреляционная функция $R(\tau)$ случайной функции с равным нулю средним значением при достаточно больших τ стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{\tau\to\infty} R(\tau)=R(\infty)=0. \tag{30}$$

Это непосредственно следует из приведенных выше рассуждений.

2) Начальное значение $R(0)$ корреляционной функции $R(\tau)$ равно среднему значению квадрата случайной функции $x(t)$ и поэтому существенно положительно, т. е.

$$R(0)=\lim_{\tau\to 0} R(\tau)=\overline{x^2}>0. \tag{31}$$

Действительно, согласно определению

$$R(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\,x(t)\,dt=\overline{x^2}.$$

3) Корреляционная функция $R(\tau)$ есть четная функция от τ, т. е.

$$R(\tau)=R(-\tau). \tag{32}$$

Действительно,

$$R(\tau)=\overline{x(t+\tau)\,x(t)}=\overline{x(t)\,x(t-\tau)}=R(-\tau).$$

4) Значение корреляционной функции $R(\tau)$ при любом τ не может превышать ее начального значения $R(0)$, т. е.

$$R(0)\geqslant|R(\tau)|. \tag{33}$$

Действительно, мы всегда имеем право написать неравенство

$$[x(t)\pm x(t+\tau)]^2\geqslant 0$$

или

$$x^2(t)+x^2(t+\tau)\geqslant\pm 2x(t)\,x(t+\tau).$$

Беря среднее по времени от обеих частей этого неравенства и учитывая формулу (31), получим формулу (33).

Заметим, что неравенство (33) непосредственно следует из рассмотренного выше смысла функции $R(\tau)$.

Необходимо подчеркнуть, что выражением (29) формально можно пользоваться не только применительно к стационарным случайным функциям, но и применительно к обычным периодическим функциям.

В виде примера найдем корреляционную функцию для случая, когда

$$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi),$$

понимая при этом под термином „корреляционная функция“ просто результат применения к функции $x(t)$ операции, выражаемой интегралом (29).

Имеем

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a\sin(\omega t + \varphi)\,a\sin(\omega t + \omega\tau + \varphi)\,dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{a^2}{2}\left[\cos\omega\tau - \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\varphi)\right]dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left\{\cos\omega\tau - \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left[\frac{\sin(2\omega T + \omega\tau + 2\varphi) + \sin(2\omega T - \omega\tau - 2\varphi)}{2\omega}\right]\right\}$$

или

$$R(\tau) = \frac{a^2}{2}\cos\omega\tau. \tag{34}$$

Мы видим, что функция $R(\tau)$ имеет тот же период, что и функция $x(t)$, но в отличие от нее является четной и не зависящей от фазы φ.

Точно так же легко показать, что для функции

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\sin(\omega_k t + \varphi_k) \tag{35}$$

корреляционная функция $R(\tau)$ имеет вид

$$R(\tau) = a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{2}\cos\omega_k\tau. \tag{36}$$

Заметим, что при корреляционном анализе случайных процессов часто пользуются понятием нормированной корреляционной функции $\rho(\tau)$, определяемой равенством

$$\rho(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)}. \tag{37}$$

Очевидно, что

$$\rho(0) = 1. \tag{38}$$

Рассмотрим несколько типовых примеров корреляционных функций.

1) Белый шум. Случайный процесс $x(t)$, который характеризуется тем, что в нем отсутствует какая-либо взаимная связь между

предыдущими и последующими значениями $x(t)$, называется абсолютно случайным процессом или белым шумом. Очевидно, что в этом случае корреляционная функция равна нулю при всех значениях τ, кроме $\tau=0$, и ее можно представить в виде дельта-функции (фиг. 5а) или практически в виде импульса достаточно малой ширины, площадь которого равна единице.

2) Случайная функция $x(t)$ содержит постоянную составляющую a_0. В этом случае корреляционная функция также содержит постоянную составляющую, равную квадрату постоянной составляющей (фиг. 5б).

3) Случайная функция содержит периодическую составляющую. В этом случае корреляционная функция также содержит периодическую составляющую, имеющую тот же период (фиг. 5в).

4) Корреляционная функция имеет вид

$$\rho(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau. \tag{39}$$

На фиг. 5г приведены корреляционные функции уравнения (39) для различных α и одного и того же значения β. При достаточно больших α вид корреляционной функции приближается к случаю, графически изображенному на фиг. 5а, а при достаточно малых α — к случаю, когда изучаемый процесс представляет собой периодическую функцию.

5) Определение корреляционной функции из экспериментальных данных. Корреляционная функция $R(\tau)$ может быть получена при помощи обработки записи случайной функции $x(t)$ следующим образом. Отбросим в формуле (29) переход к пределу, выбрав промежуток времени T достаточно большим, для того чтобы можно было приближенно написать

$$R(\tau)\approx\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t+\tau)\,x(t)\,dt. \tag{40}$$

Разделим теперь промежуток времени T на N весьма малых интервалов Δ, т. е. положим, что (фиг. 6)

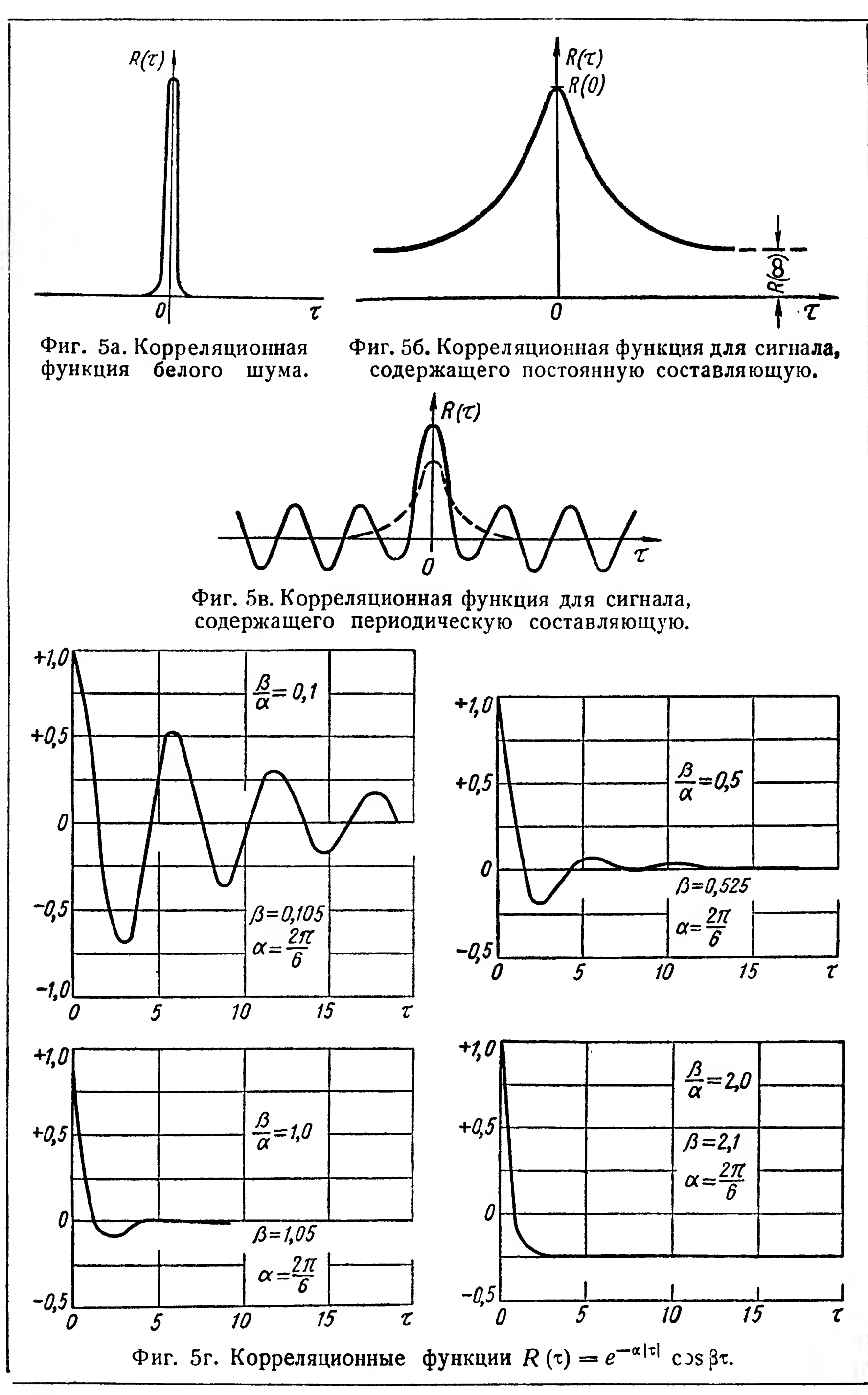
$$T=N\Delta, \tag{41}$$

и будем придавать t и τ дискретные значения, кратные Δ, т. е. положим, что

$$\left.\begin{aligned} t&=\nu\Delta=0,1,\ldots;\\ \tau&=\mu\Delta=1,2,\ldots \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Очевидно, что при сделанных допущениях интеграл в формуле (40) можно заменить знаком суммы и написать

$$R(\mu\Delta)\approx\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N}x(\nu\Delta)\,x\,[(\nu+\mu)\,\Delta] \tag{43}$$



Фиг. 5а. Корреляционная функция белого шума.

Фиг. 5б. Корреляционная функция для сигнала, содержащего постоянную составляющую.

Фиг. 5в. Корреляционная функция для сигнала, содержащего периодическую составляющую.

Фиг. 5г. Корреляционные функции $R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$.

или, если ввести обозначения

$$\left.\begin{aligned} R(\mu\Delta) &= R(\mu); \\ x(\nu\Delta) &= x_\nu; \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

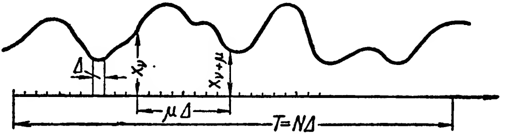
то

$$\left.\begin{aligned} x[(\nu+\mu)\Delta] &= x_{\nu+\mu}, \\ R_\mu &= \frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N} x_{\nu+\mu}x_\nu. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Если теперь ограничиться рассмотрением лишь положительного промежутка времени T и принять во внимание, что при $\nu \geqslant N - \mu$ $x_{\nu+\mu} = 0$, то окончательно получим

$$R(\mu) \approx \frac{1}{N-\mu}\sum_{\nu=1}^{N-\mu} x_\nu x_{\nu+\mu}; \quad \mu \geqslant 0. \tag{46}$$

Формула (46) показывает, каким образом может быть вычислена корреляционная функция по экспериментальной кривой $x(t)$ при помощи измерения ординат этой кривой, расположенных друг от друга на расстоянии Δ в пределах рассматриваемого интервала T.



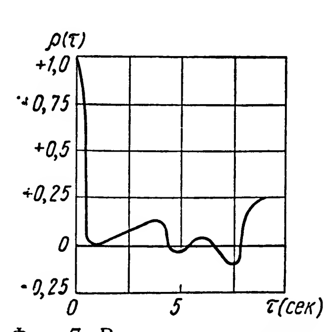
Фиг. 6. Определение корреляционной функции из экспериментальных данных:

$$R(\mu) \approx \frac{1}{N-\mu}\sum_{\nu=1}^{N-\mu} x_\nu x_{\nu+\mu}; \ \mu = 0, 1, 2.$$

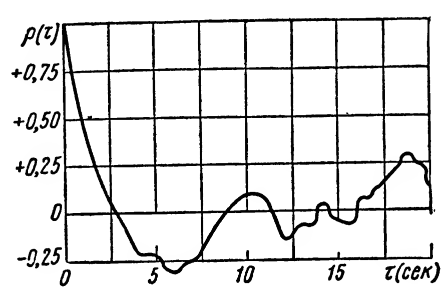
Заметим, что на практике приходится ограничиваться сравнительно небольшими значениями T, что обусловливает существенно приближенный характер формулы (40). Кроме того, коррелограммы, т. е. графики функций $R(\tau)$, полученные в результате обработки экспериментальных кривых, представляют собой обычно далеко не плавные кривые в отличие от коррелограмм, соответствующих идеальным случаям, рассмотренным выше. Поэтому интерпретация коррелограмм должна производиться осторожно, чтобы не делать необоснованных заключений на основании их вида.

Для того чтобы пояснить это, рассмотрим коррелограмму на фиг. 7. Она является корреляционной функцией белого шума, полученной на основании определения 300 точек кривой $x(t)$. Если бы было взято значительно большее число точек, то коррелограмма должна была бы иметь вид дельта-функции, изображенной на фиг. 5а. Таким образом, фиг. 7 может служить иллюстрацией возможных ошибок в определении $R(\tau)$, связанных с недостаточно большим значением T.

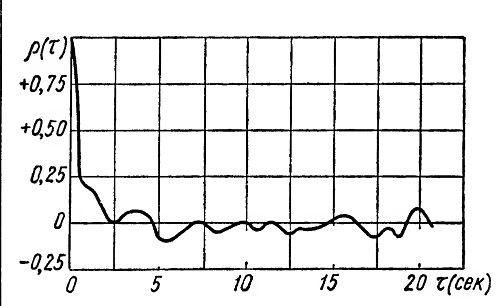
Наличие в исследуемом сигнале $x(t)$ составляющей в виде белого шума обычно затрудняет выявление скрытых периодичностей и составляющих, имеющих корреляционные функции, например, вида (39). Для иллюстрации на фиг. 8 изображена нормированная корреляционная функция, имеющая явно выраженную составляющую вида (39).



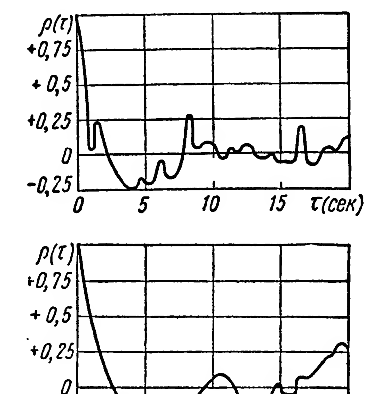
Фиг. 7. Влияние конечности интервала T на вид корреляционной функции $R(\tau)$.



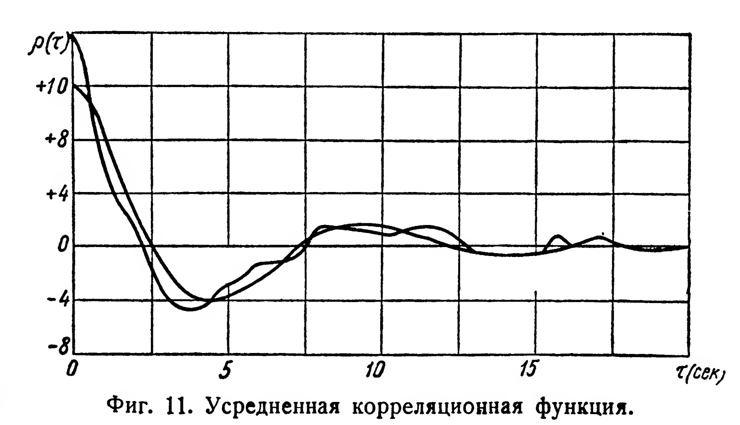
Фиг. 8. Нормированная корреляционная функция с явно выраженной составляющей вида $e^{-\alpha(\tau)} \cos \beta\tau$.



Фиг. 9. Эффект наложения белого шума на корреляционную функцию, показанную на фиг. 8.



Фиг. 10. Нормированные корреляционные функции сигнала ошибки следящей системы.



Фиг. 11. Усредненная корреляционная функция.

На фиг. 9 изображена корреляционная функция, соответствующая той же случайной функции $x(t)$, что и на фиг. 8, но с наложенной на нее составляющей в виде белого шума.

На фиг. 10 изображены две коррелограммы, полученные в результате обработки сигнала ошибки следящей системы при различных сигналах на входе. Обе они обнаруживают наличие затухающей периодической составляющей с периодом порядка 1 сек., соответствующим собственному периоду колебаний следящей системы. На фиг. 11 приведена усредненная коррелограмма, полученная в результате усреднения ординат 10 коррелограмм вида, графически изображенного на фиг. 10. Как мы видим, указанный прием позволил выделить затухающую периодическую составляющую в гораздо более явном виде, чем на фиг. 10.

6. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ

Спектральная плотность $S(\omega)$ имеет, так же как и корреляционная функция, один и тот же вид для любой из случайных функций $x(t)$, характеризующих рассматриваемый стационарный случайный процесс.

Спектральная плотность функции $x(t)$ может быть определена следующим образом.

Пусть

$$x_T(t) = x(t)$$

при $-T \leqslant t \leqslant T$, $x(t) = 0$ при всех остальных значениях t.

Обозначим через $X_T(j\omega)$ преобразование Фурье для функции $x_T(t)$, т. е.

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-T}^{T} x(t)\, e^{-j\omega t} dt. \qquad (47)$$

и введем в рассмотрение функцию

$$S_T(\omega) = \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2. \qquad (48)$$

Покажем, что

$$\overline{x_T^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_T(\omega)\, d\omega. \qquad (49)$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j\omega)|^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(-j\omega)\, d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)\, e^{-j\omega t} dt,$$

или, меняя порядок интегрирования,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} X_T(-j\omega)\, e^{-j\omega t} d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t)\, dt.$$

Итак,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t)\,dt = \int_{-T}^{T} x_T^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j\omega)|^2\,d\omega. \quad (50)$$

Разделив равенство (51) на $2T$, получим, принимая во внимание формулу (49),

$$\overline{x_T^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_T(\omega)\,d\omega.$$

Физический смысл функции $S_T(\omega)$ можно пояснить следующим образом.

Если предположить, что $x_T(t)$ есть ток, то выражение (51) можно рассматривать как энергию, которую он рассеивает в сопротивлении 1 *ом*, а выражение

$$P_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_T^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_T(\omega)\,d\omega \quad (51)$$

как среднюю мощность этого тока для промежутка времени $2T$.

Из выражения (51) ясно, что функция $S_T(\omega)$ в рассматриваемом случае имеет размерность энергии, вследствие чего она иногда называется энергетическим частотным спектром функции $x_T(t)$.

Итак функция $S_T(\omega)$, являющаяся случайной величиной, определяет среднее по времени значение квадрата величины $x_T(t)$.

Найдем теперь среднее для $S_T(\omega)$ по совокупности функций $x_T(t)$. В результате получим

$$S(\omega) = M[S_T(\omega)]. \quad (52)$$

Функция $S(\omega)$ называется **спектральной плотностью** случайного процесса $x(t)$. Аналогично (49), на основании (50), пользуясь определением (52), можно написать

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,d\omega. \quad (53)$$

7. СВЯЗЬ МЕЖДУ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

В теории стационарных случайных процессов корреляционная функция и спектральная плотность играют примерно такую же роль, как соответственно импульсная переходная и передаточная функции в теории обычных переходных процессов. Эта аналогия вытекает из того, что корреляционная функция и спектральная плотность представляют друг

для друга, так же как переходная и передаточная функции, преобразования Фурье.

Итак, можно показать, что [1]

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

или

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\cos\tau\omega d\omega \qquad (54)$$

и

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau$$

или

$$S(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} R(\tau)\cos\omega\tau d\tau. \qquad (55)$$

Действительно, введем в рассмотрение функцию

$$R_T(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_T(t+\tau)x_T(t)\,dt, \qquad (56)$$

где попрежнему $x_T(t) = x(t)$ при $-T \leqslant t \leqslant T$, $x_T(t) = 0$ при остальных t.

Преобразование Фурье для функции $R_T(\tau)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_T(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t+\tau)\, x_T(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)\, e^{j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t+\tau)\, e^{-j\omega(t+\tau)}\, d\tau. \qquad (57)$$

---

[1] Этот результат был сформулирован А. Я. Хинчиным [4] в виде следующей теоремы, лежащей в основе теории стационарных случайных процессов. Для того чтобы функция $R(\tau)$ представляла корреляционную функцию некоторого непрерывного стационарного стохастического процесса, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\tau\omega dF(\omega). \qquad (A)$$

Если предположить, что функция $F(\omega)$ является диференцируемой при всех ω, т. е. что

$$dF(\omega) = S(\omega)\, d\omega,$$

то мы получим формулу (40) как частный случай формулы (А).

Произведя в формуле (57) замену переменной $t+\tau=\lambda$ и имея в виду, что

$$X_T^*(j\omega)=X_T(-j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)\,e^{j\omega t}\,dt, \tag{58}$$

получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_T(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau=\frac{1}{2T}X_T(j\omega)\,X_T^*(j\omega). \tag{59}$$

Учитывая, что функция $R_T(\tau)$ четна, найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_T(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau=2\int_{0}^{\infty} R_T(\tau)\cos\omega\tau d\tau, \tag{60}$$

и, следовательно, на основании формулы (59) можно написать

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_T(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau=2\int_{0}^{\infty} R_T(\tau)\cos\omega\tau d\tau=\frac{1}{2T}\,|X_T(j\omega)|^2$$

или, усредняя по совокупности функций $X_T(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau=\frac{1}{2T}M\,|X_T(j\omega)|^2, \tag{61}$$

откуда, принимая во внимание равенства (52) и (48), получим уравнение (55).

Соотношения (54) и (55) между корреляционной функцией и спектральной плотностью имеют исключительно большое значение для теории стационарных случайных процессов.

Значение этих соотношений прежде всего заключается в том, что они позволяют определить функцию спектральной плотности $S(\omega)$ по заданной аналитически или в виде графика корреляционной функции $R(\tau)$ или обратно корреляционную функцию $R(\tau)$ по заданной функции спектральной плотности $S(\omega)$.

Так, например, если

$$R(\tau)=e^{-\alpha|\tau|},$$

то

$$S(\omega)=\frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2};$$

если

$$R(\tau)=e^{-\alpha^2\tau^2},$$

то

$$S(\omega)=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}.$$

Кроме того, значение соотношений (54) и (55) заключается в том, что они позволяют использовать при изучении свойств связи между функциями $R(\tau)$ и $S(\omega)$ все известные свойства преобразования Фурье.

Пользуясь соотношением (55), можно получить выражение для спектральной плотности также и в том случае, когда функция $x(t)$ помимо случайной составляющей содержит периодические члены или когда среднее значение этой функции отличается от нуля. Очевидно, что если функция $x(t)$ содержит периодическую составляющую, имеющую частоту ω_c, то

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega_c)|^2 = \infty,$$

и спектральная плотность $S(\omega)$ имеет в точке $\omega = \omega_c$ разрыв непрерывности. Если же $\bar{x} \neq 0$, то функция $S(\omega)$ будет иметь разрыв непрерывности в начале координат, т. е. при $\omega = 0$.

Математическую трудность, связанную с получением выражения для $S(\omega)$, в указанных случаях можно обойти при помощи введения понятия о дельта-функции $\delta(\omega)$.

Имея в виду, что

$$\int_0^\infty \cos \omega\tau d\tau = \frac{1}{2} \delta(\omega)$$

и

$$\int_0^\infty \cos \omega_0\tau \cos \omega\tau d\tau = \frac{1}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)], \quad (62)$$

найдем, например, выражение для спектральной плотности в предположении, что

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (63)$$

Для корреляционной функции $R(\tau)$ в этом случае получим

$$R(\tau) = a_0^2 + \frac{a_1^2}{2} \cos \omega_0\tau. \quad (64)$$

Подставляя (64) в (55) и учитывая равенство (62), найдем

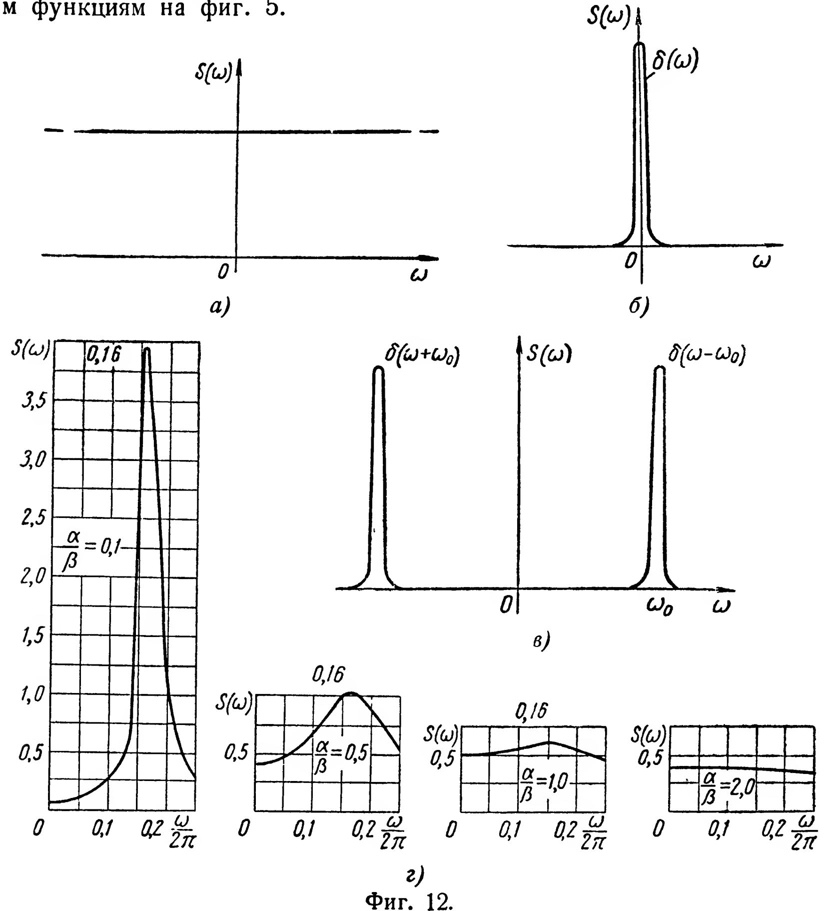
$$S(\omega) = a_0^2\delta(\omega) + \frac{a_1^2}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (65)$$

Точно так же легко видеть, что если функция $x(t)$ представляет некоторый тригонометрический ряд вида (35), то спектральная плотность будет являться разрывной функцией, состоящей из отдельных линий:

$$S(\omega) = a_0^2\delta(\omega) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (66)$$

Таким образом, в наиболее общем случае функция спектральной плотности состоит из непрерывной части и некоторого числа пиков при отдельных частотах.

Рассмотрим спектральные плотности, соответствующие корреляционным функциям на фиг. 5.



Фиг. 12.

а — спектральная плотность белого шума; *б* — спектральная плотность, соответствующая постоянной составляющей сигнала; *в* — спектральная плотность периодической составляющей сигнала; *г* — спектральные плотности, соответствующие корреляционным функциям.

1) Белый шум. В случае белого шума

$$R(\tau) = \delta(\tau)$$

и

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau = 1. \qquad (67)$$

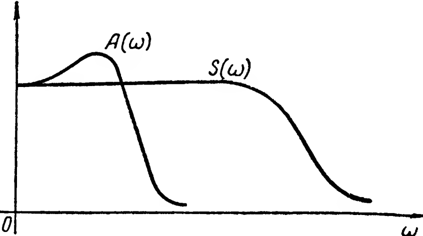
Таким образом, спектральная плотность белого шума характеризуется равномерным распределением энергии по всему спектру частот от 0 до ∞ (фиг. 12, *а*). Очевидно, что белый шум является математической абстракцией, неосуществимой в чистом виде в действительности хотя

бы потому, что он требует источника с бесконечно большой энергией. Однако понятие белого шума в ряде случаев оказывается полезным. Действительно, если мы рассматриваем, например, эффект, производимый сигналом, имеющим равномерное распределение энергии в интервале частот, пропускаемых системой (фиг. 13), то вид спектральной плотности вне этого интервала не имеет значения и, следовательно, мы можем считать, что случайная функция обладает свойствами белого шума, если ее спектральная плотность сохраняет приблизительно постоянное значение не на бесконечном, а на конечном интервале частот, представляющем интерес.

2) Случайная функция содержит постоянную составляющую. В этом случае спектральная плотность характеризуется наличием дельта-функции в точке $\omega = 0$ (фиг. 12, *б*).

3) Случайная функция содержит периодическую составляющую. Спектральная плотность в данном случае характеризуется наличием двух дельта-функций, расположенных в точках $\omega = \pm \frac{2\pi}{T}$, где T — период составляющей (фиг. 12, *в*).

4) Случайная функция характеризуется корреляционной функцией вида (39).



Фиг. 13. Сигнал с равномерным распределением энергии в интервале частот, пропускаемых системой:
A (ω) — амплитудная частотная характеристика; S (ω) — спектральная плотность сигнала.

Спектральная плотность в этом случае определяется выражением

$$S(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{(\omega + \beta)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{(\omega - \beta)^2 + \alpha^2}. \qquad (68)$$

На фиг. 12, *г* приведены кривые спектральной плотности, вычисленные по формуле (68) для тех же значений α и β, для которых построены корреляционные функции на фиг. 5, *г*.

8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Непосредственный способ определения спектральной плотности в виде кривой состоит в том, что случайная функция, имеющаяся, например, в виде осциллограммы для промежутка времени T, рассматривается как периодическая функция с периодом T. Если такого рода периодическую функцию подвергнуть обычным приемам гармонического анализа и определить коэфициенты a_k, b_k ее разложения в ряд Фурье, то ордината спектральной плотности при частоте ω_k, кратной частоте $\frac{2\pi}{T}$, может быть найдена при помощи приближенного соотношения

$$S(\omega_k) \approx \frac{1}{T}\left(a_k^2 + b_k^2\right). \qquad (69)$$

Заметим, что наинизшее значение угловой частоты, при котором может быть определена ордината кривой $S(\omega)$ с помощью этого метода, равно $\frac{2\pi}{T}$ и, таким образом, зависит от промежутка времени T, на котором произведена запись случайного процесса.

Необходимо, однако, указать, что для решения задач синтеза, рассматриваемых в следующей главе, желательно задание спектральной плотности в виде дробно-рациональной функции от ω, чего изложенный выше метод не дает.

Один из способов получения спектральной плотности в виде дробно-рациональной функции от ω состоит в том, что график корреляционной функции, полученный в результате обработки осциллограммы путем подбора, апроксимируется в виде суммы составляющих вида (39), для которых затем находится спектральная плотность при помощи подстановки полученного выражения для корреляционной функции в формулу (55).

9. ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ ПО ВЕЛИЧИНЕ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ

Перейдем теперь к изложению способа применения теории случайных процессов, к анализу динамической точности работы следящих систем, находящихся под влиянием стационарных случайных воздействий.

Нами уже указывалось, что работа системы в указанных условиях не может быть полно охарактеризована при помощи обычного понятия качества, в виду того что в этом случае такие понятия, как, например, „установившееся состояние“, „время переходного процесса“ и т. д., теряют смысл.

При наличии случайных воздействий ошибка $\varepsilon(t)$, т. е. разность

$$\varepsilon(t) = m(t) - x(t) \tag{70}$$

между полезным сигналом на входе $m(t)$ и выходом $x(t)$, также является случайной функцией. Поэтому речь может идти об определении не мгновенных, а лишь некоторых средних значений этой величины.

Таким средним значением обычно служит среднее квадратическое значение ошибки $\varepsilon(t)$, т. е. квадратный корень из величины

$$\overline{\varepsilon^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varepsilon^2(t)\, dt, \tag{71}$$

которой пользуются как оценкой, определяющей динамическую точность работы следящей системы при наличии стационарных случайных воздействий.

С точки зрения этой оценки или критерия, нежелательность ошибки пропорциональна квадрату ее величины независимо от момента времени, в который происходит ошибка. Вообще говоря, такого рода критерий вполне логичен в тех случаях, когда нежелательность ошибки возрастает вместе с ее величиной. Однако возможны случаи, когда все достаточно

большие ошибки в одинаковой мере нежелательны. Тогда следовало бы применить уже другой критерий, учитывающий это обстоятельство.

Кроме того, оценка точности по этому критерию производится в зависимости от среднего, а не мгновенного значения ошибки, что также не всегда является достаточным.

Наконец, применение критерия средней квадратической ошибки может оказаться нерациональным в тех случаях, когда в некоторые моменты времени величина ошибки может быть сравнительно большой, а в некоторые моменты времени необходимо, чтобы она была, наоборот, минимальной.

Таким образом, указанный критерий, впрочем, как и всякий другой косвенный критерий, конечно, не является универсальным.

В предыдущей главе было показано, что среднее значение квадрата стационарной случайной переменной $x(t)$ может быть весьма просто найдено, если известна корреляционная функция $R(\tau)$ или спектральная плотность $S(\omega)$, соответствующие $x(t)$.

Действительно,

$$\overline{x^2} = R_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega. \tag{72}$$

Если ошибка $\varepsilon(t)$ является стационарной случайной функцией, то точно так же

$$\overline{\varepsilon^2} = R_\varepsilon(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega)\, d\omega, \tag{73}$$

где через $R_\varepsilon(\tau)$ и $S_\varepsilon(\omega)$ обозначены соответственно корреляционная функция и спектральная плотность ошибки $\varepsilon(t)$.

Таким образом, для того чтобы вычислить среднюю квадратическую или стандартную ошибку $c = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}}$, необходимо предварительно найти либо $R_\varepsilon(\tau)$, либо $S_\varepsilon(\omega)$. Поэтому задача дальнейшего изложения состоит в том, чтобы:

1) показать, каким образом может быть вычислена корреляционная функция или спектральная плотность величины на выходе системы, если известна корреляционная функция или спектральная плотность сигнала на ее входе;

2) изложить способ вычисления интеграла (73) в том случае, когда функция $S_\varepsilon(\omega)$ является дробно-рациональной функцией от ω.

10. СВЯЗЬ МЕЖДУ КОРРЕЛЯЦИОННЫМИ ФУНКЦИЯМИ И СПЕКТРАЛЬНЫМИ ПЛОТНОСТЯМИ ВЕЛИЧИН НА ВХОДЕ И НА ВЫХОДЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим линейную динамическую систему (фиг. 14), имеющую импульсную переходную функцию $k(t)$ и передаточную функцию $\Phi(s)$,

Предположим, что на вход этой системы подан стационарный случайный сигнал $m(t)$, имеющий корреляционную функцию $R_m(\tau)$ и спектральную плотность $S_m(\omega)$.

Найдем корреляционную функцию $R_x(\tau)$ и спектральную плотность $S_x(\omega)$ величины $x(t)$ на выходе.

Имеем

$$R_x(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t+\tau)\, x(t)\, dt, \tag{74}$$

но (см. главу VI)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t-\lambda)\, k(\lambda)\, d\lambda. \tag{75}$$

Фиг. 14. Линейная динамическая система, в которой величиной на выходе является ошибка $\varepsilon(t)$.

Подставляя формулу (75) в (74), получим

$$R_x(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} m(t-\lambda)\, k(\lambda)\, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} m(t+\tau-\eta)\, k(\eta)\, d\eta \right\}. \tag{76}$$

Меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda k(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} d\eta k(\eta) \left\{ \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} m(t+\tau-\eta)\, m(t-\lambda)\, dt \right\}, \tag{77}$$

но

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} m(t+\tau-\eta)\, m(t-\lambda)\, dt = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} m(t+\tau+\lambda-\eta)\, m(t)\, dt =$$

$$= R_m(\tau+\lambda-\eta),$$

поэтому вместо уравнения (77) можно написать

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda)\, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} R_m(t+\lambda-\eta)\, k(\eta)\, d\eta. \tag{78}$$

Формула (78) представляет собой искомое соотношение между корреляционными функциями входного $m(t)$ и выходного $x(t)$ сигналов.

Найдем теперь соотношение между спектральными плотностями входного и выходного сигналов.

Имеем

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau. \tag{79}$$

Подставляя формулу (78) в (79), найдем

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda)\, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} R_m(t+\lambda-\eta)\, k(\eta)\, d\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda)\, e^{j\omega\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta)\, e^{-j\omega\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} R_m(\tau+\lambda-\eta)\, e^{-j\omega(\tau+\lambda-\eta)} d\tau =$$

$$= \Phi(j\omega)\, \Phi(-j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} R_m(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau = |\Phi(j\omega)|^2 S_m(\omega). \tag{80}$$

11. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ОШИБКИ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ

Будем теперь рассматривать в качестве величины на выходе ошибку $\varepsilon(t)$ (фиг. 15), тогда в выражении (80) нужно заменить $S_x(\omega)$ через спектральную плотность ошибки $S_\varepsilon(\omega)$, а $\Phi(j\omega)$ — через передаточную функцию ошибки $\Phi_\varepsilon(j\omega)$. В результате получим

$$S_\varepsilon(\omega) = |\Phi_\varepsilon(j\omega)|^2 S_m(\omega). \tag{81}$$

Выражение (81) определяет спектральную плотность ошибки $S_\varepsilon(\omega)$ через передаточную функцию ошибки $\Phi_\varepsilon(j\omega)$ и спектральную плотность $S_m(\omega)$ величины на входе. Если следящая система находится под влиянием не только управляющего $m(t)$, но и возмущающего воздействия $n(t)$, то спектральная плотность ошибки состоит из двух составляющих, одна из которых определяется равенством (81), а другая может быть представлена в следующем виде:

$$S_\varepsilon(\omega) = |Y(j\omega)|^2 S_n(\omega), \tag{82}$$

где $Y(j\omega)$ — передаточная функция (см. главу VI) по отношению к возмущающему воздействию.

Фиг. 15. Линейная динамическая система, в которой величиной на выходе является ошибка $\varepsilon(t)$.

Итак, общее выражение для спектральной плотности ошибки[1]

$$S_\varepsilon(\omega) = |\Phi_\varepsilon(j\omega)|^2 S_m(\omega) + |Y(j\omega)|^2 S_n(\omega). \tag{83}$$

В частном, но часто встречающемся случае, когда точки приложения обоих воздействий $m(t)$ и $n(t)$ совпадают,

$$Y(j\omega) = \Phi(j\omega),$$

и можно написать

$$S_\varepsilon(\omega) = |\Phi_\varepsilon(j\omega)|^2 S_m(\omega) + |\Phi(j\omega)|^2 S_n(\omega). \tag{84}$$

Учитывая, что (см. главу VI)

$$\Phi_\varepsilon(j\omega) = 1 - \Phi(j\omega) = \frac{1}{1 + KW(j\omega)}$$

и

$$\Phi(j\omega) = \frac{KW(j\omega)}{1 + KW(j\omega)},$$

получим

$$S_\varepsilon(\omega) = \left|\frac{1}{1 + KW(j\omega)}\right|^2 S_m(\omega) + \left|\frac{KW(j\omega)}{1 + KW(j\omega)^2}\right|^2 S_n(\omega). \tag{85}$$

---

[1] Здесь для простоты предполагается, что взаимная корреляция между полезным сигналом $m(t)$ и помехой $n(t)$ отсутствует. В более же общем случае, когда функции $m(t)$ и $n(t)$ являются взаимозависимыми, выражение для спектральной плотности ошибки $S_\varepsilon(\omega)$ имеет вид [9], [10]:

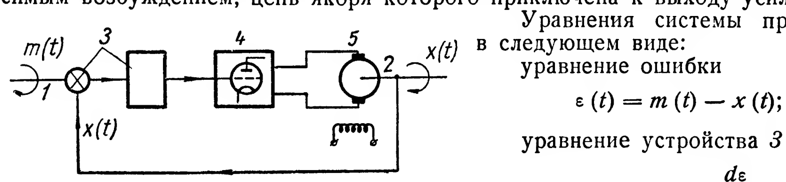
$$S_\varepsilon(\omega) = |\Phi_\varepsilon|^2 S_m(\omega) + |Y|^2 S_n(\omega) + \Phi^* Y S_{mn}(\omega) + \Phi Y^* S_{mn}(\omega).$$

Выражение (85) позволяет определить спектральную плотность ошибки $S_\varepsilon(\omega)$ по заданным спектральным плотностям $S_m(\omega)$, $S_n(\omega)$ и передаточной функции разомкнутой системы $KW(j\omega)$.

Подставляя выражение (85) в (73), получим следующую формулу для вычисления среднего значения квадрата ошибки:

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{1+KW(j\omega)}\right|^2 S_n(\omega)\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{KW(i\omega)}{1+KW(j\omega)}\right|^2 S_n(\omega)\,d\omega. \quad (86)$$

Пример. Рассмотрим простую следящую систему на фиг. 16. Она состоит из задающей оси *1*, следящей оси *2*, которая должна с возможно большей точностью воспроизводить все движения задающей оси; устройства *3*, измеряющего угол рассогласования или ошибку $\varepsilon(t)$ между положениями $m(t)$ и $x(t)$ обеих осей и скорость изменения $\frac{d\varepsilon}{dt}$ угла рассогласования, а также суммирующего оба сигнала; лампового усилителя *4* и двигателя *5* постоянного тока с независимым возбуждением, цепь якоря которого приключена к выходу усилителя.



Фиг. 16. Следящая система.

Уравнения системы представим в следующем виде:

уравнение ошибки

$$\varepsilon(t) = m(t) - x(t);$$

уравнение устройства *3*

$$e = n_0\varepsilon + n_1\frac{d\varepsilon}{dt};$$

уравнение усилителя

$$i_a = k_1 e;$$

уравнение двигателя

$$J\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} = k_2 i_a,$$

где e — напряжение на входе усилителя;
i_a — ток якоря;
k_1 — крутизна усилителя;
J — приведенный момент инерции;
b — коэфициент вязкого трения;
n_0, n_1, k_2 — постоянные коэфициенты.

Согласно этим уравнениям передаточная функция

$$KW(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{K}{s}\cdot\frac{(\tau_1 s+1)}{(T_2 s+1)},$$

где

$$\tau_1 \frac{n_1}{n_0};\ T_2 = \frac{J}{b};\ K = \frac{n_0 k\cdot k_2}{b}.$$

Передаточная функция $\Phi(s)$ замкнутой системы

$$\Phi(s) = \frac{K(\tau_1 s+1)}{s(T_2 s+1) + K(\tau_1 s+1)}. \quad (87)$$

Передаточная функция ошибки

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{s(T_? s+1)}{s(T_2 s+1) + K(\tau_1 s+1)}. \quad (88)$$

Сделаем одно замечание, которое понадобится нам в дальнейшем. Согласно определению передаточная функция

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{G(s)}. \tag{89}$$

Разделив обе части равенства (89) на s, получим

$$\frac{1}{s}\,\Phi_\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{sG(s)}. \tag{90}$$

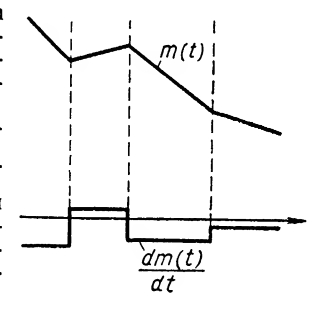
Но $sG(s)$ есть преобразование Лапласа для производной от $g(t)$. Поэтому, если величиной на входе системы регулирования считать не управляющее воздействие $g(t)$, а его производную $\frac{dg}{dt}$, то в качестве передаточной функции ошибки можно условно рассматривать выражение $\frac{\Phi_\varepsilon(s)}{s}$.

Предположим теперь, что на вход рассмотренной следящей системы поступает полезный сигнал $m(t)$ и помеха $n(t)$.

Согласно фиг. 17 сигнал изменяется с постоянной скоростью в течение некоторого промежутка времени, после чего скорость его изменения внезапно испытывает скачок и сохраняет другое постоянное значение в течение следующего интервала и т. д.

Если обозначить через a^2 среднее значение квадрата скорости, через $\frac{1}{\beta}$ — среднюю длину промежутков времени, в течение которых скорость остается неизменной, и предположить, что продолжительность промежутков подчиняется распределению Пуассона [7], [8], то спектральная плотность производной от полезного сигнала $m(t)$ будет иметь вид

$$S_{\dot{m}}(\omega) = \frac{2\beta a^2}{\omega^2 + \beta^2} \tag{91}$$



Фиг. 17. Типичный входной сигнал.

В качестве помехи возьмем чисто случайный процесс, имеющий так называемый белый спектр, т. е. имеющий спектральную плотность $S_n(\omega)$, сохраняющую постоянное значение, не зависящее от частоты:

$$S_n(\omega) = \gamma^2. \tag{92}$$

На основании формулы (86), рассматривая в качестве входной величины производную $\frac{dm}{dt}$ и учитывая, что спектральная плотность $S_m(\omega)$ определяется формулой (91) для спектральной плотности ошибки, получим

$$S_\varepsilon(\omega) = \left|\frac{T_2 j\omega + 1}{j\omega(T_2 j\omega + 1) + K(\tau_1 j\omega + 1)}\right|^2 \frac{2\beta a^2}{\omega^2 + \beta^2} + \left|\frac{K(\tau j\omega + 1)}{j\omega(T_2 j\omega + 1) + K(\tau j\omega + 1)}\right|^2 \gamma^2. \tag{93}$$

Таким образом, среднее значение квадрата ошибки может быть представлено в виде суммы двух составляющих:

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{\varepsilon_m^2} + \overline{\varepsilon_n^2}, \tag{94}$$

где

$$\overline{\varepsilon_m^2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sqrt{2\beta}\,a\,(T_2 j\omega + 1)}{j\omega\,(T_2 j\omega + 1) + K\,(\tau_1 j\omega + 1)}\right|^2 d\omega; \qquad (95)$$

$$\overline{\varepsilon_n^2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{K\,(\tau_1 j\omega + 1)}{j\omega\,(T_2 j\omega + 1) + K\,(\tau_1 j\omega + 1)}\right|^2 d\omega. \qquad (96)$$

Заметим, что подинтегральные выражения в интегралах (95) и (96) представляют собой квадрат модуля дробно-рациональной функции.

Каждый из интегралов (95) и (96) можно вычислить, например, определив корни знаменателя и разложив подинтегральное выражение на простейшие дроби.

Однако мы сейчас изложим другой практически более удобный способ вычисления $\overline{\varepsilon^2}$, не требующий вычисления корней и позволяющий получить в явном виде связь между параметрами, входящими в выражение для $S_\varepsilon(\omega)$, и величиной средней квадратической ошибки.

12. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ОШИБКИ

Выражение для спектральной плотности ошибки $S_\varepsilon(\omega)$ в случае передаточных функций и спектральных плотностей, заданных в виде дробно-рациональных функций, всегда можно представить в виде суммы членов, каждый из которых является абсолютным значением квадрата рациональной функции, имеющей полюсы, расположенные симметрично относительно мнимой оси в верхней полуплоскости. Это положение лежит в основе излагаемого ниже способа вычисления средней квадратической ошибки.

Предположим, что функция $S_\varepsilon(\omega)$ определяется формулой (83)[1]. Рассмотрим первый член в правой части выражения (83).

Если система устойчива, то все полюсы передаточной функции $\Phi_\varepsilon(j\omega)$ расположены в верхней полуплоскости. Это означает, что все полюсы функции $\Phi_\varepsilon(j\omega)$, т. е. значения ω, обращающие в нуль знаменатель функции $\Phi_\varepsilon(j\omega)$, получаемой из $\Phi_\varepsilon(s)$ путем замены переменной s через $(j\omega)$, расположены в верхней полуплоскости. Полюсы $|\Phi_\varepsilon(j\omega)|^2$ расположены симметрично относительно мнимой оси, так как это выражение является четной функцией от ω.

Перейдем теперь к спектральной плотности $S_m(\omega)$. Так как согласно предположению функция $S_m(\omega)$ является дробно-рациональной, то она всегда может быть представлена в виде произведения двух множителей $S_{11}(\omega)$ и $G_{11}(\omega)$, один из которых, скажем, $S_{11}(\omega)$, имеет нули и полюсы, совпадающие с нулями и полюсами $S_m(\omega)$, расположенными в верхней полуплоскости, а другой множитель $G_{11}(\omega)$ имеет нули и полюсы, совпадающие с нулями и полюсами $S_m(\omega)$, расположенными в нижней полуплоскости.

---

[1] Результат остается справедливым и в более общем случае, когда взаимные спектральные плотности $S_{mn}(\omega)$; $S_{nm}(\omega)$ не обращаются в нуль (см. [9], [10]).

Поскольку функция спектральной плотности вещественна при вещественных ω, то ее нули и полюсы должны быть симметрично расположены относительно вещественной оси. Кроме того, так как функция спектральной плотности является четной функцией от ω, то ее нули и полюсы должны быть симметрично расположены также и относительно мнимой оси. Поэтому можно написать

$$S_m(\omega) = S_{11}(\omega)\, G_{11}(\omega) = S_{11}(\omega)\, S_{11}^*(\omega) = |S_{11}(\omega)|^2, \tag{97}$$

и, следовательно,

$$|\Phi_\varepsilon(j\omega)|^2 S_m(\omega) = |\Phi_\varepsilon(j\omega)\, S_{11}(\omega)|^2,$$

причем, как это ясно из предыдущего, все полюсы выражения $\Phi_\varepsilon(j\omega) \times \times S_{11}(\omega)$ расположены в верхней полуплоскости симметрично относительно мнимой оси.

Аналогичные рассуждения можно применить и ко второму члену в выражении (83).

Итак,

$$S_\varepsilon(\omega) = |\Phi_\varepsilon(j\omega)\, S_{11}(\omega)|^2 + |Y(j\omega)\, S_{22}(\omega)|^2,$$

причем каждый из членов в правой части может быть представлен в виде квадрата модуля некоторой дробно-рациональной функции $\frac{G(\omega)}{F(\omega)}$, все полюсы которой расположены симметрично относительно мнимой оси.

Таким образом, ясно, что вычисление средней квадратической ошибки может быть сведено к вычислению интегралов вида

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(\omega)|^2}{|F(\omega)|^2}\, d\omega. \tag{98}$$

Выражение (98) удобно несколько преобразовать. Так как знаменатель в равенстве (98) есть четная функция от ω, то в его числителе необходимо учитывать лишь четные степени от ω, поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^{2k+1}}{|F(\omega)|^2}\, d\omega = 0; \ k = 1, 3, 5 \ldots \tag{99}$$

Кроме того,

$$|F(\omega)|^2 = F(\omega)\, F^*(\omega) = \frac{F(\omega)\, F(-\omega)}{(-1)^n}. \tag{100}$$

Учитывая формулы (99) и (100), умножив и разделив равенство (98) на j и вводя обозначения

$$F(\omega) = a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_n;$$

$$G_n(\omega) = j(-1)^n (b_0\omega^{2n-2} + b_1\omega^{2n-4} + \ldots + b_{n-1}) \tag{101}$$

вместо выражения (98), окончательно можем написать

$$J_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_n(\omega)}{F(\omega)\, F(-\omega)}\, d\omega. \tag{102}$$

Интеграл (102) может быть вычислен в явном виде без необходимости вычисления корней $F(\omega)$ для любого n. Не останавливаясь на общем методе вычисления интеграла (102), который изложен, например, в работе [9], укажем лишь, что в [9] (см. также [10]) имеется таблица, содержащая значения интеграла (102), выраженные в явном виде через коэфициенты a_0, a_1, ... и b_0, b_1, ... для всех значений n от $n=1$ до $n=7$.

Проиллюстрируем изложенный выше способ вычисления на примере. Перепишем интеграл (95) в следующем виде:

$$\overline{\varepsilon_m^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\beta a^2\left(T_2^2\omega^2+1\right)d\omega}{\left|-jT_2\omega^3-(1+K\tau_1+\beta T_2)\,\omega^2+(\beta K\tau_1+\beta+K)\,j\omega+K\beta\right|^2}. \quad (103)$$

Этот интеграл можно привести к виду (102), положив

$$F(\omega)=-jT_2\omega^3-(1+K\tau_1+\beta T_2)\,\omega^2+(\beta K\tau_1+\beta+K)\,j\omega+K\beta;$$

$$G_n(\omega)=j\left(T_2^2\omega^2+1\right)(-1)^3\,2\beta a^2. \quad (104)$$

Сравнивая формулу (104) со (101), получим

$$a_0=-jT_2;\ a_1=-(1+K\tau_1+\beta T_2);\ a_2=j(\beta K\tau_1+\beta+K);$$

$$a_3=K\beta;\ b_0=0;\ b_1=-jT_2^2 2\beta a^2;\ b_2=-j2\beta a^2. \quad (105)$$

Но согласно таблице, приведенной в [9], [10], значение интеграла J_3 выражается через коэфициенты a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2 следующим образом:

$$J_3=\frac{-a_2b_0+a_0b_1-\dfrac{a_0a_1b_2}{a_3}}{2a_0\,(a_0a_3-a_1a_2)}. \quad (106)$$

Подставляя формулу (105) в (106), найдем

$$\overline{\varepsilon_m^2}=\frac{T_2^3-\dfrac{T_2}{K\beta}(1+K\tau_1+\beta T_2)}{T_2\,(1+K\tau_1+\beta T_2)\,(\beta K\tau_1+\beta+K)-2T_2^2K\beta}.$$

Для вычисления составляющей $\overline{\varepsilon_n^2}$ перепишем интеграл (96) в виде

$$\overline{\varepsilon_n^2}=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^2jK^2\gamma^2\left(\tau_1^2\omega^2+1\right)d\omega}{\left[-T_2\omega^2+(K\tau_1+1)\,j\omega+K\right]\left[-T_2\omega^2-(KT_1+1)\,j\omega+K\right]}$$

или

$$\overline{\varepsilon_n^2}=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G_n(\omega)\,d\omega}{F(\omega)\,F(-\omega)}, \quad (107)$$

где

$$F(\omega)=a_0\omega^2+a_1\omega+a_0$$

и

$$G_n(\omega) = b_1\omega^2 + b_2,$$

причем

$$a_0 = -T_2; \quad a_1 = j(KT_1 + 1); \quad a_2 = K; \quad b_1 = jK^2\gamma^2\tau_1^2; \quad b_2 = jK^2\gamma^2. \tag{108}$$

Согласно таблице [9], [10]

$$J_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0 b_1}{a_2}}{2a_0 a_1}. \tag{109}$$

Подставляя формулы (108) в (109), получим

$$\overline{\varepsilon_n^2} = \frac{\tau_1^2}{K(K\tau_1 + 1)}. \tag{110}$$

В заключение заметим, что в случае сложных следящих систем, имеющих передаточные функции высокого порядка, более удобным может оказаться метод вычисления $\overline{\varepsilon^2}$, основанный на обычном способе графического интегрирования выражения (86). При этом спектральные плотности могут быть заданы в виде экспериментальных кривых, а графики функций $|\Phi_\varepsilon(j\omega)|^2$ и $|\Phi(j\omega)|^2$ легко найти при помощи амплитудной круговой диаграммы и номограмм, приведенных в главе XV, зная амплитудно-фазовую или логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Д., О некоторых методах теории технической устойчивости, „Труды ВВА", ч. 1, вып. 135, 1945.

2. Булгаков Б. В., О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами, ДАН СССР, вып. 51, № 5, 1946.

3. Уланов Г. М., О максимальном отклонении регулируемой величины в переходном процессе, „Автоматика и телемеханика" № 3, 1948.

4. Хинчин А. Я., Теория корреляции стационарных случайных процессов, „Успехи математических наук", вып. 5, 1938.

5. Колмогоров А. Н., Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром, „Юбилейный сборник АН СССР", ч. 1, 1947.

6. Колмогоров А. Н., Интерполяция и экстраполяция стационарных случайных последовательностей, „Известия АН СССР, серия математ." № 5, 1941.

7. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, Техтеоретиздат, 1950.

8. Крамер Г., Математические методы статистики, ИИЛ, 1948.

9. Джемс Г., Никольс Н., Филипс Р., Теория следящих систем, ИИЛ 1951.

10. Солодовников В. В., Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, Гостехтеоретиздат, М. 1952.

11. Яглом А. М, Введение в теорию стационарных случайных функций, „Успехи математических наук", т. VII, вып. 5, 1952.

12. Пугачев В. С., Основы общей теории случайных функций, Академия Арт. Наук, Москва 1952.

ГЛАВА XXIII

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ВЛИЯНИЕМ НЕПРЕРЫВНО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

В предыдущей главе был изложен метод вычисления средней квадратической ошибки, вызываемой в системе с заданной передаточной функцией, управляющим и возмущающим воздействиями в виде стационарных случайных функций времени с известными спектральными плотностями.

Однако при расчете и проектировании систем автоматического управления и следящих систем часто более важной является обратная задача, состоящая в определении передаточной функции, обеспечивающей требуемую точность системы.

Решение этого вопроса (точная постановка задачи дается ниже) и составляет содержание настоящей главы (более подробно см. работы [1], [2], [3]).

Если на входе следящей системы помимо управляющего воздействия или полезного сигнала есть возмущающее воздействие или помеха, ошибка следящей системы состоит их двух составляющих.

Одна из них вызывается тем, что следящая система не может абсолютно точно воспроизводить полезный сигнал, а другая — тем, что следящая система не может совершенно не реагировать на помехи.

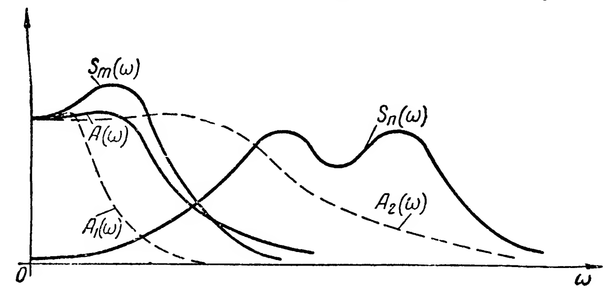
Обычно оказывается, что стремление уменьшить первую составляющую ошибки приводит к увеличению второй составляющей, и наоборот.

Таким образом, задача синтеза состоит в том, чтобы обеспечить оптимальное решение вопроса, при котором сумма обеих составляющих имеет минимально возможное значение. Это можно пояснить следующим образом.

Предположим, что амплитудная частотная характеристика $A(\omega) = |\Phi(i\omega)|$ рассматриваемой системы и спектральные плотности $S_m(\omega), S_n(\omega)$ полезного сигнала $m(t)$ и помехи $n(t)$ графически изображены на фиг. 18. Так как помеха имеет более высокочастотный спектр, чем полезный сигнал, то ясно, что если мы сузим полосу пропускания системы так, как это изображено на фиг. 18 [см. кривую $A_1(\omega)$], то система почти не будет реагировать на помехи. Однако при этом очень сильно возрастет ошибка воспроизведения полезного сигнала. Если же увеличить полосу пропускания [см. кривую $A_2(\omega)$ на фиг. 18], то

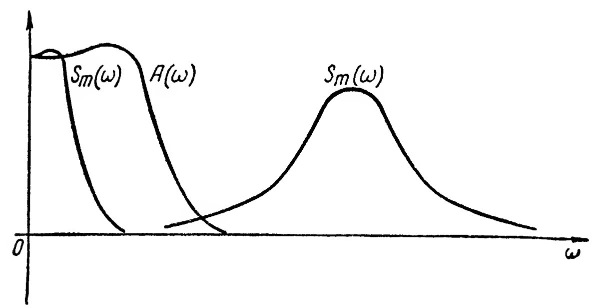
весьма существенно возрастет влияние помех. Очевидно, что здесь необходим некоторый компромисс, обеспечивающий наивыгоднейшие условия работы системы.

Известны три способа подхода к решению задачи синтеза следящих систем при наличии помех. Первый и наиболее простой из них применим в том случае, когда полезный сигнал имеет гораздо более низкочастотный спектр, чем помехи (фиг. 19). В этом случае полоса пропускания системы должна быть выбрана достаточно широкой для обеспечения требуемой точности воспроизведения сигнала и в то же время достаточно узкой для того, чтобы она не реагировала на помехи [см. кривую $A(\omega)$ на фиг. 19].



Фиг. 18. Амплитудные частотные характеристики $A(\omega)$, $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$ с различными полосами пропускания и спектральные плотности полезного сигнала $S_m(\omega)$ и помехи $S_n(\omega)$.

Другой способ подхода к выбору характеристик следящих систем при наличии помех [4] предназначен для случаев, когда управляющее воздействие имеет спектр частот, очень быстро убывающий при возрастании частоты, а помехи имеют спектр, близкий к белому спектру (фиг. 20).



Фиг. 19. Выбор амплитудной частотной характеристики $A(\omega)$ в случае, когда помеха имеет более высокочастотный спектр, чем полезный сигнал.

Согласно этому способу форма амплитудной частотной характеристики $|KW(j\omega)|$ разомкнутой системы должна выбираться при низких частотах (где $|KW(j\omega)| \gg 1$ и где сконцентрирована основная энергия полезного сигнала) возможно более близкой к форме амплитудной частотной характеристики полезного сигнала, а затем быстро убывать, по возможности следуя за убывающей амплитудной характеристикой сигнала.

Таким образом достигается, с одной стороны, равномерное ослабление влияния всего основного спектра частот полезного сигнала на ошибку (так как в интервале частот, содержащем основную энергию сигнала, амплитудный спектр ошибки

$$|E(j\omega)| = \frac{1}{|1 + KW(j\omega)|} |G(j\omega)|$$

оказывается приблизительно равным весьма малой постоянной величине $\frac{1}{K}$) и, с другой стороны, уменьшение, насколько это возможно, влияния помех, благодаря быстрому убыванию величины $|KW(j\omega)|$.

Следует, однако, заметить, что быстрота убывания $|KW(j\omega)|$ ничем не ограничивается лишь при $|KW(j\omega)| \gg 1$. При тех же значениях ω, при которых $|KW(j\omega)| \approx 1$, слишком быстрое убывание этой величины может привести к уменьшению запаса устойчивости или даже к нарушению устойчивости системы.

Фиг. 20. Выбор амплитудной частотной характеристики разомкнутой системы $|KW(j\omega)|$ в случае, когда управляющее воздействие имеет быстро убывающий частотный спектр.

Наконец, третий способ синтеза применим в общем случае, когда спектры частот полезного сигнала и помехи налагаются друг на друга так, как это изображено на фиг. 18, и имеют произвольную форму.

Этот метод позволяет найти оптимальную передаточную функцию или соответствующие ей оптимальные частотные характеристики, обеспечивающие минимум средней квадратической ошибки при заданных спектральных плотностях или корреляционных функциях сигнала и помехи.

Ввиду того что последний метод дает наиболее строгий и общий подход к решению задачи синтеза не только следящих, но и других воспроизводящих систем при наличии помех, он и представляет собой предмет дальнейшего изложения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что рассматриваемая система находится под влиянием управляющего $m(t)$ и возмущающего $n(t)$ воздействий, являющихся стационарными случайными функциями времени с равными нулю средними значениями.

Обычно задача расчета следящей системы состоит в таком выборе ее характеристик и параметров, при котором обеспечивается возможно более точное воспроизведение на выходе управляющего сигнала $m(t)$, поданного на ее вход. Однако рассматриваемый ниже метод позволяет исходить из более общей постановки вопроса, которая заключается в следующем. Мы предположим, что система должна возможно более точно воспроизводить на своем выходе в общем случае не само управляющее воздействие $m(t)$, а некоторый сигнал $\mu(t)$, связанный с входным сигналом $m(t)$, заданным функциональным соотношением.

Другими словами, предположим, что на выходе должен воспроизводиться сигнал

$$\mu(t) = H(p)\,m(t), \tag{111}$$

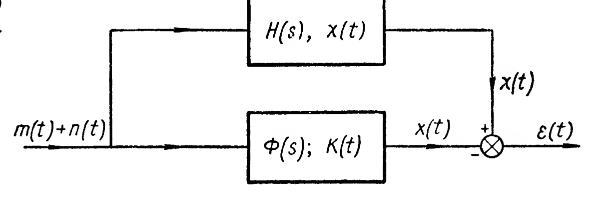
где $H(p)$ — некоторый оператор от p, который условимся называть преобразующим оператором.

Так, например, преобразующий оператор $H(p)$ может иметь вид

$$\left.\begin{aligned} H(p) &= p; \\ H(p) &= \frac{1}{p}; \\ H(p) &= e^{\pm t_0 p}, \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

и тогда требуемое преобразование входного сигнала сводится соответственно к диференцированию, интегрированию или смещению во времени на промежуток t_0. Преобразующий оператор $H(p)$ может иметь и более сложный вид, например,

$$H(p) = n_0 + n_1 p;$$
$$H(p) = n_0 + n_1 p + n_2 p^2;$$
$$H(p) = n_{-1} p^{-1} + n_0 + n_1 p.$$



Фиг. 21. К постановке задачи синтеза.

Связь между сигналом $\mu(t)$, подлежащим воспроизедению, и управляющим воздействием $m(t)$ может быть представлена (см. главу VI) в следующем виде:

$$\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t-\tau)\,\varkappa(\tau)\,d\tau, \tag{113}$$

где функция $\varkappa(t)$ может рассматриваться как импульсная переходная функция (см. главу VI) некоторой фиктивной идеальной системы (фиг. 21), передаточная функция которой совпадает с преобразующим оператором $H(p)$. Эта идеальная система характеризуется тем, что она преобразует управляющее воздействие $m(t)$ в соответствии с требуемым законом $H(p)$ абсолютно точно, без какой бы то ни было ошибки и совершенно не реагирует на помехи. Очевидно, что такого рода система не может быть осуществлена на практике. Поэтому в дальнейшем мы ставим себе задачу найти такую импульсную переходную функцию $k(t)$ [или соответствующую ей передаточную функцию $\Phi(s)$], которая обеспечивала бы требуемый закон преобразования $H(p)$ входного сигнала $m(t)$ не с нулевой, а с минимальной средней квадратической ошибкой и, таким образом, была бы более близкой к реально осуществимым условиям.

Чтобы получить импульсную переходную функцию $k(t)$, которая могла бы соответствовать реально осуществимой системе, необходимо прежде всего учитывать, что функция $k(t)$ должна удовлетворять ограничению

$$k(t)=0;\ t<0, \qquad (114)$$

которое обычно называется условием физической осуществимости.

Смысл этого ограничения, как это уже указывалось в главе VI, заключается в следующем. Предположим, что мы имели бы систему, импульсная переходная функция $k(t)$ которой не удовлетворяет условию (114). Как известно, физически функция $k(t)$ представляет собой переходный процесс, вызываемый единичным импульсом, приложенным к системе в момент времени $t=0$. Отсюда ясно, что если бы функция $k(t)$ не удовлетворяла равенству (114), т. е. не обращалась в нуль при отрицательных значениях t, то в системе мог бы возникнуть переходный процесс еще до приложения воздействия, его вызвавшего, что, конечно, является абсурдом. Поэтому импульсная переходная функция $k(t)$ всякой физически осуществимой системы должна удовлетворять ограничению (114).

Мы будем понимать в дальнейшем под ошибкой $\varepsilon(t)$ разность

$$\varepsilon(t)=\mu(t)-x(t), \qquad (115)$$

где $\mu(t)$ — требуемое изменение величины на выходе;

$x(t)$ — действительное изменение величины на выходе.

Функцию $k(t)$, обращающую в минимум выражение

$$\overline{\varepsilon^2}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\mu(t)-x(t)]^2dt, \qquad (116)$$

условимся называть *оптимальной импульсной переходной функцией*, а соответствующее этой функции преобразование Фурье

$$\Phi(j\omega)=\int_{0}^{\infty}k(t)e^{-j\omega t}\,dt \qquad (117)$$

оптимальной передаточной функцией системы.

Итак, задача может быть сформулирована следующим образом.

Предполагая, что как управляющее, так и возмущающее воздействия представляют собой стационарные случайные функции (с равными нулю средними значениями), найти передаточную функцию $\Phi(j\omega)$ [или импульсную переходную функцию $k(t)$] системы так, чтобы среднее значение квадрата ошибки

$$\overline{\varepsilon^2}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\mu(t)-x(t)]^2dt$$

имело минимум.

Заметим, что возможна и более общая формулировка задачи, отличающаяся от только что приведенной, во-первых, тем, что управляющее воздействие предполагается уже не стационарной случайной функцией, а суммой двух составляющих, из которых одна является функцией времени, принадлежащей

к определенному классу, а другая — стационарной случайной функцией, и, во-вторых, тем, что воздействия, приложенные к системе, предполагаются заданными не на бесконечном, а на конечном промежутке времени.

Учет обоих этих допущений часто позволяет получить решение, более полно отражающее реальные условия работы системы, чем решение, не принимающее их во внимание.

Очевидно, что первое допущение представляет интерес во всех тех случаях, когда на основании изучения конкретных условий работы системы наряду со случайными воздействиями можно выделить типовое воздействие $g(t)$.

Второе допущение соответствует тому, что практически наблюдать и производить обработку случайных воздействий можно лишь в течение конечного времени наблюдения T. Предположение о той или иной форме составляющей воздействия в виде заданной функции времени также, строго говоря, имеет смысл лишь применительно к конечному промежутку времени. Допустим, например, что мы ввели предположение о равномерном и прямолинейном движении какого-либо объекта, поведение которого находится вне нашего контроля. Ясно, что это предположение может быть справедливо лишь для конечного промежутка времени T. Имея это в виду, мы, однако, в дальнейшем из-за недостатка места ограничимся лишь той более узкой постановкой задачи, которая была дана выше. Читатели, интересующиеся решением задачи об оптимальной передаточной функции при учете составляющей воздействия в виде функции времени, принадлежащей к определенному классу, и конечности времени наблюдения, отсылаются к соответствующим работам [1], [5].

2. УСЛОВИЯ МИНИМУМА СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ

Переходя к решению поставленной задачи, выразим прежде всего среднее значение квадрата ошибки $\overline{\varepsilon^2}$ через корреляционные функции полезного сигнала $m(t)$ и помехи $n(t)$ и через импульсную переходную функцию системы $k(t)$.

Если предположить, что оба воздействия $m(t)$ и $n(t)$ приложены к одной и той же точке системы, то связь между величиной на выходе $x(t)$ и величиной на входе $\varphi(t)$

$$\varphi(t)=m(t)+n(t) \tag{118}$$

может быть представлена (см. главу VI) в виде

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-\lambda)\,k(\lambda)\,d\lambda. \tag{119}$$

Подставляя формулу (119) в (116), получим

$$\overline{\varepsilon^2}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{\mu(t)-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-\lambda)\,k(\lambda)\,d\lambda\right\}^2 dt. \tag{120}$$

Раскрывая в уравнении (120) фигурные скобки и меняя порядок интегрирования, найдем

$$\overline{\varepsilon^2}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mu^2(t)\,dt-2\int_{-\infty}^{\infty}k(\lambda)\,d\lambda\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi(t-\lambda)\,\mu(t)\times$$

$$\times\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}k(\lambda)\,d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}k(\vartheta)\,d\vartheta\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi(t-\lambda)\,\varphi(t-\vartheta)\,dt. \tag{121}$$

Введем в рассмотрение корреляционные функции

$$R_\mu(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mu(t+\tau)\,\mu(t)\,dt; \tag{122}$$

$$R_\varphi(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi(t+\tau)\,\varphi(t)\,dt = R_m(\tau) + R_n(\tau) + R_{mn}(\tau) + R_{nm}(\tau); \tag{123}$$

$$R_{\mu\varphi}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mu(t+\tau)\,\varphi(t)\,dt = R_{\mu m}(\tau) + R_{\mu n}(\tau). \tag{124}$$

Если корреляция между полезным сигналом $m(t)$ и помехой $n(t)$ отсутствует, то формулы (123) и (124) сводятся к виду

$$R_\varphi(\tau) = R_m(\tau) + R_n(\tau) \tag{125}$$

и

$$R_{\mu\varphi}(\tau) = R_{\mu m}(\tau). \tag{126}$$

Принимая во внимание, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mu^2(t)\,dt = R_\mu(0), \tag{127}$$

вместо равенства (121) можем написать

$$\overline{\varepsilon^2} = R_\mu(0) - 2\int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda)\,R_{\mu\varphi}(\lambda)\,d\lambda + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda)\,d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} k(\vartheta)\,R_\varphi(\lambda-\vartheta)\,d\vartheta. \tag{128}$$

Согласно условию физической осуществимости $k(t) = 0,\ \ t < 0$, поэтому нижние пределы интегрирования в формуле (128) можно положить равными нулю:

$$\overline{\varepsilon^2} = R_\mu(0) - 2\int_0^{\infty} k(\lambda)\,R_{\mu\varphi}(\lambda)\,d\lambda + \int_0^{\infty} k(\lambda)\,d\lambda \int_0^{\infty} k(\vartheta)\,R_\varphi(\lambda-\vartheta)\,d\vartheta. \tag{129}$$

Полученная формула является искомым выражением для $\overline{\varepsilon^2}$. Оно показывает, что вид функции $k(t)$ при рассматриваемых условиях зависит не от самих функций $\mu(t)$ и $m(t)$, а от их корреляционных функций. Это означает, что если есть две совокупности функций $\{\mu(t)\}$, $\{\varphi(t)\}$, имеющих корреляционные функции $R_\mu(\tau)$, $R_\varphi(\tau)$, $R_{\mu\varphi}(\tau)$, и если нам известна функция $k(t)$, дающая минимум среднему значению квадрата ошибки для каких-либо двух функций $\mu(t)$ и $\varphi(t)$, входящих в рассматриваемые совокупности, то эта же функция $k(t)$ дает минимум среднего значения квадрата ошибки и для любых других функций, входящих в те же совокупности.

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $k(t)$ обращала выражение (129) в минимум, заключается в том, чтобы она представляла собой решение интегрального уравнения

$$R_{\mu\varphi}(\tau) - \int_0^\infty R_\varphi(\tau - \lambda)\, k(\lambda)\, d\lambda = 0; \quad \tau > 0. \tag{130}$$

Для того чтобы показать это, придадим $k(\lambda)$ в формуле (129) вариацию $\gamma\chi(\lambda)$, которая вследствие условия физической осуществимости должна обращаться в нуль при $\lambda < 0$, так же как и $k(\lambda)$, т. е. заменим в формуле (129) $k(\lambda)$ через $k(\lambda) + \gamma\chi(\lambda)$, где γ — параметр, не зависящий от λ, а $\chi(\lambda)$ — произвольная функция от λ, при этом величина $E = \overline{\varepsilon^2}$ получит вариацию δE и полное среднее значение квадрата ошибки сделается равным $E + \delta E$. Необходимым условием для того, чтобы величина E имела экстремум (в частности, минимум), как известно, будет

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}(E + \delta E)_{\gamma=0} = 0$$

при любых $\chi(\lambda)$.

Заменяя в формуле (129) $k(\lambda)$ через $k(\lambda) + \gamma\chi(\lambda)$, найдем

$$E(k + \gamma\chi) = R_\mu(0) - 2\int_0^\infty [k + \gamma\chi]\, R_{\mu\varphi}(\lambda)\, d\lambda + \int_0^\infty [k(\lambda) +$$

$$+ \gamma\chi(\lambda)]\, d\lambda \int_0^\infty [k(\vartheta) + \gamma\chi(\vartheta)]\, R_\varphi(\lambda - \vartheta)\, d\vartheta = E(k) - 2\gamma\int_0^\infty R_{\mu\varphi}(\lambda)\, \chi(\lambda)\, d\lambda +$$

$$+ \gamma^2\int_0^\infty \chi(\lambda)\, d\lambda \int_0^\infty \chi(\vartheta)\, R_\varphi(\lambda - \vartheta)\, d\vartheta + 2\gamma\int_0^\infty \chi(\lambda)\, d\lambda \int_0^\infty k(\vartheta)\, R_\varphi(\lambda - \vartheta)\, d\vartheta. \tag{131}$$

Пусть

$$E_1 = \int_0^\infty \chi(\lambda)\, d\lambda \left\{ R_{\mu\varphi}(\lambda) - \int_0^\infty R_\varphi(\lambda - \vartheta)\, k(\vartheta)\, d\vartheta \right\} \tag{132}$$

и

$$E_2 = \int_0^\infty \chi(\lambda)\, d\lambda \int_0^\infty R_\varphi(\lambda - \vartheta)\, \chi(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{133}$$

Учитывая выражение (132) и (133), вместо формулы (131) можно написать

$$E(k + \gamma\chi) = E(k) - 2\gamma E_1 + \gamma^2 E_2. \tag{134}$$

Диференцируя уравнение (134) по γ и полагая затем $\gamma = 0$, получим

$$E_1 = 0 \tag{135}$$

или, как это ясно из формулы (132),

$$R_{\mu\varphi}(\tau) - \int_0^\infty R_\varphi(\tau - \lambda)\, k(\lambda)\, d\lambda = 0; \quad \tau > 0. \tag{136}$$

Таким образом мы доказали, что интегральное уравнение (130) является необходимым условием для того, чтобы величина $\overline{\varepsilon^2}$ имела минимум.

Покажем теперь, что если равенство (134) имеет место, то, как бы мы ни выбирали $\chi(t)$, всегда будет иметь место неравенство

$$E(k + \gamma\chi) \geqslant E(k), \tag{137}$$

т. е. что уравнение (130) является не только необходимым, но и достаточным условием для того, чтобы величина $\overline{\varepsilon^2}$ имела минимум.

Для этого заметим, что при $E_1 = 0$ равенство (134) принимает вид

$$E(k + \gamma\chi) = E(k) + \gamma^2 E_2,$$

но

$$E_2 = \int_0^\infty \chi(\lambda)\, d\lambda \int_0^\infty R_\varphi(\lambda - \vartheta)\, \chi(\vartheta)\, d\vartheta =$$

$$= \int_0^\infty \chi(\lambda)\, d\lambda \int_0^\infty \chi(\vartheta)\, d\vartheta \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi(t-\lambda)\, \varphi(t-\vartheta)\, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left\{ \int_0^\infty \chi(\lambda)\, \varphi(t-\lambda)\, d\lambda \right\}^2 dt \geqslant 0$$

Следовательно,

$$E(k) + \gamma^2 E_2 \geqslant E(k),$$

и неравенство (137) нами доказано.

3. ДРУГОЙ ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО УСЛОВИЯ МИНИМУМА СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ

Ввиду важности уравнения (130) дадим несколько другой его вывод.

Выше мы видели [см. формулу (128)], что величина $\overline{\varepsilon^2}$ с точностью до постоянной $R_\mu(0)$ определяется выражением

$$I = -2\int_0^\infty k(\lambda)\, R_{\mu\varphi}(\lambda)\, d\lambda + \int_0^\infty k(\lambda)\, d\lambda \int_0^\infty k(\vartheta)\, R_\varphi(\lambda-\vartheta)\, d\vartheta. \tag{138}$$

Пусть

$$R_{\mu\varphi}(\lambda) = \int_0^\infty R_\varphi(\lambda-\vartheta)\, q(\vartheta)\, d\vartheta; \; \lambda > 0, \tag{139}$$

где $q(\vartheta)$ — пока неизвестная функция, которая должна быть найдена таким образом, чтобы выражение (138) имело минимум.

Учитывая равенство (139), вместо выражения (138) можно написать

$$I = -2\int_0^\infty q(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^\infty R_\varphi(\lambda-\vartheta)\, k(\lambda)\, d\lambda + \int_0^\infty k(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^\infty k(\lambda) \times$$

$$\times R_\varphi(\lambda-\vartheta)\, d\lambda = -\int_0^\infty q(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^\infty R_\varphi(\lambda-\vartheta)\, q(\lambda)\, d\lambda + \int_0^\infty [k(\vartheta) -$$

$$- q(\vartheta)]\, d\vartheta \int_0^\infty R_\varphi(\lambda-\vartheta)\, [k(\lambda) - q(\lambda)]\, d\lambda. \tag{140}$$

Но

$$R_\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\varphi(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega,$$

поэтому, полагая

$$Q(j\omega)=\int\limits_0^\infty q(t)\,e^{-j\omega t}\,dt, \tag{141}$$

вместо формулы (140) можем написать:

$$I=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty q(\vartheta)\,e^{-j\omega\vartheta}d\vartheta\int\limits_0^\infty q(\lambda)\,e^{j\omega\lambda}\,d\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty S_\varphi(\omega)\,d\omega+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty[k(\vartheta)-q(\vartheta)]\,e^{-j\omega\vartheta}\,d\vartheta\int\limits_0^\infty e^{j\omega\lambda}\,[k(\lambda)-q(\lambda)]\,d\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty S_\varphi(\omega)\,d\omega=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty|Q(j\omega)|^2\,S_\varphi(\omega)\,d\omega+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty|\Phi(j\omega)-$$

$$-Q(j\omega)|^2\,S_\varphi(\omega)\,d\omega. \tag{142}$$

Выражение (142), очевидно, имеет минимум, если

$$Q(j\omega)=\Phi(j\omega) \tag{143}$$

или если

$$q(t)=k(t),$$

откуда следует, что равенство (139) сводится к интегральному уравнению (130).

Итак, мы опять пришли к выводу, что условия минимума для $\overline{\varepsilon^2}$ определяются интегральным уравнением (130).

4. ФОРМУЛА ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Выше было показано, что задача определения оптимальной импульсной, а следовательно и оптимальной передаточной, функции состоит в том, чтобы найти решение интегрального уравнения

$$R_{\mu\varphi}(\tau)-\int\limits_0^\infty R_\varphi(\tau-\lambda)\,k(\lambda)\,d\lambda=0;\ \ \tau>0, \tag{130}$$

удовлетворяющее условию физической осуществимости (114).

Ввиду того что процесс решения интегрального уравнения (130) довольно сложен, мы не будем здесь его приводить, а дадим лишь окончательный результат в виде формулы для оптимальной передаточной функции[1].

Предварительно введем в рассмотрение спектральные плотности

$$S_{\mu\varphi}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-j\omega\tau}R_{\mu\varphi}(\tau)\,d\tau=S_{\mu m}(\omega)+S_{\mu n}(\omega) \tag{144}$$

[1] Решение интегрального уравнения (130) можно найти в [1], [3].

и

$$S_\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R_\varphi(\tau)\, d\tau = S_m(\omega) + S_n(\omega) + $$
$$+ S_{mn}(\omega) + S_{nm}(\omega). \qquad (145)$$

Если корреляция между полезным сигналом и помехой отсутствует, то формулы (143) и (144) сводятся к виду

$$S_{\mu\varphi}(\omega) = S_{\mu m}(\omega) = H(j\omega)\, S_m(\omega) \qquad (144a)$$

и

$$S_\varphi(\omega) = S_m(\omega) + S_n(\omega). \qquad (146)$$

Кроме того, введем в рассмотрение вспомогательную функцию $\Psi(j\omega)$, определив ее при помощи соотношения

$$|\Psi(j\omega)|^2 = \Psi(j\omega)\, \Psi^*(j\omega) = S_\varphi(\omega) \qquad (147)$$

и предположив, что она содержит все нули и полюсы функции $S_\varphi(\omega)$, расположенные в верхней полуплоскости. Функция $\Psi^*(j\omega)$ — комплексно сопряженная функция $\Psi(j\omega)$ — содержит все нули и полюсы функции $S_\varphi(\omega)$, расположенные в нижней полуплоскости.

Общая формула для оптимальной передаточной функции при сделанных допущениях и принятых выше обозначениях имеет вид [1], [3]

$$\boxed{\Phi(j\omega) = \frac{1}{2\pi\Psi(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{\mu\varphi}(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega} \qquad (148)$$

или

$$\Phi(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\Psi(j\omega)}, \qquad (149)$$

где

$$B(j\omega) = \int_0^{\infty} \beta(t)\, e^{-j\omega t} dt \qquad (150)$$

и

$$\beta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{\mu\varphi}(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega. \qquad (151)$$

Прежде чем перейти к более подробному рассмотрению формулы (148), найдем величину среднего значения квадрата ошибки, получающуюся при удовлетворении условий оптимума.

5. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ МИНИМАЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ

Рассмотрим выражение (128) для среднего значения квадрата ошибки. Оно может быть представлено в виде

$$\overline{\varepsilon^2} = R_\mu(0) + I, \tag{152}$$

где I определяется формулой (142).

Из формулы (142) легко видеть, что в случае удовлетворения условия оптимума (143)

$$I = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 S_\varphi(\omega)\,d\omega. \tag{153}$$

Поэтому минимальное среднее значение квадрата равно

$$\overline{\varepsilon^2_{\min}} = R_\mu(0) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 S_\varphi(\omega)\,d\omega; \tag{154}$$

учитывая, что

$$R_\mu(0) = \overline{\mu^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_\mu(\omega)\,d\omega, \tag{155}$$

и подставляя уравнение (155) в (154), найдем

$$\boxed{\overline{\varepsilon^2_{\min}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \{S_\mu(\omega) - |\Phi(j\omega)|^2 S_\varphi(\omega)\}\,d\omega.} \tag{156}$$

Иногда может оказаться более удобной другая формула для $\overline{\varepsilon^2_{\min}}$, которую можно получить из уравнения (156) следующим образом.

Принимая во внимание выражения (147) и (149), из формулы (156) получим

$$\overline{\varepsilon^2_{\min}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \{S_\mu(\omega) - |B(j\omega)|^2\}\,d\omega. \tag{157}$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty} |B(j\omega)|^2\,d\omega = \int_0^{\infty} \beta^2(t)\,dt, \tag{158}$$

и, следовательно,

$$\overline{\varepsilon^2_{\min}} = R_\mu(0) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \beta^2(t)\,dt. \tag{159}$$

6. ОПТИМАЛЬНОЕ СТАТИСТИЧЕСКОЕ УПРЕЖДЕНИЕ

Перейдем к применению общей формулы (148) для оптимальной передаточной функции в различных случаях.

Назовем задачей статистического упреждения задачу нахождения при отсутствии помех [при $n(t)=0$] передаточной функции системы, дающей минимум среднего значения квадрата ошибки

$$\overline{\varepsilon^2}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\{m(t+t_0)-x(t)\}^2\,dt \tag{160}$$

между величиной $x(t)$ на выходе в момент времени t и величиной $m(t+t_0)$ на входе в некоторый будущий момент времени $t+t_0$.

Очевидно, что в рассматриваемом случае [см. формулы (111), (112), (146) и (147)]

$$\left.\begin{aligned}\mu(t)&=m(t+t_0);\\ H(j\omega)&=e^{j\omega t_0};\\ S_\varphi(\omega)&=S_m(\omega);\\ |\Psi(j\omega)|^2&=S_m(\omega),\end{aligned}\right\} \tag{161}$$

и формула (148) для оптимальной передаточной функции принимает вид

$$\Phi(j\omega)=\frac{1}{2\pi\Psi(j\omega)}\int_0^\infty e^{-j\omega t}dt\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(j\omega)\,e^{j\omega(t+t_0)}d\omega. \tag{162}$$

Согласно уравнению (162) решение задачи упреждения состоит из следующих операций.

Находим вспомогательную функцию $\Psi(j\omega)$ из соотношения

$$|\Psi(j\omega)|^2=S_m(\omega). \tag{163}$$

Вычисляем функцию

$$\gamma(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega. \tag{164}$$

Вводим в рассмотрение функцию

$$\beta(t)=\gamma(t+t_0) \tag{165}$$

при $t>0$,

$$\beta(t)=0$$

при $t<0$.

Находим преобразование Фурье $B(j\omega)$ для $\beta(t)$:

$$B(j\omega)=\int_0^\infty\beta(t)\,e^{-j\omega t}\,dt. \tag{166}$$

Определяем оптимальную передаточную функцию по формуле

$$\Phi(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\Psi(j\omega)}. \tag{167}$$

Найдем минимальную среднюю квадратическую ошибку упреждения. Для этого воспользуемся формулой (159).

В рассматриваемом случае

$$R_\mu(0) = R_m(0)$$

и

$$\beta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(j\omega)\, e^{j\omega(t+t_0)}\, d\omega.$$

Пусть

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega,$$

тогда

$$\beta(t) = \gamma(t + t_0).$$

Итак, согласно формуле (159)

$$\overline{\varepsilon^2}_{\min} = R_m(0) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \gamma^2(t+t_0)\, dt =$$

$$= R_m(0) - \frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{\infty} \gamma^2(t)\, dt =$$

$$= R_m(0) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \gamma^2(t)\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{t_0} \gamma^2(t)\, dt.$$

Но

$$R_m(0) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \beta^2(t)\, dt = 0.$$

Действительно,

$$R_m(0) = \overline{m^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_m(\omega)\, d\omega$$

и

$$\int_0^{\infty} \beta^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2(j\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_m(\omega)\, d\omega.$$

Итак, минимальное среднее значение квадрата ошибки упреждения

$$\overline{\varepsilon^2}_{\min} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{t_0} \gamma^2(t)\, dt. \tag{168}$$

7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ УПРЕЖДАЮЩЕЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Предположим, что нам задано аналитическое выражение для спектральной плотности $S_m(\omega)$ входного сигнала $m(t)$ в виде дробно-рациональной функции от ω:

$$S_m(\omega) = \frac{b_0 + b_1\omega^2 + \ldots + b_m\omega^{2m}}{a_0 + a_1\omega^2 + \ldots + a_n\omega^{2n}}. \tag{169}$$

Применим формулу (169) для вычисления передаточной функции, обеспечивающей минимум средней квадратической ошибки упреждения.

Прежде всего необходимо найти нули и полюсы функции $S_m(\omega)$. Имея в виду, что функция $S_m(\omega)$ — четная, и предполагая для простоты выкладок, что все нули и полюсы простые, можем написать

$$S_m(\omega) = C_m \frac{(\omega - \gamma_1)(\omega - \gamma_2)\ldots(\omega - \gamma_m)}{(\omega - \lambda_1)(\omega - \lambda_2)\ldots(\omega - \lambda_n)} C_m \frac{(\omega + \gamma_1)(\omega + \gamma_2)\ldots(\omega + \gamma_m)}{(\omega + \lambda_1)(\omega + \lambda_2)\ldots(\omega + \lambda_n)}, \tag{170}$$

где

$$C_m = \sqrt{\frac{b_m}{a_n}}.$$

Найдем прежде всего вспомогательную функцию $\Psi(j\omega)$, имея в виду, что в рассматриваемом случае она определяется последней из формул (161) и что все ее нули и полюсы должны быть расположены в верхней полуплоскости.

Итак, сравнивая последнюю из формул (151) с формулой (170), найдем

$$\Psi(j\omega) = C_m \frac{(\omega - \gamma_1)(\omega - \gamma_2)\ldots(\omega - \gamma_m)}{(\omega - \lambda_1)(\omega - \lambda_2)\ldots(\omega - \lambda_n)} \tag{171}$$

и

$$\Psi^*(j\omega) = C_m \frac{(\omega + \gamma_1)(\omega + \gamma_2)\ldots(\omega + \gamma_m)}{(\omega + \lambda_1)(\omega + \lambda_2)\ldots(\omega + \lambda_n)}. \tag{172}$$

Разложим выражение (171) для $\Psi(j\omega)$ на простые дроби:

$$\Psi(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\omega - \lambda_i}, \tag{173}$$

где

$$a_i = [(\omega - \lambda_i)\Psi(j\omega)]_{\omega=\lambda_i}. \tag{174}$$

Найдем функцию $\gamma(t)$, определяемую формулой (161). Подставляя выражение (173) в (164), получим

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_i}{\omega - \lambda_i} e^{j\omega t}\, dt.$$

Имеем

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_i}{\omega - \lambda_i} e^{j\omega t}\, dt = a_i e^{j\lambda_i t},$$

поэтому

$$\gamma(t) = j\sum_{i=1}^{n} a_i e^{j\lambda_i t} \ . \tag{175}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\beta(t) = \gamma(t + t_0) = j\sum_{i=1}^{n} a_i e^{j\lambda_i (t+t_0)}\ ; \ t > 0$$

$$\beta(t) = 0, \ \ t < 0$$

и вычислим соответствующее ей преобразование Фурье $B(j\omega)$:

$$B(j\omega) = \int_0^\infty e^{-j\omega t}\beta(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-j\omega t}\left\{\sum_{i=1}^{n} ja_i e^{j\lambda_i (t+t_0)}\right\} dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\omega - \lambda_i} e^{j\lambda_i t_0} \ . \tag{176}$$

Итак, если все полюсы $S_m(\omega)$ простые, то

$$\Phi(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\Psi(j\omega)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\omega - \lambda_i} e^{j\lambda_i t_0}}{C_m \frac{(\omega - \gamma_1)(\omega - \gamma_2)\dots(\omega - \gamma_m)}{(\omega - \lambda_1)(\omega - \lambda_2)\dots(\omega - \lambda_n)}} . \tag{177}$$

8. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ УПРЕЖДАЮЩЕЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Пример 1. Предположим, что

$$S_m(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2} . \tag{178}$$

В этом случае

$$\Psi(j\omega) = \frac{1}{\omega - j} .$$

Пользуясь формулой (174), получим

$$\Phi(j\omega) = \frac{\frac{1}{\omega - j} e^{-t_0}}{\frac{1}{\omega - j}} = e^{-t_0} . \tag{179}$$

Так как в рассматриваемом примере

$$\gamma(t) = e^{-t},$$

то минимальное среднее значение квадрата ошибки согласно формуле (168)

$$\overline{\varepsilon^2}_{\min} = \int_0^{t_0} e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t_0}). \tag{180}$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что наилучшее статистическое упреждение функции $m(t+t_0)$ получается в результате умножения $m(t)$ на множитель e^{-t_0}, который стремится к нулю при $t_0 \to \infty$.

Пример 2. Пусть

$$S_m(\omega) = \frac{1}{(1+\omega^2)^2},$$

так что

$$\Psi(j\omega) = \frac{1}{(\omega - j)^2}.$$

Следовательно,

$$\beta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(j\omega)\, e^{j\omega(t+t_0)}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega(t+t_0)}}{(\omega - j)^2}\, d\omega =$$

$$= -(t+t_0)\, e^{-(t+t_0)}.$$

Преобразование Фурье $B(j\omega)$ для $\beta(t)$

$$B(j\omega) = \int_0^{\infty} \beta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = -\int_0^{\infty} (t+t_0)\, e^{-(t+t_0)}\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= -e^{-t_0}\left[\frac{1}{(j\omega+1)^2} + \frac{t_0}{j\omega+1}\right] = e^{-t_0}\left[\frac{1}{(\omega-j)^2} + \frac{jt_0}{\omega - j}\right].$$

Итак, для оптимальной передаточной функции получим

$$\Phi(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\Psi(j\omega)} = \frac{e^{-t_0}\left[\frac{1}{(\omega-j)^2} + \frac{jt_0}{\omega-j}\right]}{\frac{1}{(\omega-j)^2}} =$$

$$= e^{-t_0}\left[jt_0(\omega - j) + 1\right] = t_0 e^{-t_0} j\omega + e^{-t_0}(1+t_0) \qquad (181)$$

и минимальное среднее значение квадрата ошибки

$$\overline{\varepsilon^2}_{\min} = \frac{1}{4}\left[1 - \left(1 + 2t_0 + 2t_0^2\right) e^{-2t_0}\right]. \qquad (182)$$

9. СГЛАЖИВАНИЕ

Назовем задачей сглаживания задачу определения передаточной функции, обеспечивающей минимум средней квадратической ошибки воспроизведения полезного сигнала $m(t)$ при наличии помех $n(t)$.

В случае задачи сглаживания, если для простоты предположить, что корреляция между полезным сигналом и помехой отсутствует,

$$\left.\begin{aligned} \mu(t) &= m(t); \\ S_\varphi(\omega) &= S_m(\omega) + S_n(\omega); \\ |\Psi(j\omega)|^2 &= S_m(\omega) + S_n(\omega), \end{aligned}\right\} \qquad (183)$$

и формула (148) для оптимальной передаточной функции принимает вид

$$\Phi(j\omega)=\frac{1}{2\pi\Psi(j\omega)}\int_{0}^{\infty}e^{-j\omega t}\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_m(\omega)}{\Psi^*(j\omega)}e^{j\omega t}\,d\omega. \qquad (184)$$

Согласно формуле (156) выражение для минимального среднего значения ошибки сглаживания

$$\overline{\varepsilon^2}_{\min}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{S_m(\omega)-|\Phi(j\omega)|^2 S_\varphi(\omega)\}\,d\omega. \qquad (185)$$

Согласно формуле (184) вычисление оптимальной передаточной функции состоит из следующих операций:

1) находим вспомогательную функцию $\Psi(j\omega)$ при помощи последней из формул (183);

2) вычисляем функцию

$$\beta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_m(\omega)}{\Psi^*(j\omega)}e^{j\omega t}\,d\omega, \qquad (186)$$

ограничиваясь лишь положительными значениями t;

3) вычисляем преобразование Фурье $B(j\omega)$ для функции $\beta(t)$, определенной при $t>0$:

$$B(j\omega)=\int_{0}^{\infty}\beta(t)\,e^{-j\omega t}\,dt; \qquad (187)$$

4) находим передаточную функцию $\Phi(j\omega)$ по формуле

$$\Phi(j\omega)=\frac{B(j\omega)}{\Psi(j\omega)}. \qquad (188)$$

Поясним несколько подробнее последовательность перечисленных операций.

Предположим, что функции $S_m(\omega)$ и $S_n(\omega)$ заданы в виде дробно-рациональных функций от ω. Приведя выражение $S_m(\omega)+S_n(\omega)$ к общему знаменателю и учитывая, что функция $S_\varphi(\omega)$, так же как $S_m(\omega)$ и $S_n(\omega)$, является четной функцией от ω, мы можем написать

$$S_\varphi(\omega)=\frac{b_0+b_1\omega^2+\ldots+b_\mu\omega^{2\mu}}{a_0+a_1\omega^2+\ldots+a_\nu\omega^{2\nu}}. \qquad (189)$$

Найдя корни числителя $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\mu$ и знаменателя $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ выражения (189) и отобрав те из них, которые расположены в верхней полуплоскости, получим $\Psi(j\omega)$:

$$\Psi(j\omega)=C_\varphi\frac{(\omega-\gamma_1)(\omega-\gamma_2)\ldots(\omega-\gamma_\mu)}{(\omega-\lambda_1)(\omega-\lambda_2)\ldots(\omega-\lambda_\nu)}, \qquad (190)$$

где

$$C_\varphi=\sqrt{\frac{b_\mu}{a_\nu}}.$$

Отобрав корни числителя и знаменателя, расположенные в нижней полуплоскости, найдем $\Psi^*(j\omega)$:

$$\Psi^*(j\omega) = C_\varphi \frac{(\omega + \gamma_1)(\omega + \gamma_2)\dots(\omega + \gamma_\mu)}{(\omega + \lambda_1)(\omega + \lambda_2)\dots(\omega + \lambda_\nu)}. \tag{191}$$

Пусть

$$S_m(\omega) = C_m^2 \frac{(\omega - \zeta_1)\dots(\omega - \zeta_\varkappa)}{(\omega - \eta_1)\dots(\omega - \eta_\rho)} \cdot \frac{(\omega + \zeta_1)\dots(\omega + \zeta_\varkappa)}{(\omega + \eta_1)\dots(\omega + \eta_\rho)}, \tag{192}$$

тогда

$$\frac{S_m(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} = C_m^2 C_\varphi^{-1} \frac{\prod\limits_{i=1}^{\varkappa}(\omega - \zeta)}{\prod\limits_{i=1}^{\rho}(\omega - \eta_i)} \cdot \frac{\prod\limits_{i=1}^{\varkappa}(\omega + \zeta_i)}{\prod\limits_{i=1}^{\rho}(\omega + \zeta_i)} \cdot \frac{\prod\limits_{i=1}^{\nu}(\omega + \lambda_i)}{\prod\limits_{i=1}^{\mu}(\omega + \gamma_i)}. \tag{193}$$

Разлагая формулу (194) на простые дроби, получим

$$\frac{S_m(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} = \sum_{i=1}^{\rho} \frac{a_i}{\omega - \eta_i} + \sum_{i=1}^{\rho} \frac{b_i}{\omega + \zeta_i} + \sum_{i=1}^{\mu} \frac{c_i}{\omega + \gamma_i}, \tag{194}$$

где

$$a_i = \left[(\omega - \eta_i) \frac{S_m(\omega)}{\Psi^*(j\omega)}\right]_{\omega = \eta_i};$$

$$b_i = \left[(\omega + \zeta_i) \frac{S_m(\omega)}{\Psi^*(j\omega)}\right]_{\omega = -\zeta_i};$$

$$c_i = \left[(\omega + \gamma_i) \frac{S_m(\omega)}{\Psi^*(j\omega)}\right]_{\omega = -\gamma_i}.$$

Подставляя равенство (194) в (186), найдем

$$\beta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{\rho} \frac{a_i}{\omega - \eta_i} e^{j\omega t}\, d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\rho} \frac{b_i}{\omega + \zeta_i} + \sum_{i=1}^{\mu} \frac{c_i}{\omega + \gamma_i} \right\} e^{j\omega t}\, d\omega,$$

где первый интеграл определяет функцию $\beta(t)$ при $t > 0$, а второй — при $t < 0$.

Найдем теперь функцию $B(j\omega)$, являющуюся преобразованием Фурье для функции $\beta(t)$ при положительных значениях.

Так как при $t > 0$

$$\beta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{\rho} \frac{a_i}{\omega - \eta_i} e^{j\omega t}\, d\omega, \tag{195}$$

то ясно, что

$$B(j\omega) = \sum_{i=1}^{q} \frac{a_i}{\omega - \eta_i}. \tag{196}$$

Разделив $B(j\omega)$ на $\Psi(j\omega)$, получим выражение для искомой функции $\Phi(j\omega)$:

$$\Phi(j\omega) = C_\varphi^{-1} \frac{\prod_{i=1}^{\nu} (\omega - \lambda_i)}{\prod_{i=1}^{\mu} (\omega - \gamma_i)} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\rho} \frac{a_i}{\omega - \eta_i} \right). \tag{197}$$

10. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Предположим, что полезный сигнал $m(t)$ сохраняет постоянное по величине абсолютное значение a и что среднее число перемен его знака в единицу времени равно μ.

Спектральная плотность $S_m(\omega)$ такого сигнала имеет вид

$$S_m(\omega) = \frac{2a^2\mu}{\omega^2 + 4\mu^2}. \tag{198}$$

В качестве помехи возьмем белый шум, т. е. мы предположим, что

$$S_n(\omega) = c^2. \tag{199}$$

Выбрав для простоты коэфициенты a и μ в формуле (198) так, чтобы можно было написать

$$S_m(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}, \tag{198a}$$

найдем передаточную функцию, обеспечивающую наилучшее в смысле минимальной средней квадратической ошибки воспроизведение сигнала $m(t)$.

Складывая формулы (198а) и (199), получим

$$S_\varphi(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1} + c^2 = \frac{1 + c^2 + c^2\omega^2}{1 + \omega^2}$$

или

$$S_\varphi(\omega) = \frac{(\sqrt{1 + c^2} + jc\omega)(\sqrt{1 + c^2} - jc\omega)}{(1 + j\omega)(1 - j\omega)},$$

откуда

$$\Psi(j\omega) = \frac{\sqrt{1 + c^2} + jc\omega}{1 + j\omega},$$

и, следовательно,

$$\frac{S_m(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} = \frac{1}{(1 + j\omega)(1 - j\omega)} \cdot \frac{(1 - j\omega)}{(\sqrt{1 + c^2} - jc\omega)} = \frac{1}{(1 + j\omega)(\sqrt{1 + c^2} - jc\omega)}.$$

Но

$$\frac{1}{(1 + j\omega)(\sqrt{1 + c^2} - jc\omega)} = \frac{1}{c + \sqrt{1 + c^2}} \left(\frac{1}{1 + jc\omega} + \frac{c}{\sqrt{1 + c^2} - jc\omega} \right). \tag{200}$$

Отбрасывая в выражении (200) второй член в скобках, соответствующий полюсу в нижней полуплоскости, найдем

$$B(j\omega)=\frac{1}{(c+\sqrt{1+c^2})(1+j\omega)},$$

и, следовательно,

$$\Phi(j\omega)=\frac{B(j\omega)}{\Psi(j\omega)}=\frac{1}{(c+\sqrt{1+c^2})(\sqrt{1+c^2}+jc\omega)}. \qquad (201)$$

11. ДИФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ

Рассмотрим теперь способ применения формулы (148) к решению задачи расчета схемы, дающей производную от сигнала, загрязненного помехами. Такого рода задача, как известно, имеет большое значение при расчете и проектировании следящих систем. Сущность задачи диференцирования при указанных условиях заключается в следующем. Предположим, что на полезный сигнал $m(t)$, содержащий низкие частоты, накладываются высокочастотные помехи, и предположим, что суммарный сигнал

$$\varphi(t)=m(t)+n(t)$$

поступает на вход диференцирующего устройства. Если последнее на выходе дает точную производную, т. е. определяет величину

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t},$$

то ясно, что выход в основном будет определяться не производной полезного сигнала, а помехами.

С другой стороны, если выбрать слишком большое значение Δt, то мы не учтем действительный характер изменения входного сигнала. Таким образом, повидимому, существуют некоторые оптимальные условия.

С точки зрения критерия минимума средней квадратической ошибки, характеризующей в данном случае точность диференцирования, эти условия, очевидно, будут определяться минимумом выражения

$$\overline{\varepsilon^2}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{\frac{dm}{dt}-\int_0^\infty[m(t-\lambda)+n(t-\lambda)]\,k(\lambda)\,d\lambda\right\}dt, \qquad (202)$$

где $k(t)$ — импульсная переходная функция диференцирующего устройства.

В рассматриваемом случае

$$\left.\begin{aligned}\mu(t)&=\frac{dm}{dt};\\ H(j\omega)&=j\omega;\\ S_\varphi(\omega)&=S_m(\omega)+S_n(\omega);\\ |\Psi(j\omega)|^2&=S_m(\omega)+S_n(\omega),\end{aligned}\right\} \qquad (203)$$

и оптимальная передаточная функция диференциатора определяется формулой

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{2\pi\Psi(j\omega)} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-j\omega t}\, dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega S_m(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} e^{j\omega t}\, d\omega. \qquad (204)$$

Очевидно, что аналогичным способом можно было бы найти оптимальную передаточную функцию и для диференциатора второго или более высокого порядка.

12. ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ДИФЕРЕНЦИАТОРА

Предположим, что

$$S_{m\varphi}(\omega) = S_m(\omega) = \frac{1}{1+\omega^4} \qquad (205)$$

и

$$S_n(\omega) = c^4,$$

тогда

$$S_\varphi(\omega) = S_m(\omega) + S_n(\omega) = \frac{1 + c^4 + c^4\omega^4}{1+\omega^4}$$

и

$$\Psi(j\omega) = \frac{\sqrt{1+c^4} + c\sqrt{2}\sqrt[4]{1+c^4}\, j\omega - c^2\omega^2}{1 + \sqrt{2}\, j\omega - \omega^2};$$

поэтому

$$\frac{j\omega S_m(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} = \frac{j\omega}{(1+\sqrt{2}\, j\omega - \omega^2)\left(\sqrt{1+c^4} - c\sqrt{2}\sqrt[4]{1+c^4}\, j\omega - c^2\omega^2\right)}. \qquad (206)$$

Представим выражение (206) в виде

$$\frac{j\omega S_m(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} = \frac{Aj\omega + B}{(1+\sqrt{2}\, j\omega - \omega^2)} + \frac{Cj\omega + D}{\sqrt{1+c^4} - c\sqrt{2}\sqrt[4]{1+c^4}\, j\omega - c^2\omega^2}. \qquad (207)$$

При этом неизвестные коэфициенты A, B, C, D, очевидно, должны удовлетворять уравнениям

$$\left.\begin{aligned} & B\sqrt{1+c^4} + D = 0; \\ & A\sqrt{1+c^4} + Bc\sqrt{2}\sqrt[4]{1+c^4} + C + D\sqrt{2} = 1; \\ & -Ac\sqrt{2}\sqrt[4]{1+c^4} + Bc^2 + \sqrt{2}\, C + D = 0; \\ & Ac^2 + C = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (208)$$

Так как второе слагаемое в формуле (207) имеет полюсы в нижней полуплоскости, то оно нас не интересует. Поэтому нам достаточно

определить коэфициенты A и B. Исключая из уравнения (208) C и D, найдем

$$A\left(\sqrt{1+c^4}-c^2\right)-B\left(c\sqrt{2}\sqrt[4]{1+c^2}+\sqrt{2}\sqrt{1+c^4}\right)=1;$$
$$-A\left(c\sqrt{2}\sqrt[4]{1+c^4}+c^2\sqrt{2}\right)+B\left(c^2-\sqrt{1+c^4}\right)=0. \quad (209)$$

Решение уравнения (209) дает

$$A=\frac{\sqrt[4]{1+c^4}-c}{\left(c^2+\sqrt{1+c^4}\right)\left(c+\sqrt[4]{1+c^4}\right)};$$
$$B=\frac{-c\sqrt{2}}{\left(c^2+\sqrt{1+c^4}\right)\left(c+\sqrt[4]{1+c^4}\right)};$$

поэтому

$$\frac{Aj\omega+B}{\left(1+\sqrt{2}\,j\omega-\omega^2\right)}=\frac{\left(\sqrt[4]{c^4+1}-c\right)j\omega-c\sqrt{2}}{\left(c^2+\sqrt{1+c^4}\right)\left(c+\sqrt[4]{1+c^4}\right)};$$

$$\Phi(j\omega)=\frac{1}{\Psi(j\omega)}\cdot\frac{\left(\sqrt[4]{c^4+1}-c\right)j\omega-c\sqrt{2}}{\left(c^2+\sqrt{1+c^4}\right)\left(c+\sqrt[4]{1+c^4}\right)}=$$
$$=\frac{1}{\left(c+\sqrt{1+c^4}\right)\left(c+\sqrt[4]{1+c^4}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt[4]{c^4+1}-c\right)j\omega-c\sqrt{2}}{\left[\sqrt{1+c^4}+c\sqrt{2}\sqrt[4]{1+c^4}j\omega-c^2\omega^2\right]}. \quad (210)$$

Легко видеть, что при $c\to 0$ $\Phi(j\omega)$ стремится к $j\omega$, как это и должно быть.

13. СЛУЧАЙ ВЫСОКОГО УРОВНЯ ПОМЕХ

Наконец, в качестве последней иллюстрации применения общей формулы (148) рассмотрим случай, когда необходимо отделить очень слабый полезный сигнал от высокого уровня помех и одновременно решить задачу упреждения этого сигнала.

При надлежащей нормировке спектральной плотности помех можно положить

$$S_n(\omega)=1;\ S_m(\omega)=\delta F(\omega);\ \delta\ll 1, \quad (211)$$

тогда

$$S_\varphi(\omega)=1+\delta F(\omega).$$

Для того чтобы разложить $S_\varphi(\omega)$ на множители, введем функцию

$$E(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-j\omega t}\,dt\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\,e^{j\omega t}\,du=\frac{1}{2}F(\omega).$$

Имеем

$$|1+\delta E(\omega)|^2 \approx 1+2\delta E(\omega)=1+\delta F(\omega),$$

поэтому приближенно можно написать

$$S_\varphi(\omega)\approx|1+\delta E(\omega)|^2,$$

и, следовательно,

$$\Psi(j\omega)=1+\delta E(\omega).$$

Итак,

$$\frac{S_m(\omega)}{\Psi^*(j\omega)}\,e^{j\omega t_0}=\frac{\delta F(\omega)\,e^{j\omega t_0}}{1+\delta E^*(\omega)}\approx\delta F(\omega)\,e^{j\omega t_0}\,[1-\delta E^*(\omega)]\approx\delta F(\omega)\,e^{j\omega t_0},$$

поэтому в первом приближении

$$\Phi(j\omega)=\frac{\delta}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-j\omega t}\,dt\int\limits_{-\infty}^\infty F(u)\,e^{ju(t+t_0)}\,du=e^{j\omega t_0}\frac{\delta}{2\pi}\int\limits_{t_0}^\infty\times$$

$$\times\,e^{-j\omega t}\,dt\int\limits_{-\infty}^\infty F(u)\,e^{jut}\,du.$$

Если положить $t_0=0$, то

$$\Phi(j\omega)=\frac{1}{2}\,\delta F(\omega),\qquad(212)$$

т. е. мы видим, что в этом случае оптимальная передаточная функция должна иметь в первом приближении такой же вид, как и спектральная плотность полезного сигнала.

Можно также показать, что во втором приближении

$$\Phi(j\omega)\,e^{-j\omega t_0}\approx\frac{S_m(\omega)}{S_\varphi(\omega)}\approx\frac{\delta F(\omega)}{1+\delta F(\omega)}.\qquad(213)$$

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Определение оптимальной передаточной функции следует рассматривать лишь как первый шаг в решении задачи синтеза следящих систем или систем автоматического регулирования, находящихся под влиянием стационарных случайных воздействий.

Следующий шаг должен заключаться в нахождении логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы. Решение этого вопроса не представляет затруднений и может быть выполнено либо при помощи формулы

$$KW(s)=\frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)},$$

позволяющей определить оптимальную передаточную функцию разомкнутой системы по оптимальной передаточной функции замкнутой системы, либо при помощи номограммы логарифм амплитуды — фаза (см. главу XV),

позволяющей по известным амплитудной и фазовой частотным характеристикам, соответствующим оптимальной передаточной функции $\Phi(s)$, найти оптимальные логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы. Дальнейший ход решения задачи синтеза корректирующих устройств следящей системы по существу не отличается от методики синтеза корректирующих устройств при типовых воздействиях (см. главу XVII).

Нет необходимости подчеркивать здесь, что на практике условия оптимума всегда можно будет удовлетворить лишь приближенно и что обычно будет необходимо выбирать некоторое компромиссное решение между стремлением приблизиться к условиям оптимума и стремлением получить требуемые коэфициенты ошибки при заданном запасе устойчивости или обеспечить удовлетворение предъявляемых к системе условий качества.

В заключение заметим, что в том случае, когда спектральные плотности заданы в виде кривых, аналитические выражения которых неизвестны или представляют собой дробно-рациональные функции высокого порядка, может оказаться удобным применение графо-аналитического метода определения оптимальных частотных характеристик системы [1] вместо изложенного в настоящей главе аналитического способа вычисления оптимальной передаточной функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солодовников В. В., Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, Гостехтеоретиздат, 1952.

2. Яглом А. М., Введение в теорию стационарных случайных функций, „Успехи математических наук“, т. VII, вып. 5, 1952.

3. Wiener N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, J. Wiley, N. Y. 1949.

4. Graham R. E., Linear servo-theory, BSTJ, v. 25, October № 4, 1946.

ГЛАВА XXIV

АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗДЕЙСТВИЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПО МОДУЛЮ

Как известно, в практике часто встречаются случаи, когда о возмущениях, действующих на систему, имеется очень мало сведений. В этом случае часто основываются на единственном предположении относительно возмущающих воздействий, заключающемся в том, что они ограничены по модулю.

Можно назвать по крайней мере два направления развития указанного метода.

Одно из этих направлений, связанное с работами Н. Д. Моисеева [1], развивается как теория технической устойчивости. Задача этой теории для систем автоматического регулирования заключается в определении рациональных параметров системы и оценок ее отклонения в возмущенном движении. Она дает возможность оценить границы отклонений системы при возмущении, ограниченном по модулю.

Другое направление развития метода, освещенное в настоящей главе, связано с работами Б. В. Булгакова [2], [3], А. И. Лурье [4] и др. Центральным вопросом исследования является рассмотрение процесса накопления отклонений системы под влиянием воздействия, ограниченного по модулю, и определение наибольшего отклонения как результата накопления отклонений.

Рассматриваемый метод может быть охарактеризован следующими положениями.

1. Качество системы автоматического регулирования характеризуется максимально возможным отклонением системы. Эта величина легко определяется на основании знания переходного процесса, вызванного единичным ступенчатым воздействием.

2. Максимальная ошибка системы может возрастать в самом неблагоприятном случае последовательно при каждом колебании системы. Такой рост ошибки системы характеризуется процессом накопления ошибки.

3. Ограниченные по модулю воздействия, классифицируются качественно на опасные и неопасные. К опасным относятся воздействия, вызывающие рост ошибки системы. Среди опасных воздействий выделяется наиболее опасное для системы регулирования, создающее наибольшую ошибку системы в наиболее короткое время.

Это воздействие представляет последовательность прямоугольных импульсов, по высоте равных l, а по продолжительности соответствующих интервалам знакопостоянства скорости переходного процесса.

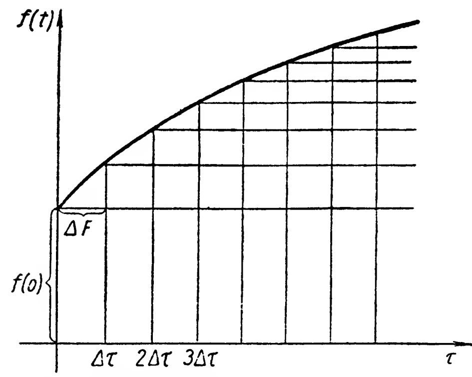
4. Синтез системы автоматического регулирования имеет целью выбор структуры и параметров системы, обеспечивающих минимум накопленного отклонения системы в сочетании с общими требованиями к качеству процесса регулирования.

1. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИЕЙ СИСТЕМЫ И ИЗМЕНЕНИЕМ РЕГУЛИРУЕМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ПРИ ЛЮБОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Обозначим, как обычно, через $h(t)$ изменение регулируемой переменной $x(t)$ в системе, вызываемое единичным возмущающим воздействием $f(t) = [1]$.

$$[1] = 0;\ t < 0;$$

$$[1] = 1;\ t \geqslant 0.$$



Фиг. 22. Замена произвольной функции $f(t)$ несколькими ступенчатыми функциями.

Функция $h(t)$ называется переходной функцией системы.

Найдем связь между переходной функцией $h(t)$ системы и изменением переменной $x(t)$ при любом воздействии $f(t)$ *.

Представим произвольное воздействие $f(t)$, приложенное к системе в момент времени $t = 0$ (фиг. 22), в виде ступенчатой функции с интервалами по временной оси $\Delta\tau$, имеющей начальную ординату $f(0)$ и ступенчатые приращения Δf_i. Общий эффект воздействия $f(t)$, приложенного к линейной системе, может быть вычислен как эффект воздействия $f(0)[1]$, приложенного в момент времени $t = 0$, и воздействий Δf, приложенных в моменты времени $\tau_n = \Delta\tau n$, где $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots$

Переходный процесс $x(t)$ в системе, вызываемый воздействием $f(0)$, приложенным в момент $t_0 = 0$, очевидно, выразится следующим образом:

$$x_1(t) = f(0)\,h(t). \qquad (214)$$

Переходные процессы, вызываемые воздействиями Δf_i, можно представить в виде

$$\Delta x_i(t) = \Delta f_i h(t - \tau_i),$$

---

* Напомним, что в главе VI была получена формула, позволяющая найти изменение переменной $x(t)$ при любом воздействии $f(t)$, если известна импульсная переходная функция системы $k(t)$.

и, следовательно, переходный процесс $x(t)$, вызванный воздействием в виде ступенчатой функции, на фиг. 22 будет определяться выражением

$$x(t)=f(0)h(t)+\sum_{i=1}^{n}\Delta f_i h(t-\tau_i), \tag{215}$$

где n — число промежутков $\Delta\tau$, на которые разбит интервал времени t_i

С точностью до величин второго порядка малости величина Δf_i может быть определена следующим образом:

$$\Delta f_i=\Delta\tau\frac{df}{d\tau}(\tau_k). \tag{216}$$

Подставляя значение Δf_i в выражение (215), получим

$$x(t)=f(0)h(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{df}{d\tau}(\tau_k)h(t-\tau_k)\Delta\tau. \tag{217}$$

Предельный переход от ступенчатого воздействия $f(t)$ к непрерывному $f(t)$, очевидно, связан с неограниченным увеличением числа n промежутков $\Delta\tau$.

Сумма, стоящая в правой части уравнения, переходит в интеграл в пределах от 0 до t и мы окончательно получим

$$x(t)=f(0)h(t)+\int_0^t\frac{df(\tau)}{d\tau}h(t-\tau)\,d\tau. \tag{218}$$

Полученная форма интеграла Дюамеля не вполне приемлема для рассмотрения процессов движения системы под влиянием воздействия, ограниченного по модулю. Действительно, самой постановкой задачи допускаются весьма быстрые изменения воздействия $f(t)$ и разрывы первого рода в функции $f(t)$. При этом производные $f(t)$ бесконечны, и интеграл (218) перестает существовать. Поэтому целесообразно получить другие формы интеграла Дюамеля, подходящие для дальнейшего исследования. В частности, более подходящим является следующая форма интеграла (218), полученная при вычислении его по частям:

$$x(t)=f(0)h(t)+f(t)h(t-\tau)\Big|_0^t-\int_0^t\frac{dh(t-\tau)}{dt}f(\tau)\,d(t-\tau).$$

Учитывая, что $h(0)=0$, имеем

$$x(t)=-\int_0^t\frac{dh(t-\tau)}{dt}f(\tau)\,d(t-\tau)$$

или

$$x(t)=\int_0^t\frac{dh(t-\tau)}{dt}f(\tau)\,d\tau.$$

2. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ К ВЫЧИСЛЕНИЮ МАКСИМАЛЬНОГО ОТКЛОНЕНИЯ СИСТЕМЫ

Рассмотрим действие возмущающей силы $f(t)$ на систему автоматического регулирования, находящуюся в начальный момент в покое. Преобразование Лапласа $X(s)$ для регулируемой величины может быть записано, например, в форме

$$X(s)=\frac{M(s)}{D(s)}F(s). \qquad (219)$$

Здесь $M(s)$ и $D(s)$ — полиномы степени m и n ($n \leqslant m$) от s.

Рассматриваемая система в дальнейшем полагается устойчивой. Если на систему воздействует сила $f(t)$, отличная от единичной, то процесс, возникающий в ней, может быть найден при помощи интеграла Дюамеля, если известна переходная функция системы $h(t)$.

Интеграл Дюамеля напишем в форме

$$x(t)=h(0)f(t)+\int_0^t \frac{dh(\tau)}{d\tau}f(t-\tau)\,d\tau.$$

Так как мы рассматриваем случай нулевых начальных условий, то $h(0)=0$ и

$$x(t)=\int_0^t \frac{dh(\tau)}{d\tau}f(t-\tau)\,d\tau. \qquad (220)$$

Максимум этого интеграла достигается, если абсолютное значение функции $f(t)$ сохраняет свое максимальное значение $f_{\max}=l$, а ее знак меняется при перемене знака $h(t)$. Это возможно лишь тогда, когда функция $f(t)$ сохраняет один и тот же знак в интервалах времени, где функция $\frac{dh(t)}{dt}$ знакопостоянна. Так как $\frac{dh(t)}{dt}$ представляет скорость переходного процесса, то функция $\frac{dh(t)}{dt}$ вообще знакопеременная, колебательная. Интервалы знакопостоянства функции $\frac{dh(t)}{dt}$ определяются через $\tau=t_1, t_2, t_3 \ldots$, являющиеся корнями уравнения $\frac{dh(t)}{dt}=0$.

В случае, если от фиксированного времени t перейти к большему времени t', то максимум интеграла (220) больше для t_1, чем для t. Это следует из того, что в указанных условиях интеграл в пределах от 0 до t_1 равен сумме значений интегралов в пределах от нуля до t и от t до t_1, причем каждый из них положителен.

Заставляя t стремиться к бесконечности, получаем при выбранной выше функции $f(t)$ максимум максиморум выражения $x(t)$ в виде

$$x_{\max\max}=\int_0^\infty \frac{dh(\tau)}{d\tau}f(t-\tau)\,d\tau. \qquad (221)$$

Рассмотрим функцию $f(t)$, модуль которой равен единице, а ее знаки чередуются согласно закону sigm $\left[\frac{dh(t)}{dt}\right]$. Интервалы времени, в которых знаки функции $\frac{dh(t)}{dt}$ постоянны, пусть будут $t_1 - 0$; $t_2 - t_1$; $t_3 - t_2$; ...

В этом случае выражение (221) можно переписать в следующем виде:

$$h(\infty)_{\max\max} = \int_0^{t_1} (+1)\frac{dh(\tau)}{d\tau}d\tau + \int_{t_1}^{t_2} (-1)\frac{dh(\tau)}{d\tau}d\tau +$$

$$+\int_{t_2}^{t_3} (+1)\frac{dh(\tau)}{d\tau} + \int_{t}^{t_4} (-1)\frac{dh(\tau)}{d\tau}d\tau \qquad (222)$$

или

$$\bar{h}(\infty)_{\max\max} = 2\,[h(t_1) - h(t_2) + h(t_3) - h(t_4) + \ldots]. \qquad (223)$$

Так как t_1, t_2, t_3, ... — моменты времени, в которых знак $\frac{dh(\tau)}{d\tau}$ меняется и, стало быть, производная $\frac{dh(t)}{dt}$ равна нулю, то сами значения $h(t_i)$, заключенные в скобки, равны экстремумам колебаний, возникающим в системе при возмущении единичной силой.

Таким образом, максимальное отклонение системы полностью определяется экстремумами колебания системы при внезапном приложении единичного воздействия, а именно: максимальное отклонение системы под действием силы $\bar{f}(t)$ равно удвоенной сумме экстремумов переходного процесса, соответствующего единичному воздействию.

Назовем $h_{\max\max}$ коэфициентом накопления отклонений в системе. При любом модуле $l = |f(t)|$ наибольшее отклонение системы $x_{\max\max}$ пропорционально значению модуля l.

В этом случае

$$x_{\max\max} = l h_{\max\max}. \qquad (224)$$

3. ФИЗИЧЕСКОЕ ТОЛКОВАНИЕ УСЛОВИЙ МАКСИМАЛЬНОГО ОТКЛОНЕНИЯ СИСТЕМЫ

Условиям максимального отклонения в системе автоматического регулирования может быть дана следующая физическая интерпретация.

Отклонение системы $x(t)$ под действием возмущающей силы $f(t)$ происходит, вообще говоря, в режиме переменной скорости. Энергия или работа внешнего воздействия, затраченная в процессе движения, зависит как от характера самого движения и воздействия $f(t)$, так и их взаимной связи. Действительно, работа A внешней силы P в системе равна произведению силы P на скорость v, на Δt на каждом из участков отрезка времени $0 - t$ и может быть найдена по формуле

$$A = \int_0^t Pv\,dt. \qquad (225)$$

Здесь P — возмущающая сила;

v — скорость процесса.

Формула, определяющая работу воздействия $f(t)$, аналогична формуле, определяющей отклонение $x(t)$ под влиянием воздействия $f(t)$ $\left[\text{при } P=f(t-\tau) \quad v=\frac{dh(t)}{dt}\right]$. Для того чтобы на данном отрезке времени $0-t$ работа внешних сил, затраченная на отклонение системы, была максимальной, необходимо, как известно, чтобы знак воздействия всегда совпадал со знаком скорости движения. В таком случае работа возмущающей силы $f(t)$ создает максимальную энергию системы.

Максимальным эффектом с указанной точки зрения обладает воздействие типа $f(t)$. Это возмущение таково, что оно всегда по модулю равно максимальной своей величине l, а знак его меняется в момент перехода скорости через нуль. Простой и общей иллюстрацией этих условий может служить, например, наблюдение за раскачиванием качели или маятника.

В случае действия нескольких n возмущающих сил, наибольшее отклонение $x_{\max\max}$ при одновременном действии всех возмущающих сил может быть вычислено с помощью соответствующих коэфициентов накопления h_i:

$$x_{\max\max}=\sum_{i=1}^{n} l_i h_i(\infty). \tag{226}$$

4. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Рассмотрим частные случаи.

Система первого порядка. Пусть уравнение вынужденного движения системы первого порядка будет

$$Ta\dot{\varphi}+k\varphi=f(t) \text{ и } |f(t)|\leqslant l, \tag{227}$$

которое, применяя преобразование Лапласа, можно записать в следующей форме:

$$(Tas+k)L\{\varphi(t)\}=L\{f(t)\}.$$

Если к системе приложено единичное воздействие и $\varphi(0)=0$, то переходный процесс $\varphi(t)$ будет апериодическим. Здесь максимальное значение $\varphi(t)$, очевидно, равно $\frac{1}{k}$, так как скорость системы не меняет своего знака до достижения отклонения $\frac{1}{k}$ при $t=\infty$.

Следовательно, согласно формуле (223) максимальное отклонение системы при ограниченной возмущающей силе $|f(t)|\leqslant l$ равно

$$x_{\max}=\frac{l}{k}. \tag{228}$$

Указанный вывод имеет существенное значение для ряда технологических объектов регулирования. Он означает, что для объектов регулирования, переходный процесс которых является апериодическим, наиболее опасным возмущением является однократный сброс нагрузки. От-

клонение системы, достигаемое при этом, будет наибольшим. Характер любых возмущений во времени в этом случае не имеет значения.

Система второго порядка. Пусть уравнение вынужденного движения системы второго порядка будет

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta^2 x = f(t);\ \ x_0 = \dot{x}_0 = 0, \tag{229}$$

которое можно записать в операционной форме

$$(p^2 + 2\alpha p + \beta^2)\, L\{x(t)\} = L\{f(t)\}.$$

Переходный процесс в системе $h(t)$, если корни характеристического уравнения комплексные, представим в виде

$$h(t) = \frac{1}{\beta^2}\left[1 - e^{-\alpha t}\sin(\omega_1 t + \psi)\right];\ \ \omega_1^2 = \beta^2 - \alpha^2.$$

Для определения интервалов времени, при которых $h(t)$ знакопостоянно, решим уравнение $\dot{h}(t_l) = 0$.

Для системы второго порядка искомые интервалы времени постоянны и равны следующему выражению:

$$t_{n+1} - t_n = \frac{\pi}{\omega_1}$$

$(n = 0,\ 1,\ 4,\ 3\ldots)$.

Подставляя значение t_l в формулу (223), имеем

$$h_{\max\max} = \frac{1}{\beta^2}\left\{\left[\left(1 + e^{\frac{-\pi\alpha}{\omega_1}}\right)\right] - \left[\left(1 - e^{\frac{-\pi\alpha}{\omega_1}2}\right) - \left(1 + e^{\frac{-\pi\alpha}{\omega_1}}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(1 + e^{\frac{-\pi\alpha}{\omega_1}3}\right) - \left(1 - e^{\frac{-\pi\alpha}{\omega_1}2}\right)\right] - \ldots\right\}.$$

Введя логарифмический декремент затухания, отнесенный к полупериоду

$$\gamma = e^{-\pi\frac{\alpha}{\omega_1}}, \tag{230}$$

выражение для максимального отклонения можно переписать в следующей форме:

$$\bar{x}_{\max\max} = Lh(t) = \frac{L}{\beta^2}\cdot\frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \varkappa\frac{L}{\beta^2}, \tag{231}$$

где $\varkappa = \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$ — коэфициент, характеризующий сопротивляемость системы к накоплению отклонения.

Рассмотрение формулы (231) показывает:

1) в случае, если система находится на границе устойчивости ($\alpha = 0$), максимальное отклонение становится равным ∞ и коэфициент накопления стремится к предельному значению ∞;

2) в случае повышения затухания, т. е. уменьшения γ, коэфициент накопления уменьшается, и, следовательно, уменьшается возможное максимальное отклонение системы;

3) наименьшая величина $x_{\max\max}$ соответствует линейной системе со степенью устойчивости выражения (217), равной единице, так как в этом случае $\gamma = 0$ и $\varkappa = 1$.

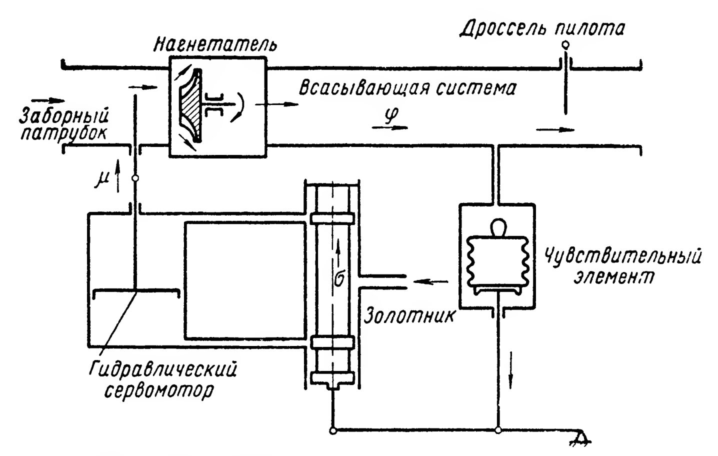
Рассмотренный случай подчеркивает особенность процесса накопления отклонений, заключающуюся в том, что явление накопления связано резонансом системы и возмущающей силы.

Вместе с тем он указывает, что наиболее неблагоприятный случай воздействия ограниченного по модулю возмущения в случае колебательного процесса в системе происходит при фазовом запаздывании $\frac{\pi}{2}$ между процессом $x(t)$ и возмущающей силой $f(t)$.

5. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ

В качестве примера рассмотрим систему регулирования наддува авиадвигателя, изображенную на фиг. 23.

Система регулирования давления состоит из нагнетателя, забирающего воздух из атмосферы, и всасывающей системы, представляющей трубо-



Фиг. 23. Принципиальная схема регулирования наддува авиадвигателя.

провод, питающий воздухом под давлением систему цилиндров авиадвигателя. Давление воздуха во всасывающей системе поддерживается дросселированием потока воздуха на входе нагнетателя. Отбор воздуха управляется дросселем, на который через систему управления авиадвигателем воздействует пилот. В частности, полным открытием дросселя осуществляется переход от режима так называемого малого газа к взлетному режиму и наоборот.

Маневры летчика предугадать нельзя, и лишь можно сказать, что наиболее резкий маневр будет заключаться в мгновенных переходах от

малого газа к взлетному режиму и наоборот. Поддержание постоянного давления во всасывающей системе осуществляется гидравлическим регулятором наддува. Давление всасывающей системы передается в корпус чувствительного элемента. Последний, управляя перемещением золотника, воздействует на гидравлический сервомотор, перемещающий дроссель на входе в нагнетатель.

Уравнения процесса регулирования даются в следующей форме:

1) уравнение выравнивания давления во всасывающей системе

$$T_a\dot{\varphi} + k\varphi = \beta + f(t);$$

2) уравнение выравнивания давления в корпусе чувствительного элемента

$$T_i\dot{\psi} + \psi = \varphi;$$

3) уравнение чувствительного элемента

$$\delta\sigma = \psi;$$

4) уравнение сервомотора

$$-T_s\dot{\mu} = \sigma.$$

В уравнениях процесса регулирования постоянные коэфициенты означают:

T_a — постоянная времени всасывающей системы;
T_i — постоянная времени регулятора;
T_s — постоянная времени сервомотора;
k — нагрузка системы;
δ — неравномерность регулирования;
$f(t)$ — воздействие.

Исключая из этой системы уравнений μ, ψ и σ, получаем следующее уравнение вынужденного движения системы регулирования (давление во всасывающей системе):

$$\delta T_a T_i T_s \dddot{\varphi} + \delta T_s (kT_i + T_a)\ddot{\varphi} + \delta k T_a \dot{\varphi} + \varphi = \delta T_i T_s \ddot{f}(t) + \frac{\delta}{2} T_s \dot{f}(t).$$

Считая, что в момент времени $t \leqslant 0$ система находилась в покое, преобразование Лапласа $L\{\varphi(t)\}$ может быть представлено в следующем виде:

$$L\{\varphi(t)\} = \frac{\frac{\delta}{n} T_i T_s s^2 + \frac{\delta}{n} T_s s}{\frac{\delta}{n} T_a T_i T_s s^3 + \frac{\delta}{n} T_s (kT_i + T_a) s^2 + \frac{\delta}{n} kT_s s + 1} L\{f(t)\},$$

где $L\{f(t)\}$ — преобразование Лапласа для воздействия.

В случае, если система автоматического регулирования устойчива, корни знаменателя будут иметь вид

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \beta i;$$
$$\lambda_3 = -l.$$

Следовательно, переходный процесс в случае приложения единичного воздействия выразится следующим образом:

$$\bar{\varphi}(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\beta t + \psi) + Be^{-lt}.$$

Воздействие $f(t)$ определяется поворотом дросселя на выходе всасывающей системы. Этот поворот дросселя связан с маневром летчика. Однако эффект маневра всегда не превышает того изменения состояния давления во всасывающей системе, которое может быть при полном мгновенном открытии или закрытии дросселя пилота. Таким образом, максимальная величина $f(t)$ — максимальный сброс нагрузки λ — определяется полным мгновенным поворотом этого дросселя:

$$|f(t)|_{\max} = \lambda_{\max}.$$

В относительных величинах λ представляет следующее отношение:

$$\lambda = \frac{\Delta m}{m_{\max}},$$

где $m_{\max}$ — полный поворот дросселя;

Δm — приращение поворота дросселя.

Очевидно, что максимальная величина сброса нагрузки $\lambda_{\max} = 1$. Для определения максимального отклонения по формуле (233) необходимо знать интервалы времени, в которых $\dot{\bar{\varphi}}(t)$ знакопостоянно. Для этого найдем производную $\dot{\varphi}(t)$ и приравняем ее нулю:

$$+A\alpha e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \psi) + A\beta e^{-\alpha t}\sin(\beta t + \psi) + Ble^{-lt} = 0.$$

Полученное выражение преобразуем к виду

$$A\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sin(\beta t + \psi + \varphi) = -Ble^{(-l+\alpha)t}\left(\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

или

$$C\sin(\beta t + \psi + \alpha) = e^{(-l+\alpha)t},$$

где

$$C = \frac{-A\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{Bl}.$$

Указанное уравнение легко решить графически.

Таким образом, можно вычислить последовательность корней t_1, t_2, $t_3, \ldots$

Согласно формуле (223) максимальное отклонение системы

$$\varphi_{\max\max}(\infty) = \lambda_{\max} 2\left[\bar{\varphi}(t_1) - \bar{\varphi}(t_2) + \bar{\varphi}(t_3) - \bar{\varphi}(t_4) + \ldots\right] = $$

$$= 2\sum_{1}^{n}|\bar{\varphi}(t_i)|.$$

В высококачественных системах автоматического регулирования про цесс колебаний $\bar{\varphi}(t)$ затухает в течение 2—3 периодов. Поэтому приближенно

$$\varphi_{\max\max} = 2\left[|\bar{\varphi}(t_1)| + |\bar{\varphi}(t_2)| + |\bar{\varphi}(t_3)|\right]\ldots$$

Таким образом, если в моменты времени t_1, t_2 и t_3 переложить дроссель из одного положения в другое, то отклонение регулируемой величины будет максимальным. Подобные повороты дросселя встречаются как редкое исключение. Однако приближенные однократные перекладки дросселя в момент t_1, обусловливающие основную часть максимально возможного отконения в системе, весьма вероятны.

Выбор параметров в этом случае может быть произведен с учетом следующих соображений.

Если статическая ошибка в системе задана, то, как известно, наименьшее значение ошибки будет тогда, когда степень устойчивости системы [6] будет равна единице. Для указанной системы последнее будет при следующем условии:

$$\frac{T_i k + T_a}{\sqrt[3]{\dfrac{(T_a T_i)^2}{\delta T_s}}} = \frac{k}{\sqrt[3]{\dfrac{T_a T_i}{(\delta T_s)^2}}} = 3.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Д., „Труды ВВИА им. Жуковского", вып. 135, 1945.
2. Булгаков Б. В., Прикладная теория гироскопов, ОНТИ, 1938.
3. Булгаков Б. В., ДАН СССР, т. 51, вып. 5, 1946, стр. 339.
4. Лурье А. И., Операционное исчисление, ГИТТЛ, 1950.
5. Уланов Г. М., „Автоматика и телемеханика", т. IX, № 3, 1948.
6. Цыпкин Я. З. и Бромберг П. В., „Труды НИСО" № 9, 1946.

ГЛАВА XXV

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Мы часто встречаемся со случаями, когда условия работы объекта регулирования либо столь мало изучены, либо столь непостоянны, что практически нельзя охарактеризовать класс реально возможных воздействий.

В этих условиях обычная постановка задачи выбора параметров системы регулирования, исходящая из предположения, что заданы воздействия или те или иные их количественные характеристики, оказывается неприменимой. Однако факт отсутствия сведений о воздействиях в ряде случаев не устраняет возможности ориентировочного предварительного выбора параметров системы регулирования. К решению этой задачи можно подойти различными путями. Один из них заключается в следующем:

а) устанавливаются некоторые количественные характеристики системы регулирования, функционально зависящие от передаточной функции системы и характеризующие влияние управляющих и возмущающих воздействий на процесс регулирования;

б) из условий экстремума этих характеристик (или их линейных комбинаций) при заданной области допустимых значений параметров определяются оптимальные значения последних [1].

Вопросу установления таких характеристик посвящена настоящая глава. Искомые характеристики в дальнейшем называются интегральными показателями качества системы регулирования, причем „интегральными"— потому, что, как мы увидим далее, они связаны с передаточной функцией системы автоматического регулирования интегральной зависимостью.

Ввиду разнообразия возможных задач регулирования нельзя ожидать, что один и тот же интегральный показатель может быть использован для характеристики динамических свойств системы автоматического регулирования во всех случаях регулирования. Следует установить по крайней мере два интегральных показателя в соответствии с двумя типовыми задачами регулирования:

а) задачей автоматической стабилизации (когда к системе автоматического регулирования предъявляется требование поддержания постоянства регулируемой величины, а причиной нарушения этого постоянства являются возмущающие воздействия);

б) задачей автоматического слежения (когда к системе автоматического регулирования предъявляется требование максимальной точности

слежения регулируемой величины за управляющим воздействием и изменение этого воздействия во времени является причиной нарушения требуемого соответствия).

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ КАЧЕСТВА СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ [1]

(степень подвижности)

Как следует из главы XV, качество процесса регулирования может быть охарактеризовано совокупностью количественных характеристик, отражающих несоответствие действительного закона изменения регулируемой величины заданному.

В задачах автоматической стабилизации заданное значение x_0 регулируемой величины является постоянной величиной.

Положим для определенности

$$x_0 = 0. \tag{234}$$

Следовательно, к оценке качества процесса автоматической стабилизации следует подходить с точки зрения приближения действительного закона изменения регулируемой величины к закону

$$x = 0. \tag{234a}$$

Если система стабилизации устойчива (в настоящей главе рассматриваются только устойчивые системы регулирования), единственно возможной причиной несоответствия действительного закона изменения регулируемой величины заданному является наличие возмущающих воздействий [2].

Воздействия, возмущающие стационарное состояние системы автоматического регулирования, в общем случае могут состоять из воздействий с плавным законом изменения, внезапно приложенных воздействий и импульсов.

Все возможные воздействия $f(t)$ могут быть разделены на две категории:

а) воздействия, вызывающие процессы типа чередования возмущенного и стационарного состояния [3];

б) воздействия, непрерывно поддерживающие возмущенное состояние системы.

При воздействиях первого типа периоды изменения функции $f(t)$ чередуются с длительными периодами ее постоянства, продолжительности не менее времени установления стационарного состояния системы $T_{уст}$. Рассматривая изолированно один период изменения функции $f(t)$, принимая начало этого периода за начало отсчета времени ($t = 0$) и считая $f(t) = 0$ до момента $t = 0$, объединим воздействия этого типа в класс А возможных возмущающих воздействий (фиг. 24а).

---

[1] Более подробно этот вопрос изложен в диссертации автора [1].

[2] На начальной стадии процесса регулирования причиной несоответствия может явиться также наличие ненулевых начальных условий. Вопрос о поведении системы регулирования в начальной стадии процесса составляет специальную задачу и в данной главе не рассматривается.

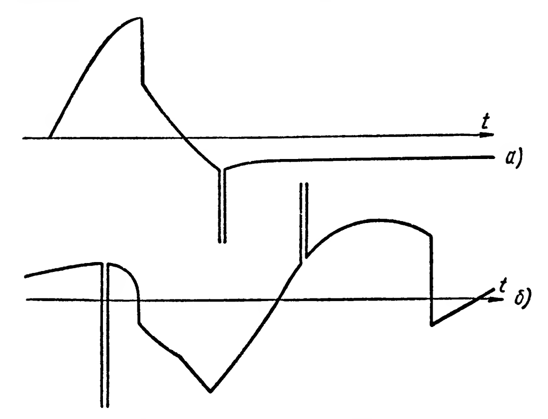
[3] Имеется в виду практическое установление стационарного состояния системы.

В класс В возможных возмущающих воздействий (фиг. 24б) объединим все возможные воздействия второго типа, причем будем предполагать, что процесс регулирования рассматривается на интервале $(-\infty, \infty)$.

Влияние возмущающих воздействий на поведение системы регулирования проявляется в двух направлениях:

а) в изменении установившегося (при воздействиях класса А) или среднего (при воздействиях класса В) значений регулируемой величины;

б) в нарушении постоянства регулируемой величины.



Фиг. 24. Основные типы возмущающих воздействий:

а — возмущающие воздействия класса А; *б* — возмущающее воздействие класса В.

Количественной характеристикой изменения установившегося или среднего значений регулируемой величины является величина этого изменения.

Возможные количественные характеристики изменения регулируемой величины весьма разнообразны и могут быть разделены на два класса: локальные, характеризующие избранные свойства процесса (например, максимальное отклонение регулируемой величины, время установления, число выбегов регулируемой величины за заданные пределы), и интегральные, характеризующие процесс в целом (например, $\int\limits_0^\infty |\dot{x}|\, dt$, $\int\limits_0^\infty \dot{x}^2 dt$, $(\dot{x}^2)_{cp}$).

Величина изменения установившегося или среднего значений регулируемой величины характеризует статические свойства процесса регулирования. Эти свойства нас интересовать не будут.

Количественные характеристики непостоянства регулируемой величины характеризуют динамические свойства процесса регулирования. Исследуя эти свойства мы будем пользоваться интегральными характеристиками, или, как мы их будем называть в дальнейшем, интегральными показателями.

Выясним возможность выбора интегрального показателя непостоянства регулируемой величины в виде[1]

$$J = \int\limits_0^\infty \left[a_0 x^2 + a_1 \dot{x}^2 + \ldots + a_{n-1}\left(x^{(n-1)}\right)^2\right] dt, \tag{235}$$

[1] Интегральная оценка (235) была предложена А. А. Фельдбаумом [2] для оценки качества процесса регулирования, вызванного ненулевыми начальными условиями; при этом автор требовал, чтобы квадратическая форма $a_0 x^2 + a_1 \dot{x}^2 + \ldots + a_{n-1}\left(x^{(n-1)}\right)^2$ была положительно определенной, т. е. чтобы все коэфициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ были положительными.

Оперируя с оценкой (235), мы снимем это ограничение, т. е. будем допускать, что некоторые коэфициенты равны нулю.

определив ограничения, которые следует наложить на коэфициенты a_0, a_1, ..., a_{n-1} для того, чтобы оценка J была применима при любых системах рассматриваемого типа и при любых возмущающих воздействиях класса А.

При решении этой задачи мы будем требовать, чтобы ни при одной системе рассматриваемого типа и ни при одном воздействии рассматриваемого класса оценка J не обращалась ни в нуль, ни в бесконечность.

Определим условия применимости оценки J в случае, когда система обладает статизмом $[Y(0) \neq 0]$ и $f(t)$ — внезапно приложенное воздействие постоянной величины.

Очевидно, в силу статизма системы

$$J = \infty \tag{236}$$

при $a_0 \neq 0$.

Следовательно, для того чтобы оценка J была применима при процессах, вызванных воздействиями класса А, необходимо, чтобы

$$a_0 = 0. \tag{237}$$

Рассмотрим действие импульса на систему с передаточной функцией $Y(s)$, удовлетворяющей условию[1]

$$\lim_{|s| \to \infty} |sY(s)| = \text{const} \neq 0. \tag{238}$$

В этом случае все производные функции $x(t)$ имеют разрыв непрерывности в точке $t = 0$. Можно показать, что при условии (238) в точке $t = 0$ функция $\dot{x}(t)$ представляет собой импульс, функция $\ddot{x}(t)$ — производную от импульса, или импульс второго порядка, и т. д. Отсюда следует, что имеет место условие (236), если хотя бы один из коэфициентов a_1, a_2, ..., a_{n-1} отличен от нуля[2].

Следовательно, оценка J может быть применима при процессах, вызванных возмущениями класса А, лишь в том случае, когда

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0. \tag{239}$$

Сравнивая условия (237) и (239), заключим, что нельзя подобрать такие значения коэфициентов a_0, a_1 ..., a_{n-1}, при которых оценка (235) имеет определенную выше область применения.

Для того чтобы установить оценку с указанной областью применения, поступим следующим образом.

---

[1] Это условие выполняется, когда порядок числителя функции $Y(s)$ на единицу ниже порядка знаменателя.

[2] Следует заметить, что, применяя оценку (235) как оценку непостоянства регулируемой величины, мы должны в качестве нижнего предела интегрирования брать значение t, меньшее $t = 0$. Это необходимо ввиду того, что прерывное изменение функции $x(t)$ или ее производных в точке $t = 0$ связано с нарушением постоянства регулируемой величины и, следовательно, должно быть учтено оценкой.

Представим произвольное возмущающее воздействие $f(t)$ в виде суммы двух слагаемых $f_1(t)$ и $f_2(t)$:

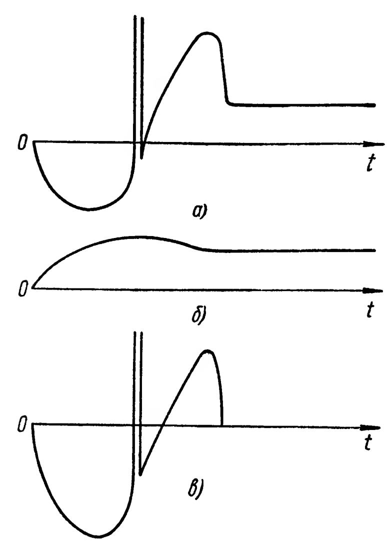
$$f(t) = f_1(t) + f_2(t), \tag{240}$$

из которых первое удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty |f_1(t)|\, dt < \infty \tag{241}$$

и второе — условию

$$\int_0^\infty |\dot{f}_2(t)|\, dt < \infty. \tag{242}$$



Фиг. 25. Разделение возмущающего воздействия класса А на составляющие:

а — возмущающее воздействие класса А; *б* — составляющая $f_2(t)$; *в* — составляющая $f_1(t)$.

Заметим, что при таком разделении функции $f(t)$ на составляющие импульсы войдут в составляющую $f_1(t)$, а „хвост“ функции $f(t)$, если $f(\infty) \neq 0$, — в составляющую $f_2(t)$ (фиг. 25).

Практически это разделение можно осуществить, например, следующим образом: задавшись величиной T (целесообразно, чтобы она была одного порядка с временем установления системы), определить $f_2(t)$ из условий

$$f_2(t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(t)\, dt;$$

$$t \geqslant \frac{T}{2}; \tag{243а}$$

$$f_2(t) = \frac{1}{t+\frac{T}{2}}\int_0^{t+\frac{7}{2}} f(t)\, dt; \quad t < \frac{7}{2}, \tag{243б}$$

а $f_1(t)$ соответственно из условия

$$f_1(t) = f(t) - f_2(t). \tag{243в}$$

Условия (243) делят воздействие $f(t)$ на плавную составляющую $f_2(t)$, с возможным начальным скачком, и быстро изменяющуюся составляющую $f_1(t)$. Так, например, воздействие, состоящее из импульса и внезапно приложенного постоянного воздействия, распадется на два: импульс войдет в составляющую $f_1(t)$, внезапно приложенное постоянное воздействие — в составляющую $f_2(t)$.

В ходе дальнейшего анализа мы будем предполагать, что выделение составляющих воздействия производится указанным способом.

В соответствии с разделением функции $f(t)$ на составляющие функция $x(t)$ также распадется на составляющие

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t). \qquad (244)$$

Для оценки непостоянства первой составляющей регулируемой величины $x_1(t)$ воспользуемся характеристикой

$$J_1 = \int_0^\infty x_1^2 dt, \qquad (245)$$

для оценки непостоянства второй составляющей $x_2(t)$ — характеристикой

$$J_2 = \int_0^\infty \dot{x}_2^2 dt. \qquad (246)$$

Показатель непостоянства регулируемой величины по суммарному процессу составим как линейную сумму[1] указанных характеристик и запишем ее в следующем виде:

$$J = \int_0^\infty x_1^2 dt + \tau^2 \int_0^\infty \dot{x}_2^2 dt. \qquad (247)$$

Коэфициент τ^2 может иметь любые положительные значения. Чем меньше значение этого коэфициента, тем более чувствительна оценка J к длительным отклонениям регулируемой величины; чем больше τ^2, тем более чувствительна оценка к нарушению плавности процесса.

В дальнейшем мы убедимся, что условия минимума соответствующих показателей качества системы регулирования не зависят от значения величин τ и T. Поэтому мы не будем интересоваться вопросом выбора рациональных значений коэфициентов τ и T, предполагая лишь, что эти коэфициенты — фиксированные числа.

Установим связь между значением оценки J, характеристиками возмущающего воздействия и передаточной функцией системы.

На основании теоремы Релея[2]

$$\int_0^\infty x_1^2 dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} |X_1(s)|^2 ds; \qquad (248)$$

$$\int_0^\infty \dot{x}_2^2 dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} |X_2'(s)|^2 ds, \qquad (249)$$

где $X_1(s)$ и $X_2'(s)$ — преобразования Лапласа функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

---

[1] Линейной суммой величин $x, y, z, \ldots$ называют выражение $ax + by + cz, \ldots$, где a, b и c — не зависящие от величин x, y, z коэфициенты.

[2] Теорема Релея гласит: если $x(t)$ и $y(t)$ — функции действительного переменного, заданные на интервале $(0, \infty)$, и $\int_0^\infty x(t) y(t) dt$ существует, то

$$\int_0^\infty x(t) y(t)\, dt = \frac{1}{4\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \{X(s)\, Y(-s) + X(-s)\, Y(s)\}\, ds,$$

где $X(s)$ и $Y(s)$ — преобразования Лапласа функций $x(t)$ и $y(t)$ [3].

Учитывая формулу связи между преобразованием Лапласа $F(s)$ функции $f(t)$, передаточной функцией системы $Y(s)$ и преобразованием Лапласа $X(s)$ функции $x(t)$

$$X(s) = Y(s) F(s), \tag{250}$$

из уравнений (248) — (250) найдем

$$\int_0^\infty x_1^2 dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} |Y(s)|^2 |F_1(s)|^2 ds \tag{251}$$

и

$$\int_0^\infty \dot{x}_2^2 dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} |Y(s)|^2 |F_2'(s)|^2 ds, \tag{252}$$

где $F_1(s)$ и $F_2'(s)$ — преобразования Лапласа функций $f_1(t)$ и $\dot{f}_2(t)$.

На основании уравнений (251) и (252) оценка J может быть представлена формулой

$$J = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \left[|F_1(s)|^2 + \tau^2 |F_2'(s)|^2 \right] |Y(s)|^2 ds. \tag{253}$$

Формула (253) устанавливает искомую связь.

Используя формулу (253), выделим наиболее неблагоприятные воздействия среди воздействий класса А.

В соответствии со свойствами воздействий, представленными неравенствами (241) и (242), выберем в качестве их основных количественных характеристик величины

$$K_0 = \int_0^\infty |f_1(t)| dt \tag{254}$$

и

$$K_1 = \int_0^\infty |\dot{f}_2(t)| dt \tag{255}$$

и сформулируем постановку задачи следующим образом: *среди воздействий с равными значениями характеристик K_0 и K_1, но различных по форме, требуется выделить такие воздействия, для которых значения оценки J максимальны.*

Для решения этой задачи докажем неравенство

$$J \leqslant \frac{K_0^2 + \tau^2 K_1^2}{\pi} \int_0^\infty |Y(j\omega)|^2 d\omega. \tag{256}$$

Представим функцию $f_1(t)$ суммой двух функций

$$f_1(t) = f_1^{\mathrm{I}}(t) + f_1^{\mathrm{II}}(t), \tag{257}$$

удовлетворяющих условиям

$$f_1^{\mathrm{I}}(t) \geqslant 0; \ f_1^{\mathrm{II}}(t) \leqslant 0. \qquad (258)$$

Пусть $x_1^{\mathrm{I}}(t)$ и $x_1^{\mathrm{II}}(t)$ — соответствующие составляющие функции $x_1(t)$. Тогда

$$\int_0^\infty [x_1^{\mathrm{I}}(t)]^2\,dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} |F_1^{\mathrm{I}}(s)|^2 |Y(s)|^2 ds \leqslant \frac{[F_1^{\mathrm{I}}(0)]^2}{\pi}\int_0^\infty |Y(j\omega)|^2 d\omega; \qquad (259)$$

$$\int_0^\infty [x_1^{\mathrm{II}}(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} |F_2^{\mathrm{II}}(s)|^2 |Y(s)|^2 ds \leqslant \frac{[F_1^{\mathrm{II}}(0)]^2}{\pi}\int_0^\infty |Y(j\omega)|^2 d\omega, \qquad (260)$$

где

$$F_1^{\mathrm{I}}(0) = \int_0^\infty f_1^{\mathrm{I}}(t)\,dt; \quad F_1^{\mathrm{II}}(0) = \int_0^\infty f_1^{\mathrm{II}}(t)\,dt. \qquad (261)$$

На основании неравенства Минковского [1]

$$\int_0^\infty [x_1(t)]^2\,dt \leqslant \left\{\sqrt{\int_0^\infty [x_1^{\mathrm{I}}(t)]^2\,dt} + \sqrt{\int_0^\infty [x_1^{\mathrm{II}}(t)]^2\,dt}\right\}^2. \qquad (262)$$

Из уравнений (259)—(262) следует:

$$\int_0^\infty [x_1(t)]^2 dt \leqslant \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^\infty |f_1(t)|\,dt\right\}^2 \int_0^\infty |Y(j\omega)|^2 d\omega. \qquad (263)$$

Аналогично можно показать, что

$$\int_0^\infty [\dot{x}_2(t)]^2 dt \leqslant \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^\infty |\dot{f}_2(t)|\,dt\right\}^2 \int_0^\infty |Y(j\omega)|^2 d\omega. \qquad (264)$$

На основании формул (263) и (264) получим

$$J \leqslant \frac{K_0^2 + \tau^2 K_1^2}{\pi}\int_0^\infty |Y(j\omega)|^2 d\omega.$$

Таким образом, неравенство (256) доказано.

---

[1] Неравенство Минковского имеет вид

$$\left\{\int_a^b |x(t) + y(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}},$$

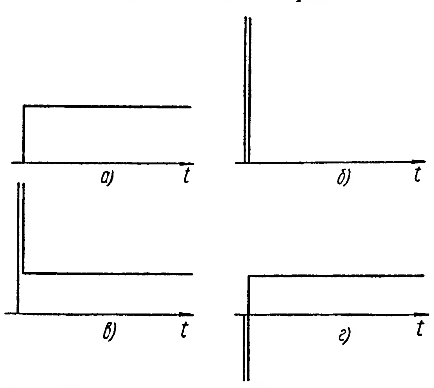
где p — произвольное число, большее единицы или равное ей.

Оно справедливо для тех значений p, при которых интегралы

$$\int_a^b |x(t)|^p dt; \quad \int_a^b |y(t)|^p\,dt$$

существуют [4].

Неравенство (256) позволяет весьма просто решить вопрос о наиболее неблагоприятных воздействиях среди воздействий подкласса, заданного фиксированными значениями величин K_0 и K_1. В самом деле, оно превращается в равенство в случае, когда $f(t)$ состоит из внезапно приложенного постоянного воздействия и импульса [1]. Следовательно, все воздействия, состоящие из указанной комбинации стандартных воздействий, являются наиболее неблагоприятными среди воздействий данного подкласса.



Фиг. 26. Наиболее неблагоприятные воздействия класса А:

а — внезапно приложенные воздействия постоянной силы; *б* — импульс; *в* и *г* — комбинации внезапно приложенного воздействия и импульса.

Варьируя величины K_0 и K_1, мы получим класс наиболее неблагоприятных воздействий. Очевидно, все воздействия этого класса имеют указанную структуру. Исключение составляют случаи $K_0 = 0$ или $K_1 = 0$, в которых одно из упомянутых типовых воздействий отсутствует.

Примеры наиболее неблагоприятных воздействий приведены на фиг. 26.

Рассмотрим теперь класс В возможных возмущающих воздействий.

Не повторяя рассуждений, аналогичных приведенным выше, условимся представлять каждое воздействие $f(t)$ класса В суммой двух составляющих: быстро изменяющейся $f_1(t)$, с нулевым средним значением, и медленно изменяющейся $f_2(t)$ [для определенности будем иметь в виду, что разделение на составляющие производится в соответствии с условием (243б)]. Соответствующие составляющие функции $x(t)$ обозначим через $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Будем предполагать, что функции $f_1(t)$ и $\dot{f}_2(t)$, а следовательно и функции $x_1(t)$ и $\dot{x}_2(t)$,—стационарные случайные процессы (см. главу XXII).

Продолжая аналогию, введем оценку непостоянства регулируемой величины в виде

$$i = (x_1^2)_{cp} + \tau^2 (\dot{x}_2^2)_{cp}, \tag{265}$$

где τ — некоторая константа.

---

[1] В этом случае имеем

$$F_1(j\omega) = K_0 = \text{const}$$

и

$$F_2(j\omega) = K_1 = \text{const},$$

откуда следует

$$\int_0^\infty x_1^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |F(0)\,Y(j\omega)|^2 d\omega = \frac{K_0^2}{\pi}\int_0^\infty |Y(j\omega)|^2 d\omega$$

и

$$\int_0^\infty \dot{x}_2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |F_2'(0)\;Y(j\omega)|^2 d\omega = \frac{K_1^2}{\pi}\int_0^\infty |Y(j\omega)|^2 d\omega.$$

Вопрос выбора количественных характеристик воздействий в случае воздействий рассматриваемого класса сложнее, чем в случае воздействий класса А. Прежде всего заметим, что выбор в качестве искомых характеристик величин $|f_1(t)|_{cp}$ и $|\dot{f}_2(t)|_{cp}$, являющийся естественным расширением аналогии, не оправдан свойствами этих характеристик; можно показать, что различным стационарным случайным процессам $f_1(t)$ [или $\dot{f}_2(t)$] с одной и той же спектральной плотностью $S_1(\omega)$ [или $S_2'(\omega)$], вообще говоря, соответствуют различные значения величины $|f_1(t)|_{cp}$ (или $|\dot{f}_2(t)|_{cp}$).

Для установления рациональных количественных характеристик воздействия обратимся сначала к некоторому частному случаю, где вопрос об искомых характеристиках решается просто, а затем обобщим результаты.

Рассмотрим случайное воздействие $f(t)$, состоящее из суммы мгновенных импульсов $N_k\delta(t-t_k)$, имеющих нулевую среднюю мощность $[(N_k)_{cp}=0]$, конечное среднее значение квадрата мощности $|(N_k^2)_{cp}=N^2|$ и случайное распределение моментов времени t_k, подчиняющееся закону Пуассона [1]. Функция $f(t)$ в этом случае согласно [5] является стационарной. Ее спектральная плотность постоянна и связана с величиной N^2 соотношением [5]

$$S(\omega)=\alpha N^2, \tag{266}$$

где α — ожидаемое число импульсов в единицу времени.

Из формулы (266) следует, что все воздействия этого вида имеют одну и ту же спектральную плотность, если

$$\alpha N^2=\text{const}.$$

Следовательно, для всех таких воздействий величина αN^2 является их естественной количественной характеристикой.

Характеристика αN^2 как мера „мощности" воздействия может быть обобщена на случай процессов более общего вида, именно, на случай процессов, состоящих из суммы воздействий класса А,

$$\varphi_k(t-t_k)$$

(t_k — момент приложения очередного воздействия), удовлетворяющих условию

$$\int_{t_k}^{\infty}|\varphi_k(t-t_k)|^2\,dt<\infty,$$

имеющих одну и ту же форму

$$\varphi_k(t-t_k)=c_k\varphi(t-t_k),$$

нулевое среднее значение величины c_k

$$(c_k)_{cp}=0,$$

[1] При законе распределения Пуассона каждая величина t_k независимо размещается на интервале $(-\infty,\infty)$, а ожидаемое число величин t_k на интервале длины Δ равно $\alpha\Delta$ (см. главу XXII).

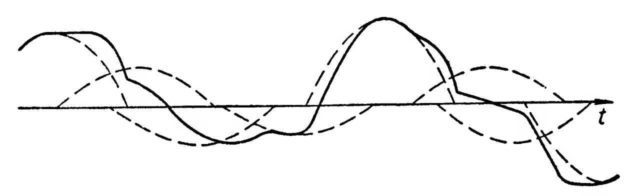
конечное среднее значение величины $(c_k^2)_{cp}$

$$(c_k^2)_{cp} = c^2$$

и случайное распределение во времени, подчиняющееся закону Пуассона с ожидаемым числом моментов приложения воздействий на интервале длины Δ, равном $\alpha\Delta$ (фиг. 27).

Для воздействий указанного типа логическим обобщением характеристики αN^2 является характеристика

$$L_0 = \alpha c^2 \left\{ \int_0^\infty |\varphi(t)| dt \right\}^2. \tag{267}$$



Фиг. 27. Стационарный случайный процесс, состоящий из суммы случайных воздействий одинаковой формы.

Можно показать, что любой стационарный случайный процесс может быть интерпретирован как процесс, составленный суммой случайных воздействий $c_k\psi(t - t_k)$ при указанных законах распределения величин c_k и t_k.

Это обстоятельство позволяет расширить область применения характеристики L_0 [уравнение (267)] до класса всех стационарных случайных процессов, образованных как составляющие $f_1(t)$ воздействий класса В (см. выше).

Для оценки „мощности“ воздействия $f(t)$ в целом количественную характеристику L_0 можно применить по отдельности к процессам $f_1(t)$ и $\dot{f}_2(t)$. Обозначив ее в последнем случае символом L_1, заметим, что „мощность“ воздействия можно характеризовать парой величин L_0 и L_1.

Сгруппируем вместе все воздействия класса В, характеризуемые одинаковыми значениями величин L_0 и L_1, и, используя оценку непостоянства регулируемой величины в форме (265), определим среди этих воздействий наиболее неблагоприятные (т. е. воздействия, для которых $i = \max$). С этой целью докажем неравенство

$$i \leqslant \frac{L_0 + \tau^2 L_1}{\pi} \int_0^\infty |Y(j\omega)|^2 d\omega. \tag{268}$$

Пусть $S_{x1}(\omega)$ — спектральная плотность процесса $x_1(t)$, $S_{\dot{x}_2}(\omega)$ — спектральная плотность процесса $\dot{x}_2(t)$, тогда

$$i = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_{x1}(\omega) d\omega + \frac{\tau^2}{\pi} \int_0^\infty S_{\dot{x}_2}(\omega) d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [S_1(\omega) + \tau^2 S_2'(\omega)]\,|Y(j\omega)|^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [\alpha_0 c_0^2 |\Psi_0(j\omega)|^2 + \alpha_1 c_1^2 |\Psi_1(j\omega)|^2]\,|Y(j\omega)|^2 d\omega, \qquad (269)$$

где $\Psi_0(j\omega)$ и $\Psi_1(j\omega)$ — преобразования Лапласа некоторых функций $\psi_0(t)$ и $\psi_1(t)$ [индексом „0" отмечены величины, характеризующие процесс $f_1(t)$, индексом „1" — процесс $f_2(t)$], удовлетворяющих вышеуказанным условиям.

Но на основании доказанного выше [см. неравенство (256)]

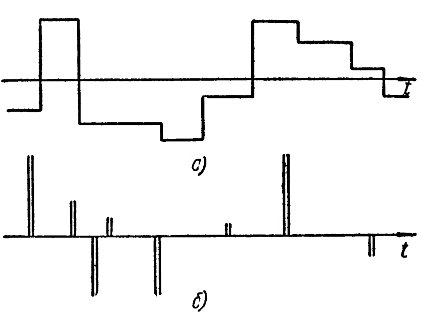
$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |\Psi_0(j\omega)|^2 |Y(j\omega)|^2 d\omega &\leqslant \int_0^\infty [\psi_0(t)]^2 dt; \\ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |\Psi_1(j\omega)|^2 |Y(j\omega)|^2 d\omega &\leqslant \int_0^\infty [\psi_1(t)]^2 dt. \end{aligned}\right\} \qquad (270)$$

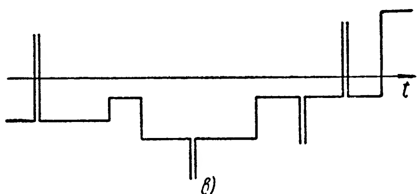
На основании формулы (269) и неравенства (270) найдем

$$i = \frac{1}{\pi}\left\{\alpha_0 c_0^2 \left[\int_0^\infty |\psi_0(t)|\,dt\right]^2 + \alpha_1 c_1^2 \left[\int_0^\infty |\psi_1(t)|\,dt\right]^2\right\}\int_0^\infty |Y(j\omega)|^2 d\omega.$$

Учтя формулу (267), получим неравенство (268).

На основании неравенства (268) наиболее неблагоприятными воздействиями среди воздействий с данными значениями характеристик L_0 и L_1 являются случайные процессы, составленные внезапно приложенными воздействиями и импульсами (мгновенными) с рассмотренными выше законами распределения их величин и моментов приложения (фиг. 28), а также воздействия иного вида, составляющие которых по спектральным характеристикам эквивалентны составляющим вышеуказанных воздействий.





Фиг. 28. Наиболее неблагоприятные воздействия класса В:

а — сумма внезапно приложенных воздействий; *б* — сумма импульсов; *в* — сумма внезапно приложенных воздействий и импульсов.

Для этих воздействий оценка непостоянства регулируемой величины i принимает вид

$$i = \frac{L_0^2 + \tau^2 L_1}{\pi}\int_0^\infty |Y(j\omega)|^2 d\omega. \qquad (271)$$

Таким образом, среди воздействия как класса А, так и класса В мы выделили наиболее неблагоприятные воздействия. Одновременно для наиболее неблагоприятных воздействий решена задача об установлении связи выбранных оценок качества регулирования с передаточной функцией системы автоматического регулирования и количественными характеристиками наиболее неблагоприятных воздействий. Эта связь устанавливается формулой, следующей из неравенства (256),

$$J = \frac{K_0^2 + \tau^2 K_1^2}{\pi} \int_0^\infty |Y(j\omega)|^2 \, d\omega \tag{272}$$

и формулой (271).

Обратимся теперь к условиям экстремума указанных оценок. Заметим, что при варьировании параметров системы автоматического регулирования в обоих случаях они сводятся к условию

$$\int_0^\infty |Y(j\omega)|^2 \, d\omega = \min.$$

На основании этого величину

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty |Y(j\omega)|^2 \, d\omega, \tag{273}$$

которую мы в дальнейшем будем обозначать символом δ, можно рассматривать как показатель качества системы автоматического регулирования. Мы будем называть ее степенью подвижности [1].

Заметим, что в силу одной из интерпретаций величины δ (см. ниже) она равна величине

$$\int_0^\infty [k_y(t)]^2 \, dt, \tag{273a}$$

где через $k_y(t)$ обозначена импульсная переходная функция. Вследствие этого, установление δ как показателя качества системы автоматического регулирования, подверженной возмущающим воздействиям, можно расценивать как обоснование выбора импульса в качестве расчетного воздействия при оценке качества системы автоматической стабилизации интегралом (273а).

2. ФИЗИЧЕСКИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ КАЧЕСТВА[1]

Интегральный показатель качества (273) (степень подвижности системы) во многих случаях имеет простой физический смысл. Рассмотрим несколько примеров.

а) В различных электрических, механических или электромеханических системах, когда в качестве рассматриваемой координаты x выбрана поступательная или угловая скорость какого-либо механического

[1] См. [1].

элемента системы или сила тока в цепи и в невозмущенном состоянии $x=0$, степень подвижности пропорциональна энергии, рассеиваемой непосредственно во вне данным элементом или цепью при импульсном воздействии на систему.

б) В системах того же типа, когда в качестве рассматриваемой координаты выбрано положение какого-либо механического элемента системы или заряд в каком-либо пункте цепи и в невозмущенном состоянии $x=\text{const}$, степень подвижности системы пропорциональна энергии, рассеиваемой непосредственно во вне данным элементом или цепью при внезапном приложении к системе постоянного воздействия.

в) При стабилизации траектории плоского движения самолета, когда в качестве рассматриваемой координаты x избран угол между возмущенной и заданной траекториями, а ускорения вдоль траектории и углы x достаточно малы, степень подвижности системы пропорциональна удлинению траектории Δs (по сравнению с траекторией невозмущенного полета) при импульсном воздействии на систему[1].

Приведем несколько геометрических интерпретаций степени подвижности.

Выражение (273) дает следующий геометрический смысл степени подвижности. Степень подвижности пропорциональна квадрату площади амплитудной частотной характеристики системы.

Далее, так как между амплитудной $|Y(j\omega)|$, активной $P(\omega)$ и реактивной $Q(\omega)$ частотными характеристиками существует соотношение

$$|Y(i\omega)|^2 = P^2(\omega) + Q^2(\omega),$$

а функции $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ связаны с импульсной переходной функцией системы сопряженными преобразованиями Фурье, степень подвижности может быть определена по формулам

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty P^2(\omega)\,d\omega; \\ \delta &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Q^2(\omega)\,d\omega. \end{aligned}\right\} \tag{274}$$

Отсюда следует, что степень подвижности пропорциональна также квадратам площадей вещественной и мнимой частотных характеристик.

Пусть ΔL — разность длины кривой, изображающей переходную функцию от момента возмущения $t=0$ до момента установления $t=T$ системы, и длины соответствующего участка оси абсцисс (фиг. 29);

---

[1]
$$\Delta s \approx \int_0^T \left(v\sqrt{1+x^2} - v\right)dt \approx \frac{v_{cp}}{2}\int_0^\infty x^2 dt = \text{const}\,\delta,$$

где T — время установления самолета на заданной траектории;
v — скорость движения;
v_{cp} — средняя скорость движения.

m_t — масштаб времени; m_x — масштаб величины x; c — тангенс угла наклона кривой, представляющей переходную функцию; l — текущая абсцисса ($l=0$ при $t=0$).

Покажем, что степень подвижности системы приближенно пропорциональна величине ΔL.

В самом деле, имеем

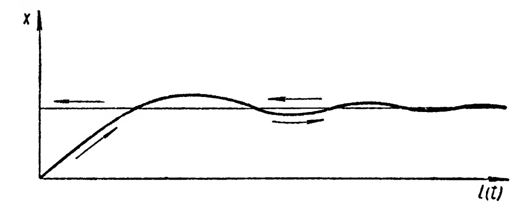
$$\Delta L = \int_0^{l(T)} (\sqrt{1+c^2}-1)\,dl. \tag{275}$$

Разложим подрадикальное выражение в ряд по степеням c^2:

$$\sqrt{1+c^2} = 1+\frac{c^2}{2}-\frac{c^4}{8}+\ldots+ + (-1)^{k+1}\left(\frac{c^2}{2}\right)^k \frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{k!}. \tag{276}$$

При $c=1$ ряд сходится.

Будем считать, что соотношение масштабов m_t и m_x таково, что это условие выполняется для всех значений c. Тогда



Фиг. 29. Связь степени подвижности с длиной кривой переходной функции.

$$\sqrt{1+c^2} = 1+ +\frac{c^2}{2}+R(c^2), \tag{277}$$

где $R(c^2)$ — остаточный член, заключенный в пределах

$$0 > R(c^2) > -\frac{c^4}{8}. \tag{278}$$

На основании формул (275) — (278) получим

$$\frac{1}{2}\int_0^{l(T)} c^2 dl > \Delta L > \frac{1}{2}\int_0^{l(T)} c^2 dl - \frac{1}{8}\int_0^{l(T)} c^4 dl > \left(\frac{1}{2}-\frac{c^2_{\max}}{8}\right)\int_0^{l(T)} c^2 dl. \tag{279}$$

Умножая обе части неравенства (279) на $2\frac{m^2{}_x}{m_t}$, найдем

$$\delta > \delta' > \frac{2m_x^2 \Delta L}{m_t} > \delta' - \frac{\delta' c^2{}_{\max}}{4}, \tag{280}$$

где

$$\delta' = \int_0^T [\dot{x}(t)]^2 dt \approx \delta.$$

Полагая, что время установления системы T выбрано из условия

$$\frac{\delta-\delta'}{\delta} \leqslant \frac{c^2_{\max}}{4},$$

из неравенства (280), найдем

$$\delta > \frac{2m_x^2}{m_t}\Delta L > \left(1-\frac{c^2_{\max}}{4}\right)^2 \delta.$$

Отсюда следует

$$\delta \approx \frac{2m_x^2}{m_t}\Delta L. \tag{281}$$

Равенство (281) выполняется с относительной погрешностью[1]

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} < \frac{c_{\max}^2}{2}. \tag{282}$$

Таким образом, действительно, степень подвижности системы приближенно пропорциональна разности длин кривой переходной функции и соответствующего участка оси абсцисс. При $\frac{m_t}{m_x} \to 0$ точность равенства (281) неограниченно возрастает.

Рассмотренные физические и геометрические интерпретации степени подвижности могут быть положены в основу графических, графо-аналитических и экспериментальных методов ее определения.

Если передаточная функция системы задана аналитически, степень подвижности может быть также определена по формуле квадратической оценки, приведенной в главе XX.

3. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ КАЧЕСТВА СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ

Выше указывалось, что качество процесса регулирования может быть охарактеризовано совокупностью количественных характеристик, отражающих несоответствие действительного закона изменения регулируемой величины заданному. Применим это определение для процесса слежения, имея в виду следящие системы астатического типа[2].

В задачах автоматического слежения под заданным законом изменения регулируемой величины понимают закон изменения управляющей величины $g(t)$.

Задача автоматического слежения формально может быть сведена к задаче автоматической стабилизации, если ввести в рассмотрение динамическую ошибку слежения[2] $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = g(t) - x(t). \tag{283}$$

В самом деле, идеальная точность слежения имеет место при $\varepsilon(t) \equiv 0$. Поэтому задача автоматического слежения величины $x(t)$ за величиной $g(t)$ эквивалентна задаче автоматической стабилизации величины $\varepsilon(t)$ при возмущении системы воздействием $g(t)$.

Основываясь на этой эквивалентности, установим интегральный показатель качества следящей системы.

Введем передаточную функцию ошибки (см. главу I)

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{G(s)}, \tag{284}$$

где $E(s)$ и $G(s)$ — преобразования Лапласа функций $\varepsilon(t)$ и $g(t)$.

---

[1] Эта оценка слишком груба. Практически условие $c_{\max} \leqslant 1$ обеспечивает точность определения δ порядка 95%.

[2] В тексте для простоты изложения рассматриваются следящие системы только этого типа.

Напомним, что порядок числителя передаточной функции $\Phi_\varepsilon(s)$ равен порядку ее знаменателя и что для астатических следящих систем

$$\Phi_\varepsilon(0)=0. \tag{285}$$

В силу общих свойств следящих систем возможные законы изменения производной управляющей величины $\dot{g}(t)$ имеют те же ограничения, что и рассмотренные ранее законы изменения возмущающего воздействия $f(t)$.

В самом деле:

а) возмущающие воздействия в задачах автоматической стабилизации могут иметь резко выраженные пики и как предельный случай импульсы, причем величина

$$\int_{t_1}^{t_2}|f(t)|\,dt$$

на любом конечном интервале $(t_1,\ t_2)$ всегда ограничена; в задачах автоматического слежения изменение управляющего воздействия за конечный промежуток времени ограничено, т. е. ограничена полная вариация функции $g(t)$:

$$\int_{t_1}^{t_2}|\dot{g}(t)|\,dt \tag{286}$$

при любых конечных значениях t_1 и t_2;

б) в задачах автоматической стабилизации установившаяся (или средняя) величина воздействия ограничена; в задачах автоматического слежения управляющее воздействие может содержать составляющую, монотонно изменяющуюся на протяжении всего процесса регулирования, скорость же изменения этой составляющей ограничена.

Учтя эти замечания, можно следящую систему заменить эквивалентной ей системой стабилизации, обладающей передаточной функцией $Y^*(s)$

$$Y^*(s)=\frac{\Phi_\varepsilon(s)}{s}, \tag{287}$$

подверженной возмущающим воздействиям $f^*(t)$:

$$f^*(t)=\dot{g}(t), \tag{288}$$

и имеющей закон изменения регулируемой величины $x^*(t)$, совпадающий с законом изменения динамической ошибки слежения $\varepsilon(t)$:

$$x^*(t)=\varepsilon(t). \tag{289}$$

Связь между передаточной функцией этой системы $Y^*(y)$ и преобразованиями Лапласа функций $x^*(t)$ и $f^*(t)$ может быть записана в виде

$$X^*(s)=Y^*(s)\,F^*(s). \tag{290}$$

Так как функции $Y^*(s)$ и $F^*(s)$ обладают свойствами функций $Y(s)$ и $F(s)$, использованными выше при установлении интегрального

показателя качества системы стабилизации, вследствие аналогии придем к следующей формуле интегрального показателя качества следящей системы ζ:

$$\zeta = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |Y^*(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left|\frac{\Phi_\varepsilon(j\omega)}{\omega}\right|^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left|\frac{1-\Phi(j\omega)}{\omega}\right|^2 d\omega. \tag{291}$$

Параметр ζ характеризует систему регулирования с точки зрения управляемости. Чем больше значение ζ, тем ниже динамическая точность слежения регулируемой величины за управляющей, т. е. тем хуже управляемость системы.

Не останавливаясь на вопросе физических и геометрических интерпретаций параметра ζ (эти интерпретации могут быть установлены по аналогии с интерпретациями степени подвижности δ), заметим лишь, что оценка ζ равна величине

$$\int_0^\infty [x(t) - x(\infty)]^2 dt \tag{292}$$

при единичном внезапно приложенном воздействии. Вследствие этого установление ζ как показателя качества системы автоматического регулирования, подверженной управляющим воздействиям, можно расценивать как обоснование выбора случая внезапного изменения управляющей величины при оценке качества следящей системы интегралом (292).

4. ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В качестве примера рассмотрим определение интегральных показателей качества системы самолет — автопилот. Ограничимся анализом курсового движения самолета.

На основании условий равновесия сил и моментов приближенные уравнения курсового движения самолета могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} &\dot\theta - A_1\beta = 0; \\ &\ddot\psi + A_2\dot\psi + A_3\beta + A_4\sigma = 0, \end{aligned}\right| \tag{293}$$

где θ — угол траектории;
β — угол скольжения;
ψ — курсовой угол;
σ — угол отклонения руля (фиг. 30);
A_1, A_2, A_3, A_4 — некоторые положительные коэфициенты, функции параметров самолета и режима полета.

Для простоты выкладок в дальнейшем будем пренебрегать собственным демпфированием самолета, считая $A_2 = 0$.

Между переменными θ, β и ψ в невозмущенной атмосфере имеет место связь

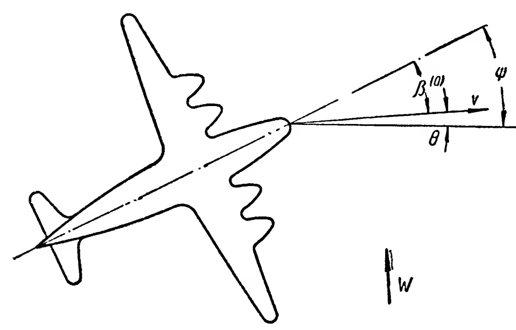
$$\theta + \beta = \psi. \tag{294}$$

Предполагая закон регулирования по отклонению и производной, уравнение идеализированного автопилота запишем в виде

$$\sigma = i_0\psi + i_1\dot{\psi}, \qquad (295)$$

где i_0 и i_1 — „передаточные отношения" автопилота.

Система автоматического регулирования, состоящая из самолета и автопилота, подвергается двум основным видам воздействия: аэродинамическим возмущающим воздействиям (связанным с ветрами) и управляющим воздействиям (связанным с изменением заданного курсового угла самолета).



Фиг. 30. Кинематические параметры, характеризующие курсовое движение самолета.

Из аэродинамических возмущающих воздействий наиболее опасны для курсового движения самолета боковые ветры: они вызывают изменение угла скольжения самолета. Обозначим через $\beta^{(0)}$ угол скольжения, который имел бы самолет при тех же значениях углов ψ и θ в невозмущенной атмосфере, и запишем связь между углами β и $\beta^{(0)}$ в виде

$$\beta = \beta^{(0)} + \Delta\beta. \qquad (296)$$

Если скорость ветра w мала по сравнению со скоростью самолета v, то

$$\Delta\beta \approx \frac{w}{v}. \qquad (297)$$

Подставив значения β по формуле (296) в выражения для аэродинамических сил и моментов и заменив условие связи (297), теряющее справедливость при полете самолета в возмущенной атмосфере, условием

$$\theta + \beta^{(0)} = \psi, \qquad (298)$$

систему уравнений (293) — (295) приведем к виду

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\theta} - A_1\beta^{(0)} = A_1\Delta\beta; \\ &\ddot{\psi} + A_3\beta^{(0)} + A_4\sigma = -A_3\Delta\beta; \\ &\theta + \beta^{(0)} - \psi = 0; \\ &i_0\psi + i_1\dot{\psi} - \sigma = 0. \end{aligned}\right| \qquad (299)$$

Перейдя к преобразованиям Лапласа и разрешив соответствующую алгебраизированную систему относительно изображения переменной ψ,

передаточную функцию замкнутой системы от возмущающего воздействия $\Delta\beta$ к регулуруемой величине ψ найдем в виде

$$Y(s) = -\frac{sA_3}{s^3 + (A_1 + i_1A_4)\,s^2 + (A_3 + i_0A_4 + i_1A_1A_4)\,s + i_0A_1A_4}. \qquad (300)$$

По формуле квадратической оценки (см. главу XX) для степени подвижности системы δ найдем

$$\delta = \frac{A_3^2}{2H}, \qquad (301)$$

где H — предпоследний детерминант Гурвица характеристического уравнения системы (299).

Для оценки управляемости самолета воспользуемся системой уравнений (293)—(295), предварительно исправив уравнение (295) с учетом изменяющегося заданного значения регулируемой величины ψ_g, именно, записав его в виде

$$\sigma = i_0(\psi - \psi_g) + i_1\dot{\psi}. \qquad (302)$$

Для передаточной функции системы найдем

$$\frac{L[\psi]}{L[\psi_g]} = W(s) = \frac{A_4(i_0 + A_1s)}{s^3 (A_1 + i_1A_4)\,s^2 + (A_3 + i_0A_4 + i_1A_1A_4)\,s + i_0A_1A_4}. \qquad (303)$$

По формулам (294) и (303) для функции $\frac{\Phi_\varepsilon(s)}{s}$ получим

$$\frac{\Phi_\varepsilon(s)}{s} = \frac{s^2 + (A_1 + i_1A_4)\,s + (A_3 + i_1A_1A_4)}{s^3 + (A_1 + i_1A_4)\,s^2 + (A_3 + i_0A_4 + i_1A_1A_4)\,s + i_0A_1A_4}. \qquad (304)$$

Применив формулу квадратической оценки, найдем

$$\zeta = \frac{(A_1 + i_1A_u)(2i_1A_1A_3A_4 + A_3^2 + i_1^2A_1^2A_4^2 + i_0A_1^2A_4) + i_0A_1A_4\,(i_1^2A_4^2 - A_3 + i_0A_4)}{2i_0A_1A_4H}. \qquad (305)$$

Формулы (301) и (305) устанавливают связь между интегральными показателями качества системы автоматического регулирования и параметрами самолета, режима полета и автопилота. Если область допустимых значений параметров [1] определена и статическое передаточное отношение i_0 выбрано, условия минимума величин δ и ζ могут быть использованы для выбора передаточного отношения i_1. Наличие двух разных исходных условий для выбора параметра i_1 связано с наличием двух различных задач, которые должен выполнять автопилот: задачи автоматической стабилизации полета в возмущенной атмосфере и задачи автоматического управления полетом.

Интересно заметить, что при заданном i_0 величина i_1 монотонно убывает с возрастанием δ, т. е. качество системы самолет-автопилот как системы стабилизации тем выше, чем выше i_1. При тех же условиях при достаточно больших значениях величины i_0 величина ζ вначале падает с ростом i_1, а затем возрастает. Следовательно, с точки зрения управляемости самолета имеется некоторое оптимальное значение коэфициента i_1, превышать которое нецелесообразно.

Отмеченные обстоятельства указывают на то, что при выборе параметров системы автоматического регулирования необходимо учитывать, какую задачу должен выполнять регулятор. В общем случае регулирования исходным условием для расчета оптимальных значений параметров регулятора может явиться условие минимума некоторого сложного интегрального показателя качества системы автоматического регулирования, составленного как комбинация интегральных параметров δ и ζ, отнесенных к различным входам системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов Ф. А., К вопросу об оптимальных условиях линейного регулирования, МАИ им. Орджоникидзе, М. 1948, диссертация.

2. Фельдбаум А. А., Интегральные критерии качества регулирования, „Автоматика и телемеханика" № 1, 1948.

3. Римский-Корсаков А. В., Вычисление энергии колебательной системы с помощью операционного исчисления, „Журнал технической физики", т. VIII, № 2, 1938.

4. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, ГИТТЛ М.—Л. 1947.

5. Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс, Теория следящих систем, ИИЛ, М. 1951.

Часть II

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

45 Коллектив авторов 1309

Часть I настоящего труда была посвящена, главным образом, решению основных задач теории автоматического регулирования в линейном приближении. Часто результаты, которые удается получить при линейной трактовке систем регулирования, имеют большую практическую ценность, хотя они и являются заведомо приближенными. Однако в ряде случаев линейные методы анализа оказываются непригодными, и поэтому становится необходимым привлечение нелинейных методов.

Нелинейное рассмотрение систем регулирования позволяет обнаружить существенно новые явления, которые могут не наблюдаться в линейных системах. Так, например, если линейная система устойчива, то она устойчива при любых начальных отклонениях от рассматриваемого состояния. В то же время нелинейная система при малых отклонениях может быть устойчива, а при больших отклонениях — неустойчива.

В случае свободных колебаний линейной системы, не находящейся на границе устойчивости, при любых начальных отклонениях возможны лишь два типа движения, при одном из которых отклонения всех координат системы асимптотически стремятся к нулю, а при другом — неограниченно возрастают; в нелинейной системе возможно значительно бо́льшее многообразие типов движений.

Здесь прежде всего необходимо указать на часто встречающееся при накладке и эксплуатации систем регулирования явление автоколебаний, представляющее собой периодическое движение, возникающее не вследствие наличия внешних по отношению к системе периодических воздействий, а вследствие собственных динамических свойств самой системы.

Проблема автоколебаний в системах регулирования имеет большое практическое значение. Обычно они недопустимы при нормальной работе, но иногда, наоборот, их вводят специально для улучшения динамических свойств этих систем. Поэтому необходимо уметь определять условия возникновения и устойчивости, средства подавления и параметры автоколебаний.

Иногда, как например, в случае релейных систем или систем с нелинейными корректирующими устройствами, линейные методы не применимы в силу самого принципа действия исследуемых систем. Наконец, может оказаться, что линейные методы дают значения показателей качества и динамической точности, существенно отличающиеся от действительных и привлечение нелинейных методов необходимо для повышения точности результатов. Но, если общая теория линейных диференциальных уравнений, на которой базировались методы анализа линейных

систем регулирования, излагавшиеся в 1 части, достаточно хорошо разработана, то, к сожалению, этого нельзя сказать про общую теорию нелинейных диференциальных уравнений.

Во времена Ньютона и Лейбница основной задачей теории диференциальных уравнений считалось нахождение общего решения возможно более широких классов уравнений в элементарных функциях или при помощи выражений, содержащих квадратуры от элементарных функций. Но скоро оказалось, что такое направление может привести к существенным результатам, в основном, лишь в случае линейных диференциальных уравнений[1].

Дальнейшими наиболее существенными для приложений и расчетов направлениями развития теории нелинейных диференциальных уравнений являются следующие: разработка приближенных и численных методов их решения, анализ устойчивости решений (работы Ляпунова), разработка качественной теории диференциальных уравнений, основателем которой был Пуанкаре.

Без сколько-нибудь существенного ограничения общности (см. главу IV, часть I) в основу анализа нелинейных систем регулирования можно положить систему уравнений первого порядка вида:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; t); \ (i = 1,2, \ldots, n).$$

Полный анализ свойств системы автоматического регулирования, описываемой приведенными уравнениями, можно было бы считать состоящим из определения всей совокупности движений, возможных в данной системе в реальных условиях ее работы и из детального исследования наиболее характерных для рассматриваемой системы типов движений (определения их числовых характеристик; показателей качества и динамической точности, амплитуд и частот автоколебаний; определения областей устойчивости и влияния на характеристики движений изменения параметров системы и т. д.). Однако в настоящее время проведение такого анализа в случаях, когда $n > 2$, обычно представляет собой большие трудности. Наиболее сложно исследование так называемых неустановившихся процессов (когда в правые части уравнений входит время t), представляющих собой существенный интерес для теории систем автоматического регулирования и, в особенности, следящих систем. Действительно, как это было показано в части I, проблема качества и проблема динамической точности в теории регулирования неразрывно связаны с анализом неустановившихся процессов, вызываемых воздействиями в виде тех или иных функций времени.

По существу, анализ неустановившихся движений в более или менее сложных нелинейных системах регулирования обычно проводят лишь при помощи тех или иных методов численного или графического интегрирования. Существенный недостаток этих методов заключается в том, что они принципиально позволяют получить каждый раз только одно частное решение, а для нахождения другого частного решения все

---

[1] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория диференциальных уравнений, ГИТТЛ, 1947.

вычисления необходимо производить заново. Ясно, что сами по себе эти методы не являются базой для создания общей теории регулирования, а могут служить лишь вспомогательным средством анализа. Поэтому полное исследование систем регулирования как при учете приложенных к ним воздействий, так и нелинейностей представляет собой обычно неразрешимую задачу и в большинстве случаев при настоящем уровне знаний приходится решать, какому способу идеализации реальных условий работы системы следует отдать предпочтение: учитывать воздействия и пользоваться линейным приближением или вводить в рассмотрение основные нелинейности и пренебрегать воздействиями.

Книга не может претендовать на полное изложение не только всех известных в настоящее время методов решения нелинейных задач, но даже и тех из них, которые в ней непосредственно затрагиваются. Вряд ли можно надеяться дать более четкое и всесторонее освещение этих вопросов, чем то, которое имеется, например в таких ставших в настоящее время уже классическими книгах, как „Теория колебаний" А. А. Андронова и С. Э. Хайкина или „Введение в нелинейную механику" Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова.

Задача книги — показать, каким образом некоторые общие методы нелинейной теории колебаний могут применяться для анализа систем регулирования и какое преломление и развитие эти методы получили благодаря специфике нелинейных задач в теории регулирования.

РАЗДЕЛ V

ПОНЯТИЕ О ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Понятия и методы качественной теории диференциальных уравнений, как это уже указывалось, были введены в теорию регулирования А. А. Андроновым. Основные особенности подхода к решению нелинейных задач, характерные для А. А. Андронова, следующие[1]:

1) исследование всей совокупности движений, возможных в данной динамической системе при различных начальных условиях;

2) геометризация этого исследования, перенесение его в фазовое пространство, изображение движения системы в виде кривой в фазовом пространстве;

3) исследование превращений, происходящих в фазовом пространстве при изменении параметров исследуемой системы.

Наиболее существенным и интересным результатом применения методов А. А. Андронова в теории регулирования было решение им совместно с А. Г. Майером классической задачи Вышнеградского о поведении паровой машины с центробежным регулятором прямого действия, обладающим как сухим, так и вязким трением. Для решения указанной задачи оказалось необходимым ввести в рассмотрение трехмерное фазовое пространство и метод точечных преобразований поверхностей.

Идеи и методы Андронова получили дальнейшее развитие в работах его учеников и последователей.

Цель настоящего раздела состоит в том, чтобы дать некоторые основные сведения, связанные с понятием о фазовом пространстве и методом точечных преобразований, и проиллюстрировать их применение к решению некоторых нелинейных задач теории регулирования.

Рассматриваемый метод в его современном состоянии позволяет для многих систем регулирования, описываемых нелинейными диференциальными уравнениями второго, а в отдельных случаях и третьего порядка:

1) произвести исследование всех возможных движений в системе при различных начальных условиях;

2) исследовать устойчивость состояния равновесия исследуемой системы при заданных конечных и начальных отклонениях, т. е. устойчивость в большом;

3) найти возможные автоколебательные состояния системы, проанализировать их устойчивость, определить параметры автоколебаний и

[1] См. доклад Г. С. Горелика на II Всесоюзном совещании по теории автоматического регулирования.

установить соотношения между параметрами, определяющие появление или, наоборот, подавление автоколебаний;

4) установить связь между качественными, а в некоторых случаях и количественными характеристиками свободных колебаний системы и ее параметрами.

Содержание раздела вкратце заключается в следующем.

В главе XXVI, являющейся первой главой настоящего раздела, сделана попытка дать примерную классификацию некоторых типичных нелинейных статических характеристик систем автоматического регулирования.

В следующей XXVII главе вводится понятие о фазовой плоскости, дается классификация ее особых точек и траекторий и приводятся примеры построения фазовой плоскости для некоторых систем регулирования. Кроме того, в этой главе вводится понятие о многолистной фазовой поверхности.

Глава XXVIII посвящена анализу фазовой поверхности систем автоматического регулирования с учетом сухого трения и люфтов.

Следующая XXIX глава содержит краткое пояснение идеи метода точечных преобразований и иллюстрации его применения к системам регулирования, содержащим элементы с неоднозначными нелинейными статическими характеристиками.

В XXX главе рассматриваются вопросы стабилизации и управления автоколебаниями релейных и близких к ним сервомеханизмов при помощи различных линейных обратных связей.

Несколько особняком стоит последняя XXXI глава раздела. В этой главе рассматривается вопрос об определении формы монотонных переходных процессов, имеющих кратчайшее время переходного процесса, совместимое с ограничениями на значения производных регулируемой величины. Здесь же излагается способ осуществления при некоторых условиях процессов, близких к указанным, при помощи введения нелинейных обратных связей.

ГЛАВА XXVI

ТИПИЧНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Как показывают исследования различных систем регулирования, влияние нелинейностей на их динамику является в ряде случаев локальным, если и вызывающим новые типы движения систем, то все же не меняющим основной характер движения, определяемый линеаризованной системой.

Однако на практике часто приходится встречаться с системами автоматического регулирования, следящими системами и усилительно-преобразовательными устройствами, или сервомеханизмами регуляторов, имеющими существенные нелинейные характеристики, которые коренным образом влияют на динамику систем.

Системы с такими существенными нелинейными характеристиками обычно не удается линеаризовать и исследовать как линейные. Такие системы исследуются на устойчивость с сохранением особенностей их нелинейных характеристик.

В задачу настоящей главы не входит рассмотрение всего многообразия нелинейных характеристик различных объектов, регуляторов и их элементов. Мы постараемся по возможности выделить из числа существенных нелинейных характеристик типичные для систем автоматического регулирования и показать, как эти типичные нелинейности могут быть представлены математически и выявлены экспериментально.

1. НЕЛИНЕЙНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Движение различных объектов регулирования, элементов регуляторов, сервомеханизмов и т. д. часто можно описать уравнениями вида:

$$A\frac{dx_i}{dt} = X_i - Y_i \quad (i = 1,2\ldots n). \tag{1}$$

Так, например, в случае двигателя ($i = 1$) $x = \omega$—угловая скорость вращения вала машины, $X = M_{дв}$ — движущий момент, а $Y = M_c$ — момент сопротивления. Коэфициент $A = J$ — момент инерции вращающихся масс.

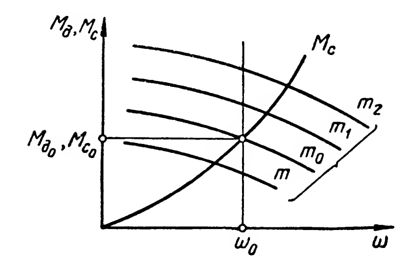
В случае газового резервуара $x = \gamma$ — плотность газа, $X = D_n$ — количество подаваемого газа в единицу времени, $Y = D_{от}$ — количество

отводимого газа в единицу времени, а коэфициент $A = V$ — емкость газового резервуара.

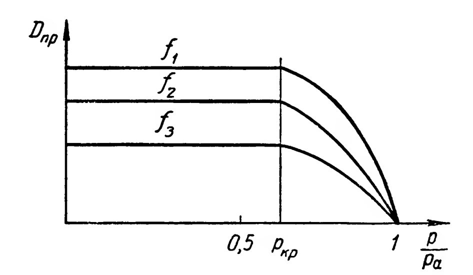
Правые части уравнений вида (1) могут являться различными функциями времени, обобщенных координат системы и их производных по времени. Коэфициенты левых частей также могут меняться как в функции времени, так и в зависимости от координат.

Исходя из задачи настоящей главы, примем, что коэфициенты левой части уравнений (1) постоянны, и остановимся лишь на зависимостях правых частей уравнений (1) от обобщенных координат и их производных.

Эти зависимости представляют характеристики машин, процессов, устройств автоматического регулирования и т. д. при разных условиях



Фиг. 1. Характеристики двигателя $M_c(\omega)$ и $M_д(m,\omega)$.



Фиг. 2. Характеристики притока газа в зависимости от противодавления p и сечения регулирующего органа f.

и режимах их работы. Каждый конкретный объект, а также регуляторы, их сервомеханизмы и т. д. имеют свои особенности, которые и отражаются этими характеристиками.

Нас будут интересовать выражения этих зависимостей при различных установившихся режимах, а потому такие характеристики, представляющие зависимость правых частей уравнений от координат в различных установившихся состояниях, называются статическими (см. гл. IV).

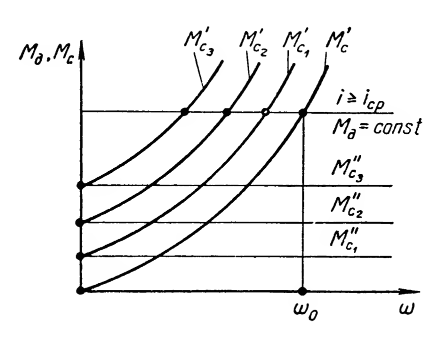
В своем большинстве характеристики систем автоматического регулирования являются нелинейными характеристиками сложного вида. Так, например, если рассматривать двигатель, основным исходным уравнением которого является вышеприведенное уравнение (1) для случая вращающихся масс, то движущий момент его зависит (приближенно) от координаты регулирующего органа m и угловой скорости ω, а момент сопротивления — от угловой скорости ω так, как это представлено на фиг. 1 (индексом o обозначено одно из равновесных состояний двигателя).

Или, если рассматривать процесс заполнения газом объема V, исходным уравнением динамики которого является уравнение, выражающее закон сохранения материи, то количество подаваемого газа в единицу времени можно представить приближенно, при постоянном давлении источника p_a в зависимости от проходного сечения регулирующего органа f и давления газа p в резервуаре характеристикой, изображенной на фиг. 2,

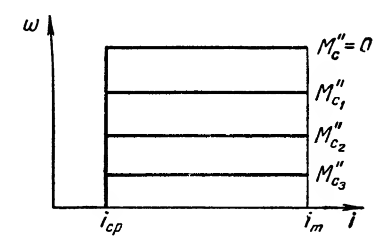
Наконец, если рассматривать процесс движения электрического сервомотора с релейным управлением, то снова исходным уравнением движения его будет уравнение (1) для случая вращающихся масс.

Движущий момент его будет зависеть от координаты входа управляющего элемента — тока реле i, а момент сопротивления — от угловой скорости и нагрузки. Тогда характеристики его для различных постоянных нагрузок будут иметь вид, графически изображенный на фиг. 3 и 4.

Отличительной особенностью некоторых характеристик звеньев систем автоматического регулирования является возможность линеаризации их, т. е. замены на некоторых участках в небольшом диапазоне прямыми, несущественно отличающимися от этих характеристик. Линеаризация характеристик может



Фиг. 3. Характеристика электропривода постоянного тока, управляемого при помощи реле (M''_c — постоянные нагрузки).



Фиг. 4. Характеристики электропривода постоянного тока, управляемого при помощи реле.

быть проведена и не для всех режимов работы систем автоматического регулирования, а для какого-либо одного, представляющего основной интерес.

В этом случае нелинейные участки характеристик около определенного положении равновесия заменяются линейными (например, касательными с угловыми коэфициентами, не равными нулю или бесконечности), и проводимое для этого случая исследование устойчивости называется исследованием устойчивости в малом, т. е. справедливым лишь при малых колебаниях системы около данного положения равновесия.

Диапазон линеаризации зависит от вида этих нелинейных характеристик и при сравнительно малой нелинейности может охватывать большинство режимов работы исследуемой системы.

Будем называть характеристики, линеаризуемые в достаточно широком диапазоне, или характеристики, диапазон линеаризации которых является не столь существенным для исследования устойчивости и качества переходных процессов систем автоматического регулирования, несущественными нелинейными характеристиками.

Наряду с несущественными нелинейными характеристиками имеются такие, линеаризовать которые нельзя без потери их существенных особенностей.

К таким характеристикам относятся нелинейные характеристики, которые либо не могут быть линеаризованы в требуемом диапазоне изменения входной величины, либо представляются функциями, которые не могут быть разложены в ряд Тейлора и пр.

Отличительной чертой таких характеристик является также разрывной характер первой, второй и т. д. производных данной функции по входной координате.

В качестве примеров устройств, имеющих такие характеристики, могут быть приведены ламповый генератор, нелинейный мост, сервомотор с постоянной скоростью, устройства, обладающие сухим трением, зазорами, релейной характеристикой и т. д.

Будем называть такие характеристики **существенно нелинейными**.

В системах автоматического регулирования встречаются устройства с разнообразными существенно нелинейными характеристиками, но за последнее время рядом исследований нелинейных систем например [1]—[12] из всего многообразия их намечен класс существенно нелинейных характеристик, которые могут быть отнесены к типичным нелинейным характеристикам систем автоматического регулирования.

Такие характеристики[1] включают в себя зоны нечувствительности, зоны (участки) линейности, зоны (участки) неоднозначности (или гистерезиса), зоны (участки) насыщения и т. п.

2. ВИДЫ ТИПИЧНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Прежде чем перейти к ознакомлению с примерами элементов и устройств систем автоматического регулирования, обладающих типичными нелинейными характеристиками, приведем различные виды их (табл. 1).

В табл. 1 приведены не все возможные виды нелинейных характеристик, а наиболее характерные и часто встречающиеся в практике регулирования.

Табл. 1 представляет примерную классификацию типичных нелинейных статических характеристик систем автоматического регулирования. Для наглядности выделения основных типичных зон и участков нелинейные характеристики представлены в апроксимированном виде с помощью кусочно-линейных функций.

Заметим, что по оси абсцисс отложена входная координата устройства $x_{вх}$, а по оси ординат — выходная координата $x_{вых}$, которые могут означать отклонения, скорости, ускорения и др. Физический смысл их будет разъяснен далее на конкретных примерах.

---

[1] В дальнейшем нелинейные характеристики разбиваются на зоны и участки. Участок характеристики, охватывающий начало координат, будем называть зоной.

Таблица 1

Виды типичных нелинейных характеристик систем автоматического регулирования

(примерная классификация)

Наименование характеристики	Вид характеристики	Краткое описание характеристики	Основные зоны (участки) нелинейной характеристики
Линейная	$x_{вых}$, $x_{вх}$	Линейная характеристика во всем диапазоне изменения входной координаты ($x_{вх}$)	Линейная зона
Нелинейная однозначная	$x_{вых}$, $x_{вх}$	Квадратичная характеристика (апроксимированная кусочно-линейной функцией)	Зона и участки линейности
То же	$x_{вых}$, $x_{вх}$	То же	То же
	$x_{вых}$, $x_{вх}$	Характеристика элемента с ограниченным изменением выходной координаты (отклонение, скорость, ускорение)	Линейная зона, участки насыщения
»	$x_{вых}$, $x_{вх}$	То же при наличии перекрытий в управляющем элементе, трения в исполнительном элементе и т. п.	Зона нечувствительности; участки линейности; участки насыщения
Нелинейная неоднозначная	$x_{вых}$, $x_{вх}$	Характеристика элемента при наличии зазора, трения	Зона неоднозначности
То же	$x_{вых}$, $x_{вх}$	То же при наличии ограничения изменения выходной координаты	Зона неоднозначности; участки насыщения

Наименование характеристики	Вид характеристики	Краткое описание характеристики	Основные зоны (участки) нелинейной характеристики
Нелинейная неоднозначная	$x_{вых}$ $x_{вх}$	То же при наличии перекрытий в управляющем элементе, предварительных натягов и т. п.	Зона нечувствительности; участки неоднозначности
То же	$x_{вых}$ $x_{вх}$	То же	Зона нечувствительности; участки неоднозначности; участки насыщения
Нелинейная неоднозначная несимметричная	$x_{вых}$ $x_{вх}$	То же. Несимметричная характеристика	То же
Нелинейная однозначная	$x_{вых}$ $x_{вх}$	Характеристика элемента с отрицательными перекрытиями (струйная трубка; и т. д.)	Отрицательная зоны нечувствительности; участки линейности
То же	$x_{вых}$ $x_{вх}$	То же при ограниченности изменения выходной координаты	Отрицательная зоны нечувствительности; участки линейности; участки насыщения

Наименование характеристики	Вид характеристики	Краткое описание характеристики	Основные зоны (участки) нелинейной характеристики
Нели́нейная		Характеристика элемента с релейным изменением выходной координаты за линейной частью	Зона линейности; зона насыщения при релейном переходе
Релейная однозначная		Характеристика релейного элемента, сервомотора с постоянной скоростью и т. п.	Участки насыщения
То же		То же при наличии межконтактного расстояния, перекрытий и т. п.	Зона нечувствительности; участки насыщения
Релейная неоднозначная		Характеристики релейного элемента при наличии зазора, кулонова трения и т. п.	Зона неоднозначности; участки насыщения
Релейная неоднозначная несимметричная		То же несимметричная характеристика	То же

Наименование характеристики	Вид характеристики	Краткое описание характеристики	Основные зоны (участки) нелинейной характеристики
Релейная неоднозначная		То же несимметричная характеристика	Зона нечувствительности; участки насыщения; участки неоднозначности
То же		Характеристики элемента с релейным управлением при учете в нем кулонова трения (сервомотор с релейным управлением при наличии трения)	Участки неоднозначности, совмещенные с участками насыщения
Линейное поле характеристик		Характеристики линейного элемента при различных значениях параметра $\bar{y}$ (например, при различных постоянных нагрузках)	Линейное поле характеристик
Нелинейное поле характеристик		Характеристики нелинейного элемента при различных значениях параметра $\bar{y}$ (сервомотор, управляемый отсечным золотником при различных постоянных нагрузках)	Нелинейное поле характеристик, отражающее произведение двух переменных
То же		То же при ограниченном изменении выходной координаты	То же

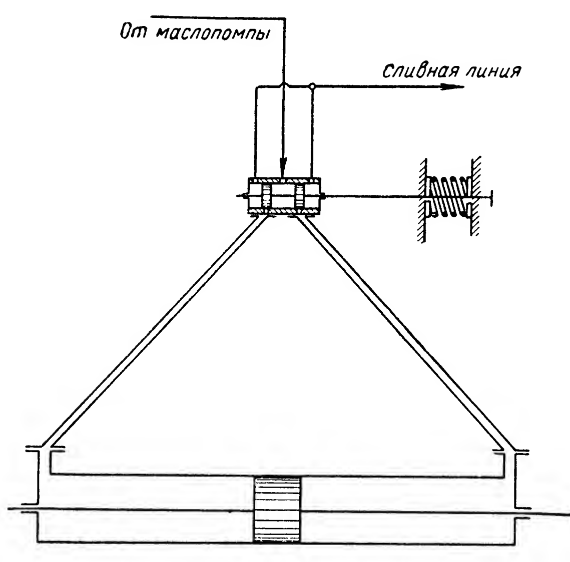
Наименование характеристики	Вид характеристики	Краткое описание характеристики	Основные зоны (участки) нелинейной характеристики
Нелинейное поле характеристик	$x_{вых}$, $\bar{y}$, $x_{вх}$	Характеристики нелинейного элемента при различных значениях параметра $\bar{y}$ и при ограничении изменения выходной координаты (сервомотор, управляемый струйной трубкой, дросселями и т. п., при различных постоянных нагрузках) и т. п.	Зона линейности (линейное поле характеристик); участки насыщения (нелинейное поле характеристик)
То же	$x_{вых}$, $\bar{y}$, $x_{вх}$	Характеристики нелинейного элемента при учете сухого трения в сервомоторе, расстояния между соплами струйного управляющего элемента и т. п.	Зона нечувствительности; участки линейности (линейное поле характеристик); участки насыщения (нелинейное поле характеристик)
Поле релейных характеристик	$x_{вых}$, $\bar{y}$, $x_{вх}$	Характеристики элемента с релейным управлением для различных постоянных нагрузок при учете межконтактного расстояния и т. п.	Зона нечувствительности; участки насыщения (нелинейное поле характеристик)
То же неоднозначное	$x_{вых}$, $\bar{y}$, $x_{вх}$	То же при учете коэфициента возврата реле и т. п.	Зона нечувствительности; участки неоднозначности; участки насыщения
Нелинейное поле характеристик	$x_{вых}$, $x_{вх}$	Характеристики элемента при учете гистерезисных свойств и зависимости от величины изменения входной координаты	Поле нелинейных неоднозначных характеристик

3. ТИПИЧНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим ряд примеров устройств автоматического регулирования, имеющих типичные нелинейные характеристики.

В качестве первого примера возьмем характеристику гидравлического сервомотора, управляемого отсечным золотником.

На фиг. 5 изображена схема этого устройства, а на фиг. 6 — его статическая характеристика $\dot{\mu} = \varphi(\sigma)$, где $\dot{\mu}$ — относительная величина скорости поршня сервомотора; σ — относительный ход золотника; T_S — время сервомотора.



Фиг. 5. Схема гидравлического сервомотора, управляемого отсечным золотником.

Характеристика представляет зависимость скорости перемещения ненагруженного поршня сервомотора от хода золотника при отключенной обратной связи. Эта характеристика является нечетной функцией и может быть представлена в следующем виде:

$$\varphi(\sigma) = -\varphi(-\sigma). \quad (2)$$

Такая нелинейная функция может быть апроксимирована с достаточной для целей практики точностью кусочно-линейной функцией, как это представлено пунктирной линией на фиг. 6.

Как действительная, так и апроксимированная функции включают в себя три типичные зоны (или участки) характеристики: зону нечувствительности, участки линейности и участки насыщения. В дальнейшем для простоты изложения будем описывать нелинейные характеристики, апроксимированные кусочно-линейной функцией.

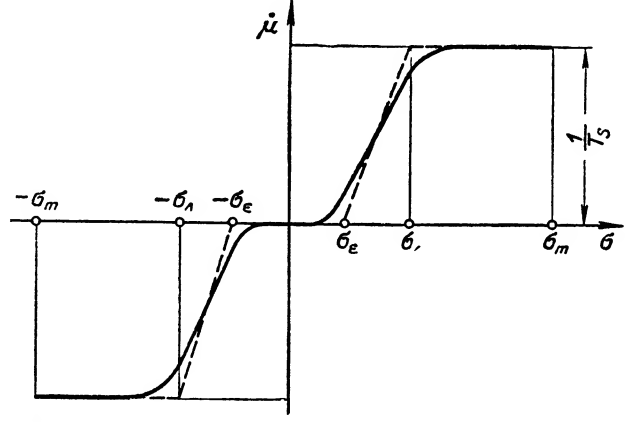
В зоне нечувствительности выходная координата сервомотора — скорость поршня его — не изменяется и равна нулю, несмотря на наличие входного сигнала.

Значения $\sigma = \pm\sigma_\varepsilon$, при которых $\dot{\mu} = 0$, определяют величину зоны нечувствительности.

В данном примере зона нечувствительности вызывается в основном наличием перекрыш поршней золотника относительно впускных окон его.

На участке линейности выходная координата изменяется примерно пропорционально величине открытия окон золотника как при открытии окна, впускающего масло в одну полость поршневого исполнительного механизма, так и при открытии окна, впускающего масло в противоположную полость.

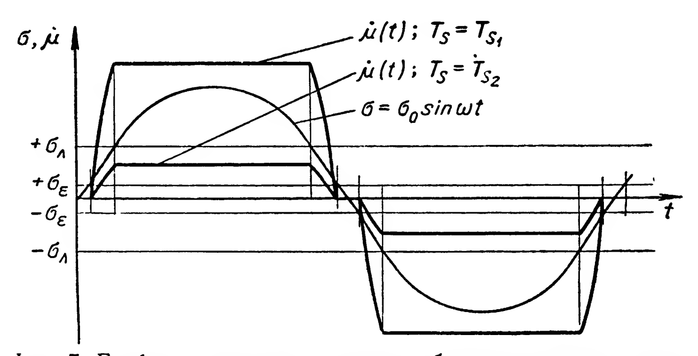
При дальнейшем перемещении золотника, если увеличения проходных сечений больше не происходит, то количество поступающего масла остается неизменным. Скорость поршня на этом участке хода золотника постоянна и не зависит от величины перемещения его.



Фиг. 6. Характеристика гидравлического сервомотора, управляемого обычным золотником.

На характеристике эти явления отражаются участком насыщения, распространяющимся от $\sigma_л$ (соответственно от $-\sigma_л$) до σ_m (также $-\sigma_m$) максимального хода золотника.

Приведенный пример отражает типичные нелинейности в системе автоматического регулирования и в то же время показывает, что характеристика такого сервомотора представляет существенно нелинейную функцию.



Фиг. 7. Графики изменения скорости безинерционного гидропривода во времени при синусоидальном колебании золотника.

Для того чтобы более наглядно показать существенную нелинейность такой характеристики, на фиг. 7 приведены графики изменения скорости гидравлического поршневого исполнительного механизма во времени при синусоидальном колебании золотника.

Покажем теперь, как нелинейная характеристика сервомотора может быть представлена математически.

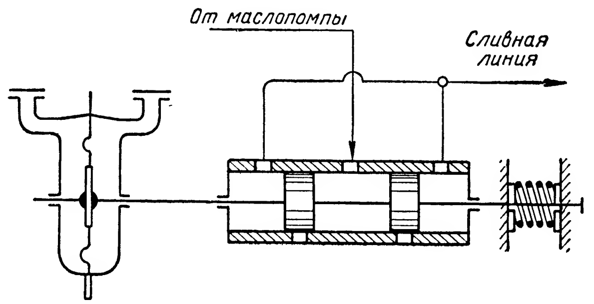
46 Коллектив авторов 1309

Математическое выражение этой характеристики для случая апроксимирования ее с помощью кусочно-линейной функции запишется в следующем виде:

$$\varphi(\sigma)=\begin{cases} +\frac{1}{T_s} \text{ при } \sigma \geqslant \sigma_л; \\ \frac{1}{T_s}(\sigma-\sigma_\varepsilon) \text{ при } \sigma \geqslant \sigma_\varepsilon; \\ 0 \text{ при } |\sigma| < \sigma_\varepsilon; \\ \frac{1}{T_s}(\sigma+\sigma_\varepsilon) \text{ при } \sigma \leqslant -\sigma_\varepsilon; \\ -\frac{1}{T_s} \text{ при } \sigma \leqslant -\sigma_л. \end{cases} \qquad (3)$$

В качестве другого примера возьмем характеристику мембранного исполнительного механизма, нагруженного гидравлическим золотником и нулевой пружиной. Схема этого устройства изображена на фиг. 8, а статическая характеристика его $\sigma = f(\rho)$ — на фиг. 9, где σ — относительный ход золотника, ρ — относительная величина перепада давления воздуха на мембране.

Характеристика представляет зависимость перемещения золотника, поджатого нулевой пружиной от перепада давления воздуха по сторонам мембраны.



Фиг. 8. Схема мембранного механизма, нагруженного золотником.

Эта характеристика, снятая при прямом и обратном ходе, т. е. при изменении перепада давления воздуха сначала в одном направлении, а затем в другом, показывает, что зависимость между σ и ρ представляет существенно нелинейную неоднозначную функцию.

В характеристике можно выделить две типичные зоны нелинейности: зону нечувствительности и участки неоднозначности. Последние имеют вид петель. Участки неоднозначности характеристики могут перекрывать частично или полностью зону нечувствительности.

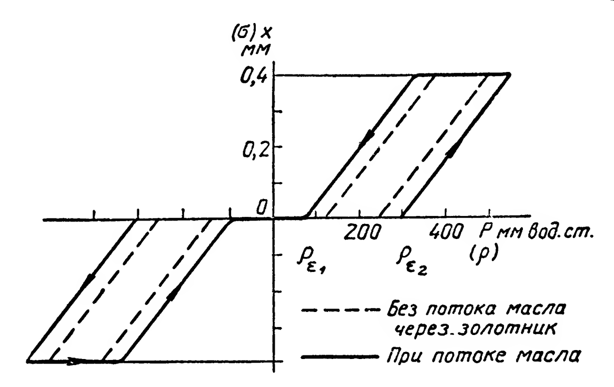
Линейные участки характеристики показывают, что на этих участках выходная координата σ изменяется (для $\rho > 0$) пропорционально разности $(\rho - \rho_{\varepsilon 2})$ при движении в одну сторону и разности $(\rho - \rho_{\varepsilon 1})$ при движении в другую сторону.

Появление зоны нечувствительности в этом примере вызывается наличием предварительной затяжки нулевой пружины и сухим трением в золотнике.

Появление участков неоднозначности вызывается наличием сухого трения в золотнике. Наклон линейных участков характеристики определяется коэфициентом жесткости нулевой пружины.

Необходимо отметить, что вид статической характеристики такого устройства во многом зависит от гидродинамических усилий, действующих на поршни золотника при протекании через него масла и особенно при открытии и закрытии окон золотника.

Для золотников с поршнями диаметром до 6 *мм* и при давлении масла на входе до 10 *кг/см*^{2} эти гидродинамические усилия сравнительно



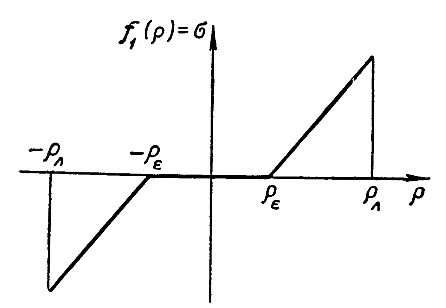
Фиг. 9. Статическая характеристика мембранного механизма, нагруженного золотником.

малы, но для золотников больших диаметров таким явлением уже нельзя пренебречь, так как оно значительно влияет на увеличение зоны нечувствительности. Явления в золотниках, связанные с гидродинамикой, сравнительно мало изучены; можно указать лишь на работу А. В. Щегляева [15], в которой приведены некоторые результаты экспериментальных исследований и рекомендации относительно конструктивного выполнения золотников.

На фиг. 9 приведена экспериментальная характеристика $\sigma = \varphi(\rho)$ при включенном и выключенном подводе масла для золотника диаметром 6 *мм* при давлении масла на входе 10 *кг/см*^{2}. Характеристика позволяет примерно выявить влияние гидродинамических усилий для данного типа золотника. Благодаря наличию сухого трения в золотнике поршень золотника остается неподвижным, пока сила, действующая на него, не превысит силы трения. Вследствие же наличия предварительной затяжки нулевой пружины поршень золотника начнет перемещаться только тогда, когда сила, действующая на золотник, будет больше не только силы трения, но и силы предварительной затяжки пружины.

Таким образом, величина зон нечувствительности будет определяться суммарной величиной сил сухого трения и предварительной затяжки пружины.

При уменьшении перепада давления воздуха на мембране, т. е. при уменьшении силы, действующей на золотник, поршень золотника остается неподвижным в отклоненном состоянии, пока перепад давлений не уменьшится на величину, соответствующую удвоенной силе трения; таким образом, ширина петли определяется удвоенной величиной силы сухого трения.

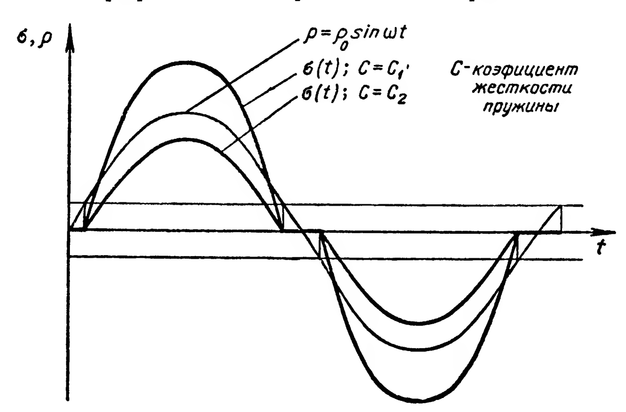


Фиг. 10. Характеристика мембранного устройства, нагруженного золотником и нулевой пружиной, при учете только предварительной затяжки ее.

Если допустить, что в золотнике нет сухого трения, то характеристика $\sigma = \varphi_1(\rho)$ при наличии только предварительной затяжки пружины будет иметь вид, графически изображенный на фиг. 10.

Графики перемещения золотника во времени при синусоидальном колебании усилия, действующего на него, приведены на фиг. 11.

Математическое описание характеристики (фиг. 10) аналогично данному ранее для характеристики (см. фиг. 6). Если же допустить, что в золотнике действуют силы сухого трения, а предварительной затяжки у нулевой пружины нет, то статическая характеристика изменится и будет иметь вид, графически изображенный на фиг. 12.



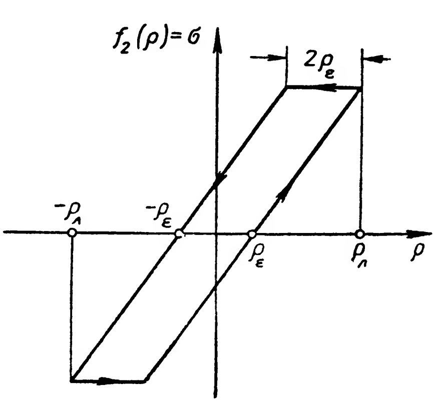
Фиг. 11. Графики перемещения золотника во времени при синусоидальном колебании перепада давления воздуха на мембранном устройстве (сдвиг по фазе между ρ и σ не учитывается; устройство рассматривается как статическое звено с характеристикой, изображенной на фиг. 10).

В этом случае статическая характеристика $\sigma = f_2(\rho)$ имеет гистерезисный вид и зависит не только от значения ρ, но и от знака скорости изменения σ.

Для наглядности представления движения элемента с такой характеристикой на фиг. 13 изображены графики изменения σ во времени при

синусоидальном колебании ρ в случае, если само устройство можно рассматривать как статическое звено с данной нелинейной характеристикой.

Характерным является появление участков „зависания“ координаты σ (на этих участках изменение σ не происходит), вызванное наличием сухого трения в золотнике. В отличие от графика фиг. 11 выходная координата σ не задерживается в зоне покоя в области нулевых значений. Эти особенности приводят к существенному различию влияния на динамику систем автоматического регулирования устройств с сухим трением и предварительной затяжкой пружины, хотя нечувствительность системы может иметь одно и то же значение.

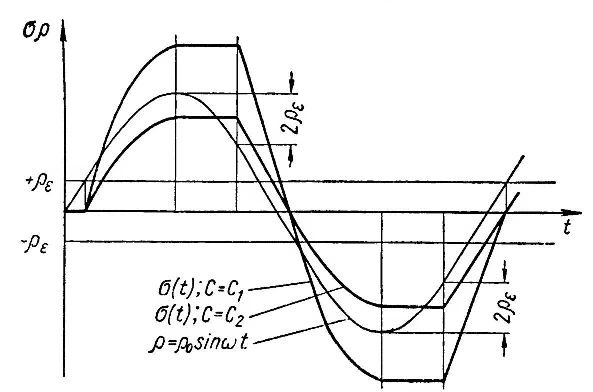


Фиг. 12. Характеристика мембранного устройства, нагруженного золотником и пружиной, при учете сухого трения в золотнике.

Характеристика устройства с сухим трением математически может быть представлена так:

$$\delta\sigma = \rho - \varepsilon \operatorname{sgn} \dot{\sigma}, \qquad (4)$$

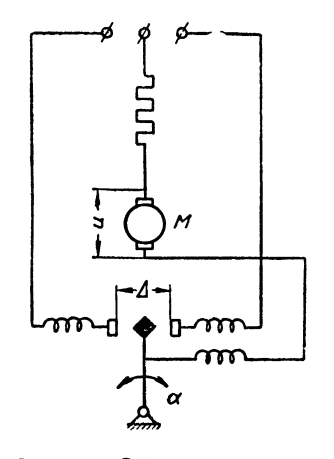
где ε — коэфициент нечувствительности, характеризующий величину силы трения, а $\operatorname{sgn} \dot{\sigma} = +1$ при $\dot{\sigma} > 0$ и $\operatorname{sgn} \dot{\sigma} = -1$ при $\dot{\sigma} < 0$. Если же



Фиг. 13. График перемещения золотника во времени при синусоидальном колебании перепада давления воздуха на мембранном устройстве (сдвиг фаз между σ и ρ не учитывается, устройство рассматривается как статическое звено с характеристикой, изображенной на фиг. 12).

$\dot{\sigma} = 0$, то уравнение заменяется соотношением $\sigma = \sigma_0$, выражающим, что в течение некоторого промежутка времени координата σ имеет неизменное значение σ_0, соответствующее моменту остановки золотника. Это означает также, что, пока входная координата не изменится

настолько, чтобы превысить силу сухого трения, выходная координата, не будет изменяться. Поэтому при изменении направления действия выходная координата начнет изменяться лишь тогда, когда значение входной координаты изменится на величину, равную удвоенному значению силы сухого трения.



Фиг. 14. Схема управления электроприводом от реле.

Характеристика устройства с сухим трением может быть еще описана и так:

$$\delta\sigma = \rho - \varepsilon, \text{ если } |\delta\sigma - \rho| > \varepsilon \text{ и } \dot{\sigma} > 0;$$

$$\delta\sigma = \rho + \varepsilon, \text{ если } |\delta\sigma - \rho| > \varepsilon \text{ и } \dot{\sigma} < 0;$$

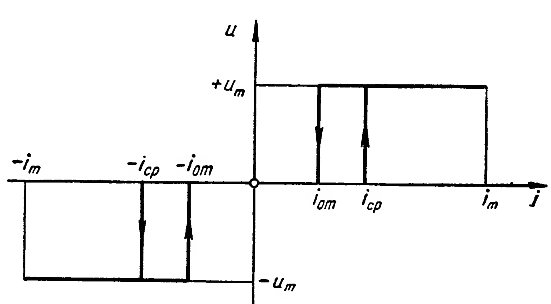
$$\sigma = \text{const}, \text{ если } |\delta\sigma - \rho| < \varepsilon. \quad (5)$$

Рассмотрим еще одну типичную нелинейную характеристику, часто встречающуюся в системах автоматического регулирования, особенно когда элементом, управляющим включением и выключением вспомогательной энергии, является электрическое реле.

В качестве примера возьмем устройство, представляющее электрический сервомотор, управляемый с помощью реле.

Схема этого устройства изображена на фиг. 14, а статическая характеристика реле — на фиг. 15.

Характеристика представляет зависимость напряжения u, включаемого реле на клеммы мотора (обычно через промежуточные рабочие реле), от тока управления i. Включенное напряжение является выходной координатой элемента, а ток управления — входной координатой. Эта характеристика представляет собой так называемую релейную характеристику, отличительной особенностью которой является то, что выходная координата — напряжение — изменяется скачком в зависимости от изменения входной координаты — тока управления — и может принимать одно из трех значений: $+u_m$, 0, $-u_m$.



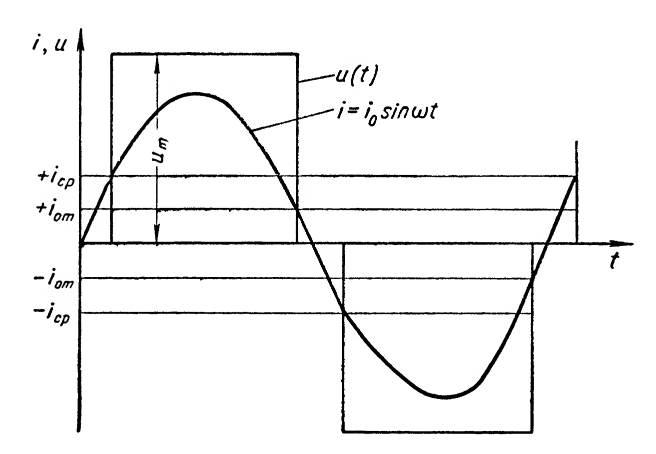
Фиг. 15. Статическая характеристика реле.

Такая характеристика является ярким примером существенно нелинейной функции.

Здесь опять можно выделить три типичные зоны нелинейности характеристики, а именно: зону нечувствительности, участки неоднозначности и участки насыщения.

Зона нечувствительности определяется величиной тока срабатывания реле, которая, в свою очередь, определяется межконтактным расстоянием, а также тем, что для срабатывания реле необходимо создать определенное давление между его подвижным и неподвижным контактами и т. п.

Участки неоднозначности представляют петли, образуемые вертикальными и горизонтальными участками характеристики. В этом случае релейного включения энергии уже нет линейных участков характеристики. Петля характеристики вызывается тем, что ток отпускания реле имеет меньшее значение, чем ток срабатывания.



Фиг. 16. График изменения напряжения и времени включаемого реле при синусоидальном колебании тока управления (устройство рассматривается как статическое звено с характеристикой, изображенной на фиг. 15).

Таким образом, для одного и того же значения тока управления в пределах тока срабатывания и тока отпускания реле могут быть два значения включаемого напряжения: $\pm u_m$ и $u = 0$.

Участки насыщения определяются релейным характером включения энергии, а именно: по достижении током управления величины, равной току срабатывания, происходит включение напряжения на полное значение, которое и остается неизменным для всех значений тока управления, больших величины тока срабатывания реле (при обратном ходе — бо́льших величины тока отпускания реле).

График изменения напряжения включаемого реле при синусоидальном колебании тока управления реле приведен на фиг. 16.

В отличие от предыдущего случая неоднозначной характеристики, вызываемой сухим трением, выходная координата (напряжение u) в области нулевых значений входной координаты равна нулю. Однако в силу разных значений токов срабатывания и отпускания реле выключение напряжения происходит с некоторым запаздыванием по сравнению с моментом включения напряжения.

В заключение приведем математическое выражение нелинейной характеристики релейного типа:

$$
\varphi(i)=\left\{\begin{array}{l}
+u_m \text{ при } i \geqslant i_{cp} \text{ и } \dfrac{di}{dt}>0; \\
\qquad i>i_{om} \text{ и } \dfrac{di}{dt}<0; \\
\qquad i>i_{om} \text{ и } \dfrac{di}{dt} \gtreqless 0, \text{ если } F(i_0)=+u_m; \\
0 \text{ при } -i_{om}<i<i_{cp} \text{ и } \dfrac{di}{dt}>0; \\
\qquad -i_{cp}<i<i_{om} \text{ и } \dfrac{di}{dt}<0; \\
\qquad |i|<i_{cp} \text{ и } \dfrac{di}{dt} \lesseqgtr 0, \text{ если } F(i_0)=0; \\
-u_m \text{ при } \quad i \leqslant i_{cp} \text{ и } \dfrac{di}{dt}<0; \\
\qquad i<-i_{om} \text{ и } \dfrac{di}{dt}>0; \\
\qquad i<-i_{om} \text{ и } \dfrac{di}{dt} \gtreqless 0, \text{ если } F(i_0)=-u_m.
\end{array}\right\} \qquad (6)
$$

Рассмотренные примеры характеристик различных устройств автоматического регулирования (гидравлического сервомотора, мембранного механизма, нагруженного золотником и нулевой пружиной, электрического реле) показывают, что в каждой из таких характеристик обнаруживаются типичные нелинейности.

Так, в первом примере типичными нелинейностями являются зона нечувствительности и участки насыщения, а также встроенные между ними линейные участки.

Во втором примере типичные нелинейности — зона нечувствительности и участки неоднозначности, причем последние представляют петли, составленные из двух линейных участков характеристики, раздвинутых между собой на ширину петли.

Во втором дополнительном примере (с сухим трением в золотнике) зона нечувствительности и участки неоднозначности совмещены, образуя зону неоднозначности в виде петли, составленной из двух линейных и двух горизонтальных участков. При этом такой вид характеристики может быть и у устройств без сухого трения, например у некоторых устройств, имеющих зазоры.

В третьем примере типичными нелинейностями являются зона нечувствительности, участки неоднозначности и участки насыщения. Отличительной особенностью такой характеристики является ее релейный вид.

Здесь также возможны разные модификации такой релейной характеристики, связанные с различными причинами, обусловившими нелинейности.

Так, возможна релейная характеристика, в которой совмещены зона нечувствительности и участки неоднозначности, образуя зону неоднозначности в виде петли, составленной из двух вертикальных и двух горизонтальных участков, например характеристика устройств с сухим трением и релейным включением энергии.

Зона нечувствительности практически всегда имеется в системах автоматического регулирования, но теоретически иногда принимается, что эта зона в силу незначительности ее отсутствует. Выходная координата реле в этом случае принимается (в пределе) равной нулю при нулевом значении входной координаты и равной максимальному значению с тем иным знаком в зависимости от направления подхода входной координаты к нулевому значению.

При отсутствии петли в релейной характеристике и зоны нечувствительности получим известную характеристику регулирующих устройств типа „да — нет" или характеристику, принимаемую для сервомотора с постоянной скоростью. Если же учитывать зону нечувствительности, то придем также к известной релейной характеристике трехпозиционного типа или к характеристике сервомотора с постоянной скоростью и зоной нечувствительности и т. п.

Таким образом, к типичным нелинейным характеристикам систем автоматического регулирования, следящих систем и сервомеханизмов могут быть отнесены характеристики, содержащие зоны нечувствительности, зоны неоднозначности, зоны насыщения, а также различные характеристики релейного типа.

Характеристики эти могут представлять разнообразные комбинации указанных выше нелинейностей, из которых некоторые могут и отсутствовать.

Следует отметить, что этим все же не исчерпывается представление о нелинейных характеристиках, поскольку приведенные нелинейности могут по-разному отражаться в уравнениях движения различных устройств автоматики. В частности, такие нелинейные характеристики могут быть у элементов систем автоматического регулирования, для которых уравнение динамики представляется возможным заменить уравнением связи между входной и выходной координатами. В этом случае нелинейности не входят в диференциальное уравнение.

Нелинейности эти могут присутствовать в характеристиках чувствительных элементов и их датчиков, в преобразующих устройствах, в усилительных устройствах, составляющих совместно со стабилизирующими устройствами сервомеханизмы и т. д.

Кроме того, нелинейности такого типа могут быть и в характеристиках связей между исполнительными элементами и регулирующими органами, а также и в характеристиках самих регулирующих органов.

Все это приводит к тому, что влияние этих типичных нелинейностей на динамику систем автоматического регулирования и их устройств различно и зависит не только от природы нелинейных характеристик, но также и от того, какому элементу системы автоматического регулирования они присущи и как отражаются в уравнениях движения.

В связи с этим целесообразно подробнее рассмотреть причины, вызывающие появление перечисленных типичных нелинейностей в характеристиках различных устройств автоматического регулирования, и их влияние на вид этих характеристик.

4. ЗОНЫ НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Дадим определение понятия нечувствительности системы автоматического регулирования.

Если на вход систем автоматического регулирования или ее элементов, обладающих нечувствительностью, подается сигнал, то пока величина этого сигнала не превысит некоторого определенного значения, на выходе систем автоматического регулирования не возникнет никакого ответного сигнала. Это пороговое значение входного сигнала определяет величину нечувствительности данного устройства или системы автоматического регулирования.

Пороговые значения входных сигналов разных знаков (разных направлений) определяют величину зоны нечувствительности.

Для выявления зоны нечувствительности снимается статическая характеристика систем автоматического регулирования или ее элемента, представляющая зависимость выходного сигнала (выходной координаты) от входного сигнала (входной координаты).

Зона нечувствительности отразится в виде некоторого участка статической характеристики, расположенного по оси абсцисс (ось входной координаты) около начала координат с ординатой (выходная координата), равной нулю.

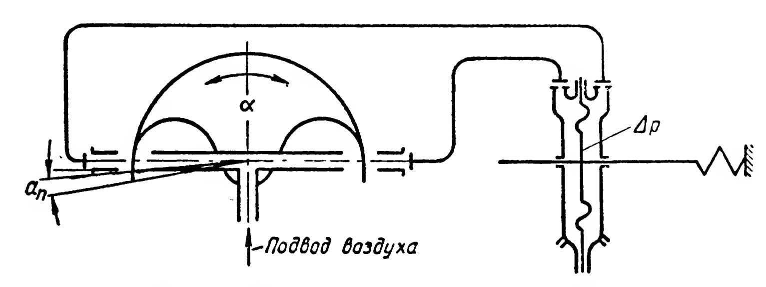
Появление зон нечувствительности в характеристиках различных элементов систем автоматического регулирования может вызываться различными причинами, зависящими от конструктивного выполнения данного устройства, типа его, вида вспомогательной энергии и т. д.

Заметим при этом, что как природа нечувствительности, так и то, в характеристике какого элемента систем автоматического регулирования имеется зона нечувствительности (чувствительного, усилительного, исполнительного и т. п.), существенно различно влияют на динамику систем автоматического регулирования. В одних случаях наличие зоны нечувствительности может вызвать неустойчивость системы или автоколебания ее, а в других случаях, наоборот, способствовать устойчивости ее и подавлению автоколебаний.

Нечувствительность систем автоматического регулирования может вызываться, например, перекрышами в управляющих элементах типа сопло — заслонка; перекрышами в пневматических и гидравлических золотниках; предварительной затяжкой нулевых пружин; сухим трением в подвижных частях различных элементов систем автоматического регулирования (чувствительном, измерительном, усилительном, исполнительном и т. д.); внешней нагрузкой постоянного действия и другими видами нагрузки; зазорами в шарнирных и зубчатых соединениях элементов систем автоматического регулирования; зазорами между контактами электрического устройства; контактным давлением в реле, определяющим ток срабатывания, и т. п.

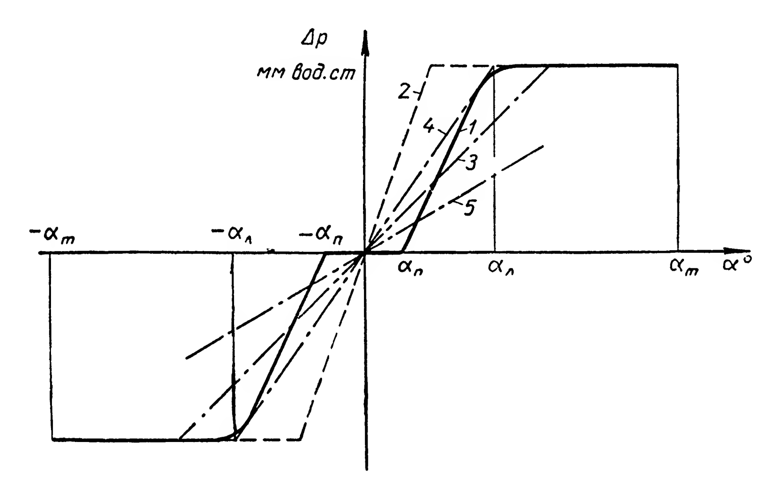
Рассмотрим ряд примеров устройств автоматического регулирования, обладающих нечувствительностью, вызванной одним из перечисленных факторов, а также, как влияет этот фактор на вид статической характеристики.

На фиг. 17 изображена схема пневматического усилителя, состоящего из управляющего элемента типа сопло — заслонка и мембранного



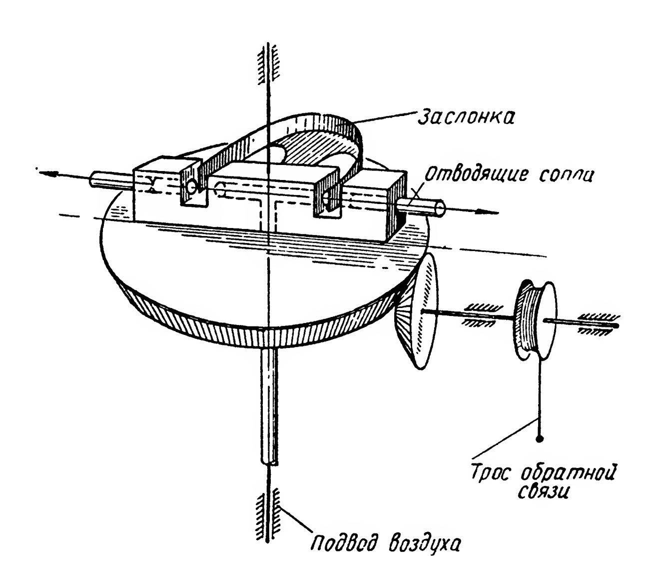
Фиг. 17. Схема пневматического усилителя.

исполнительного механизма. Входной координатой является угол поворота заслонки α, выходной координатой — перепад давлений воздуха по сторонам мембраны Δp. Статическая характеристика этого элемента изображена на фиг. 18. Характеристика — однозначная, и зона нечувствительности определяется только углом перекрыши заслонки.

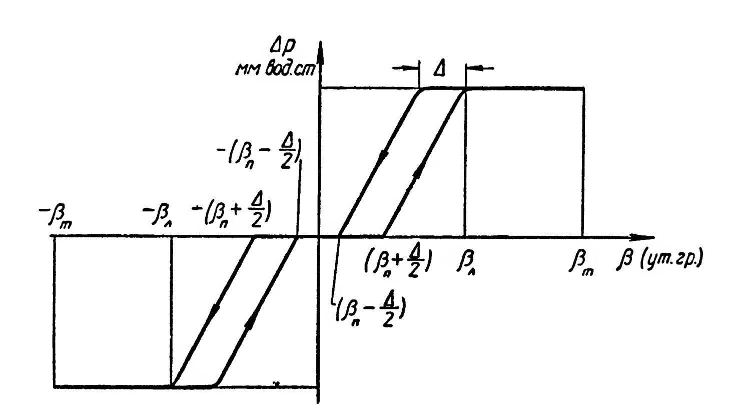


Фиг. 18. Статическая характеристика пневмоусилителя.

Если сопла пневмоусилителя приводятся через зубчатую передачу, как это изображено на фиг. 19, то статическая характеристика пневмоусилителя вследствие наличия зазора Δ в передаче будет иметь петлевой вид (фиг. 20). Входной координатой в этом случае будет угол поворота конического зубчатого колеса β. Зона нечувствительности определится не только углом перекрыши заслонки α_n, но и зазором в передаче Δ.



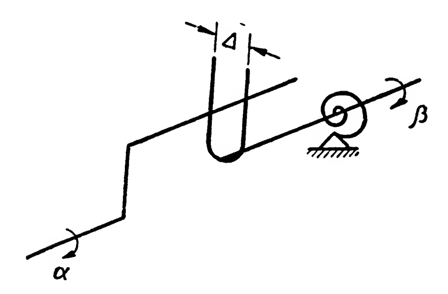
Фиг. 19. Схема управляющего элемента сопло — заслонка с приводом через зубчатую передачу (в передаче имеется зазор).



Фиг. 20. Статическая характеристика усилителя при наличии зазора в передаче.

Величина ее, приведенная к углу поворота ведущей шестерни, равна $2\left(\beta_n + \frac{\Delta}{2}\right)$.

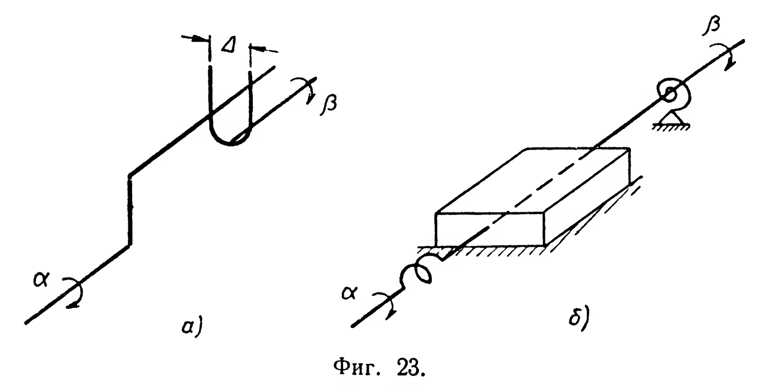
Влияние перекрыши золотника, предварительной затяжки нулевой пружины и сухого трения в золотнике на нечувствительность и соответствующие этим случаям статические характеристики нами уже рассмотрены.



Фиг. 21. Схема передающего устройства с зазором и нулевой пружиной.

Фиг. 22. Статическая характеристика передающего устройства с зазором.

На фиг. 21 изображена схема передающего устройства с зазором и нулевой пружиной, удерживающей поводок в среднем положении. Статическая характеристика такого элемента изображена на фиг. 22. Существенным здесь является то, что, несмотря на наличие зазора, характеристика не имеет петли и является однозначной. Зона нечувствительности определяется величиной зазора.



Фиг. 23.

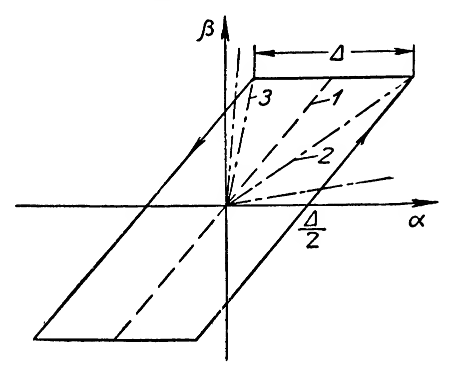
а — схема передающего устройства с зазором Δ; *б* — схема устройства, имитирующего трение вала в колодке.

Характеристика такого же устройства, но без нулевой пружины (фиг. 23, *а*), уже неоднозначна. Зона нечувствительности попрежнему равна зазору Δ (фиг. 24).

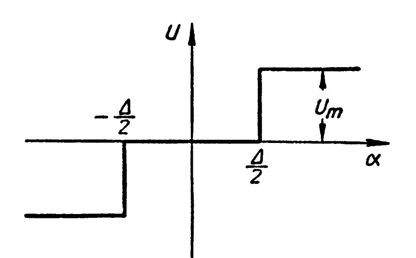
На фиг. 23, *б* изображена схема устройства, имитирующего трение вала в колодке. Момент, прикладываемый на вход, пропорционален углу

скручивания α. Величина момента сухого трения пропорциональна $\frac{\Delta}{2}$. Устройство имеет такую же характеристику, как и на фиг. 24 (с петлей, ширина которой равна Δ). Зона нечувствительности также равна Δ.

На фиг. 14 представлена элементарная схема управления электромотором с помощью реле, которую мы уже рассматривали. Пусть входной координатой является угол поворота подвижного контакта (якоря) реле α, выходной координатой — напряжение на клеммах мотора u. Если коэфициент



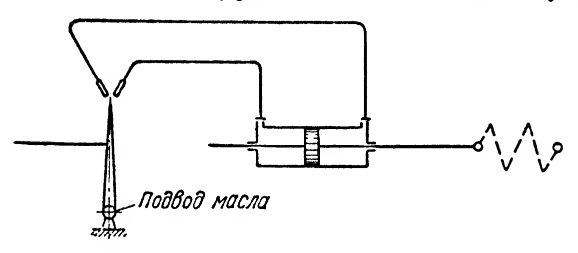
Фиг. 24. Статическая характеристика устройств.



Фиг. 25. Статическая характеристика устройств.

возврата реле можно не учитывать и считать равным единице, то статическая характеристика такой системы будет иметь вид, графически изображенный на фиг. 25. Характеристика является однозначной релейного типа. Зона нечувствительности в этом случае определяется расстоянием между контактами.

На фиг. 26 приведена схема гидравлического исполнительного механизма, управляемого струйной трубкой. В подвижных частях привода имеется трение (трение в подшипниках, в уплотнении, между поршнем и цилиндром и т. п.). Гидропривод не нагружен. Входной координатой является ход струйной трубки η, выходной координатой — скорость перемещения поршня гидропривода $\dot{\mu}$.



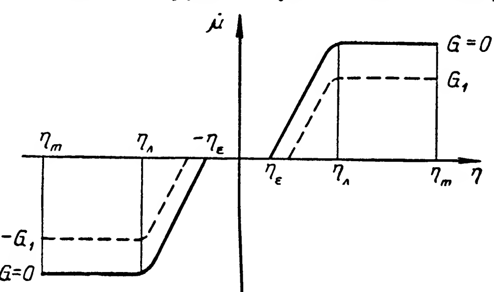
Фиг. 26. Гидропривод, управляемый струйной трубкой.

Статическая характеристика такого устройства изображена на фиг. 27. Характерным является то, что влияние сухого трения в этом случае аналогично влиянию перекрыш в отсечном золотнике. Характеристика в таких координатах не имеет петли. Попутно отметим, что сухое трение в гидроприводах с отсечными золотниками будет сказываться по-иному: в статических характеристиках типа $\dot{\mu} = F(\sigma)$ при постоянном давлении масла перед золотником проявление его нельзя будет обнаружить.

Как видно из фиг. 27, зона нечувствительности для рассматриваемого устройства определится величиной силы сухого трения.

Если такой привод со струйной трубкой работает на преодоление сопротивления, пропорционального его перемещению (пружинная нагрузка), то его статическая характеристика в координатах μ (перемещение привода) и η (отклонение струйной трубки) будет иметь петлю, ширина которой определяется величиной силы сухого трения.

Отметим, что если гидроприводу, управляемому струйной трубкой, приходится преодолевать нагрузку постоянной величины $\pm G$, то зона нечувствительности его увеличивается. Характеристика будет иметь примерный вид, изображенный на фиг. 27 пунктирной линией. В то же время у гидропривода, управляемого отсечным золотником, нагрузка такого рода не вызовет увеличения зоны нечувствительности.



Фиг. 27. Статическая характеристика гидропривода, управляемого струйной трубкой, при наличии сухого трения в приводе.

Влияние зазоров между контактами и контактного давления на нечувствительность и соответствующие этим случаям характеристики нами рассмотрены ранее.

5. ЗОНЫ ЛИНЕЙНОСТИ И ЗОНЫ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ

В зонах линейности выходная координата изменяется пропорционально разности текущего значения входной координаты и значения ее, соответствующего порогу нечувствительности. Угол наклона этой части характеристики определяет передаточный коэфициент системы автоматического регулирования или ее элемента при отсутствии зоны нечувствительности.

По мере увеличения угла наклона характеристика приближается к релейному виду.

Если характеристика устройства однозначна, то наличие зоны нечувствительности снижает передаточный коэфициент системы (условный). На фиг. 18 пунктиром изображена статическая характеристика *2* пневмоусилителя при отсутствии зоны нечувствительности, а линиями тире с точкой изображен ряд линейных апроксимаций характеристики *3*, *4* и *5*. Из этой фигуры видно, что передаточный коэфициент для различных линейных апроксимаций характеристики все же ниже, чем для устройства без зоны нечувствительности (характеристика *2*).

Если характеристика устройства неоднозначна и имеет вид петли (например, фиг. 24), то передаточный коэфициент (условный) может иметь меньшее и большее значение (характеристики *2* и *3*) по сравнению с передаточным коэфициентом устройства без люфта (характеристика *1*).

Наличие линейных участков в характеристике вызывается желанием иметь пропорциональное изменение выходной координаты для повышения устойчивости системы. Поэтому ширина зоны линейности зависит в первую очередь от условий устойчивости и качества регулирования, а кроме того, определяется и конструктивным выполнением того или иного элемента систем автоматического регулирования. В некоторых случаях в системах автоматического регулирования используются готовые элементы, у которых ширина зоны линейности выбрана по конструктивным соображениям (например, усилители, выполненные на электронных лампах).

Во многих случаях у весьма различных устройств автоматики нелинейные характеристики не имеют зоны линейности, а имеют зоны неоднозначности, представляющие в апроксимированном виде линейные участки, раздвинутые на ширину петли. При этом зоны неоднозначности могут частично или полностью перекрывать зону нечувствительности (см. фиг. 20 и 24). Этому одновременно сопутствует и раздвижение зон насыщения характеристики.

Для характеристик с зонами неоднозначности обычным является то, что в динамике выходная координата того или иного устройства изменяется по одной ветви при положительном знаке скорости и по другой ветви — при отрицательном знаке скорости изменения ее. Однако могут существовать и частные (менее характерные) виды движения, которым не будут соответствовать изменения выходной координаты по той или иной ветви в зависимости от значения входной координаты и знака ее скорости. Это обстоятельство указывает на то, что такая характеристика не может быть представлена однозначно не только как функция входной координаты, но и в виде функции входной координаты и скорости изменения ее.

Так же как и в случае зоны линейности, сужение линейных участков зоны неоднозначности приводит к увеличению угла наклона линейных участков ее, и в пределе такая характеристика переходит в характеристику релейного типа с петлей, которая будет образовываться вертикальными участками характеристики.

У некоторых устройств автоматики петлевые характеристики не остаются постоянными при любом значении входной координаты, а, например, увеличиваются (ширина петли) по мере увеличения входной координаты.

Появление зон неоднозначности в характеристиках может вызываться различными причинами и в основном тогда, когда имеется последействие. Примером такого последействия могут служить гистерезисные характеристики магнитопроводов различных электрических элементов и устройств автоматики.

Отсюда характеристики, имеющие зоны неоднозначности — петли, часто называются характеристиками гистерезисного типа.

Приведенные примеры устройств автоматики (см. фиг. 8, 17 и 19) и их нелинейные характеристики (см. фиг. 9 и 19) иллюстрируют то общее положение, что образование зон неоднозначности в характеристиках механических устройств обусловлено обычно наличием трения в их элементах, зазоров в связях и т. п.

Петлевые характеристики также часто бывают у электрических управляющих элементов автоматики релейного типа.

В заключение заметим, что наличие зон неоднозначности в характеристике систем автоматического регулирования может вызывать неустойчивые процессы или автоколебания систем. В настоящее время применяются специальные средства, позволяющие если не полностью, то в значительной мере локализовать вредное действие таких петлевых характеристик. К таким средствам относится, например, введение в схему автоматического регулирования вибрационных устройств.

6. ЗОНЫ НАСЫЩЕНИЯ

В зонах насыщения выходная координата системы автоматического регулирования или ее устройства не меняется с изменением входной координаты. В характеристике это отражается наличием участка, параллельного оси абсцисс.

Характерным примером могут служить гидравлический сервомотор и пневмоусилитель (см. фиг. 5 и 17). Для наглядности примем, что зона нечувствительности отсутствует. Тогда вслед за линейной зоной в характеристике расположатся участки насыщения. Если в линейном диапазоне для рассматриваемых случаев передаточный коэфициент системы остается постоянным, то по мере вхождения в зону насыщения значение передаточного коэфициента (условное) будет падать, т. е. передаточный коэфициент такой нелинейной характеристики всегда будет меньше, чем у ее линейной зоны. Поэтому если система автоматического регулирования с такой нелинейной характеристикой может при некотором передаточном коэфициенте (линейной зоны) приходить в расходящиеся колебания, то при отклонении выходной координаты за линейную зону передаточный коэфициент усиления будет снижаться и в системе могут установиться стационарные колебания (автоколебания).

Наличие зон насыщения в характеристиках систем автоматического регулирования объясняется ограниченными мощностями вспомогательных источников энергии, ограниченными размерами элементов и устройств и пр. При разработке тех или иных устройств стремятся повысить передаточный коэфициент, с тем чтобы получить возможно большее быстродействие системы. Однако выдерживать во всем необходимом диапазоне изменения входной координаты требуемый передаточный коэфициент часто конструктивно весьма сложно, так как это может привести к резкому увеличению потребляемых мощностей, а также габаритов, весов и т. п.

В то же время так как устойчивость обеспечивается малыми отклонениями относительно заданного состояния, для этого обычно достаточно узкого диапазона линейности характеристики. Наличие же широкого диапазона насыщения способствует быстрому возвращению регулируемого параметра системы автоматического регулирования к заданному состоянию, что повышает качество регулирования и стабилизации.

Ярким примером устройства, имеющего теоретически наибольшее быстродействие, является система автоматического регулирования с релейной характеристикой включения энергии. Однако получить при такой характеристике устойчивую систему является не таким простым делом. В том случае, если не применяются специальные стабилизирующие

средства, которые в конечном счете приводят к искусственному введению линейного участка в характеристику системы, устойчивость процесса при таких нелинейных характеристиках возможно получить лишь за счет загрубления системы, т. е. за счет увеличения зоны нечувствительности автомата.

Приведем ряд примеров, иллюстрирующих образование в характеристике зоны насыщения.

Пневмоусилитель (см. фиг. 18) в узком диапазоне изменения входной координаты (угла поворота сопел относительно заслонки) имеет линейный участок ($\alpha \approx 1{,}5$ угл. град.); в остальном диапазоне изменения входной координаты ($\alpha \approx \pm 30$ угл. град.) изменения выходной координаты (перепада давления воздуха на мембране) не происходит.

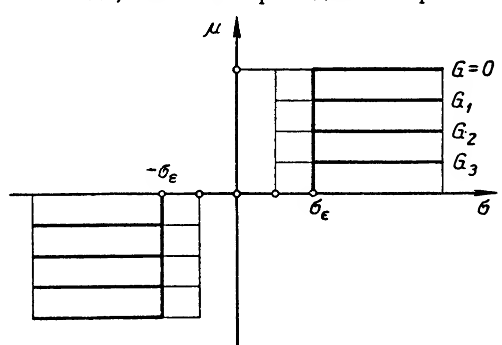
Также и у гидравлического сервомотора, управляемого отсечным золотником (см. фиг. 6). Только в небольшом диапазоне хода золотника скорость поршня изменяется примерно пропорционально открытию. Дальнейшее увеличение хода золотника уже почти не вызывает изменения скорости поршня.

Наконец, в релейном устройстве (см. фиг. 15) линейный участок вообще отсутствует в характеристике, состоящей из зоны нечувствительности и зоны насыщения (без учета зоны неоднозначности).

7. ПОЛЕ КРИВЫХ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ ХАРАКТЕРИСТИКУ СЕРВОМОТОРА С НАГРУЗКОЙ

Остановимся кратко на новом представлении характеристики сервомотора с нагрузкой.

В отличие от обычного представления характеристики сервомотора без нагрузки в том виде, как это приводится в работах Б. В. Булга-



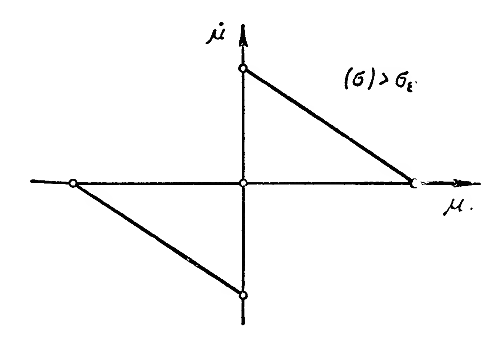
Фиг. 28. Характеристики сервомотора с постоянной скоростью для ряда постоянных нагрузок.

кова, А. А. Андронова, В. А. Котельникова и т. д., а также здесь на фиг. 6, характеристику сервомотора при работе его под нагрузкой целесообразно представлять семейством кривых, которые могут быть названы полем характеристик сервомотора с нагрузкой.

В качестве примера возьмем электрический сервомотор с постоянной скоростью, управляемый реле при нагрузке, изменяющейся пропорцио-

нально выходной координате его. Характеристику такого сервомотора удобно представить семейством кривых, соответствуюших ряду постоянных по величине нагрузок.

Такие характеристики позволяют обычно легко установить связь между выходной координатой (скоростью), входной координатой и нагрузкой, изменяющейся пропорционально выходу.



Фиг. 29. Зависимость скорости сервомотора от нагрузки, изменяющейся пропорционально ходу.

На фиг. 28 изображено поле характеристик такого сервомотора, а на фиг. 29 — зависимость выходной координаты (скорости) от нагрузки, преодолеваемой сервомотором.

Последняя характеристика получается из первой построением в новых координатах.

8. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ВЫЯВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Установленная в настоящее время методика экспериментального выявления типичных нелинейностей системы автоматического регулирования заключается в снятии статических характеристик двух видов.

К первому виду относятся статические характеристики системы или устройства в замкнутом состоянии при отсутствии нагрузки и при нагрузке, характер изменения которой имеет место в действительности.

Ко второму виду относятся статические характеристики системы или устройства в разомкнутом состоянии при отсутствии нагрузки и при нагрузках, постоянных по величине.

Первый вид характеристик снимается для прямого и обратного хода, т. е. сначала снимается ряд точек при увеличении входной координаты, а затем — при уменьшении ее.

Эти характеристики позволяют выявить зону нечувствительности и зону насыщения устройства по выходной координате, обычно определяющей положение следующего элемента схемы или регулирующего органа. Одновременно с этим, и в этом главное, вследствие снятия характеристики при прямом и обратном ходе выявляется и зона неоднозначности характеристики, т. е. петля ее.

Второй вид характеристик обычно представляет зависимость скорости изменения выходной координаты от изменения входной координаты.

Эти характеристики также позволяют выявить зону нечувствительности устройства, но установить с их помощью природу этой зоны обычно нельзя.

Однако главное здесь в том, что такие характеристики позволяют установить, как изменяется скорость на выходе системы или устройства в зависимости от входного сигнала.

Примером такой характеристики могут служить различные характеристики сервомоторов (см. фиг. 6 и 27).

Наконец, эти характеристики при разных постоянных нагрузках представляют поле характеристик, позволяющих выявить влияние нагрузки на скорость изменения выходной координаты.

В заключение отметим, что как тот, как и другой вид характеристик совершенно необходим при снятии динамических и, в частности, частотных характеристик устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А. и Хайкин С. Э., Теория колебаний, ОНТИ, 1937.
2. Андронов А. А., Баутин Н. Н. и Горелик Г. С., „Автоматика и телемеханика" № 1, 1946.
3. Булгаков Б. В., ПММ, т. VII, вып. 2, 1943.
4. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. ГИТТЛ, 1951.
5. Фельдбаум А. А., Введение в теорию нелинейных цепей, ГЭИ, 1948.
6. Айзерман М. А,, Введение в динамику автоматического регулирования двигателя, Машгиз, 1950.
7. Айзерман М. А., „Известия ОТН" № 12, 1945.
8. Солодовников В. А., „Известия ОТН" № 12, 1945.
9. Сборник статей под ред. Хейфеца, Исследования в области регулирования паровых турбин, ГЭИ, 1950,
10. Гольдфарб Л. С., „Автоматика и телемеханика" № 5, 1947.
11. Петров В. В., „Автоматика и телемеханика" № 1, 1951.
12. Петров В. В. и Уланов Г. М., „Автоматика и телемеханика" № 5, 1950, № 5, 1951, № 2 и № 6, 1952.
13. Щегляев А. В., Регулирование паровых турбин, ОНТИ, 1938.

ГЛАВА XXVII

ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Среди методов анализа нелинейных систем метод, основанный на понятии фазового пространства, отличается своей геометрической наглядностью и возможностью получения полного представления о характере возможных движений в системе.

Несмотря на то, что область применения этого метода ограничена системами не выше третьего порядка, он иногда полезен и для проверки различных приближенных методов, применимых к системам более высокого порядка.

Сущность уже давно введенного способа описания поведения динамических систем с помощью геометрических представлений заключается в следующем.

Состояние системы, имеющей n степеней свободы, т. е. описываемой диференциальным уравнением (или системой диференциальных уравнений) порядка $2n$, задается $2n$ числами.

Эти $2n$ чисел можно рассматривать как задание некоторой точки в $2n$-мерном пространстве, причем каждой точке этого пространства будет соответствовать одно определенное состояние (определенная фаза) системы. Поэтому такое пространство называется *фазовым пространством*.

Для систем, описываемых диференциальным уравнением второго порядка, фазовое пространство является двумерным и в частном случае превращается в фазовую плоскость [1], [2].

В настоящей главе дается понятие о фазовой плоскости, излагается способ построения ее и приводятся примеры построения для некоторых систем регулирования; кроме того, вводится понятие о многолистных фазовых поверхностях, необходимых для изучения нелинейных систем регулирования, имеющих элементы с неоднозначными статическими характеристиками.

1. ПОНЯТИЕ О ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим для пояснения идеи фазового представления процесса регулирования вначале пример линейного уравнения второго порядка. Возьмем систему регулирования, в которую входит объект с самовыравниванием (апериодическое звено), астатический сервомотор переменной скорости (интегрирующее звено) и безинерционный чувствительный элемент.

Уравнения системы будут:

уравнение объекта регулирования

$$T_a\dot{\varphi}+\rho\varphi=-\mu; \tag{7}$$

уравнение чувствительного элемента

$$\delta\eta=\varphi; \tag{8}$$

уравнение золотника

$$\sigma=\eta; \tag{9}$$

уравнение сервомотора

$$T_s\dot{\mu}=\sigma. \tag{10}$$

Исключая отсюда переменные μ, σ и η, получаем линейное диференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{\varphi}+\frac{\rho}{T_a}\dot{\varphi}+\frac{1}{T_aT_s\delta}\varphi=0. \tag{11}$$

Обозначим $\varphi=x$; $\frac{\rho}{T_a}=2b$; $\frac{1}{T_aT_s\delta}=\omega_0^2$, тогда получаем уравнение движения в виде

$$\ddot{x}+2b\dot{x}+\omega_0^2x=0. \tag{11a}$$

Это уравнение легко проинтегрировать.

Для обозрения движений, возможных в системе, будем рассматривать переходный процесс на плоскости, в которой по оси абсцисс отложено отклонение x, а по оси ординат скорость $y=\dot{x}$. Такая плоскость называется фазовой плоскостью.

Рассмотрим вначале случай, когда самовыравнивание $\rho=0$. При этом $b=0$, и уравнение движения

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=0. \tag{12}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x&=A\sin(\omega_0t+\alpha) \\ \text{и}\quad y&=A\omega_0\cos(\omega_0t+\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Для того чтобы получить изображение переходного процесса на плоскости x, y, необходимо исключить время из уравнений (13). Получаем

$$\sin(\omega_0t+\alpha)=\frac{x}{A}; \quad \cos(\omega_0t+\alpha)=\frac{y}{A\omega_0}.$$

Возводим в квадрат и складываем обе части последних выражений:

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{A^2\omega_0^2}=1. \tag{14}$$

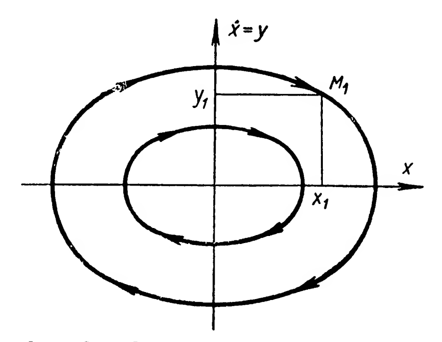
На плоскости x, y уравнение (14) представляет семейство подобных эллипсов с полуосями A и $A\omega_0$ (фиг. 30).

Пусть в момент $t=t_1$ состояние системы характеризуется отклонением x_1 и скоростью y_1. Эти значения x_1 и y_1 однозначно определяют

на фазовой плоскости точку (x_1, y_1), которая называется изображающей (или представляющей) точкой.

Каждой точке (x, y) фазовой плоскости соответствует одно определенное состояние системы, характеризуемое отклонением x и скоростью y. Если с течением времени состояние системы, т. е. ее отклонение и скорость изменяются, то изображающая точка перемещается по некоторой кривой, называемой фазовой траекторией системы. Фазовая плоскость с изображенными на ней траекториями называется фазовой диаграммой. Для системы, имеющей уравнение движения (12), фазовыми траекториями являются эллипсы уравнения (14).

Движение изображающей точки M_1 с возрастанием времени будет происходить в направлении часовой стрелки. Действительно, пока скорость положительная, т. е. изображающая точка находится в верхней полуплоскости, отклонение возрастает. Следовательно, изображающая точка движется слева направо; если $y < 0$, т. е. изображающая точка находится в нижней полуплоскости, то x уменьшается, т. е точка перемещается справа налево.



Фиг. 30. Фазовая диаграмма консервативной системы.

Из фиг. 30 легко сделать выводы о поведении системы регулирования, описываемой уравнением (12) или, что то же, уравнением (11) при $\rho = 0$.

Вся фазовая плоскость заполнена вложенными друг в друга замкнутыми кривыми — эллипсами. Каждой замкнутой кривой на фазовой плоскости соответствует некоторое периодическое движение в регулируемой системе.

Действительно, пусть в некоторый момент $t = t_1$ система имеет отклонение x_1 и скорость y_1; с возрастанием времени изображающая точка будет перемещаться по фазовой траектории и через некоторый конечный промежуток времени τ снова придет в точку с координатами x_1, y_1. Начиная с момента $t = t_1 + \tau$, движение точки будет в точности повторять предыдущее движение, через промежуток времени τ с момента $t = t_1 + 2\tau$ движение снова будет повторяться и т. д. до бесконечности.

Так как фазовая плоскость уравнения (12) заполнена бесчисленным множеством замкнутых кривых, то в системе, описываемой исходным уравнением (11) при $\rho = 0$, возможно бесчисленное множество различных периодических движений.

Системы, в которых возможно бесчисленное множество периодических движений, непрерывно переходящих одно в другое, называются консервативными. В таких системах характер движения зависит от начальных условий, и однажды начавшиеся колебания уже не прекращаются, хотя и не нарастают. Поэтому практически система регулирования, для которой фазовая диаграмма имеет вид, графически изображенный на фиг. 30, является неустойчивой. Подобный характер движения получился

потому, что мы положили $\rho = 0$. Рассмотрим теперь фазовую диаграмму системы регулирования при $\rho \neq 0$.

Решение уравнения (11) в этом случае при $\omega_0^2 > b^2$ имеет вид

$$x = Ae^{-bt}\cos(\omega_1 t + \alpha), \tag{15a}$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}.$$

Диференцируя уравнение (15a), получаем

$$\dot{x} = y = -Abe^{-bt}\cos(\omega_1 t + \alpha) - A\omega_1 e^{-bt}\sin(\omega_1 t + \alpha). \tag{15б}$$

Уравнения (15) представляют параметрические уравнения фазовых траекторий с параметром t. Исключим время из этих уравнений. Умножая уравнение (15a) на b и складывая с уравнением (15б), имеем

$$y + bx = -Abe^{-bt}\cos(\omega_1 t + \alpha) - A\omega_1 e^{-bt}\sin(\omega_1 t + \alpha) + \\ + bAe^{-bt}\cos(\omega_1 t + \alpha) = -A\omega_1 e^{-bt}\sin(\omega_1 t + \alpha). \tag{16}$$

Далее, из уравнения (15a)

$$\omega_1 x = A\omega_1 e^{-bt}\cos(\omega_1 t + \alpha). \tag{17}$$

Возводя в квадрат и складывая обе части уравнений (16) и (17), получаем

$$(y + bx)^2 + \omega_1^2 x^2 = A^2\omega_1^2 e^{-2bt}. \tag{18}$$

В этом уравнении нам необходимо выразить время t через x и y. Для этого делим уравнение (16) на (17):

$$-\frac{y + bx}{\omega_1 x} = \operatorname{tg}(\omega_1 t + \alpha),$$

т. е.

$$t = -\left(\alpha + \operatorname{arctg}\frac{y + bx}{\omega_1 x}\right)\frac{1}{\omega_1}. \tag{19}$$

Подставляя уравнение (19) в (18), получим

$$(y + bx)^2 + \omega_1^2 x^2 = A^2\omega_1^2 e^{\frac{2b}{\omega_1}\left(\alpha + \operatorname{arctg}\frac{y+bx}{\omega_1 x}\right)} = A^2 e^{\frac{2b\alpha}{\omega_1}}\omega_1^2 e^{\frac{2b}{\omega_1}\operatorname{arctg}\frac{y+bx}{\omega_1 x}}, \tag{20}$$

т. е.

$$(y + bx)^2 + \omega_1^2 x^2 = Ce^{\frac{2b}{\omega_1}\operatorname{arctg}\frac{y+bx}{\omega_1 x}},$$

где

$$C = A^2\omega_1^2 e^{\frac{2b\alpha}{\omega_1}}.$$

Мы получили искомое уравнение фазовых траекторий. Это—семейство спиралей, навертывающихся на начало координат (фиг. 31). Для большей очевидности произведем в уравнении (20) линейное преобразование координат:

$$u=\omega_1 x;\quad v=bx+y,$$

тогда получаем

$$v^2+u^2=Ce^{\frac{2b}{\omega_1}\operatorname{arctg}\frac{v}{u}}.$$

Перейдем теперь к полярной системе координат r, ψ:

$$u=r\cos\psi;$$

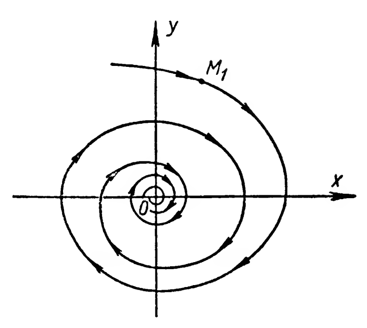
$$v=-r\sin\psi.$$

Получаем

$$r^2=Ce^{\frac{2b}{\omega_1}\operatorname{arctg}(-\operatorname{tg}\psi)}$$

или

$$r=Ce^{-\frac{b}{\omega_1}\psi}. \qquad (21)$$



Фиг. 31. Фазовая диаграмма системы с положительным самовыравниванием (колебательный режим).

Уравнение (21) является уравнением логарифмической спирали в полярных координатах. Угол ψ возрастает с увеличением времени, так как

$$\operatorname{tg}\psi=-\frac{v}{u}=-\frac{bx+y}{\omega_1 x}=\operatorname{tg}(\omega_1 t+\alpha),$$

т. е.

$$\psi=\omega_1 t+\alpha, \qquad (22)$$

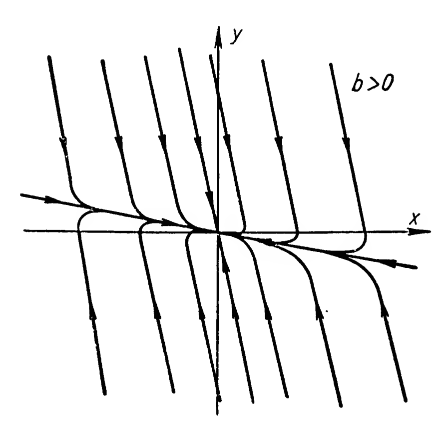
поэтому

$$r=C_1 e^{-\frac{b(\omega_1 t+\alpha)}{\omega_1}}. \qquad (22a)$$

Следовательно, с увеличением t длина r радиуса-вектора, вращающегося по часовой стрелке, убывает и изображающая точка неограниченно приближается к началу координат. Указанное обстоятельство легко усмотреть также из уравнения (18): с возрастанием t правая, а следовательно, и левая часть должны неограниченно стремиться к нулю, что может иметь место лишь при неограниченном убывании абсолютных величин x и y.

Если в момент t заданы отклонение x_1 и скорость y_1, то им на фазовой плоскости соответствует вполне определенная точка M_1 (фиг. 31). При возрастании времени изображающая точка M_1, двигаясь по фазовой траектории, неограниченно приближается к началу координат $x=y=0$, которое соответствует равновесному режиму системы регулирования.

Из фазовой диаграммы с очевидностью следует, что в рассматриваемой системе регулирования, представляемой уравнением (11а), все возникающие отклонения от равновесного режима с течением времени затухают. Следовательно, система регулирования является асимптотически устойчивой. Мы рассмотрели случай $\omega_0^2 > b^2$. В этом случае, как видно из фиг. 31, затухающее движение носит колебательный характер. В случае, если $\omega_0^2 < b^2$, затухание будет апериодическим. На фиг. 32 изображена фазовая диаграмма для этого случая. Из фазовой диаграммы видно, что любое отклонение системы от равновесного режима делается равным нулю не более чем за полтора полуколебания. Таким образом, фазовая плоскость позволяет с одного взгляда определить характер возможных движений в рассматриваемой нами системе.



Фиг. 32. Фазовая диаграмма системы с положительным самовыравниванием (апериодический режим).

2. УРАВНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ. КЛАССИФИКАЦИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Мы получили уравнение фазовых траекторий, исходя из решений (15) уравнения (11). Сделано это нами с тем, чтобы наиболее просто и понятно ввести в рассмотрение понятие о фазовой плоскости, исходя из известного решения диференциального уравнения второго порядка. Если бы этот способ построения фазовой плоскости был единственным, т. е. если бы для построения фазовой плоскости необходимо было обязательно знать решение исходного уравнения второго порядка, иными словами, знать его второй интеграл, то вряд ли метод фазового изображения получил бы широкое распространение. Это связано с тем, что получение решения нелинейного уравнения второго порядка является сложной и в общем случае не решенной задачей.

Однако для построения фазовой плоскости нет необходимости решать исходное диференциальное уравнение второго порядка; можно найти уравнения фазовых траекторий, интегрируя диференциальное уравнение первого порядка, что является значительно более простой задачей.

Смысл введения фазовой плоскости в значительной мере в том и заключается, что она позволяет выяснить вопрос о возможных движениях в динамических системах, в частности в системах регулирования, не решая полностью исходного уравнения, а ограничиваясь его первым интегралом.

Посмотрим, как это сделать, иллюстрируя способ вначале на том же простом примере, что и раньше. Обозначая $\dot{x} = y$, можно уравнение (11) записать в виде системы двух уравнений первого порядка.

$$\frac{dx}{dt} = y; \frac{dy}{dt} = -2by - \omega_0^2 x.$$

Поделив второе уравнение на первое, получаем диференциальное уравнение первого порядка, в котором исключено время:

$$\frac{dy}{dx} = -2b - \omega_0^2 \frac{x}{y}. \tag{23}$$

Это — диференциальное уравнение интегральных кривых на фазовой плоскости. Проинтегрировав уравнение (23), мы будем иметь уравнение интегральных кривых в конечной форме. В случае $\rho = 0$ интегральные кривые совпадают с фазовыми траекториями; однако такое совпадение не является обязательным: интегральная кривая может определять не одну, а несколько фазовых траекторий. Это объясняется тем, что под фазовой траекторией мы понимаем дугу кривой, по которой изображающая точка перемещается в интервале времени $-\infty < t < +\infty$, и эта дуга может, вообще говоря, составлять лишь часть интегральной кривой. Уравнение (23) определяет тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой. Из уравнения (23) следует, что в каждой точке фазовой плоскости (за исключением точки $x = 0$, $y = 0$, в которой $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, т. е. значение производной $\frac{dy}{dx}$ неопределенно) имеется единственная касательная к интегральной кривой, так как каждой паре значений x и y соответствует только одно значение $\frac{dy}{dx}$.

Следовательно, через каждую точку фазовой плоскости за исключением точки $x = 0$, $y = 0$, где $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, проходит только одна интегральная кривая, а следовательно, одна фазовая траектория.

Через точку, где

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}, \tag{24}$$

т. е. где одновременно обращаются в нуль $\dot{x}$ и $\dot{y}$, может проходить одновременно несколько кривых, следовательно, в этих точках фазовые кривые будут пересекаться.

Точки, в которых $\frac{dv}{dx} = \frac{0}{0}$, называются особыми точками диференциального уравнения интегральных кривых. Как мы только что отметили, в особых точках

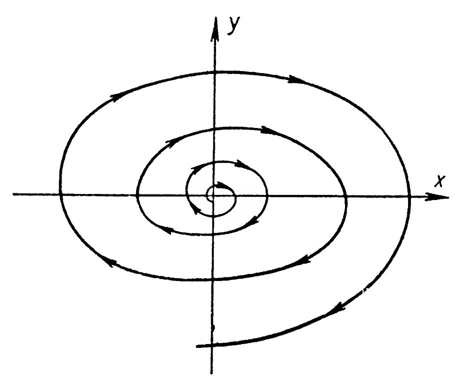
$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ и } \frac{dy}{dt} = 0,$$

т. е. в них одновременно обращаются в нуль скорость и ускорение. Но если в системе второго порядка $\dot{x} = \dot{y} = 0$, то система находится в равновесии. Следовательно, особым точкам на фазовой плоскости соответствуют состояния равновесия в реальной системе регулирования. Посмотрим теперь, какие особые точки и какие фазовые траектории возможны на фазовой плоскости, а также выясним, каким движениям исходной системы они соответствуют.

В случае $\rho = 0$, как мы видели, фазовая плоскость заполнена вложенными друг в друга замкнутыми траекториями; каждой замкнутой

кривой на фазовой плоскости соответствует периодическое движение исходной системы. Следовательно, в этом случае в исходной системе имеется бесчисленное множество периодических движений, причем переход от одного периодического движения к другому совершается при изменении начальных условий (точнее, при таком изменении начальных условий, при котором изменяется полная энергия системы). Мы уже указывали, что такие системы называются консервативными.

В случае уравнения (11а) диференциальное уравнение (23) имеет единственную особую точку $x = y = 0$. Если $\rho = 0$, то эта особая точка является отдельной интегральной кривой. Такая изолированная особая точка, охватываемая замкнутыми, вложенными друг в друга фазовыми траекториями, называется *центром*.



Фиг. 33. Фазовая диаграмма системы с отрицательным самовыравниванием (колебательный режим).

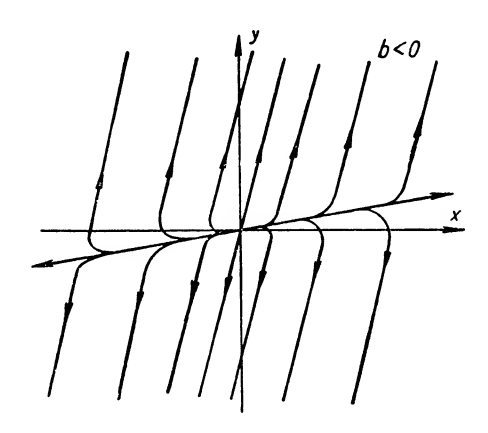
Далее мы рассмотрели случай, когда в объекте имеется самовыравнивание, т. е. $\rho \neq 0$ (фазовая диаграмма изображена на фиг. 31). В этом случае также имеется одна особая точка $x = y = 0$. Однако характер фазовых траекторий существенно отличен от предыдущего случая. На фазовой плоскости нет ни одной замкнутой траектории. Вся плоскость заполнена семейством спиралей, навертывающихся на особую точку и неограниченно к ней приближающихся. Иными словами, особая точка является асимптотической точкой семейства фазовых траекторий. Такая особая точка называется *фокусом*. В случае, если $\rho > 0$, т. е. $b > 0$, все фазовые траектории навертываются на особую точку, с увеличением t неограниченно приближаясь к ней.

В этом случае фокус называется устойчивым. В случае устойчивого фокуса все отклонения от равновесного режима с течением времени затухают, при этом в системе регулирования будут иметь место затухающие колебания. Таким образом, система, положению равновесия которой на фазовой плоскости соответствует устойчивый фокус, является асимптотически устойчивой.

Мы рассмотрели случай, когда самовыравнивание положительно. Посмотрим, какова будет картина при отрицательном самовыравнивании ($\rho < 0$). В этом случае $b < 0$ и показатель степени в уравнении (21) положителен. Поэтому при возрастании t радиус-вектор r будет возрастать, и изображающая точка, двигаясь по фазовой траектории, неограниченно удалится от начала координат. Фазовая плоскость примет вид, изображенный на фиг. 33. В данном случае начало координат, как и раньше, является особой точкой диференциального уравнения (23). Эта особая точка также служит асимптотической точкой семейства фазовых траекторий, представляющих спирали, которые, однако, уже не накручиваются на особую точку, а свертываются с нее.

Такая особая точка называется **неустойчивым фокусом**. Если в начальный момент система находится в равновесном режиме, т. е. $x = y = 0$, то $c_1 = 0$, и система будет находиться в равновесии сколь угодно долго, если на систему не действуют никакие возмущающие силы. Однако достаточно любого сколь угодно малого возмущения, чтобы $c_1 \neq 0$, и в системе начнется колебательное движение, амплитуда которого будет неограниченно возрастать. Таким образом, такая система будет неустойчивой.

Мы рассмотрели случай, когда $b^2 < \omega_0^2$. Если $b^2 > \omega_0^2$, то, как мы видели, движения в системе будут уже не колебательными, а апериодическими. Фазовая плоскость при $b^2 > \omega_0^2$ имеет вид, показанный на фиг. 32. В этом случае она заполнена семейством интегральных кривых параболического типа. Каждая интегральная кривая состоит из трех фазовых траекторий. Одной из них является состояние равновесия, а двум остальным, представляющим полуветви парабол за вычетом нулевой точки, соответствуют движения, неограниченно приближающиеся к состоянию равновесия.



Фиг. 34 Фазовая диаграмма системы с отрицательным самовыравниванием (апериодический режим).

Все интегральные кривые за исключением прямой

$$y = (-b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2})$$

касаются в начале координат прямой

$$y = (-b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2})\, x.$$

Таким образом, через особую точку проходят все интегральные кривые, каждая из которых представляет три фазовые траектории. Все изображающие точки с течением времени неограниченно приближаются к началу координат.

Особая точка такого типа называется **устойчивым узлом**. Случаю устойчивого узла соответствует апериодическая устойчивость реальной системы. Тогда, как видно на фиг. 32, при любых начальных отклонениях система не более чем за 1,5 полуколебания достигнет равновесного режима. Необходимо подчеркнуть, что, так же как и в случае фокуса, время движения изображающей точки по фазовой траектории, или, что то же самое, время прихода системы к равновесию, равно бесконечности. Если $b^2 > \omega_0^2$, но $b < 0$, т. е. $\rho < 0$, характер фазовой плоскости принимает вид, графически изображенный на фиг. 34. Особая точка в этом случае является **неустойчивым узлом**. Легко видеть, что система регулирования при этом будет неустойчивой.

Рассмотрим последний типичный случай. Предположим, что в системе регулирования исполнительный орган включен таким образом, что воз-

никающие отклонения от равновесного режима не уменьшаются, а возрастают. В этом случае член в правой части уравнения (17) изменит знак, и уравнения системы регулирования будут иметь вид

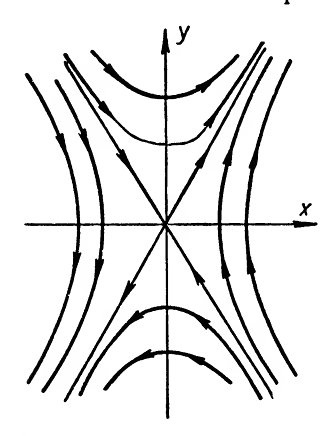
$$\left.\begin{aligned} T_a\dot{\varphi} + \rho\varphi &= \mu; \\ \delta\dot{\eta} &= \varphi; \\ \eta &= \sigma; \\ T_s\dot{\mu} &= \sigma, \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

или по исключении переменных μ, η, σ

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} - \omega_0^2 x = 0,$$

где

$$b = \frac{\rho}{T_a}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{T_a T_s \delta}.$$



Фиг. 35. Особая точка типа седла.

Для этого уравнения получаем уравнение интегральных кривых в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega_0^2 x - 2b}{y}. \qquad (26)$$

Если $\rho = 0$, то уравнение (26) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = \omega_0^2 \frac{x}{y}. \qquad (26а)$$

Интегрируя уравнение (26а), находим решение в виде

$$\frac{y^2}{A^2\omega_0^2} - \frac{x^2}{A^2} = 1. \qquad (27)$$

Мы получим уравнение семейства равносторонних гипербол, отнесенное к главным осям. Полагая $A = 0$, получаем уравнения двух прямых: $y = \omega_0 x$, $y = -\omega_0 x$, которые являются асимптотами семейства гипербол. Фазовая плоскость для этого случая показана на фиг. 35. Из этой фигуры видно, что через особую точку $x = y = 0$ проходят две интегральные кривые—асимптоты. Каждая из асимптот состоит из трех фазовых траекторий. Все остальные интегральные кривые составляют одну фазовую траекторию. Особая точка такого вида называется особой точкой типа *седла*. Из рассмотрения фазовой плоскости легко установить характер возможных движений в системе. Если начальные условия таковы, что изображающая точка лежит точно на асимптоте, то эта точка апериодически движется к началу координат $x = y = 0$. По всем остальным фазовым траекториям изображающая точка движется таким образом, что по истечении достаточно большого промежутка времени она на сколь угодно далекое растояние отойдет от положения равновесия.

Особая точка типа седла соответствует положению неустойчивого равновесия. Достаточно сколь угодно малого толчка, чтобы началось удаление от него. Так как в реальной системе всегда имеются случайные малые возмущения (флуктуации), то система, имеющая такую осо-

бую точку, неустойчива. В случае наличия силы вязкого трения ($\rho > 0$) качественный характер фазовой диаграммы не изменяется.

Мы рассмотрели случаи линейной системы регулирования. Однако если система описывается нелинейным диференциальным уравнением с аналитической правой частью, то изложенная классификация особых точек сохраняет силу.

Действительно, рассмотрим нелинейную систему, описываемую уравнением

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}). \tag{28}$$

Полагая $y = \dot{x}$, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x, y). \end{aligned} \tag{29}$$

В общем случае система регулирования может описываться системой двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Разделив второе уравнение (30) на первое, получаем уравнение интегральных кривых

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \tag{31}$$

Положение равновесия системы (30) определяется условием

$$\dot{x} = Q(x, y) = 0; \quad \dot{y} = P(x, y) = 0. \tag{32}$$

Для отыскания на фазовой плоскости состояния равновесия необходимо отыскать точки пересечения кривых:

$$Q(x, y) = 0; \quad P(x, y) = 0.$$

Так как в точках пересечения $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, то эти точки равновесия являются особыми точками диференциального уравнения интегральных кривых (31).

Пусть особая точка имеет координаты x_0, y_0.

Рассмотрим соседнюю точку $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$. Предполагая, что Q и P — аналитические функции, получаем

$$\left.\begin{aligned} P(x, y) &= P(x_0, y_0) + P'_x(x_0, y_0)\xi + P'_y(x_0, y_0)\eta + P_1(\xi, \eta) \\ Q(x, y) &= Q(x_0, y_0) + Q'_x(x_0, y_0)\xi + Q'_y(x_0, y_0)\eta + Q_1(\xi, \eta). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Но

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0,$$

так как x_0 и y_0 — координаты особой точки.

Здесь через P_1 и Q_1 обозначены все члены степени выше первой относительно ξ и η. Если ξ и η малы, то во многих случаях можно пренебречь по малости выражениями P_1 и Q_1. Замечая при этом, что $\frac{dx}{dt}=\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{d\eta}{dt}$ и обозначая $P'_x(x_0, y_0)=a$, $P'_y(x_0, y_0)=b$, $Q'_x(x_0, y_0)=c$, $Q'_y(x_0, y_0)=d$, получаем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt}&=a\xi+b\eta;\\ \frac{d\eta}{dt}&=c\xi+d\eta.\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Исключим из системы уравнений (34) одно из переменных, например η. Получаем

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=a\dot{\xi}+b\dot{\eta}=a\dot{\xi}+b(c\xi+d\eta)=a\dot{\xi}+bc\xi+$$

$$+bd\frac{1}{b}(\dot{\xi}-a\xi)=a\dot{\xi}+bc\xi+d\dot{\xi}-ad\xi$$

или

$$\ddot{\xi}-(a+d)\dot{\xi}+(ad-bc)\xi=0.$$

Обозначая

$$(a+d)=-2b; \quad ad-bc=+\omega_0^2,$$

получаем

$$\ddot{\xi}+2b\dot{\xi}+\omega_0^2\xi=0.$$

Совершенно аналогичное выражение получается относительно η. Мы получили уравнение точно такого же вида, что и уравнение (11а); отличие заключается лишь в том, что переменная обозначена через ξ (это, разумеется, не существенно). Поэтому все полученные ранее выводы относительно характера особых точек остаются в силе, и, следовательно, особые точки системы уравнений (34) принадлежат к уже рассмотренным типам: центру, фокусу, узлу и седлу.

3. АВТОКОЛЕБАНИЯ. КЛАССИФИКАЦИЯ ОСОБЫХ ТРАЕКТОРИЙ

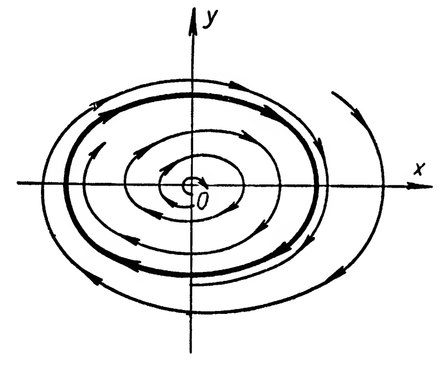
В предыдущих разделах мы рассматривали в основном вопросы, связанные с изучением равновесного режима. Мы выяснили, что характер устойчивости равновесия связан с характером особых точек (центра, фокуса, узла, седла).

Полученные нами результаты позволяют ответить на вопрос, как будет вести себя изображающая точка, а следовательно, и исходная система при малых отклонениях от точки равновесия. Лишь в случае линейных систем характер особой точки полностью определяет поведение системы, а именно: если точка равновесия устойчива и является, например, устойчивым фокусом, то при любых сколь угодно больших отклонениях в системе всегда будут происходить затухающие колебания. Если точка равновесия неустойчива (седло или неустойчивый узел, фокус), то будет происходить неограниченное удаление от положения равновесия. Если точкой равновесия является центр, то система консервативна и в ней имеется бесчисленное множество периодических

движений; на фазовой плоскости этому соответствует семейство вложенных друг в друга эллипсов. Если же система нелинейна, то характер особой точки вовсе не определяет поведения изображающей точки на всей фазовой плоскости.

Требуется отдельное рассмотрение, чтобы выяснить характер движения изображающей точки вдали от точки равновесия. При таком рассмотрении весьма важную роль играет определение так называемых особых траекторий на фазовой плоскости. Имеются три типа особых траекторий: точка равновесия, предельные циклы, „усы" седел.

Точки равновесия. Как мы уже говорили, особая точка является отдельной фазовой траекторией, так как определяет поведение изображающей точки в интервале $-\infty < t < +\infty$.



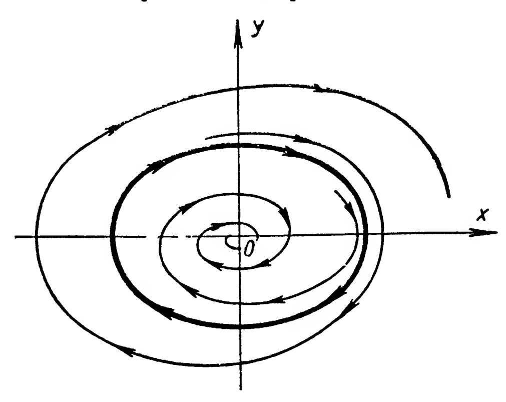
Фиг. 36. Фазовая диаграмма системы, имеющей устойчивый предельный цикл.

Изолированные замкнутые кривые (предельные циклы). Мы видели, что замкнутым кривым на фазовой плоскости соответствуют периодические движения исходной системы. В консервативных системах вся фазовая плоскость заполнена вложенными друг в друга замкнутыми траекториями и поэтому нет оснований выделять какую-либо из траекторий в качестве особой. Иное дело в неконсервативных системах. Здесь могут существовать только изолированные замкнутые траектории — *предельные циклы*, а все соседние траектории или наматываются на предельные циклы, или сходят с них. Естественно поэтому отнести предельные циклы к категории особых траекторий.

На фиг. 36 приведена фазовая диаграмма системы, имеющей точку равновесия типа неустойчивого фокуса и один предельный цикл. Все траектории, находящиеся внутри предельного цикла, сматываются с особой точки и наматываются изнутри на предельный цикл; аналогично все траектории снаружи предельного цикла также наматываются на него. По истечении достаточно большого промежутка времени изображающая точка, не находящаяся в точке равновесия, приблизится сколь угодно близко к предельному циклу. Такой предельный цикл называется *устойчивым*. В реальной системе ему соответствует асимптотически устойчивое периодическое движение, т. е. определенный колебательный режим, причем если вывести систему из этого режима, возникающие колебания будут с течением времени неограниченно приближаться к устойчивому периодическому движению.

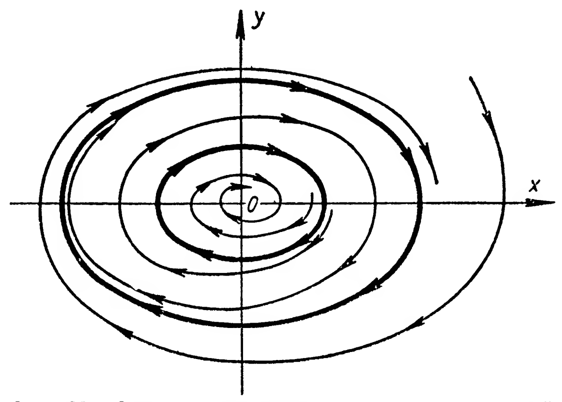
Можно сказать, что в подобной системе имеются периодические колебания, не зависящие от начальных условий. Такие периодические колебания называются *автоколебаниями*, а сами системы — автоколебательными системами. На фиг. 37 приведена фазовая диаграмма системы, имеющей *неустойчивый предельный цикл*, т. е. замкнутую траекторию, с

которой все соседние траектории как изнутри, так и снаружи сматываются. До тех пор пока изображающая точка находится на предельном цикле, она с него сойти не может, и, следовательно, в системе будут происходить периодические колебания.



Фиг. 37. Фазовая диаграмма системы, имеющей неустойчивый предельный цикл.

Однако достаточно сколь угодно малого случайного толчка, чтобы изображающая точка сошла с предельного цикла и начала от него удаляться. Поскольку в системе всегда имеются флюктуации (случайные возмущения), а также ввиду того что вероятность поместить изображающую точку на предельный цикл бесконечно мала, периодические движения в системе, имеющей один неустойчивый предельный цикл, невозможны. Часто бывают случаи, когда в системе имеется несколько предельных циклов. Так, например, на фиг. 38 приведен случай, когда имеются два предельных цикла — внутренний неустойчивый и внешний устойчивый. Если соседние траектории навертываются на предельный цикл с одной стороны и свертываются с другой, то предельный цикл называется *полуустойчивым* (фиг. 39).



Фиг. 38. Фазовая диаграмма системы, имеющей два предельных цикла.

Характер нелинейности, при которой в системе могут возникнуть автоколебания, может быть самым различным. Так, например, неустойчивый фокус (или узел) и устойчивый предельный цикл имеют место в системах, описываемых уравнениями

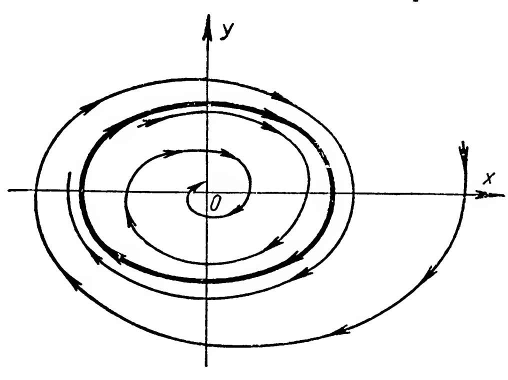
$$\ddot{x} - \mu (1 - x^2) \dot{x} + x = 0; \qquad (35)$$

$$\ddot{x} - \mu \left(\dot{x} - \dot{x}^3\right) + x = 0, \qquad (36)$$

где μ — коэфициент, больший нуля.

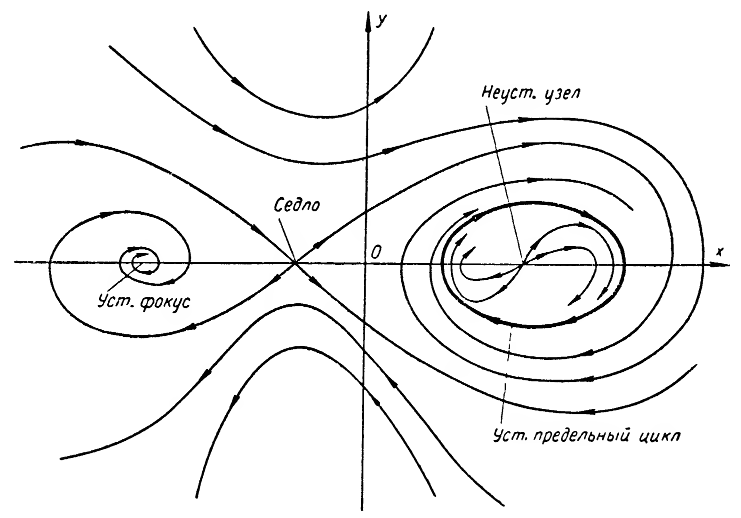
Это можно установить следующими соображениями. Если амплитуда $x < 1$, то $1 - x^2 > 0$, и поэтому в системе при $x < 1$ действует отрицательное вязкое трение. Вследствие этого при $x < 1$ амплитуда колебаний возрастает, а в системе происходит накопление энергии; если же

$x > 1$, то $1 - x^2 < 0$, и трение делается положительным. Поэтому колебания большой амплитуды будут затухать, а малые нарастать. В системе должны установиться незатухающие колебания, к которым будут стремиться при $t \to \infty$ все соседние движения. На фазовой плоскости мы будем иметь изолированную замкнутую траекторию — устойчивый предельный цикл, на который будут наматываться остальные траектории.



Фиг. 39. Фазовая диаграмма системы, имеющей полуустойчивый предельный цикл.

Аналогичная картина имеет место для уравнения (36). Действительно, если амплитуда x достаточно мала, то скорость $\dot{x} < 1$; поэтому $\dot{x}^3 < \dot{x}$. Следовательно, при малых $\dot{x}$ в системе действует отрицательное трение. Если $\dot{x}$ достаточно велико, $\dot{x} > 1$, поэтому $\dot{x} < \dot{x}^3$ и $-\mu(\dot{x} - \dot{x}^3) > 0$, в системе действует положительное вязкое трение. Мы имеем качественно ту же картину, что и для уравнения (35).



Фиг. 40. Фазовая диаграмма системы, имеющей три особые точки и один предельный цикл.

„Усы" седел. Это — кривые, отделяющие траектории различных видов. Поэтому они называются сепаратрисами. На фиг. 40 показана фазовая диаграмма системы, имеющей три особые точки — устойчивый фокус, неустойчивый узел и седло, а также один предельный цикл — устой-

чивый. Из диаграммы видна роль сепаратрис, как разделяющих кривых, являющихся „водоразделом“ для траекторий различных типов. Мы рассмотрели все три типа особых траекторий; определив все особые траектории, мы разбиваем фазовую плоскость на отдельные ячейки, каждая из которых заполнена фазовыми траекториями одного типа. Характер фазовых траекторий в каждой из ячеек нетрудно определить, зная особые траектории. Таким путем можно получить полную качественную картину всех возможных движений системы.

4. ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ С НЕАНАЛИТИЧЕСКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Мы рассмотрели фазовую плоскость системы второго порядка, описываемой уравнениями (30). Выше предполагалось, что функции $Q(x, y)$ и $P(x, y)$ являются аналитическими функциями своих аргументов, т. е. разлагаются в ряды по степеням x и y. В действительности очень часто различные элементы систем регулирования (объект регулирования, сервомотор, чувствительный элемент и др.) имеют такие нелинейные характеристики, которые не могут быть описаны только одной аналитической функцией во всей области возможных значений переменных.

В подобных случаях необходимо строить фазовую плоскость по отдельным областям, для каждой из которых дан вид функциональной зависимости. Покажем способ построения фазовой диаграммы в таких случаях на нескольких примерах. Рассмотрим систему регулирования, в которую входит объект с самовыравниванием, безинерционный чувствительный элемент и сервомотор постоянной скорости с обратной связью.

Уравнения системы регулирования в этом случае имеют вид:

уравнение объекта

$$T_a\dot{\varphi} = -\mu;$$

уравнение чувствительного элемента

$$\delta\eta = \varphi;$$

уравнение сервомотора

$$T_s\dot{\mu} = \begin{cases} 1, & \sigma > 0; \\ -1, & \sigma < 0; \end{cases} \tag{37}$$

уравнение обратной связи

$$\sigma = \eta - \gamma\mu. \tag{9a}$$

Исключая переменные η, μ и σ, последовательно получаем

$$T_a\ddot{\varphi} = -\dot{\mu} = \begin{cases} -\frac{1}{T_s}, & \sigma > 0; \\ +\frac{1}{T_s}, & \sigma < 0, \end{cases}$$

но

$$\sigma = \eta - \gamma\mu = \frac{\varphi}{\delta} + \gamma T_a\dot{\varphi}.$$

поэтому условие $\sigma > 0$ эквивалентно условию

$$\frac{\varphi}{\delta} + \gamma T_a \dot{\varphi} > 0$$

или

$$\dot{\varphi} > -\frac{\varphi}{\delta\gamma T_a}.$$

Условие $\sigma < 0$ эквивалентно условию

$$\frac{\varphi}{\delta} + \gamma T_a \dot{\varphi} < 0$$

или

$$\dot{\varphi} < -\frac{\varphi}{\delta\gamma T_a}.$$

Таким образом, уравнение движения относительно переменной φ будет иметь вид

$$\ddot{\varphi} = \begin{cases} -\dfrac{1}{T_a T_s} & \text{при } \dot{\varphi} > -\dfrac{\varphi}{\gamma\delta \Gamma_a}; \\ \dfrac{1}{T_a T_s} & \text{при } \dot{\varphi} < -\dfrac{\varphi}{\gamma\delta T_0}. \end{cases}$$

Обозначая $\varphi = x$, $\dot{x} = y$, переходим к диференциальному уравнению интегральных кривых:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T_a T_s y};\ y > -\frac{x}{\gamma\delta T_a}; \tag{38а}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{T_a T_s y};\ y < -\frac{x}{\gamma\delta T_a}. \tag{38б}$$

Построим фазовую плоскость системы уравнений (38). Интегрируя уравнения (38), получаем уравнения фазовых траекторий:

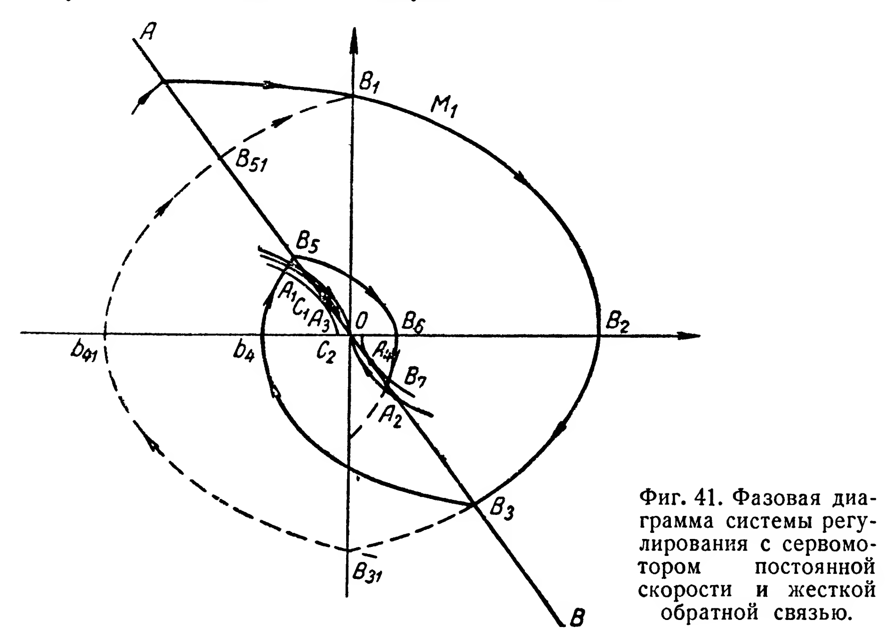
$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{T_a T_s}(x_0 - x); \quad y > -\frac{x}{\gamma\delta T_a}; \tag{39а}$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{T_a T_s}(x_0 + x); \quad y < -\frac{x}{\gamma\delta T_a}. \tag{39б}$$

Рассмотрим плоскость x, y. Проведем на ней прямую $y = \frac{-x}{\gamma\delta T_a}$ (фиг. 41) и будем называть ее прямой переключения, так как в момент перехода изображающей точки через нее происходит реверсирование сервомотора. В силу уравнения (38а) часть фазовой плоскости, расположенная над прямой переключения, заполнена параболами с уравнением (39а), а часть фазовой плоскости под прямой переключения в силу уравнения (38б) заполнена параболами с уравнением (39б) (фиг. 41). Для полноты картины мы должны определить поведение изображающей точки на прямой переключения. Это можно выполнить различными путями.

Принимая один из этих путей, будем считать, что движение изображающей точки на прямой переключения определяется уравнением (38а)

или (38б). Таким образом, движение изображающей точки определено на всей фазовой плоскости. Рассмотрим подробнее фазовую диаграмму системы (фиг. 41). Возьмем изображающую точку M_1. Если бы обратной связи не было, то она двигалась бы по параболе B_1, B_2, B_3, B_{31}, затем перешла бы на параболу B_{31}, B_{41}, B_{51}, B_1 и начала периодически обходить замкнутую кривую B_1, B_2, B_{31}, B_{41}, B_1, причем в системе этому соответствовали бы незатухающие колебания.

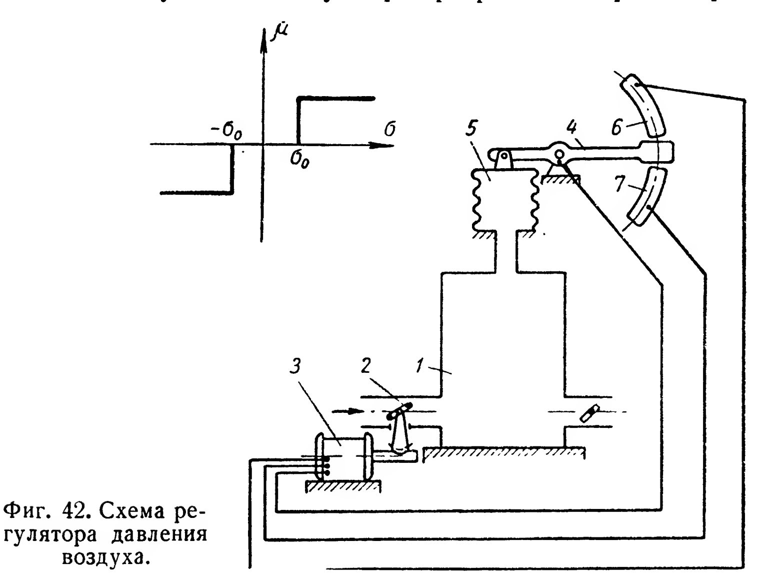


Фиг. 41. Фазовая диаграмма системы регулирования с сервомотором постоянной скорости и жесткой обратной связью.

При наличии обратной связи характер движения существенно иной. Изображающая точка движется по параболе B_1, B_2, B_3 и выходит на прямую переключения в точке B_3. С этого момента она начинает двигаться по параболе B_3, B_4, B_5, расположенной внутри параболы B_{31}, B_{41}, B_{51}, по которой она должна была двигаться, если бы не было обратной связи. Поэтому изображающая точка выходит на прямую переключения в точке B_5, расположенной ближе к точке равновесия, чем точка B_{51}, соответствующая незатухающим колебаниям. Далее она движется по параболе B_5, B_6, B_7 и выходит на прямую переключения к точке B_7, отстоящей от точки равновесия на меньшее расстояние, чем предыдущая точка B_5, и т. д.

С каждым полуколебанием изображающая точка все ближе подходит к положению равновесия. Начиная с некоторого момента, характер движения изображающей точки резко изменяется. Это изменение начинается с момента, когда изображающая точка попадает на прямую переключения между точками A_1 и A_2. Точки A_1 и A_2 являются точками пересечения прямой переключения с теми кривыми семейств парабол уравнений (39а) и (39б), которые проходят через начало координат.

Пусть, например, изображающая точка попала в точку C_1. Двигаясь далее по фазовой траектории, она попадает снова на прямую переключения в точке C_2, расположенной выше начала координат O. Двигаясь по параболе C_1C_2, она должна была бы перейти в область под прямой AB. Однако в связи с реверсированием сервомотора в этой области имеет силу другой характер движения, представляемый семейством парабол уравнения (39б). Попадая на одну из парабол этого семейства, она возвращается на прямую переключения, пересекает ее и попадает в область над ней. Этому соответствует реверсирование сервомотора. Фазовые



Фиг. 42. Схема регулятора давления воздуха.

траектории над прямой AB возвращают изображающую точку снова на прямую переключения; опять происходит реверсирование сервомотора и т. д.

Если считать время реверсирования сервомотора равным нулю, то режим непрерывного реверсирования начинается с бесконечно большой частотой. При этом изображающая точка будет передвигаться по прямой переключения AB к началу координат, которого достигнет через бесконечно большой промежуток времени. Такой режим работы сервомотора назван пульсирующим или скользящим. Он имеет место в промежутке между точками A_3 и A_4, являющимися точками касания прямой переключения с одной из кривых каждого семейства парабол. Из рассмотрения фазовой диаграммы легко найти все количественные характеристики процесса.

Рассмотрим несколько более сложный случай. Построим фазовую плоскость системы регулирования, в которую входит объект с самовыравниванием, безинерционный чувствительный элемент, сервомотор постоянной скорости с симметричной мертвой зоной. В качестве примера возьмем регулятор давления воздуха в баллоне *1* (фиг. 42). Количество поступающего воздуха регулируется заслонкой *2*, вращаемой

реверсивным электромотором *3*. Реверсирование мотора производится контактным устройством *4*, управляемым чувствительным элементом *5* в виде сильфонного манометра. Между рычагом контактного устройства, играющим роль золотника, и контактами *6* и *7* имеется зазор (мертвая зона).

Характеристика сервомотора показана на фиг. 42. До тех пор, пока смещение золотника находится в пределах мертвой зоны $-\sigma_0 < \sigma < \sigma_0$, скорость $\dot{\mu}$ сервомотора равна нулю; если смещение золотника $\sigma \geqslant \sigma_0$, то скорость $\dot{\mu} = \frac{1}{T_s}$, если $\sigma \leqslant -\sigma_0$, то $\dot{\mu} = -\frac{1}{T_s}$.

Уравнения движения будут:

уравнение объекта регулирования

$$T_a\dot{\varphi} + \rho\varphi = -\mu; \tag{7}$$

уравнение чувствительного элемента

$$\delta\eta = \varphi; \tag{8}$$

уравнение сервомотора

$$\dot{\mu} = \begin{cases} \frac{1}{T_s}, & \sigma \geqslant \sigma_0; \\ -\frac{1}{T_s}, & \sigma \leqslant -\sigma_0; \\ 0, & |\sigma| < \sigma_0; \end{cases} \tag{37a}$$

уравнение золотника с жесткой обратной связью

$$\sigma = \eta - \gamma\mu. \tag{9a}$$

Исключая из уравнений движения последовательно переменные, получаем

$$T_a\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} = -\dot{\mu} = \begin{cases} -\frac{1}{T_s}, & \sigma \geqslant \sigma_0; \\ +\frac{1}{T_s}, & \sigma \leqslant -\sigma_0; \\ 0 & |\sigma| < \sigma_0. \end{cases}$$

Из уравнений (9a) и (7) имеем

$$\sigma = \eta - \gamma\mu = \frac{\varphi}{\delta} + \gamma(T_a\dot{\varphi} + \rho\varphi),$$

поэтому условие $\sigma \geqslant \sigma_0$ запишется в виде

$$\frac{\varphi}{\delta} + \gamma(T_a\dot{\varphi} + \rho\dot{\varphi}) \geqslant \sigma_0$$

или

$$\dot{\varphi} \geqslant \frac{\delta\sigma_0 - \varphi(\delta\gamma\rho + 1)}{\delta\gamma T_a}. \tag{40a}$$

Аналогичным образом условия

$$\sigma \leqslant -\sigma_0 \quad \text{и} \quad -\sigma_0 < \sigma < \sigma_0$$

запишутся соответственно в виде

$$\dot{\varphi} \leqslant \frac{-\delta\sigma_0 - \varphi(\delta\gamma\rho + 1)}{\delta\gamma T_a}; \tag{40б}$$

$$\frac{-\delta\sigma_0 - \varphi(\delta\gamma\rho + 1)}{\delta\gamma T_a} < \dot{\varphi} < \frac{\delta\sigma_0 - \varphi(\delta\gamma\rho + 1)}{\delta\gamma T_a}. \tag{41}$$

Уравнение движения примет вид

$$T_a\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} = \begin{cases} -\frac{1}{T_s}, & \delta\gamma T_a\dot{\varphi} \geqslant \delta\sigma_0 - \varphi(\delta\gamma\rho + 1); \\ +\frac{1}{T_s}, & \delta\gamma T_a\dot{\varphi} \leqslant -\delta\sigma_0 - \varphi(\delta\gamma\rho + 1); \\ 0, & |\varphi(\delta\gamma\rho + 1) + \dot{\varphi}\delta\gamma T_a| < \delta\sigma_0. \end{cases} \tag{42}$$

Обозначим $\varphi = x$, $\dot{x} = y$, тогда диференциальное уравнение интегральных кривых будет

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\rho}{T_a} - \frac{1}{T_a T_s y}, \quad \delta\gamma T_a y \geqslant \delta\sigma_0 - x(\delta\gamma\rho + 1); \tag{43а}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\rho}{T_a} + \frac{1}{T_a T_s y}; \quad \delta\gamma T_a y \leqslant -\delta\sigma_0 - x(\delta\gamma\rho + 1); \tag{43б}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\rho}{T_a}; \quad |x(\delta\gamma\rho + 1) + y\delta\gamma T_a| < \delta\sigma_0. \tag{43в}$$

Разобьем фазовую плоскость на области, в каждой из которых имеет силу одно из последних уравнений. Границами областей являются прямые, определяемые выражениями (40) в том случае, если в них левую часть приравнять правой. На фиг. 43 эти прямые

$$y = -x\frac{\delta\gamma\rho + 1}{\delta\gamma T_a} + \frac{\sigma_0}{\gamma T_a}; \tag{44}$$

$$y = -x\frac{\delta\gamma\rho + 1}{\delta\gamma T_a} - \frac{\sigma_0}{\gamma T_a} \tag{45}$$

представлены соответственно линиями *I—I* и *II—II*. Вся область справа от прямой *I—I* заполнена интегральными кривыми, определяемыми диференциальным уравнением (43а); уравнение этих кривых имеет вид

$$x = \frac{T_a}{T_s\rho^2}\ln(1 - T_s\rho y) - \frac{T_a}{\rho}y + C. \tag{46а}$$

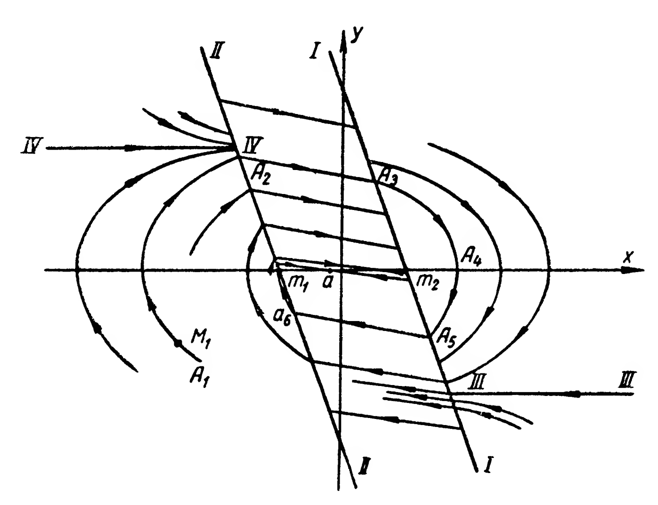
Область слева под прямой *II—II* заполнена семейством интегральных кривых

$$x = -\frac{T_a}{T_s\rho^2}\ln(1 - T_s\rho y) - \frac{T_a}{\rho}y + C, \tag{46б}$$

определяемым уравнением (40). Наконец, область между прямыми $I—I$ и $II—II$ заполнена семейством прямых, уравнение которых

$$y = \frac{\rho}{T_a} x + C$$

является решением уравнения (40б). Выбирая надлежащее значение постоянных C в уравнениях (46), можно найти фазовую траекторию, проходящую через любую заданную точку соответствующей области фазовой плоскости. Рассмотрим, как ведет себя система регулирования в различные моменты. Прежде всего из фазовой диаграммы видно, что



Фиг. 43. Фазовая диаграмма системы регулирования давления.

в отличие от всех рассмотренных ранее случаев в системе имеется не одно состояние равновесия, а бесчисленное множество их. На фазовой плоскости им соответствует отрезок $m_1 m_2$ оси абсцисс.

Далее, каждое из семейств кривых (46а) и (46б) включает по одной прямой, параллельной оси абсцисс (прямые $III—III$ и $IV—IV$).

Изображающая точка, находящаяся справа от прямой переключения $I—I$ и выше прямой $III—III$, не может попасть в область под прямой $III—III$.

Аналогичное обстоятельство имеет место для изображающей точки, расположенной слева от прямой $II—II$ и ниже прямой $IV—IV$.

Проследим за поведением изображающей точки M_1. Двигаясь по кривой A_1A_2, она попадает на прямую переключения $II—II$. Этому соответствует перемещение золотника из положения $\sigma < -\sigma_0$ в положение $\sigma = -\sigma_0$ и выключение сервомотора. Далее изображающая точка движется по прямой A_2A_3 (при этом скорость сервомотора равна нулю) и выходит на прямую переключения $I—I$. Этому соответствует включение сервомотора и перемещение его со скоростью $\dot{\mu} = \frac{1}{T_2}$. Затем изобра-

жающая точка движется по дуге кривой $A_3A_4A_5$, выходит снова на прямую переключения $I—I$, движется по прямой A_5a_6 и т. д. и попадает на отрезок покоя m_1m_2 в точке a. Возможен также и иной характер переходного процесса, в котором изображающая точка попадает на прямую переключения в области скользящего режима.

Выше мы ограничивались рассмотрением систем, описываемых диференциальными уравнениями второго порядка; движения в таких системах однозначно отображаются на фазовой плоскости. Движения в системах, описываемых уравнениями более высокого порядка, могут быть однозначно отображены в многомерном фазовом пространстве, причем число измерений фазового пространства должно равняться порядку диференциального уравнения. Так, например, системам третьего порядка соответствует трехмерное фазовое пространство.

Рассмотрение трехмерного фазового пространства обычно значительно более сложно и трудно, чем рассмотрение двухмерной фазовой плоскости.

Для систем четвертого и более высокого порядка метод построения фазового пространства полностью теряет свою наглядность.

5. ПОНЯТИЕ О МНОГОЛИСТНЫХ ФАЗОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

До сих пор мы рассматривали системы, описываемые одним диференциальным уравнением (или системой диференциальных уравнений), в котором правая часть является однозначной функцией своих аргументов. Так, например, уравнение линейной системы регулирования с объектом регулирования первого порядка и астатическим сервомотором имеет вид

$$T_a\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + \frac{1}{T_s\delta}\varphi = 0 \tag{11}$$

и может быть записано в форме

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{11a}$$

или в виде

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}),$$

где

$$f(x, \dot{x}) = -2b\dot{x} - \omega_0^2 x$$

[очевидно, каждой паре значений отклонения x и скорости $y = \dot{x}$ соответствует одно значение функции $f(x, y)$].

Рассмотрим пример нелинейного уравнения. Уравнение системы регулирования с объектом первого порядка и сервомотором постоянной скорости может быть записано в виде

$$T_a\ddot{\varphi} = \begin{cases} -\rho\dot{\varphi} - \frac{1}{T_s}; & \delta\gamma T_a\dot{\varphi} \geqslant \delta\sigma_0 - \varphi(\delta\gamma\rho + 1); \\ -\rho\dot{\varphi} + \frac{1}{T_s}; & \delta\gamma T_a\dot{\varphi} \leqslant -\delta\sigma_0 - \varphi(\delta\gamma\rho + 1); \\ -\rho\dot{\varphi}; & |\varphi(\delta\gamma\rho + 1) + \dot{\varphi}\delta\gamma T_a| < \delta\sigma_0, \end{cases} \tag{42}$$

В уравнении (42) правая часть не может быть выражена одним уравнением и требует для своего аналитического представления нескольких различных выражений. Однако, несмотря на это, так же как и в предыдущем случае, каждой совокупности значений отклонения x и скорости y соответствует только одно значение правой части. Поэтому, задав значения x и $\dot{x}$, можно полностью определить состояние системы и характер дальнейшего переходного процесса в ней.

Мы видели, что для исследования динамических систем весьма удобным средством является построение фазового пространства и в частном случае систем второго порядка — построение фазовой плоскости.

Во всех рассмотренных выше системах, как уже указывалось, каждой паре значений x и $\dot{x}$ соответствует только одно значение правой части диференциального уравнения, т. е. только одно состояние системы. Именно поэтому такие системы, т. е. системы с однозначной правой частью, могут быть отображены на фазовую плоскость, причем каждой точке фазовой плоскости соответствует только одно состояние системы. Аналогичным образом система регулирования, описываемая уравнением n-го порядка с однозначной правой частью, взаимно однозначно отображается в n-мерном фазовом пространстве.

Однако широко распространены в технике такие динамические системы, которые нельзя описать одним диференциальным уравнением или системой диференциальных уравнений с однозначной правой частью [3, 4]. К классу подобных систем относятся все типы систем автоматического регулирования, в которых имеются элементы с „гистерезисными" свойствами — устройства с электромагнитными реле и устройства, в которых действуют силы сухого трения и имеются мертвые ходы (люфты). Системы подобного типа не могут быть отображены на фазовой плоскости и требуют, как было показано в работе [4], для своего изображения многолистных фазовых поверхностей.

Исследование регулирующих устройств на многолистных фазовых поверхностях, как будет видно из дальнейшего, представляет точный и весьма наглядный метод их изучения. Рассмотрим в качестве элементарного примера систему регулирования, в которую входит объект без самовыравнивания, сервомотор постоянной скорости и безинерционный чувствительный элемент, в предположении, что имеется люфт между чувствительным элементом и золотником. В случае отсутствия люфта уравнения движения, как мы раньше видели, будут иметь вид

$$T_a\dot{\varphi} = -\mu; \tag{7}$$

$$\delta\eta = \varphi; \tag{8}$$

$$T_s\dot{\mu} = \begin{cases} +1; & \sigma \geqslant 0; \\ -1; & \sigma < 0; \end{cases} \tag{37}$$

$$\sigma = \eta. \tag{9}$$

Уравнение золотника графически представлено на фиг. 44 прямой линией $\sigma = \eta$ биссектрисой координатного угла.

Допустим теперь, что величина люфта соответствует изменению η на величину m. Тогда характер изменения σ при изменении η будет иметь вид, графически изображенный на фиг. 44.

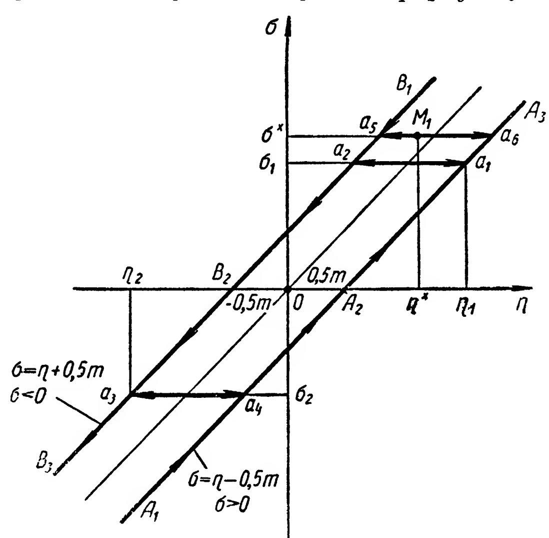
Пусть в начальный момент (при $\eta = \sigma = 0$) люфт распределен равномерно в обе стороны. При возрастании η до тех пор, пока не будет выбран люфт, т. е. пока $\eta < \frac{1}{2} m$, золотник с места не сдвинется и $\sigma = 0$.

При дальнейшем возрастании η будет увеличиваться σ по закону $\sigma = \eta - 0{,}5m$, который графически изображается прямой $A_1 A_2 A_3$. Пусть η увеличивается до значения $\eta = \eta_1$, при этом $\sigma = \sigma_1$. Начнем теперь уменьшать η. До тех пор, пока не будет полностью выбран люфт, т. е. пока η_1 не уменьшится на величину m, изменения σ не произойдет; этому соответствует отрезок $a_1 a_2$ на фиг. 44. Следовательно, в этот период (при $\dot{\sigma} = 0$)

$$\eta - 0{,}5m < \sigma < \eta + 0{,}5m$$

или

$$|\sigma - \eta| < 0{,}5m.$$



Фиг. 44. Характеристики золотника.

При дальнейшем убывании η σ изменяется по закону

$$\sigma = \eta + 0{,}5m \ (\dot{\sigma} < 0),$$

представляемому линией $B_1 B_2 B_3$. Если начать увеличивать η от значения η_2, которому соответствует $\sigma = \sigma_2$, то до выборки люфта σ не изменится (участок прямой $a_3 a_4$ с уравнением $|\sigma - \eta| < 0{,}5m$). При дальнейшем увеличении η изменение σ снова идет по прямой $A_1 A_2 A_3$. Уравнение золотника примет вид

$$\sigma = \begin{cases} \eta - 0{,}5m; & \dot{\sigma} > 0; \\ \eta + 0{,}5m; & \dot{\sigma} < 0; \end{cases}$$

$$|\sigma - \eta| < 0{,}5m; \quad \dot{\sigma} = 0.$$

Следовательно, уравнения движения системы запишутся в виде

$$T_a \dot{\varphi} = -\mu; \tag{7}$$

$$T_s \dot{\mu} = \begin{cases} +1; & \sigma > 0; \\ -1; & \sigma < 0; \end{cases} \tag{37}$$

$$\delta\eta = \varphi; \tag{8}$$

$$\sigma = \begin{cases} \eta - 0{,}5m; & \dot{\sigma} > 0; \\ \eta + 0{,}5m; & \dot{\sigma} < 0; \end{cases} \tag{9б}$$

$$|\sigma - \eta| < 0{,}5m; \quad \dot{\sigma} = 0. \tag{9в}$$

Проведем исключение переменных μ, η и σ. Исключая из уравнений (7а) и (37а) $\dot{\mu}$, получаем

$$T_a\ddot{\varphi} = -\dot{\mu} = \begin{cases} -\dfrac{1}{T_s} & \text{при } \sigma > 0; \\ +\dfrac{1}{T_s} & \text{при } \sigma < 0. \end{cases} \tag{47}$$

В уравнении (47) вид правой части зависит от знака σ. Нам необходимо выразить условия $\sigma > 0$ и $\sigma < 0$ через переменную φ; для этого рассмотрим фиг. 44. Допустим, что в некоторый момент мы имеем $\sigma = \sigma^* > 0$ и $\eta = \eta^*$. Точку на плоскости η, σ с координатами σ^*, η^* обозначим через M_1. Определим область значений η, в которой сохраняется $\sigma > 0$ (зная эту область и имея в виду, что $\eta = \frac{\varphi}{\sigma}$, найдем соответствующую область значений φ). Если мы будем увеличивать η, то точка M_1, характеризующая состояние золотника, будет вначале передвигаться по прямой $a_5 - a_6$ (при неизменном значении σ^*), а затем начнет двигаться по прямой $A_1A_2A_3$, удаляясь от оси абсцисс; при этом возрастает σ. Поэтому для уменьшения σ необходимо уменьшать η. Из фиг. 44 видно, что при уменьшении η точка M_1 сначала будет двигаться влево по прямой a_5a_6 (при $\sigma = \sigma^* = \text{const}$), а затем перемещаться по прямой $B_1B_2B_3$, приближаясь к оси абсцисс. При значении $\eta = -0{,}5m$ получаем $\sigma = 0$ независимо от того, где находится точка M_1 (лишь бы $\sigma^* > 0$). Таким образом, условие $\sigma > 0$ эквивалентно условию $\eta > -0{,}5\,m$. Аналогичным путем легко обнаружить, что условие $\sigma < 0$ эквивалентно условию $\eta < 0{,}5m$. Но $\eta = \frac{\varphi}{\delta}$, поэтому при $\sigma > 0$ имеем $\eta = \frac{\varphi}{\delta} > -0{,}5\,m$ или $\varphi > -\frac{\delta m}{2} = -0{,}5\varepsilon$, при $\sigma < 0$ имеем $\eta = \frac{\varphi}{\delta} < 0{,}5m$ или $\varphi < 0{,}5\varepsilon$, где $\varepsilon = \delta m$.

Следовательно, уравнение (47) распадается на два уравнения:

$$T_a\ddot{\varphi} = \frac{1}{T_s} \quad \text{при } \varphi < 0{,}5\varepsilon; \tag{48а}$$

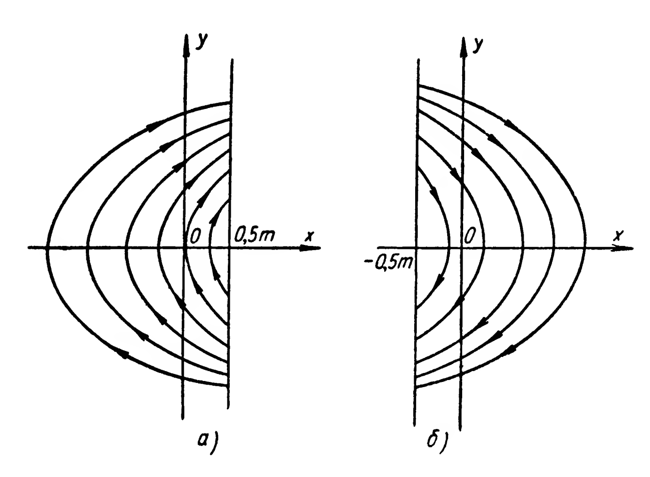
$$T_a\ddot{\varphi} = -\frac{1}{T_s} \quad \text{при } \varphi > -0{,}5\varepsilon. \tag{48б}$$

Полагая $\varphi = x$, $\dot{x} = y$ и переходя к диференциальному уравнению интегральных кривых, будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{T_aT_sy}; \quad x < 0{,}5\varepsilon; \tag{49а}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T_aT_sy}; \quad x > -0{,}5\varepsilon. \tag{49б}$$

Уравнения (48) или (49) не могут быть записаны в виде одного уравнения второго порядка с однозначной правой частью. Области, в которых имеют силу различные уравнения (49а) и (49б), перекрывают друг друга в полосе $-0{,}5\varepsilon < x < 0{,}5\varepsilon$. В связи с этим пользоваться обычной фазовой плоскостью для изображения на ней возможных движений в системе неудобно, так как каждой точке фазовой плоскости в указанной полосе будут соответствовать два различных состояния системы; это обстоятельство противоречит основной идее фазового пространства о взаимно однозначном соответствии между положением изображающей точки в фазовом пространстве и состоянием системы.



Фиг. 45. Фазовые полуплоскости многолистной поверхности.

Для сохранения однозначности необходимо вводить в рассмотрение многолистные фазовые поверхности.

Указанная неоднозначность правой части не является специфической особенностью люфта. К аналогичному обстоятельству приводит, как это упоминалось ранее, наличие сухого трения в регуляторе, неоднозначных характеристик в сервомоторе и в электромагнитных реле, а также ряд других причин.

Построим фазовую поверхность системы, описываемой уравнениями (49) Рассмотрим вначале уравнение (49а). Оно имеет силу для значений $x < 0{,}5\varepsilon$ и для всех значений скорости y. Возьмем полуплоскость x, y, ограниченную справа прямой $x = 0{,}5\varepsilon$ (фиг. 45). Эта фазовая полуплоскость в силу уравнения (49а) заполнена семейством парабол

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{T_a T_s} x + C_1 \tag{50а}$$

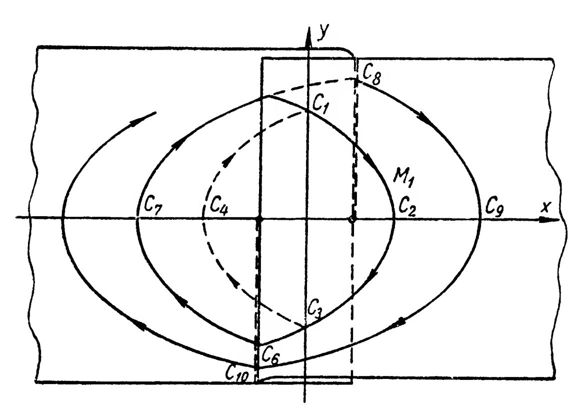
и отображает движения в системе, когда они описываются уравнением (48). Рассмотрим теперь уравнение (49б). Оно имеет силу в области $x > -0{,}5\varepsilon$. Возьмем кусок фазовой плоскости, ограниченной слева

прямой $x = -0{,}5\varepsilon$ (фиг. 45). Этот лист будет в силу уравнения (48б) заполнен параболами

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{-1}{T_a T_s} x + C_2. \qquad (50б)$$

Рассмотрим, каков характер движений изображающей точки по построенным фазовым полуплоскостям. На фиг. 45, *а* видно, что изображающая точка, двигаясь по любой из фазовых траекторий, может покинуть фазовую полуплоскость уравнения (48а) лишь через положительную часть своей правой границы, т. е. через положительную полупрямую $x = 0{,}5\varepsilon$. На фиг. 45, *б* видно, что изображающая точка, двигаясь по любой из парабол семейства (49б), может покинуть фазовую полуплоскость уравнения (48б) только через отрицательную часть своей левой границы, т. е. через отрицательную полупрямую $x = -0{,}5\varepsilon$.

Построим теперь фазовую поверхность всей системы регулирования в целом. Фазовая поверхность нашей системы составляется из двух листов (фиг. 46) следующим образом: оба листа накладываются друг на друга таким образом, чтобы их координатные оси совмещались. Далее оба листа скрепляются друг с другом вдоль тех участков их границ, через которые изображающие точки выходят за пределы листов. Следовательно, часть левой границы верхнего листа, которым мы будем считать фазовую полуплоскость уравнения (48), должна быть скреплена с нижним листом вдоль отрицательной полупрямой $x = -0{,}5\varepsilon$, а часть правой границы нижнего листа необходимо скрепить с верхним листом вдоль положительной полупрямой $x = 0{,}5\varepsilon$ (фиг. 46). Последнее скрепление (склеивание) происходит на нижней поверхности верхнего листа (на фиг. 46 границы, вдоль которых происходит склеивание, очерчены штрихлинией).



Фиг. 46. Двухлистная фазовая поверхность системы регулирования при наличии люфта.

При этом мы полагаем, что изображающая точка может покинуть лист, на котором она находится, только через его границу. Построенная фазовая поверхность дает взаимно однозначное соответствие между состоянием системы и положением изображающей точки.

По полученной двухлистной фазовой поверхности легко изучить характер возможных движений в нашей системе. Пусть в начальный момент состояние системы изображается точкой M_1. Если бы люфта не было, то она, двигаясь по траектории $C_1C_2C_3$, вышла бы на ось ординат в точке C_3, далее перемещалась по параболе $C_3C_4C_1$ и вышла бы

снова на ось ординат в точке C_1, после чего начала бы периодический обход по траектории C_1C_2, $C_3C_4C_1$. В системе этому обходу соответствуют незатухающие колебания. При наличии люфта характер движения будет иным.

Изображающая точка движется по траектории $C_1C_2C_3$ до границы верхнего листа в точке C_6. Здесь изображающая точка переходит на нижний лист, движется по траектории $C_6C_7C_8$, охватывающей траекторию $C_3C_4C_1$, и выходит на границу нижнего листа в точке C_8, далее движется по параболе $C_8C_9C_{10}$, охватывающей параболу $C_1C_2C_3$, выходит на границу верхнего листа и т. д. Следовательно, в системе происходят нарастающие колебания. Таким образом, люфт в чувствительном элементе играет вредную роль, ухудшая устойчивость системы. Мы видим, что движение системы регулирования поочередно отображается то на одном, то на другом листе. Это значит, что движение системы поочередно (циклически) описывается уравнениями (49а) и (49б). Аналогичным образом могут быть построены многолистные фазовые поверхности в более сложных случаях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А. и Хайкин С. Э., Теория колебаний, ОНТИ, 1937.
2. Стрелков С. П., Введение в теорию колебаний, 1950.
3. Казакевич В. В., ДАН, т. XLIX, № 7, 1945.
4. Казакевич В. В., ДАН, т. XXIV, № 4, 1950.

ГЛАВА XXVIII

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С УЧЕТОМ СУХОГО ТРЕНИЯ И ЛЮФТОВ

Среди различных нелинейностей, которые оказывают влияние на работу регулируемых систем, часто очень существенную роль играют неоднозначные нелинейные статические характеристики элементов регулятора. Неоднозначные характеристики часто вызывают накопление энергии в системе, поэтому при отсутствии или недостаточной эффективности стабилизирующих факторов (самовыравнивания, обратных связей или воздействия по производным) появляются автоколебания. К числу таких нелинейностей относятся сухое трение в чувствительном элементе или золотнике, люфты в отдельных звеньях регулятора, присутствие релейных устройств, наличие упругого гистерезиса в чувствительных элементах (сильфонах, пружинах, мембранах), наличие гистерезисной зависимости в электромагнитных элементах и т. д. В связи с тем, что автоколебательные режимы в системах обычно нежелательны, необходимо изучить условия, в которых они возникают.

Поскольку неоднозначные характеристики являются источником автоколебаний, рассмотрение влияния нелинейностей такого типа на устойчивость и характер переходного процесса в системе регулирования является важной задачей.

Если система имеет второй порядок и неоднозначную статическую характеристику, то ее фазовое пространство является многолистной поверхностью. Однако если повысить порядок до третьего, то неоднозначность правой части устраняется, так как фазовое пространство в случае повышения порядка является трехмерным и включает как частный случай многолистные фазовые поверхности, являющиеся двухмерным многообразием. Этим путем акад. А. А. Андронов и его сотрудники рассмотрели ряд очень важных задач регулирования [1], [2]. Системы, в которых имеется сухое трение и люфты, мы будем отображать на многолистные фазовые поверхности [3]. Это позволит упростить изложение, сделать его геометрически весьма наглядным и избежать трудностей, связанных с повышением порядка уравнения до третьего.

Предыдущая глава была посвящена сравнительно простому случаю таких систем, в настоящей же главе рассматриваются системы регулирования, описываемые диференциальными уравнениями второго порядка, в которых действуют силы сухого трения или имеются люфты в отдельных элементах регулятора, изучается характер переходных процессов в таких системах регулирования и определяется их устойчивость.

Кроме того, в главе приведены построения расчетных графиков и пространств параметров системы, позволяющие производить выбор параметров регулятора при его конструировании. Если в системе имеется несколько элементов с многозначными характеристиками, то количество различных уравнений, описывающих систему, значительно возрастает. Для исследования такой динамической системы целесообразно поступить следующим образом:

1. Разбить диференциальное уравнение системы, имеющее многозначную правую часть, на ряд диференциальных уравнений, имеющих однозначную правую часть, и определить области существования этих однозначных правых частей.

2. Установить характер взаимосвязи между этими уравнениями, т. е. определить порядок перехода от одного уравнения к другому.

3. Отобразить каждое из уравнений на свой кусок фазовой плоскости.

4. Скрепить получившиеся листы фазовых плоскостей между собой в соответствии с исходным диференциальным уравнением вдоль тех участков границ отдельных листов, через которые изображающие точки выходят за границы листов.

Полученная таким образом многолистная фазовая поверхность дает взаимно однозначное соответствие между состоянием системы и положением изображающей точки на многолистной фазовой поверхности. Мы видим, что в отличие от обыкновенных систем второго порядка, в которых состояние системы определяется полностью двумя числами — скоростью $\dot{x}$ и отклонением x, в рассматриваемых системах второго порядка состояние системы определяется тремя числами: скоростью $\dot{x}$, отклонением x и номером листа многолистной фазовой поверхности.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ С СЕРВОМОТОРОМ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СУХОГО ТРЕНИЯ В ЧУВСТВИТЕЛЬНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

Случай объекта без самовыравнивания. Рассмотрим систему регулирования, состоящую из объекта с самовыравниванием, сервомотора постоянной скорости с зоной нечувствительности и безинерционного чувствительного элемента, обладающего сухим трением. При отсутствии сухого трения уравнения движения системы имели бы вид

$$T_a\dot{\varphi} + \rho\eta = -\mu; \tag{7}$$

$$\delta\eta = \varphi; \tag{8}$$

$$T_s\dot{\mu} = \begin{cases} 1 & \sigma \geqslant \sigma_0 \\ -1, & \sigma \leqslant -\sigma_0 \\ 0 & |\sigma| < \sigma_0 \end{cases} \tag{37}$$

$$\sigma = \eta. \tag{9}$$

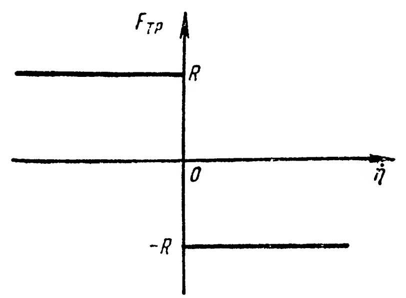
Предположим теперь, что в чувствительном элементе действуют силы сухого (кулоновского) трения. Во многих случаях можно считать, что зависимость силы сухого трения от скорости имеет вид, графически изображенный на фиг. 47. Если относительная скорость чувствительного

элемента $\dot{\eta} > 0$, то сила трения постоянна по величине, но отрицательна по знаку

$$(F_{mp} = -R), \tag{51}$$

так как она направлена в сторону, противоположную относительной скорости. Если $\dot{\eta} < 0$, то сила трения имеет то же абсолютное значение, но положительна

$$(F_{mp} = +R). \tag{52}$$



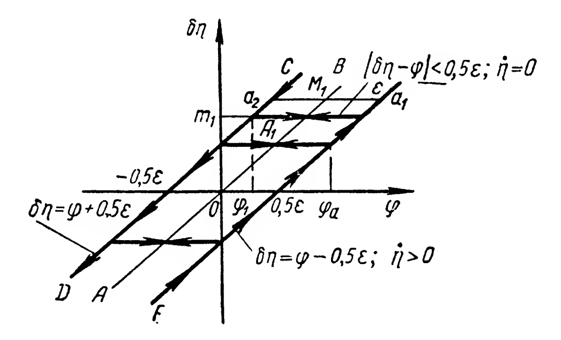
Фиг. 47. Зависимость силы сухого трения от скорости.

Если же относительная скорость равна нулю, то сила сухого трения может иметь между $-R$ и $+R$ любое значение:

$$-R \leqslant F_{mp} \leqslant +R. \tag{53}$$

Посмотрим, как отразится наличие силы сухого трения на работе чувствительного элемента. Отложим по оси абсцисс прямоугольной системы координат величину φ, а по оси ординат смещение $\delta\eta$ (фиг. 48). Если трение отсутствует, то зависимость между $\delta\eta$ и φ представится прямой линией AB — биссектрисой координатного угла. Предположим теперь, что в элементе действуют силы трения. Пусть в начальный момент $\varphi = 0$ и $\eta = 0$. Начнем увеличивать φ. В начальный период увеличение φ не вызывает смещения η, так как сила трения уравновешивает усилие, возникающее при отклонении φ. При некотором значении $\varphi = 0{,}5\varepsilon$ сила трения достигает максимального значения $F_{mp} = R$ и затем начинается увеличение $\delta\eta$ по прямой FE. Уравнение этой прямой

$$\delta\eta = +\varphi - 0{,}5\varepsilon. \tag{54}$$



Фиг. 48. График работы чувствительного элемента при наличии силы сухого трения.

При уменьшении φ от любого значения $\varphi = \varphi_a$ смещения муфты не произойдет в интервале $\varphi_a > \varphi > \varphi_a - \varepsilon$, где $\varphi_a = \delta\eta_a + 0{,}5\varepsilon$, вследствие влияния силы трения в тот промежуток времени, в который $\dot{\eta} = 0$. С момента, когда $\varphi = \varphi_a - \varepsilon$, дальнейшее убывание φ вызовет убывание η по прямой CD; при этом $\dot{\eta} < 0$. Уравнение прямой имеет вид

$$\delta\eta = \varphi + 0{,}5\varepsilon. \tag{55}$$

Таким образом, при наличии трения уравнение чувствительного элемента на основании выражений (53), (54) и (55) примет вид

$$\delta\eta = \begin{cases} \varphi - 0{,}5\varepsilon \text{ при } \dot\eta > 0; \\ \varphi + 0{,}5\varepsilon \text{ при } \dot\eta < 0; \end{cases}$$

$$\delta\eta - \frac{\varepsilon}{2} < \varphi < \delta\eta + \frac{\varepsilon}{2}; \ \dot\eta = 0.$$

Уравнения движения имеют вид

$$T_a\dot\varphi + \rho\varphi = -\mu; \tag{7}$$

$$\delta\eta - \varphi = \begin{cases} -0{,}5\varepsilon; & \dot\eta > 0; \\ +0{,}5\varepsilon; & \dot\eta < 0; \end{cases} \tag{56}$$

$$|\delta\eta - \varphi| < 0{,}5\varepsilon; \quad \dot\eta = 0;$$

$$T_s\dot\mu = \begin{cases} 1; & \sigma \geqslant \sigma_0; \\ -1; & \sigma \leqslant -\sigma_0; \\ 0; & |\sigma| < \sigma_0; \end{cases} \tag{57}$$

$$\sigma = \eta. \tag{9}$$

Исключив из этих уравнений μ, η и σ, получаем

$$T_a\ddot\varphi + \rho\dot\varphi = \begin{cases} -\frac{1}{T_s}; & \sigma \geqslant \sigma_0; \\ +\frac{1}{T_s}; & \sigma \leqslant -\sigma_0; \\ 0; & |\sigma| < \sigma_0. \end{cases} \tag{58}$$

Исключим теперь σ.

Рассмотрим условие

$$\sigma \geqslant \sigma_0. \tag{59}$$

Учитывая уравнение (9), получаем

$$\sigma_0 \leqslant \sigma = \eta \text{ или } \eta \geqslant \sigma_0. \tag{60}$$

Умножим обе части уравнения (59) на δ:

$$\delta\eta \geqslant \sigma_0\delta = m_1. \tag{61}$$

Условие (61) эквивалентно условию (59). Но из фиг. 48 видно, что если условие $\delta\eta \geqslant m_1$ выполнено, то оно продолжает быть выполненным, пока $\varphi \geqslant \varphi_1 = m_1 - 0{,}5\varepsilon$. Подставляя вместо m_1 его значение из (61), получаем

$$\varphi \geqslant \sigma_0\delta - 0{,}5\varepsilon. \tag{62}$$

Условие (62) равносильно условию (59). Аналогичным путем находим, что условию $\sigma \leqslant -\sigma_0$ соответствует условие

$$\varphi \leqslant -\sigma_0\delta + 0{,}5\varepsilon, \tag{63}$$

а условию $|\sigma| < \sigma_0$ соответствует условие

$$-\sigma_0\delta - 0{,}5\varepsilon < \varphi < \sigma_0\delta + 0{,}5\varepsilon_1. \tag{64}$$

Таким образом, уравнение движения приобретает вид

$$T_a\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} = \begin{cases} -\frac{1}{T_s} \text{ при } \varphi \geqslant \sigma_0\delta - 0{,}5\varepsilon; & (65) \\ +\frac{1}{T_s} \text{ при } \varphi \leqslant -\sigma_0\delta + 0{,}5\varepsilon; & (66) \\ 0 \text{ при } |\varphi| < \sigma_0\delta + 0{,}5\varepsilon. & (67) \end{cases}$$

Упростим несколько выражения (65)—(67). Для этого произведем замену переменных:

$$\tau = \frac{\rho}{T_a} t; \qquad x = \frac{\varphi}{\varepsilon};$$

получим

$$\varphi = x\varepsilon; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \varepsilon x' \frac{\rho}{T_a};$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon x'' \frac{\rho^2}{T_a^2}.$$

Подставляя эти выражения в выражения (65)—(67), получим

$$T_a \frac{\varepsilon\rho^2}{T_a^2} x'' + \rho\frac{\varepsilon\rho}{T_a} x' = \begin{cases} -\frac{1}{T_s}; & x \geqslant \frac{\sigma_0\delta}{\varepsilon} - 0{,}5; \\ +\frac{1}{T_s}; & x \leqslant -\frac{\sigma_0\delta}{\varepsilon} + 0{,}5; \\ 0; & |x| < \frac{\sigma_0\delta}{\varepsilon} + 0{,}5. \end{cases}$$

Обозначив

$$A = \frac{T_a}{T_s\varepsilon\rho^2} \quad \frac{\sigma_0\delta}{\varepsilon} = B,$$

имеем

$$x'' + x' = -A \text{ при } x \geqslant B - 0{,}5; \tag{67а}$$

$$x'' + x' = A \text{ при } x \leqslant -B + 0{,}5; \tag{67б}$$

$$x'' + x' = 0 \text{ при } |x| < B + 0{,}5. \tag{67в}$$

Уравнения (67) поочередно, циклически сменяясь, описывают движение в системе регулирования.

Обозначая $x' = y$ и переходя к диференциальным уравнениям интегральных кривых, получим

$$\frac{dy}{dx} = -1 - \frac{A}{y}; \quad x \geqslant B - 0{,}5; \tag{68а}$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 + \frac{A}{y}; \quad x \leqslant -B + 0{,}5; \qquad (68б)$$

$$\frac{dy}{dx} = -1; \quad |x| < B + 0{,}5. \qquad (68в)$$

Для построения фазовой поверхности системы отображаем каждое из уравнений (68) на свой лист фазовой плоскости (фиг. 49).

Уравнение (68а) отображается на первый лист — полуплоскость x, y, ограниченную слева прямой

$$x = B - 0{,}5. \qquad (68б')$$

Уравнение (68б) — на второй лист — полуплоскость, ограниченную справа прямой

$$x = -B + 0{,}5; \qquad (68а')$$

а уравнение (68в) — на третий лист — кусок плоскости, ограниченный справа и слева прямыми

$$x = B + 0{,}5 \qquad (68б'')$$

и

$$x = -B - 0{,}5. \qquad (68а'')$$

Первый лист заполнен кривыми, уравнение которых

$$\alpha y - \ln(1 + \alpha y) = -\alpha x + C_1; \quad \alpha = \frac{1}{A} \qquad (69а)$$

получается путем интегрирования уравнения (68а).

Второй лист в силу уравнения (68б) заполнен кривыми

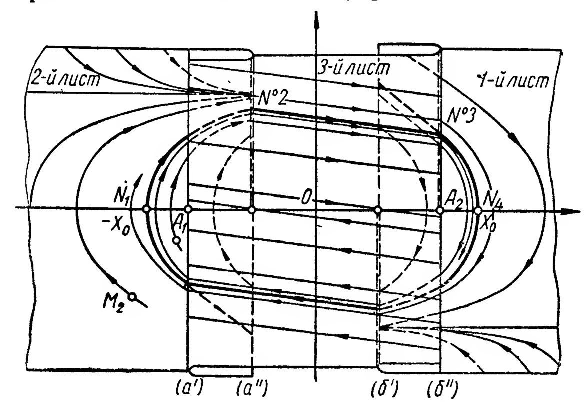
$$-\alpha y - \ln(1 - \alpha y) = \alpha x + C_2, \qquad (69б)$$

а третий лист в силу уравнения (68в) заполнен отрезками прямых

$$y = -x + C_3. \qquad (69в)$$

Участки границ, через которые изображающая точка может покинуть листы, очерчены штрихлиниями. Для построения многолистной фазовой поверхности, которая в этом случае будет трехлистной, накладываем все три листа друг на друга так, чтобы их координатные оси совпали, и склеиваем между собой вдоль участков границ, очерченных штрихлиниями (фиг. 49). Из фазовой диаграммы видно, что при тех значениях параметров системы, для которых построена фиг. 49, в системе имеется один устойчивый предельный цикл, которому соответствуют автоколебания координаты φ. Имеется устойчивый отрезок A_1A_2 состояний равновесия. Если система находится в равновесии, т. е. изображающая точка расположена на отрезке покоя, то необходим достаточно сильный начальный толчок, чтобы начались автоколебания. При надлежащем изменении параметров системы амплитуда предельного цикла будет уменьшаться, и в конце концов можно достигнуть такого сочетания параметров, при котором автоколебания будут невозможны. Такого режима необходимо добиваться для нормальной работы системы регулирования.

Для определения условий устойчивой работы произведем количественное исследование, для которого используем так называемый метод точечных преобразований. В нашем случае он может быть реализован в следующем виде. Мы будем рассматривать переход каждой точки полупрямой $x \leqslant x(A_1)(C_1)$ в соответствующую точку линии разветвления [см. уравнение (68а″)]. Этот переход будет определяться некоторой формулой, которую мы найдем. Далее, мы найдем закон преобразования линии разветвления [см. уравнение (68а″)] в полупрямую $x \geqslant x(A_2)(C_2)$. Этими двумя последовательными переходами точки полупрямой $x \leqslant x(A_1)$ переводятся в точки $x \geqslant x(A_2)$. В силу симметрии фазовой поверхности относительно начала координат можно утверждать, что точки полупрямых C_1 и C_2, расстояния которых от начала координат одинаковы (по модулю), определяют амплитуду предельного цикла. Требуя, чтобы эти точки совпадали с точками разветвления A_1 и A_2, получаем условие устойчивости. Далее, нетрудно определить, устойчив ли предельный цикл. Именно, если упомянутые расстояния приближаются по величине как снаружи, так и изнутри к амплитуде предельного цикла при возрастании времени, то последний устойчив, если же удаляются, то неустойчив. Условие устойчивости можно выразить аналитически в общем случае. Применим этот способ к нашей задаче.



Фиг. 49. Трехлистная фазовая поверхность системы регулирования при объекте с самовыравниванием.

Рассмотрим точку N_1 с координатами $x = -x_0$, $y = 0$, лежащую слева от точки A_1. Найдем уравнение траектории, проходящей через эту точку. Из уравнения (69б) имеем

$$0 = -\alpha x_0 + C; \quad -\alpha y - \ln(1 - \alpha y) = \alpha(x + x_0). \tag{70а}$$

Мы получили искомое уравнение. Ищем теперь точку N_2 пересечения этой траектории с прямой [см. уравнение (68а″)]. Уравнение (68а″)

$$x = 0{,}5 - B$$

подставляем в формулу (70а)

$$\ln(1 - \alpha y_1) = \alpha B - 0{,}5\alpha - \alpha(x_0 + y_1). \tag{70б}$$

Уравнение (70б) определяет ординату y_1 точки N_2.

Найдем теперь формулу, переводящую точку N_4 полупрямой $x \geqslant x(A_2)$ в соответствующую точку линии разветвления [см. уравне-

ние (68а″)]. Через точку N_4 с координатами $x=x_0$, $y=0$ проводим траекторию [см. уравнение (69а)]. Получаем

$$\alpha y - \ln(1+\alpha y) = -\alpha(x-x_0). \qquad (71a)$$

Ордината y_2 точки пересечения этой траектории с прямой (68б″) будет

$$\ln(1+\alpha y_2) = \alpha\beta + 0{,}5\alpha - \alpha(x_0 - y_2). \qquad (71б)$$

Движение будет периодическим, если ему соответствует замкнутая траектория на фазовой плоскости, что имеет место, если одна из прямых [см. уравнение (69в)], представляющих траектории третьего листа, проходит через обе точки N_1 и N_3. Но расстояние по вертикали между точками пересечения траекторией [см. уравнение (69в)] прямых [см. формулы (68а″) и (68б″)] равно $l=2B$. Поэтому условие периодичности есть $y_1 = y_2 + 2B$.

Подставляя это условие в уравнение (71б), получаем

$$\ln(1+\alpha y_1 - 2\alpha B) = \alpha B + 0{,}5\alpha - \alpha x_0 + \alpha y_1 - 2\alpha B. \qquad (71)$$

Из уравнений (70б) и (71) легко определяются амплитуды y_1 и x_0 предельного цикла. Однако нас больше интересует условие устойчивости, которое заключается в том, чтобы амплитуда x_0 была меньше или равна абсциссе точки A_2. Абсциссу находим из уравнения (69б″).

Подставляя x_{A2} в формулу (70а) и (71), получаем

$$\ln(1-\alpha y_1) = \alpha(y_1+1);$$

$$\ln(1+\alpha y_1 - 2\beta) = \alpha y_1 - 2\beta,$$

где

$$\alpha B = \beta.$$

Исключая отсюда αy, нетрудно найти границу области устойчивости. Второе уравнение имеет один действительный корень $\sqrt{y_1} = 2\beta$. Подставляя его в первое уравнение, находим, что условие устойчивости принимает вид

$$e^{-(\alpha+2\beta)} \geqslant 1 - 2\beta \qquad (72)$$

и зависит лишь от двух параметров:

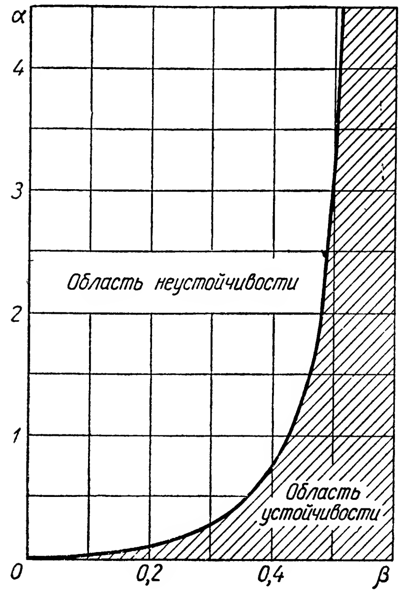
$$\alpha = \frac{1}{A} = \frac{T_s \varepsilon \rho^2}{T_a} \text{ и } \beta = \alpha B = \frac{\sigma_0 \delta T_s \rho^2}{T_a}.$$

Плоскость параметров изображена на фиг. 50. Незаштрихованная часть плоскости соответствует неустойчивому состоянию системы регулирования; при этом в системе имеется устойчивый предельный цикл. Если $\rho \to 0$, то амплитуда его стремится к бесконечности. Заштрихованная часть плоскости параметров соответствует устойчивому состоянию системы регулирования.

Из рассмотрения фиг. 50 можно сделать вывод о том, какими целесообразно выбирать параметры системы регулирования.

Возьмем в плоскости $\alpha\beta$, например, точку M, лежащую на границе устойчивости. Если увеличивать $\frac{T_s \rho^2}{T_a}$, то β и α растут, но отношение

их остается постоянным: $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\sigma_0\delta}{\varepsilon}$, следовательно, точка M перемещается по прямой, проходящей через начало координат, удаляясь от начала. При этом она попадает в область устойчивости, и при дальнейшем увеличении $\frac{T_s\rho^2}{T_a}$ запас устойчивости, который может быть охарактеризован расстоянием от границы устойчивости, будет увеличиваться; при уменьшении $\frac{T_s\rho^2}{T_a}$ точка M попадает в область неустойчивости.



Фиг. 50. Плоскость параметров в случае объекта без самовыравнивания.

Поскольку точка M выбрана на границе устойчивости произвольно, наше рассуждение имеет общую силу; следовательно, с увеличением $\frac{T_s\rho^2}{T_a}$ всегда увеличивается устойчивость системы.

Аналогичным образом не трудно показать, что при $\frac{T_s\rho^2}{T_a}=\text{const}$ увеличение $\frac{\sigma_0\delta}{\varepsilon}$ соответствует увеличению устойчивости и наоборот.

Из фиг. 50 видно, что если $\beta>0{,}5$, то система регулирования устойчива при любых ε.

Следовательно, если у регулятора нет обратной связи, но объект обладает самовыравниванием, то для устранения возможности возникновения автоколебаний нужно выбирать параметр

$$\beta=\frac{\sigma_0\delta T_s\rho^2}{T_a}>0{,}5.$$

Увеличение параметра β при заданных T_a и ρ достигается увеличением δ, σ_0 и T_s.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ С СЕРВОМОТОРОМ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ЛЮФТОВ

Ранее мы рассмотрели уравнения движения и фазовую поверхность системы регулирования при наличии люфтов.

Сравнивая случай наличия люфтов с только что рассмотренным случаем наличия сухого трения, мы видим, что влияние обеих нелинейностей имеет одинаковый характер. Это объясняется тем, что характер связи между входной и выходной координатами звена, имеющего нелинейность, оказывается одинаковым. В самом деле, характер связи между координатами при наличии сухого трения в чувствительном элементе графически изображен на фиг. 48.

Предположим теперь, что сухого трения нет, а есть лишь люфт величины m между чувствительным элементом и золотником. Характер зависимости при этом η от σ представлен в предыдущей главе на фиг. 44.

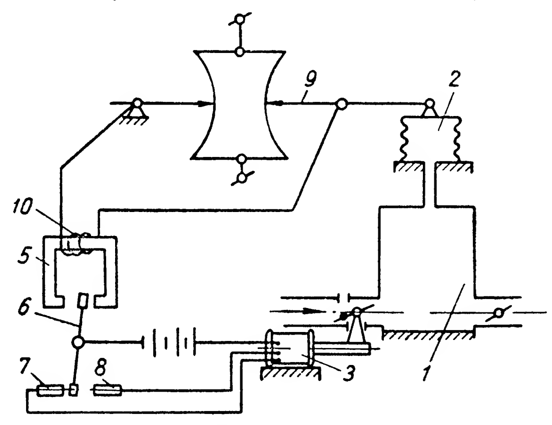
Сравнивая обе фигуры, заключаем, что поведение системы регулирования с сухим трением величины ε в чувствительном элементе одинаково с поведением системы регулирования при наличии люфта величины $m=\frac{\varepsilon}{\delta}$ между золотником и чувствительным элементом. Таким образом, все результаты, полученные для системы с сухим трением, полностью распространяются на системы с люфтами, необходимо лишь всюду заменить ε на $m\delta$. При этом получаем следующее выражение для параметров:

$$A=\frac{T_a}{T_s\delta m\rho^2}; \quad B=\frac{\sigma_0\delta}{m\delta}=\frac{\sigma_0}{m}. \tag{73}$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ С СЕРВОМОТОРОМ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ И РЕЛЕЙНЫМИ УСТРОЙСТВАМИ

Мы рассмотрели системы с сухим трением и люфтом и выяснили, что характер их поведения одинаков. Сейчас мы увидим, что совершенно аналогичный характер переходных процессов имеется и в системах с релейными устройствами.

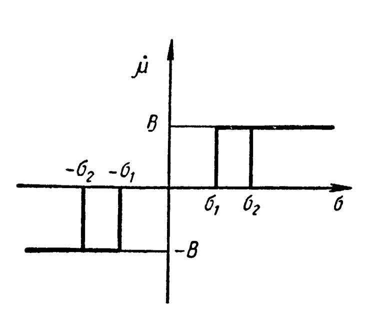
Рассмотрим систему регулирования (см. фиг. 51), состоящую из объекта с самовыравниванием (баллона *1*, в котором регулятор поддерживает давление), безинерционного чувствительного элемента (сильфона *2*) и сервомотора *3* постоянной скорости, управляемого от поляризованного реле *5*. Якорь *6* поляризованного реле перекидывается к контактам *8* и *7* в зависимости от направления тока в обмотке *10* реле. При этом, для того чтобы якорь перекинулся, необходимо, чтобы величина тока по абсолютному значению была больше некоторой минимальной величины, которой соответствует отклонение (σ_2) движка *9*. Если отклонение движка $|\sigma|>\sigma_2$, то якорь прижат к одному из контактов. При этом сервомотор вращается с постоянной скоростью.



Фиг. 51. Схема релейной системы регулирования.

Будем теперь уменьшать смещение движка; в связи с тем, что коэфициент возврата λ обычно меньше единицы, поляризованное реле выключится не при значении $|\sigma|=\sigma_2$, а при меньшем значении $\left(\lambda=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)$.

Графически эта зависимость изображена на фиг. 52. Если в некоторый момент значение σ лежит между $-\sigma_1$ и σ_1, то $\dot{\mu}=0$; при этом будет оставаться $\dot{\mu}=0$ независимо от знака и величины σ до тех пор, пока $-\sigma_2 \leqslant \sigma \leqslant +\sigma_2$. Если же в некоторый момент $\sigma > \sigma_2$, то скорость $\dot{\mu}=B_1$ и будет оставаться такой независимо от знака скорости $\dot{\sigma}$ до тех пор, пока будет оставаться $\sigma \geqslant \sigma_1$. Аналогичным образом, если $\sigma < -\sigma_2$, то скорость $\dot{\mu}$ будет оставаться равной $-B_1$ независимо от знака скорости до тех пор, пока $\sigma \leqslant \sigma_1$. Следовательно,



Фиг. 52. Зависимость скорости сервомотора от σ.

$$\dot{\mu}=\begin{cases} +B_1 & \text{при} \quad \sigma \geqslant \sigma_1; \\ -B_1 & \text{»} \quad \sigma \leqslant -\sigma_1; \\ 0 & \text{»} \quad -\sigma_2 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2. \end{cases} \tag{74}$$

Уравнения системы регулирования запишутся в виде

$$T_a\dot{\varphi}+\rho\varphi=-\mu;$$

$$\delta\eta=\varphi; \qquad \sigma=\eta;$$

$$\dot{\mu}=\begin{cases} +B_1; \ \sigma \geqslant \sigma_1; \\ -B_1; \ \sigma \leqslant \sigma_1; \\ 0; \ -\sigma_2 < \sigma < \sigma_2. \end{cases}$$

Исключая из этой системы все переменные, кроме φ, получим последовательно

$$T_a\ddot{\varphi}+\rho\dot{\varphi}=-\dot{\mu}=\begin{cases} -B_1; \ \sigma \geqslant \sigma_1; \\ +B_1; \ \sigma \leqslant -\sigma_1; \\ 0; \ -\sigma_2 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2. \end{cases}$$

Имея в виду, что

$$\sigma=\frac{\varphi}{\delta},$$

получим

$$T_a\ddot{\varphi}+\rho\dot{\varphi}=\begin{cases} -B_1; \ \sigma_1 \leqslant \frac{\varphi}{\delta}; \\ +B_1; \ -\sigma_1 \geqslant \frac{\varphi}{\delta}; \\ 0; \ -\sigma_2 \leqslant \frac{\varphi}{\delta} \leqslant \sigma_2. \end{cases}$$

Обозначая

$$\sigma_0=\frac{\sigma_2+\sigma_1}{2}; \quad m=\sigma_2-\sigma_1; \quad B_1=\frac{1}{T_s}; \quad \varepsilon=m\delta, \tag{75}$$

мы получим такое же уравнение, как и уравнение (68), описывающее систему регулирования с сухим трением. Исследование этого уравнения произведено выше. Там построена фазовая поверхность и пространство

параметров (см. фиг. 50). Все выводы, полученные при этом рассмотрении, полностью распространяются на рассматриваемый сейчас случай. Пространство параметров также сохраняется, если считать

$$A = \frac{T_a B}{(\sigma_2 - \sigma_1)\,\delta \rho^2}; \quad \sigma = \frac{(\sigma_2 + \sigma_1)\,\delta}{2}. \tag{76}$$

4. СИСТЕМА РЕГУЛИРОВАНИЯ С СЕРВОМОТОРОМ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СУХОГО ТРЕНИЯ В ЧУВСТВИТЕЛЬНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

До сих пор мы рассматривали системы регулирования с сервомотором постоянной скорости. Рассмотрим теперь случай, когда сервомотор имеет переменную скорость. Возьмем объект с самовыравниванием, снабженный регулятором, состоящим из сервомотора переменной скорости и чувствительного элемента при наличии в нем сухого трения.

Уравнения движения имеют вид

$$T_a \dot{\varphi} + \rho\varphi = -\mu; \quad \sigma = \eta; \quad \delta\eta - \varphi = \begin{cases} -0{,}5\varepsilon; & \dot{\eta} > 0; \\ +0{,}5\varepsilon; & \dot{\eta} < 0; \end{cases}$$

$$\dot{\mu} = \frac{1}{T_s}\sigma; \quad |\delta\eta - \varphi| < 0{,}5\varepsilon; \quad \dot{\eta} = 0.$$

Для построения фазовой поверхности φ, $\dot{\varphi} = \psi$ нам необходимо исключить из этих уравнений все переменные, кроме φ. В данном случае задача оказывается более сложной, чем в случае сервомотора постоянной скорости. Рассмотрим вначале случай, когда в процессе движения $\dot{\eta} > 0$. Получаем

$$T_a \ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} = -\dot{\mu} = -\frac{1}{T_s}\sigma = -\frac{1}{T_s}\eta = -\frac{1}{T_s\delta}(\varphi - 0{,}5\varepsilon)$$

или

$$T_a \ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + \frac{\varphi}{T_s\delta} = -\frac{0{,}5\varepsilon}{T_s\delta} \quad \text{при } \dot{\eta} > 0. \tag{76a}$$

Из фиг. 53 видно, что при $\dot{\eta} > 0$ имеем $\dot{\varphi} > 0$. При этом точка $\delta\eta$, φ, характеризующая состояние прибора, перемещается по прямой ED. Следовательно, уравнение (76) имеет силу, пока $\dot{\varphi}$ возрастает. Пусть максимальное отклонение равно φ_{max}. Уравнение (76a) имеет смысл, пока $\dot{\varphi} > 0$, $\varphi = \varphi_{max}$. После того как достигнуто значение φ_{max}, начинается уменьшение φ. При этом в пределах зоны нечувствительности ε имеем

$$\eta = \eta_{max} = \text{const}; \quad \dot{\eta} = 0.$$

Точка (φ, $\delta\eta$) перемещается по отрезку $a_1 a_2$. Следовательно, в этом интервале имеем

$$\dot{\mu} = \frac{1}{T_s}\eta_{max} = \frac{1}{T_s\delta}(\varphi_{max} - 0{,}5\varepsilon).$$

Уравнение движения будет

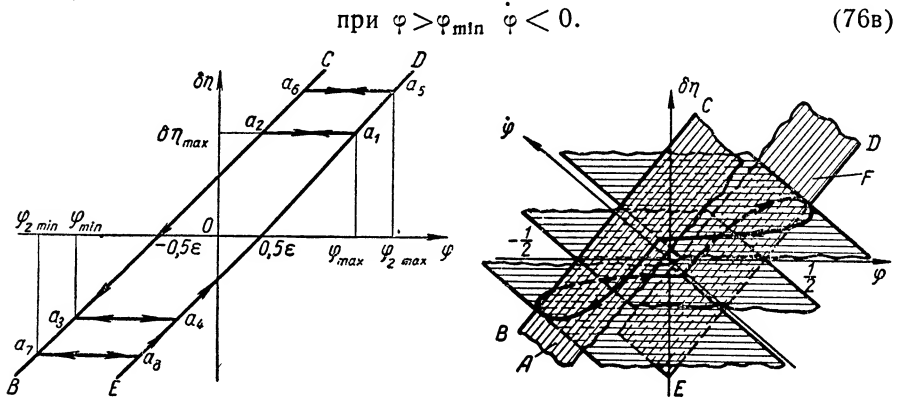
$$T_a\ddot{\varphi}+\rho\dot{\varphi}=-\frac{1}{T_s\delta}(\varphi_{max}-0{,}5\varepsilon)\ \text{при}\ \dot{\eta}=0. \qquad (76б)$$

При дальнейшем уменьшении φ начинает уменьшаться $\delta\eta$ по прямой CB. При этом мы имеем $\delta\eta=\varphi+0{,}5\varepsilon$, и уравнение движения (до момента остановки при $\varphi=\varphi_{min}$) будет иметь вид

$$T_a\ddot{\varphi}+\rho\dot{\varphi}=-\frac{1}{T_s\delta}(\varphi+0{,}5\varepsilon),$$

при $\dot{\eta}<0$, т. е.

$$\text{при}\ \varphi>\varphi_{min}\ \dot{\varphi}<0. \qquad (76в)$$



Фиг. 53. Зависимость между смещением чувствительного элемента и отклонением регулируемой величины.

Фиг. 54. Бесконечнолистная фазовая поверхность регулятора.

После достижения минимального значения φ_{min} начинается увеличение φ, при этом в пределах $\varphi_{min}<\varphi<\varphi_{min}+\varepsilon$ будет $\eta=\eta_{min}=\text{const}$. Точка $(\varphi\delta\eta)$ перемещается по отрезку a_3a_4. В этом участке

$$\dot{\mu}=\frac{1}{T_s\delta}(\varphi_{min}+0{,}5\varepsilon).$$

Следовательно,

$$T_a\ddot{\varphi}+\rho\dot{\varphi}=-\frac{1}{T_s\delta}(\varphi_{min}+\varepsilon)\ \text{при}\ \dot{\eta}=0,$$

т. е. при

$$\varphi_{min}<\varphi<\varphi_{min}+\varepsilon. \qquad (76г)$$

Если в системе имеются периодические колебания и φ_{max} есть амплитуда колебания, то точка $(\varphi, \delta\eta)$ начинает периодически обходить замкнутый контур $a_1a_2a_3a_4a_1$. Если устанавливаются автоколебания большей амплитуды φ_{2max}, то им будет соответствовать обход по контуру $a_5a_6a_7a_8a_5$ и т. д. Каждое колебание описывается четырьмя уравнениями, причем уравнения (76а) и (76в) одинаковы при любых φ_{max} и φ_{min}, а уравнения (76б) и (76г) зависят от φ_{max} и φ_{min}.

Поскольку начальные амплитуды φ_{max} и φ_{min} могут быть любыми, постольку для описания всех возможных движений в системе необходимо

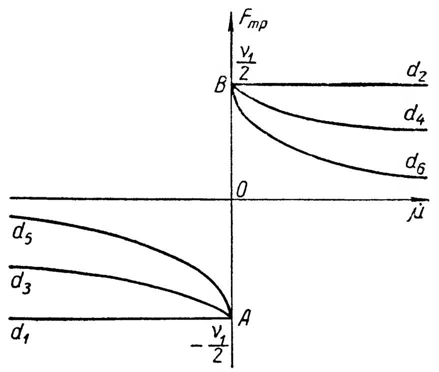
бесчисленное множество диференциальных уравнений второго порядка вида (76б) и (76г). Очевидно, что отобразить систему на многолистную фазовую поверхность с конечным числом листов невозможно. Необходима бесконечнолистная фазовая поверхность (фиг. 54). Построить ее можно следующим образом: введем на фиг. 54 третью ось $\psi = \dot{\varphi}$, проходящую через начало координат и перпендикулярную к остальным осям (фиг. 55). Проведем через прямые CB и ED две полуплоскости, перпендикулярные к плоскости чертежа:

$$\delta\eta = \varphi + 0{,}5\varepsilon \tag{77а}$$

и

$$\delta\eta = \dot{\varphi} - 0{,}5\varepsilon. \tag{77б}$$

Полуплоскость A [см. формулу (77а)] располагаем перед плоскостью чертежа (ей соответствуют отрицательные значения $\dot{\varphi}$), полуплоскость F [см. формулу (77б)] идет за плоскостью чертежа, и ей соответствуют положительные значения $\dot{\varphi}$. Пространство между плоскостями плотно, без промежутков заполнено полосами $\delta\eta = \text{const}$.



Фиг. 55. Характеристики сил трения.

На фиг. 54 полосы скреплены с полуплоскостью A вдоль отрицательных значений ψ и с полуплоскостью F вдоль положительных значений ψ. Каждая из полос $\delta\eta = \text{const}$ заполнена семейством траекторий, определяемых уравнениями (76б) или (76г) с соответствующими значениями φ_{max} или φ_{min}. Полуплоскости A и F соответственно заполнены траекториями, определяемыми уравнениями (76а) и (76в). Построенная бесконечнолистная фазовая поверхность, представляющая вырожденный трехмерный континуум, отображает все возможные движения в системе. На фиг. 54 показана замкнутая фазовая траектория (предельный цикл), соответствующая некоторому автоколебательному режиму. Условие устойчивости получается, если потребовать, чтобы предельный цикл проходил через концы устойчивого отрезка покоя. Это условие имеет вид

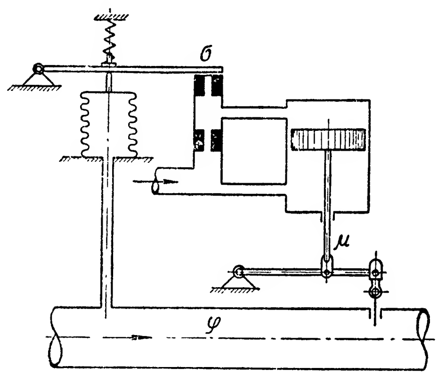
$$A = \frac{T_a}{T_s \delta\rho^2} < 3{,}04.$$

Если $A < 3{,}04$, то автоколебания в системе невозможны, если же $A > 3{,}04$, то возникают автоколебания. Введение жесткой обратной связи не изменяет структуры фазового пространства, а лишь несколько изменяет вид уравнений. Если в регуляторе имеется жесткая обратная связь, определяемая уравнением движка $\sigma = \eta - \gamma\mu$, то движения в системе зависят от двух параметров.

5. СИСТЕМА РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СУХОГО ТРЕНИЯ В СЕРВОМОТОРЕ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ

Ранее мы показали, как влияет на поведение системы регулирования сухое трение в чувствительном элементе. Было установлено, что в этом случае в системе могут возникнуть незатухающие колебания, нарушающие нормальную ее работу.

Здесь мы рассмотрим вопрос о том, как влияет на поведение системы сухое трение в сервомоторе. Это весьма важно потому, что трение в сервомоторе обычно достигает значительной величины из-за необходимости создания достаточно надежной посадки сервопоршня и вследствие сил реакции от усилия сервопоршня, возникающих в звеньях механизма, передающих это усилие к исполнительному органу.



Фиг. 56. Схема системы регулирования.

При рассмотрении влияния трения в чувствительном элементе мы полагали, что зависимость силы сухого трения от относительной скорости $\dot{\mu}$ представляется ломаной d_1ABd_2 на фиг. 55, т. е. что при наличии относительной скорости между трущимися телами сила трения постоянна по величине, а по знаку противоположна знаку относительной скорости. Если же относительная скорость равна нулю, то сила трения может принимать в пределах $+R$ и $-R$ любые значения $-R \leqslant F_{тр} \leqslant +R$.

Такое предположение является первым приближением к действительности. В реальных условиях сила трения покоя обычно больше силы трения движения, причем с увеличением относительной скорости абсолютная величина силы трения уменьшается.

Графически зависимость силы сухого трения от скорости в этом случае представляется кривыми типа d_3ABd_4 или d_5ABd_6. Форма кривых зависит от рода сопрягающихся материалов и от характера поверхности. Подобные характеристики силы трения будут называться падающими характеристиками, а само трение — падающим.

Обычно принимаемая зависимость, представленная на фиг. 55 ломаной d_1ABd_2, является далеко идущей идеализацией реальной зависимости, представленной кривыми d_3ABd_4, d_5ABd_6.

Влияние сухого трения, действующего в сервомоторе, наиболее сильно сказывается в сервомоторах, управляемых от золотника типа сопла — заслонки или струйной трубки.

Мы будем рассматривать вопрос о поведении системы автоматического регулирования с безинерционным чувствительным элементом, объектом с самовыравниванием и сервомотором переменной скорости при наличии в нем сухого трения с падающими характеристиками. Схема системы регулирования приведена на фиг. 56.

Уравнения движения в обычной форме для объекта регулирования, чувствительного элемента, золотника и сервомотора могут быть записаны так:

Уравнение объекта

$$T_a\dot{\varphi} + \rho\varphi = -\mu; \tag{51a}$$

Уравнение чувствительного элемента

$$\eta = \frac{\varphi}{\delta}; \tag{52}$$

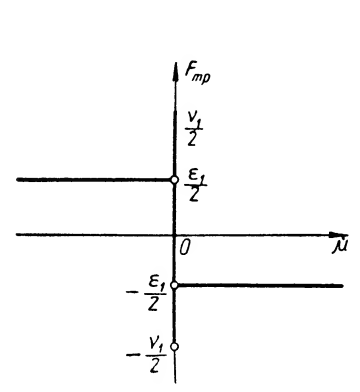
Уравнение золотника

$$\sigma = \eta. \tag{54a}$$

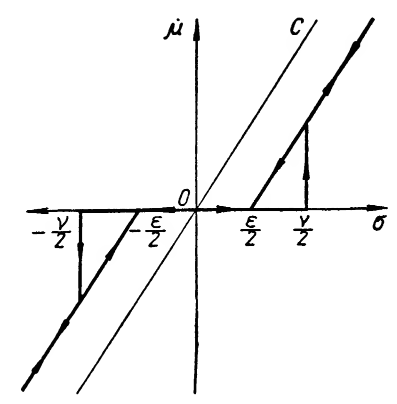
Уравнение сервомотора

$$\dot{\mu} = \frac{1}{T_s}\sigma + F_{mp}.$$

Что касается уравнения сервомотора, то для упрощения расчета при сохранении качественных особенностей явления мы идеализируем



Фиг. 57. Идеализированная характеристика силы падающего трения.



Фиг. 58. Зависимость скорости сервопоршня от смещения золотника.

характеристику падающего трения и будем считать, что оно может быть представлено при помощи фиг. 57 и аналитически записано в виде

$$F_{mp} = \begin{cases} -0{,}5\varepsilon_1; & \dot{\mu} > 0; \\ +0{,}5\varepsilon_1; & \dot{\mu} < 0; \end{cases} \tag{78}$$

$$-\frac{\nu_1}{2} \leqslant F_{mp} \leqslant +\frac{\nu_1}{2}; \quad \dot{\mu} = 0.$$

В этом предположении зависимость скорости сервопоршня от смещения золотника графически изображается, как это показано на фиг. 58, где $\nu = \alpha\nu_1$; $\varepsilon = \alpha\varepsilon_1$.

В областях $|\bar{\sigma}| < 0{,}5\varepsilon$ (или $|\varphi| < 0{,}5\varepsilon\delta T_s$) и $|\bar{\sigma}| > 0{,}5\nu$ (или $|\varphi| > 0{,}5\nu\delta T_s$)$\left(\sigma\frac{\sigma}{T_s}\right)$ возможно лишь по одному значению $\dot{\mu}$, в областях

$0{,}5\varepsilon \leqslant |\bar{\sigma}| \leqslant 0{,}5\nu$ (или $0{,}5\varepsilon\delta T_s \leqslant |\varphi| \leqslant 0{,}5\nu\delta T_s$)—по три значения $\dot{\mu}$, причем отрезкам оси абсцисс соответствуют два слившихся состояния — устойчивое и неустойчивое. При каждом колебании переменной φ с амплитудой $\varphi^* > 0{,}5\nu\delta T_s$ на плоскости φ, $\dot{\mu}$ будут описываться две петли гистерезиса.

Аналитически зависимость, изображенная на фиг. 58, запишется в виде

$$\dot{\mu} = \begin{cases} \frac{\sigma}{T_s\delta} - 0{,}5\varepsilon; & \frac{\varphi}{T_s\delta} > 0{,}5\varepsilon; \\ 0; & \left|\frac{\varphi}{T_s\delta}\right| \leqslant 0{,}5\nu; \\ \frac{\sigma}{T_s\delta} + 0{,}5\varepsilon; & \frac{\varphi}{T_s\delta} < -0{,}5\varepsilon. \end{cases} \tag{78а}$$

Исключая из уравнений (51а), (52), (54а) и (78а) все переменные, кроме φ, находим, что все возможные движения в системе могут быть описаны тремя уравнениями относительно переменной φ:

$$T_a\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + \frac{\varphi}{T_s\delta} + 0{,}5\varepsilon = 0 \text{ при } \varphi < -0{,}5\varepsilon\delta T_s; \tag{79а}$$

$$T_a\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} = 0 \text{ при } |\varphi| \leqslant 0{,}5\nu\delta T_s; \tag{79б}$$

$$T_a\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + \frac{\varphi}{T_s\delta} - 0{,}5\varepsilon = 0 \text{ при } \varphi > 0{,}5\varepsilon\delta T_s, \tag{79в}$$

которые циклически сменяют друг друга.

Фазовое пространство системы, которое в рассматриваемом случае представляет трехлистную фазовую поверхность, строится следующим образом [3].

Уравнение (79а) отображается на фазовую полуплоскость, ограниченную справа прямой

$$\varphi = -0{,}5\varepsilon\delta T_s = -\varphi_2. \tag{80}$$

Назовем ее первым листом (фиг. 59). Уравнение (79б) отображается на кусок фазовой плоскости (второй лист, фиг. 60), ограниченный слева прямой

$$\varphi = -0{,}5\nu\delta T_s = -\varphi_1, \tag{81}$$

а справа прямой

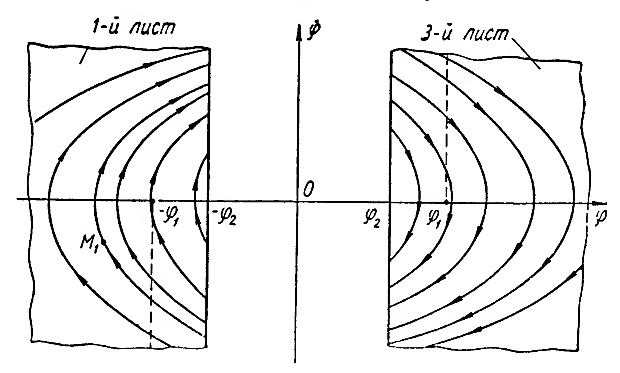
$$\varphi = 0{,}5\nu\delta T_s = \varphi_1. \tag{82}$$

Уравнение (79в) отображается на полуплоскость, ограниченную слева прямой

$$\varphi = 0{,}5\varepsilon\delta T_s = \varphi_2. \tag{83}$$

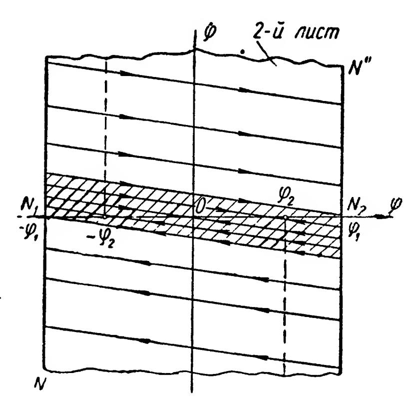
На фиг. 59 видно, что изображающая точка M, попав в любом месте на первый лист, двигается по куску фазовой траектории, принадлежащему устойчивому фокусу и описываемому уравнением (79а), через некоторое время она выходит на положительную часть границы

$\varphi = -\varphi_2$ листа и покидает его. Аналогичное обстоятельство имеет место для третьего листа; изображающая точка, расположенная на нем, движется по фазовой траектории и покидает лист через отрицательную часть его границы $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_2$ (здесь $\dot{\varphi}_2 = 0{,}5\varepsilon\delta T_s$).



Фиг. 59. Первый и третий листы фазовой поверхности.

Иное положение имеет место на втором листе (фиг. 60). Если изображающая точка находится в незаштрихованных областях второго листа, то она, двигаясь по фазовой траектории, через некоторый промежуток времени выходит на границу листа и покидает его. Если же изображающая точка находится в любой точке заштрихованной области (ограниченной траекториями, проходящими через точки N_1 и N_2 оси абсцисс), то она через некоторый промежуток времени должна выйти на отрезок N_1N_2 оси абсцисс и остается на нем. Следовательно, отрезок N_1N_2 второго листа является устойчивым отрезком покоя.

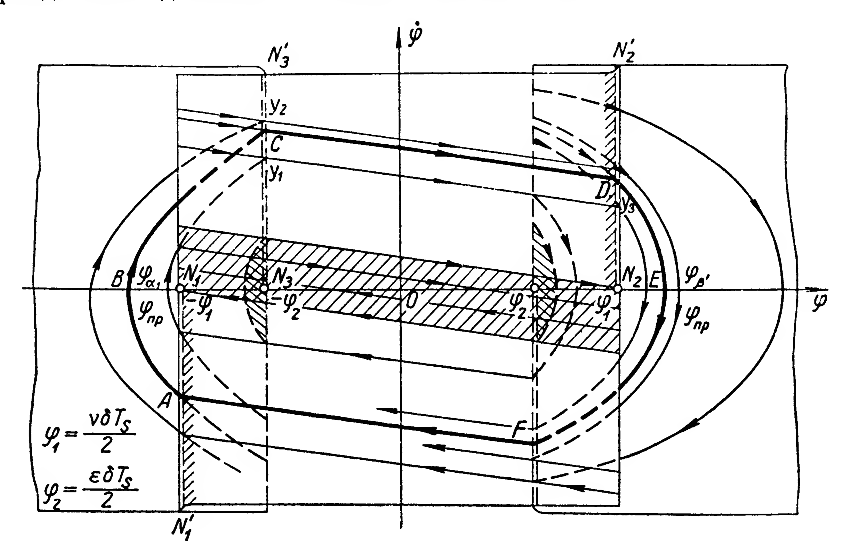


Фиг. 60. Второй лист фазовой поверхности.

Построим теперь фазовую поверхность системы. Для этого необходимо отдельные листы скрепить между собой вдоль тех участков их границ, через которые изображающая точка покидает листы. Следовательно, отдельные листы связаны между собой следующим образом: первый лист соединяется со вторым вдоль отрицательной полупрямой [см. формулу (81)] и положительной полупрямой [см. формулу (80)], второй лист соединяется с третьим вдоль положительной полупрямой [см. формулу (82)] и отрицательной полупрямой [см. формулу (83)] (фиг. 60).

Построенная многолистная фазовая поверхность, имеющая четыре точки разветвления, дает взаимно однозначное соответствие между состоянием системы и положением изображающей точки в фазовом про-

странстве. На фиг. 61 ясно виден характер движения изображающей точки на фазовой поверхности. Фазовая траектория извне и изнутри навертывается на предельный цикл *ABCDEFA*, которому соответствуют автоколебания в системе. При надлежащем изменении параметров системы амплитуда предельного цикла убывает, и при некотором их сочетании периодические движения в системе делаются невозможными.



Фиг. 61. Фазовая поверхность системы регулирования.

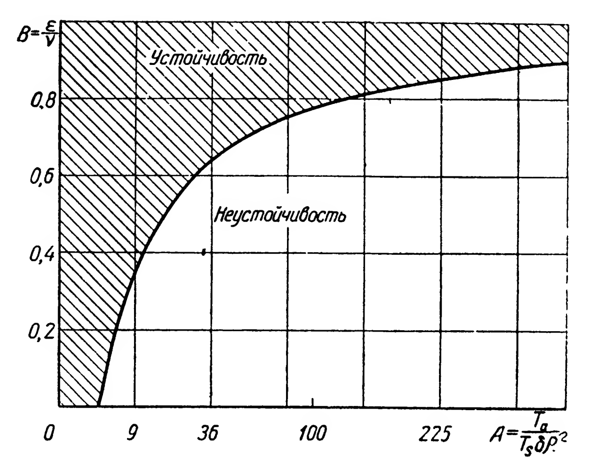
Такое сочетание параметров обеспечивает устойчивость систем регулирования. Расчет показывает, что если выполняется условие

$$B \geqslant \frac{\sqrt{A}\exp\frac{1}{\sqrt{4A-1}}\left(-\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{4A-1}}\right)-1}{\sqrt{A}\exp\frac{1}{\sqrt{4A-1}}\left(-\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{4A-1}}\right)+1}, \qquad (84)$$

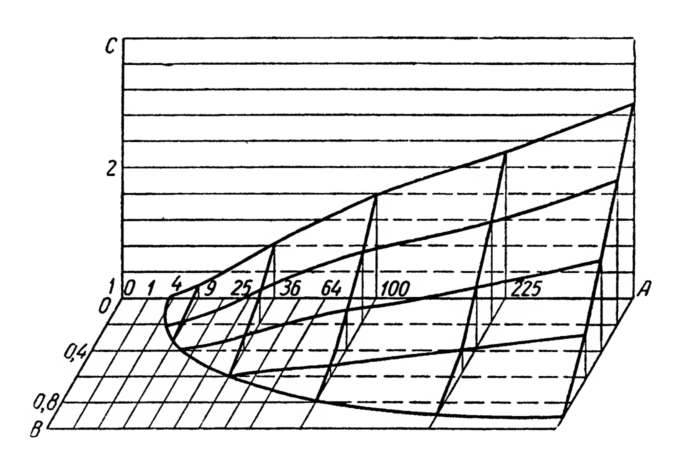
то автоколебания в системе регулирования не могут иметь места и система устойчива. В противном случае в системе могут возникнуть незатухающие колебания, и, следовательно, система будет неустойчивой.

На фиг. 62 по формуле (84) построена плоскость параметров системы регулирования.

Если параметр $A < 3{,}04$, то система регулирования является устойчивой при любых значениях B, т. е. при любой глубине спада силы трения. Если же $A > 3{,}04$, то система будет устойчивой тогда, когда параметр B будет больше некоторого определенного значения, определяемого границей области устойчивости. С увеличением A граничное значение параметра B монотонно возрастает: если $A \to \infty$, то $B \to 1$. Следовательно, если глубина спада силы трения неизвестна или может изменяться в процессе работы, то желательно конструировать систему регулирования таким образом, чтобы выдерживалось условие $A < 3{,}04$.



Фиг. 62. Плоскость параметров системы.



Фиг. 63. Зависимость амплитуды предельного цикла от параметров системы.

Но $A=\frac{T_a}{T_s\delta\rho^2}$; здесь T_a и ρ — постоянная времени и коэфициент самовыравнивания объекта регулирования, обычно не зависящие от конструкции регулятора. Поэтому для уменьшения параметра A необходимо увеличивать постоянную времени сервомотора T_s или неравномерность δ чувствительного элемента.

В некоторых случаях выбрать величину $A < 3{,}04$ не удается, и приходится идти на возможность возникновения в системе регулирования незатухающих колебаний. При этом очень важно знать, устойчивы ли периодические движения, возникающие в системе, какова их амплитуда φ_{cm} и как изменяется последняя с изменением параметров системы регулирования. Ответ на этот вопрос дает формула (85), связывающая безразмерную амплитуду $C=\frac{\varphi_{cm}}{\varphi_1}$ с параметрами A и B:

$$\left\{2\sqrt{A}(C-B)\exp\frac{1}{\sqrt{4A-1}}\left(-\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{4A-1}}\right)-(1-3B)\right\}^2+$$
$$+(4A-1)(1-B)^2=$$
$$=4A(C-B)^2\exp\frac{2}{\sqrt{4A-1}}\left[-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{4A-1}}+\right.$$
$$\left.+\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{A}(C-B)\exp\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{4A-1}}\right)-(1-3B)}{(1-B)\sqrt{4A-1}}\right]. \qquad (85)$$

На фиг. 63 приведена диаграмма, показывающая зависимость стационарной амплитуды от параметров A и B. Из этой фигуры видно, что стационарная амплитуда возрастает с увеличением параметров A и B.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Баутин Н. Н. и Горелик Г. С., „Автоматика и телемеханика" № 1, 1946, ДАН, т. 47, № 4, 1946.
2. Андронов А. А. и Баутин Н, Н., ДАН, т. 46, № 7, 1945.
3. Казакевич В. В., ДАН, т. 74, № 6, 1950.

ГЛАВА XXIX

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К АНАЛИЗУ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В этой главе основное внимание уделяется последовательному применению метода точечных преобразований к исследованию сравнительно несложных систем автоматического регулирования, состояние которых в любой момент времени может быть отображено на фазовой поверхности. Описание же самого метода дается в сжатой форме лишь с целью пояснения его основной идеи. Такое построение главы вызвано, во-первых, тем, что изложить здесь этот вопрос более углубленно за недостатком места вряд ли представляется возможным, во-вторых, — желанием придать содержанию главы возможно бо́льшую доходчивость и практическую направленность. Кроме того, в настоящее время метод точечных преобразований существенно развит лишь для систем, отображаемых на фазовой поверхности, а для систем, отображаемых в фазовом пространстве, — нуждается в дальнейшем развитии.

Более подробное изложение метода и примеры его применения к системам более сложным, чем рассматриваемые здесь, читатель может найти в соответствующей литературе см. например, [1]—[6], [8], [9].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сформулируем те основные задачи нелинейной теории автоматического регулирования, которые могут быть в настоящее время решены с помощью метода точечных преобразований.

Исходными данными для исследования нелинейной системы автоматического регулирования при помощи излагаемого метода являются уравнения движения системы и ее нелинейные характеристики. Последние могут быть заданы экспериментально. Тогда в задачу исследования войдут следующие основные вопросы:

а) выявление возможности существования предельных циклов и их числа, т. е. выявление возможности автоколебательных состояний исследуемой системы;

б) выявление бифуркационных значений параметров системы, вызывающих смену видов ее движения, т. е. нахождение критического соотношения основных параметров, разбивающего пространство параметров системы на области устойчивости, наличия и отсутствия автоколебаний и т. д.;

в) анализ устойчивости „в большом“ состоянии равновесия и предельных циклов — автоколебаний;

г) выявление условий, при которых могут возбуждаться автоколебания (мягкий и жесткий режимы, связь с начальными условиями);

д) нахождение параметров автоколебаний — амплитуды и частоты, а также зависимости их от параметров системы автоматического регулирования;

е) выявление качественной и количественной картины переходных процессов при свободных колебаниях системы, а также при вынужденных движениях для некоторых видов возмущений $f\ (t)$.

2. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Метод точечных преобразований (отображений) в применении к теории автоматического регулирования разработан А. А. Андроновым и его сотрудниками и представляет рациональное сочетание метода припасовывания и приемов теории точечного преобразования поверхностей [1]—[4].

Рассматриваемый метод опирается на изучение поведения динамических систем и, в частности, систем автоматического регулирования с помощью фазового пространства [1].

В основе метода лежит кусочно-линейная апроксимация нелинейных характеристик системы, поскольку принципиально такая апроксимация позволяет всегда произвести интегрирование уравнений движения системы. Этот метод некоторыми авторами называется методом интегрируемой апроксимации.

Метод точечных преобразований заключается в основном в следующем. Фазовое пространство, координатами которого являются обобщенные координаты исследуемой системы автоматического регулирования и их производные по времени, разбивается в соответствии с нелинейными характеристиками на ряд участков, в пределах которых движение системы описывается линейными диференциальными уравнениями.

Все фазовое пространство заполнено траекториями движущейся в нем изображающей точки. Координаты изображающей точки определяют состояние динамической системы в каждый момент времени.

Вопрос о том, каким типам траекторий изображающей точки соответствуют те или иные движения системы во времени, уже рассматривался в главе XXVII, поэтому здесь лишь отметим, что если траектории скручиваются к началу координат или стягиваются к отрезку покоя, то исследуемая система устойчива, если, наоборот, траектории раскручиваются, то система может иметь расходящиеся колебания и быть неустойчивой. Если же траектории изображающей точки стягиваются изнутри и снаружи к предельной замкнутой траектории, то система входит в колебательное состояние. Эти предельные замкнутые траектории называются предельными циклами Пуанкаре.

А. А. Андронов впервые показал, что такие предельные циклы, образующиеся в фазовом пространстве, являются „образами“ автоколебательных состояний системы автоматического регулирования. Это соответствие является фундаментальным положением нелинейной теории колебаний; оно показывает, что физическим явлениям — автоколебаниям системы — адэкватно математическое представление их с помощью пре-

дельных циклов Пуанкаре и, таким образом, математический аппарат качественной теории диференциальных уравнений непосредственно применим к исследованию таких явлений.

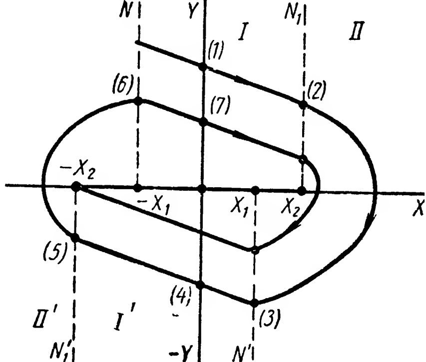
Таким образом, решение задачи связано с изучением поведения траекторий изображающей точки в фазовом пространстве.

В силу кусочно-линейной апроксимации нелинейных характеристик нелинейная задача сводится к рассмотрению нескольких различных систем линейных диференциальных уравнений и к последовательному припасовыванию констант интеграции, исходя из требований непрерывности функций в точках сопряжения различных систем уравнений.

Фазовые траектории, характеризующие поведение системы в динамике, будут непрерывными кривыми, а их производные могут иметь разрыв. Поэтому фазовые траектории могут иметь вид ломаных кривых, образующих в местах сопряжений угловые точки.

Из теории колебаний [1] известно, что фазовые траектории могут пересекаться лишь в особых точках, во всех других обыкновенных точках фазового пространства фазовые траектории не пересекаются и образуют непрерывные траектории системы. Задание начальных условий определяет траекторию, по которой будет двигаться изображающая точка.

Рассматриваемый метод исследования динамики нелинейной системы в общем случае заключается в сведении динамической задачи к исследованию точечного преобразования поверхностей.



Фиг. 64. Фазовая плоскость (y, x) и фазовые траектории.

В частном же случае систем, отображаемых на фазовой плоскости, динамическую задачу можно, например, свести, как это показано ниже, к изучению точечного преобразования полупрямой, представляющей полуось ординат y, в самое себя.

Для наглядности дальнейшего изложения примем, что фазовое пространство представляет фазовую плоскость, по осям координат которой отложены интересующая нас переменная и ее производная по времени. Такая фазовая плоскость позволяет определить по координатам изображающей точки состояние системы в любой момент времени, движение которой описывается диференциальным уравнением второго порядка.

В качестве примера рассмотрим фазовую плоскость $\left(y=\frac{dx}{dt};\ x\right)$, изображенную на фиг. 64. Прямые, параллельные оси ординат и проходящие через точки x_1, x_2, $-x_1$, $-x_2$, ограничивают участки, в пределах которых движение системы описывается линейными диференциальными уравнениями. Фазовые траектории для отдельных участков изображены на фиг. 64. Рассмотрим, как происходит переход точек полуоси $+y$ при обороте изображающей точки около начала координат снова на полуось $+y$.

Пусть в начальный момент изображающая точка находится на оси y в точке *1*. Далее, в соответствии с линейной системой уравнений движения, действующей на участке *1*, изображающая точка переходит по траектории на полупрямую N_1 в точку *2*. Назовем переход точек полуоси $+y$ на полупрямую N_1 преобразованием (отображением) S_1^+. Затем изображающая точка в соответствии с линейной системой уравнений движения участка *II* переходит на полупрямую N' в точку *3*. Этот переход назовем преобразованием (отображением) E^+. С полупрямой N' изображающая точка по траекториям участка переходит на полуось $-y$ (точка *4*), и этот переход назовем преобразованием S_2^-. Далее изображающая точка переходит на полупрямую N_1' (точка *5*) — преобразование S_1^-, на полупрямую N (точка *6*) — преобразование E^- и, наконец, снова на полуось $+y$ (точка *7*). Этот последний переход точки назовем преобразованием S_2^+.

Следовательно, преобразование $T^+ = S_1^+E^+S_2^-$ переводит точки полуоси $+y$ на полуось $-y$, а преобразование $T^- = S_1^-E^-S_2^+$ точки полуоси $-y$ снова на полуось $+y$, т. е. преобразование $T = S_1^+E^+S_2^-S_1^-E^-S_2^+$ переводит точки полуоси $+y$ снова на эту полуось. Такое преобразование (или отображение) называется преобразованием полуоси y в самое себя.

В рассматриваемом примере, как видно из изложенного, проще изучать преобразование не полуоси $+y$, а преобразование полупрямой N — в самое себя,

В этом случае преобразование представится выражением $T = S^+E^+S^-E^-$, где через S^+ (S^-) обозначено преобразование, соответствующее переходу точек полупрямой N на полупрямую N' по траекториям участка *1* (соответственно для участка *1'*).

Таким образом, изучение точечного преобразования полупрямой в самое себя сводится к изучению поведения точек полупрямой N при повторении преобразования T. Если фазовая плоскость симметрична относительно начала координат, то каждый раз, когда точка, переходя по преобразованию $T^+ = S^+E^+$, попадает на полупрямую N', можно рассматривать в ней симметричную точку полупрямой N. В этом случае задача сводится к рассмотрению преобразования полупрямой N в полупрямую N' при применении только преобразования $T^+ = \overline{S^+E^+}$.

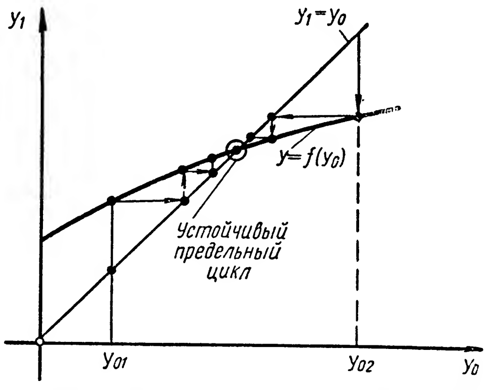
В чем же заключается изучение точечного преобразования полупрямой в самое себя? На этот вопрос можно ответить так.

Если изображающая точка после оборота относительно начала координат снова попадает на полупрямую (допустим, N на фиг. 64), то она в зависимости от динамических свойств системы может оказаться выше и ниже первоначального положения или снова вернуться в него. В зависимости от этого траектории изображающей точки могут быть раскручивающимися и скручивающимися, замкнутыми кривыми и т. д. При этом возможно, что траектории раскручиваются и скручиваются к замкнутым кривым — предельным циклам. Если в фазовом пространстве образуется предельный цикл, то говорят, что существует неподвижная точка. Для того чтобы выявить, по каким траекториям будет

двигаться изображающая точка для данной конкретной системы, необходимо исследовать последовательность точек пересечения траекторий с выбранной полупрямой при непрерывном изменении начальных условий, т. е. при повторении преобразования T^+. Эта последовательность точек пересечения траектории с выбранной полупрямой, представленная в виде функции от начальных условий, и будет представлять точечное преобразование полупрямой в самое себя.

Если преобразование T оказывается не применимым к некоторым точкам полупрямой N, то это означает, в данном примере, что соответствующая точка идет сразу к отрезку покоя и периодические колебания не могут установиться в динамической системе.

Таким образом, изучение поведения отдельной траектории в фазовой плоскости будет эквивалентным изучению последовательности точек пересечения ее с выбранной полупрямой, а последовательность точек пересечения для непрерывного изменения начальных условий будет представлять точечное преобразование данной полупрямой в самое себя. Изучение же структуры разбиения фазовой плоскости на траектории различного вида будет эквивалентным изучению структуры преобразования выбранной полупрямой в самое себя, осуществляемого движением изображающих точек по траекториям.



Фиг. 65. Диаграмма точечного отображения $\{y_1=f(y_0)\}$.

Поскольку перечисленные задачи являются только некоторой частью теории точечных преобразований поверхностей, целесообразнее говорить не о точечном преобразовании, а о точечном отображении прямой в прямую.

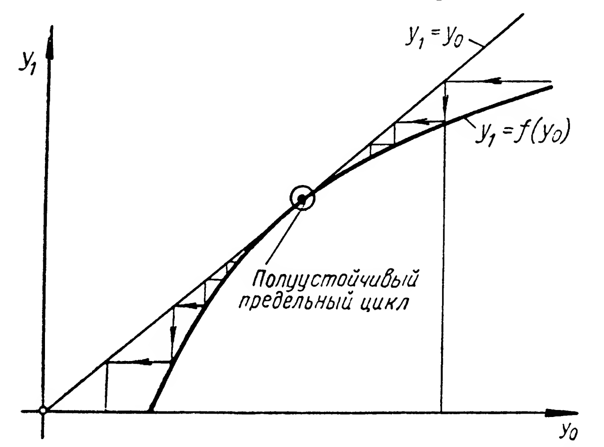
Для изучения структуры отображения прямой в прямую удобно пользоваться специальной диаграммой точечного отображения, характеризующей взаиморасположение какой-либо выбранной кривой (в частном случае — прямой) с кривой, представляющей точечное отображение полупрямой в самое себя. Взаиморасположение этих кривых позволяет судить о структуре отображения, т. е. о структуре разбиения фазовой плоскости на траектории. Так, например (фиг. 65), если изучается преобразование полуоси ординат $(+y)$ в самое себя, то последовательность точек пересечения траекторий с полуосью представится функцией $y_1=f(y_0)$, где y_0 — начальное значение ординаты, y_1 — значение ординаты при пересечении с полуосью после оборота изображающей точки вокруг начала координат. Если для построения диаграммы выбрана прямая $y_1=y_0$, то точки пересечения этих двух кривых (прямой и кривой) будут неподвижными точками данной фазовой плоскости, определяющими наличие предельных циклов. Число точек пересечения будет определять число возможных предельных циклов, т. е. периоди-

ческих колебаний систем автоматического регулирования. Взаиморасположение этих кривых позволит решить вопрос о структуре разбиения фазовой плоскости на траектории, об устойчивости положения равновесия и периодических колебаний систем.

Если построенные на диаграмме кривые не пересекаются, то предельного цикла не существует, и в системе невозможны автоколебания.

Взаиморасположение и вид этих кривых определяют также характер протекания переходных процессов при свободных колебаниях системы.

Однако не всегда представляется возможным достаточно просто математически выразить функцию точечного отображения полупрямой в самое себя. Иногда оказывается проще исследовать две кривые, одна из которых представляет функцию точечного отображения положительной полуоси в какую-либо полупрямую, а другая — функцию точечного отображения отрицательной полуоси в ту же полупрямую. Тогда взаиморасположение этих кривых также дает ответ о структуре разбиения фазового пространства на траектории. В частности, число точек пересечения и взаиморасположение этих кривых даст ответ о числе и устойчивости возможных периодических колебаний системы.



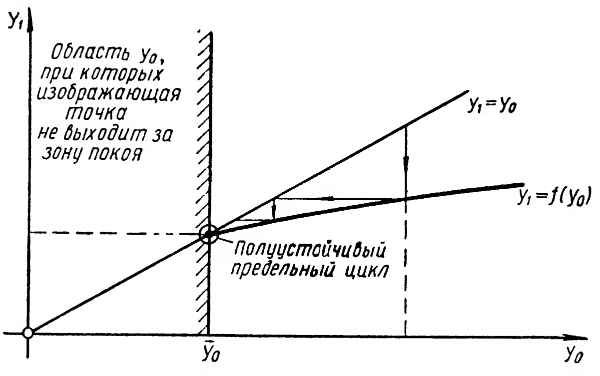
Фиг. 66 Диаграмма точечного отображения при бифуркационном значении параметров системы (случай касания кривых).

Анализ взаиморасположения кривых диаграммы точечного отображения обычно проводится путем варьирования параметров системы с тем, чтобы выяснить области значений параметров, соответствующие качественно различным видам ее движения. Не останавливаясь подробно на этом вопросе, отметим лишь некоторые особенности взаиморасположения кривых в простейших случаях.

Так, если кривые пересекаются, то в системе могут существовать периодические движения лишь в том случае, если из диаграммы следует, что они устойчивы (фиг. 65). Если же кривые касаются друг друга (фиг. 66) или пересекаются на границе зоны покоя (фиг. 67), то такое взаиморасположение их соответствует бифуркационному значению параметров. В приведенных примерах такому значению параметров отвечают полуустойчивые состояния систем (для диаграммы фиг. 67 — вырожденный предельный цикл на фиг. 68), которые при малейшем изменении значений параметров в ту или другую сторону могут перейти в устойчивые периодические колебания (устойчивые предельные циклы) или в затухающие колебания (устойчивое положение равновесия). Соот-

ношение параметров, при котором система находится на границе устойчивости, обычно называется критическим. Поэтому бифуркационные значения параметров для вышеприведенных примеров соответствуют критическому соотношению их и определяют в пространстве параметров границу, разделяющую его на области устойчивости и автоколебаний.

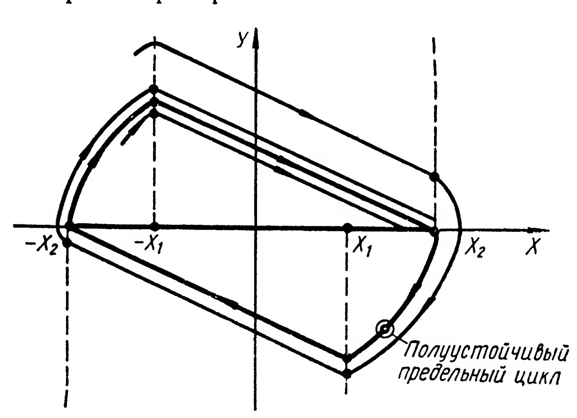
Знание расположения границы в пространстве параметров позволяет сделать практические выводы относительно выбора параметров данной системы, с тем чтобы либо получить устойчивую систему, либо, наоборот, вызвать ее автоколебания с определенной амплитудой и частотой для улучшения динамических свойств.



Фиг. 67. Диаграмма точечного отображения при бифуркационном значении параметров системы.

Взаиморасположение кривых диаграммы точечного отображения позволяет полностью вскрыть поведение динамической системы при различных начальных возмущениях; варьирование же параметров системы дает возможность получить такое расположение кривых, при котором переходные процессы системы приближаются к требуемому виду.

Более подробные разъяснения метода будут сделаны ниже, при рассмотрении примеров исследования нелинейных сервомеханизмов, здесь же укажем еще на два важных обстоятельства, учет которых значительно облегчает исследование нелинейных систем автоматического регулирования с помощью рассматриваемого метода.



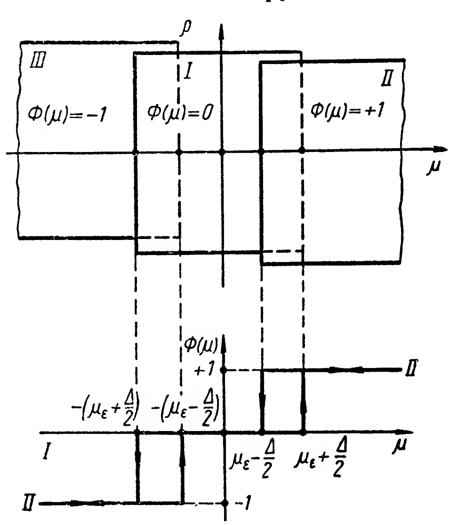
Фиг. 68 Фазовая плоскость (y, x) и полуустойчивый предельный цикл $\{-x_2 \leqslant x \leqslant x_2\}$ — зона покоя.

Как уже отмечалось, фазовая плоскость (или фазовое пространство) разбивается на участки, в пределах которых движение системы описывается линейными диференциальными уравнениями. Линии, ограничивающие действие той или иной системы уравнений, часто называют линиями переключений.

Если нелинейная характеристика системы неоднозначна, то в соответствии с уравнениями, описывающими эту функцию, фазовая пло-

скость представляет собой многолистную фазовую поверхность (в данном случае трехлистную). Границы каждого листа (фиг. 69) будут служить линиями переключений действия той или иной системы линейных уравнений. Изображающая точка, двигаясь по одному из листов фазовой поверхности, дойдя до границы, переходит на другой лист. В этот момент происходит смена уравнений движения, и на другом листе изображающая точка двигается в соответствии с новой системой линейных диференциальных уравнений.

На каждом листе такая нелинейная характеристика будет однозначной функцией своего аргумента. Представление фазовой поверхности в виде наложенных друг на друга листов значительно облегчает выяснение возможных типов траекторий изображающей точки и в то же время не позволяет упустить какой-либо вид движения системы, вызванного наличием неоднозначной нелинейной характеристики.



Фиг. 69. Трехлистная фазовая плоскость и нелинейная неоднозначная характеристика сервомеханизма.

Другое важное обстоятельство связано с отысканием критического соотношения параметров системы, разбивающей пространство параметров на области устойчивости и автоколебаний.

Определить критическое соотношение параметров для нелинейных систем не всегда легко. Если такое соотношение параметров и можно в отдельных случаях найти общими приемами, то получение простого выражения, удобного для инженерных расчетов, обычно весьма затруднительно.

В то же время именно получение критического соотношения параметров в удобной форме является одним из основных инженерных результатов исследования системы.

Выше уже упоминалось, что при бифуркационном значении параметров имеют место полуустойчивые состояния системы, и если уметь просто на основе протекания фазовых траекторий выявить эти состояния, то определить критическое соотношение параметров не представляет труда.

Это полуустойчивое состояние в некоторых случаях исследования нелинейных систем оказывается весьма просто выявить. Так, например, в целом ряде нелинейных задач, относящихся к релейным системам при критическом соотношении параметров, имеет место полуустойчивый („вырожденный“) предельный цикл. Характерным для такого цикла является то, что траектории фазовой плоскости наматываются на него только снаружи, а внутри траектории сматываются, т. е. изображающая точка движется к отрезку покоя. Малейшее изменение соотношения парамет-

ров вызывает образование устойчивого предельного цикла или, наоборот, исчезновение его.

Полуустойчивый цикл (фиг. 68) в вышеуказанных случаях проходит по краям зоны нечувствительности, а потому его координаты легко могут быть выражены с помощью уравнений движения через параметры сервомеханизма.

Но если координаты полуустойчивого цикла известны, то условие его существования, т. е. условие существования неподвижной точки полуустойчивого цикла, непосредственно определит критическое соотношение параметров.

Зная критическое соотношение параметров, значительно проще, как это будет видно из дальнейшего, выяснить устойчивость положения равновесия и предельных циклов.

В заключение сделаем еще несколько замечаний по поводу анализа движения системы автоматического регулирования с помощью фазовых пространств и рассматриваемого метода.

Представление движений в виде траекторий изображающей точки в фазовом пространстве имеет большой инженерный смысл, так как позволяет интерпретировать все рассуждения и выкладки в виде наглядных и ясных геометрических образов и непосредственно наблюдать за возможными движениями исследуемых систем.

Однако следует отметить, что для порядка уравнения системы выше третьего при решении задач могут возникнуть значительные математические трудности.

Рассмотренный метод исследования позволяет судить об устойчивости систем автоматического регулирования не при малых колебаниях систем относительно стационарных состояний, а при больших. Это означает, что начальные возмущения могут быть сколь угодно велики и ограничиваются лишь техническими показателями исследуемых систем. Этот метод является точным, т. е. ответы, получаемые с его помощью, являются не приближенными, а обладают той степенью точности, с какой исследуемая система автоматического регулирования представлена нелинейными диференциальными уравнениями и характеристиками.

В заключение подчеркнем еще раз, что рассмотренный метод, использующий теорию точечного преобразования поверхностей, дает не только качественный, но и во многих случаях полный количественный ответ на вопрос о возможных структурах разбиения фазового пространства на траектории при тех или иных значениях параметров и о характеристике возможных автоколебаний исследуемых систем автоматического регулирования.

3. ТЕОРИЯ ПРОСТЕЙШИХ РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В качестве примера рассмотрим однокаскадный электрический сервомеханизм, принципиальная схема которого изображена на фиг. 70.

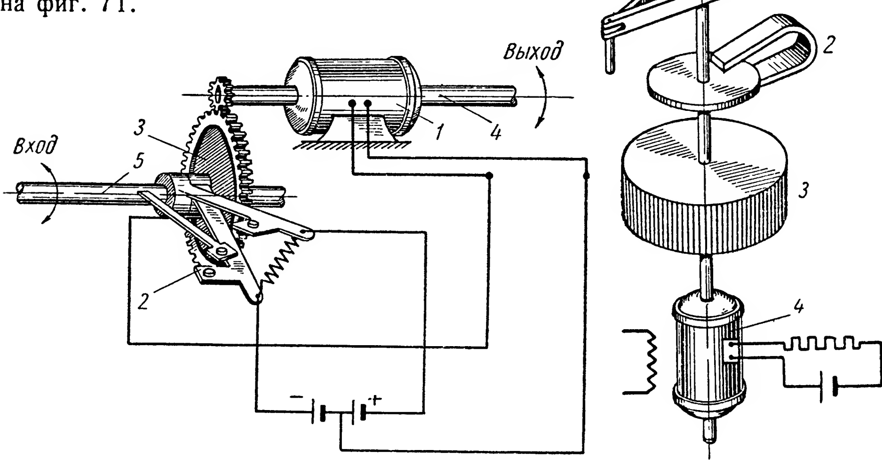
Сервомеханизм представляет электрический двигатель постоянного тока *1*, управляемый с помощью контактного устройства (реле) *2*.

Жесткая обратная связь его выполнена в виде зубчатой передачи *3*, связывающей выходную ось *4* с контактами реле *2*.

Сервомеханизм предназначен быть усилителем крутящего момента и в то же время усилителем мощности в схеме автоматического регулятора.

Входной сигнал от датчика регулятора поступает на ось *5* и с помощью якоря контактного устройства включает напряжение на клеммы двигателя *1*. Выходная ось *4* двигателя следит за движением входной оси с помощью жесткой обратной связи.

На двигатель действуют нагрузки инерционная, демпфирующая и от трения в его выходной оси. Схема действия нагрузок представлена на фиг. 71.



Фиг. 70. Принципиальная схема электрического однокаскадного сервомеханизма.

Фиг. 71. Схема нагрузок на электродвигатель сервомеханизма.

Для срабатывания контактного устройства *1* якорю двигателя *4* приходится пробегать некоторое расстояние относительно контактов, закрепленных на зубчатой шестерне *3*.

В зубчатой передаче обратной связи имеются зазоры между зубьями.

Таким образом, сервомеханизм представляет типичную нелинейную систему с релейным управлением, зазором в обратной связи и сухим трением в сервомоторе.

Согласно закону моментов количества движения уравнение вращающихся масс запишется в следующем виде:

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_{кр} - M_c; \qquad (86)$$

где J — приведенный к выходной оси двигателя момент инерции вращающихся масс;

$M_{кр}$ — крутящий момент;

M_c — момент сопротивления;

ω — угловая скорость выходной оси.

Крутящий момент двигателя *4* пропорционален току в якоре:

$$M_{кр} = k_1 i, \tag{87}$$

а ток в якоре определяется напряжением на клеммах электродвигателя u, сопротивлением цепи якоря R и противоэлектродвижущей силой, согласно уравнению:

$$u = R \cdot i + k_2 \omega, \tag{88}$$

где $k_2\omega$ — противоэлектродвижущая сила, изменяющаяся пропорционально угловой скорости двигателя.

Момент сопротивления определяется демпфирующим моментом, создаваемым демпфером *2*, и моментом сухого трения выходного вала в подшипниках и т. д., т. е.

$$M_c = k_3 \omega + M_{тр} \operatorname{sgn} \omega, \tag{89}$$

где $k_3\omega$ — демпфирующий момент, пропорциональный угловой скорости;
$M_{тр}$ — момент сухого трения;

$$\operatorname{sgn} \omega = \begin{cases} +1 & \text{при } \omega > 0; \\ -1 & \text{при } \omega < 0. \end{cases}$$

Напряжение на клеммах двигателя включается с помощью контактного устройства. Включенное или выключенное состояние реле определяется углами поворота задающей оси и ведомой зубчатой шестерни.

Обозначим угол поворота задающей оси $\beta_{вх}$, а угол поворота шестерни, на который закреплены клеммы реле $\beta_{о.с}$ (угол поворота обратной связи). Тогда напряжение, включаемое в реле, может быть представлено как нелинейная функция от разности углов поворота контактов, вызываемых входным сигналом и обратной связью в следующем виде:

$$u = \Phi_2(\beta_{вх} - \beta_{о.с}), \tag{90}$$

где

$$\Phi_2(\beta_{вх} - \beta_{о.с}) = \begin{cases} +u_m & \text{при } (\beta_{вх} - \beta_{о.с}) \geqslant \beta_\varepsilon; \\ 0 & \text{при } |(\beta_{вх} - \beta_{о.с})| < \beta_\varepsilon; \\ -u_m & \text{при } (\beta_{вх} - \beta_{о.с}) \leqslant -\beta_\varepsilon, \end{cases} \tag{91}$$

а $2\beta_\varepsilon$ представляет зону нечувствительности реле, величина которой определяется межконтактным расстоянием.

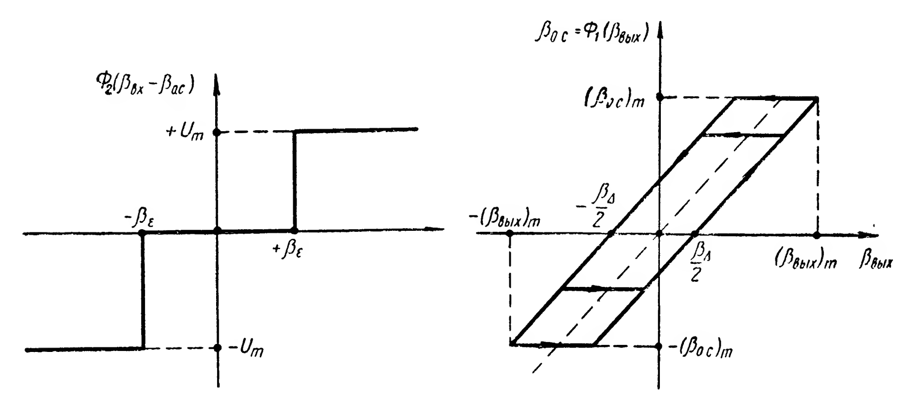
Вид нелинейной характеристики контактного устройства представлен на фиг. 72.

Вследствие наличия зазора β_Δ в зубчатой передаче обратной связи угол поворота шестерни, несущей контакты, неоднозначно связан с углом поворота выходной оси сервомеханизма $\beta_{вых}$.

Зависимость $\beta_{о.с} = \Phi_1(\beta_{вых})$ представлена нелинейной характеристикой на фиг. 73.

Такая характеристика математически может быть описана следующими уравнениями:

$$\Phi_1(\beta_{вых}) = \begin{cases} \left(\beta_{вых} - \frac{\beta_\Delta}{2}\right) \text{ при } \dot{\beta}_{o.c} > 0 \\ \left(\beta_{вых} + \frac{\beta_\Delta}{2}\right) \text{ при } \dot{\beta}_{o.c} < 0 \\ (\beta_{o.c})_0 = \text{const при } \dot{\beta}_{o.c} = 0 \end{cases} \qquad (92)$$



Фиг. 72. Характеристика контактного устройства.

Фиг. 73. Характеристика передачи при наличии зазора.

Подставляя в уравнение (86) выражения $M_{кр}$ и i из уравнений (87) и (88), M_c из (89), а также используя уравнения (90), (91) и (92), получим уравнение движения электрического сервомеханизма в следующем виде:

$$J\ddot{\beta}_{вых} + \left(k_8 + k_1 k_2 \frac{1}{R}\right)\dot{\beta}_{вых} +$$

$$+ M_{mp}\text{sgn}\,\dot{\beta}_{вых} = \frac{k_1}{R} F\{\beta_{вх} - \Phi_1(\beta_{вых})\}. \qquad (93)$$

В дальнейшем будем исследовать свободные колебания сервомеханизма, а потому положим входной сигнал равным нулю $\beta_{вх} = 0$, тогда правая часть уравнения (93) примет вид

$$\frac{k_1}{R}\Phi_2\{-\Phi_1(\beta_{вых})\} = -\frac{k_1}{R}\Phi(\beta_{вых}) \qquad (94)$$

Нелинейная функция $\Phi(\beta_{вых})$ в случае возможности пренебречь инерцией передачи обратной связи легко определяется по двум нелинейным функциям Φ_2 и Φ_1.

Математическое выражение такой функции уже приводилось в главе XXVI. Выражение этой функции выпишем после приведения уравнения (93) и представления его в относительных величинах.

Запишем уравнение (93) в следующем виде:

$$J\frac{R_1}{k_1}\ddot{\beta}_{вых}+\left(k_з+\frac{k_1k_2}{R}\right)\frac{R}{k_1}\dot{\beta}_{вых}+$$

$$+M_{тр}\frac{R}{k_1}\operatorname{sgn}\dot{\beta}_{вых}=\begin{cases}-u;\\ \ \ 0;\\ +u.\end{cases} \qquad (95)$$

Введем обозначения:
относительный угол поворота выходного вала электродвигателя

$$\frac{\beta_{вых}}{\beta_{вых.m}}=\varphi;$$

относительная величина напряжения, включаемого на клеммы двигателя,

$$\frac{u}{u_m}=\eta;$$

коэфициент, характеризующий инерционную нагрузку,

$$J\frac{R}{k_1}\cdot\frac{\beta_{вых.m}}{u_m}=\frac{J\beta_{вых.m}}{M_{кр.m}}=R\ [\text{сек}^2];$$

коэфициент, характеризующий скорость отработки,

$$\left(k_з+\frac{k_1k_2}{R}\right)\frac{R}{k_1}\cdot\frac{\beta_{вых.m}}{u_m}=T_s\ [\text{сек.}];$$

относительная величина момента сухого трения

$$M_{тр}\frac{R}{k_1}\cdot\frac{\beta_{вых.m}}{u_m}=r;$$

относительное расстояние между контактами

$$\frac{\beta_\varepsilon}{\beta_{вых.m}}=\varepsilon;$$

относительный зазор в зацеплении

$$\frac{\beta_\Delta}{\beta_{вых.m}}=\Delta.$$

После подстановки их в уравнение (95) получим уравнение движения сервомеханизма в относительных величинах:

$$R\ddot{\varphi}+T_s\dot{\varphi}+r\operatorname{sgn}\dot{\varphi}=-\Phi(\varphi). \qquad (96)$$

Нелинейная функция $\Phi(\varphi)$ математически выразится так:

$$\Phi(\varphi)=\begin{cases} +1 \text{ при } \varphi \geqslant \varepsilon+\frac{\Delta}{2} \text{ и } \dot{\varphi}>0; \\ \qquad \varphi > \varepsilon-\frac{\Delta}{2} \text{ и } \dot{\varphi}<0; \\ \qquad \varphi > \varepsilon-\frac{\Delta}{2} \text{ и } \dot{\varphi}>0, \text{ если } \Phi(\varphi_0)=1; \\ 0 \text{ при } -\varepsilon+\frac{\Delta}{2}<\varphi<\varepsilon+\frac{\Delta}{2} \text{ и } \dot{\varphi}>0; \\ \qquad -\left(\varepsilon+\frac{\Delta}{2}\right)<\varphi<\varepsilon-\frac{\Delta}{2} \text{ и } \dot{\varphi}<0; \\ \qquad +\left(\varepsilon+\frac{\Delta}{2}\right)<|\varphi| \text{ и } \dot{\varphi} \gtreqless 0, \text{ если } \Phi(\varphi_0)=0; \\ -1 \text{ при } \varphi \leqslant -\left(\varepsilon+\frac{\Delta}{2}\right) \text{ и } \dot{\varphi}<0; \\ \qquad -1 \quad \varphi<-\left(\varepsilon-\frac{\Delta}{2}\right) \text{ и } \dot{\varphi}>0; \\ \qquad \varphi<-\left(\varepsilon-\frac{\Delta}{2}\right) \text{ и } \dot{\varphi}<0; \text{ если } \Phi(\varphi_0)=-1. \end{cases} \tag{97}$$

Часто для удобства аналитического исследования производят еще дополнительные преобразования уравнения (96) — приводят его к виду, когда все переменные уравнения и его коэфициенты являются безразмерными величинами.

Для этого введем следующие безразмерные параметры:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \frac{T_s^2}{R}\varphi; \\ t^* &= \frac{T_s}{R}t; \\ \varepsilon^* &= \frac{T_s^2}{R}\varepsilon; \\ \Delta^* &= \frac{T^2}{R}\Delta; \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

тогда получим

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{T_s}\cdot\frac{d\psi}{dt^*}; \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{1}{R}\cdot\frac{d^2\psi}{dt^{*2}}.$$

Уравнение (96), выраженное с помощью безразмерных величин, примет следующий вид:

$$\frac{d^2\psi}{dt^{*2}}+\frac{d\psi}{dt^*}+r\operatorname{sgn}\frac{d\psi}{dt^*}=-\Phi(\psi). \tag{99}$$

Функция $\Phi(\psi)$ записывается аналогично выражениям (97) при замене ε на ε^* и Δ на Δ^*.

Исследование динамики системы будем проводить с помощью фазовой плоскости, а потому уравнения (96) или (99) в зависимости от того, какое из них будет выбрано для дальнейшего анализа, удобнее представить в виде двух уравнений первого порядка. В этом случае переменные φ и y (или ψ и y_1) будут координатами фазовой плоскости:

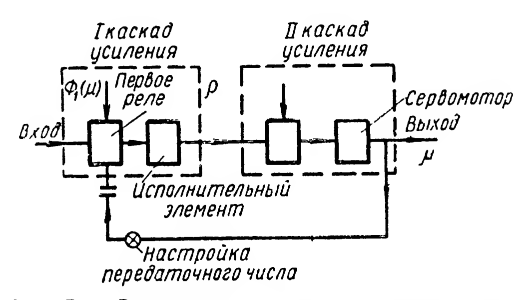
$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} = y; \\ &R\frac{dy}{dt} = -\Phi(\varphi) - T_s y - r\operatorname{sgn} y \end{aligned}\right\} \quad (100)$$

или

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi}{dt^*} = y_1; \\ &\frac{dy_1}{dt^*} = -\Phi(\psi) - y_1 - r\operatorname{sgn} y_1. \end{aligned}\right\} \quad (101)$$

В качестве второго примера рассмотрим двухкаскадный пневмогидравлический сервомеханизм, используемый часто в автопилотах [7].

На фиг. 74 изображена структурная схема этого двухкаскадного сервомеханизма, а на фиг. 75 — его принципиальная схема.



Фиг. 74. Структурная схема двухкаскадного сервомеханизма с релейным управлением.

В сервомеханизме имеются два каскада усилия: пневматический и гидравлический.

Пневматический усилитель состоит из управляющего элемента типа сопло — заслонка *1* и исполнительного устройства мембранного типа *2*. В гидравлический усилитель входит поршневой сервомотор *3*, управляемый золотником *4*. Сервомеханизм имеет жесткую обратную связь *5*, передающую воздействие с выходного штока его через диференциальную зубчатую передачу на управляющий элемент первого каскада усиления.

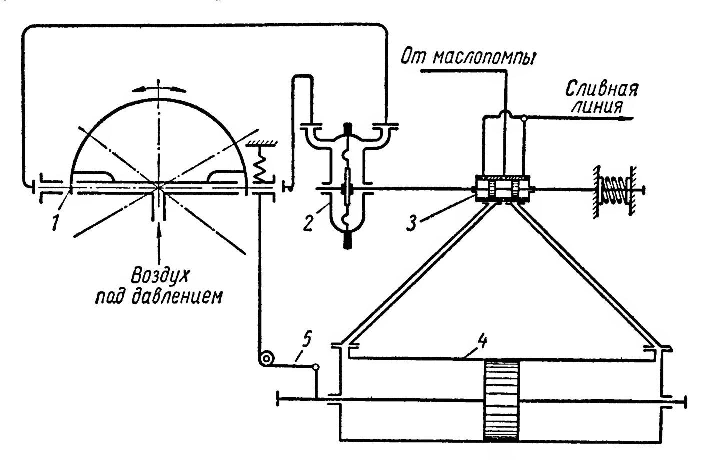
Входной сигнал осуществляется поворотом коллектора с соплами относительно заслонки, вызывающей открытие одного сопла и закрытие другого. Воздух, притекающий в полость мембраны, создает перепад давлений по ее сторонам, под действием которого мембрана вместе с золотником, сжимая нулевую пружину, перемещается. Золотник при своем движении открывает окна и впускает масло под давлением в ту или иную полость сервомотора.

В диференциальной передаче обратной связи имеется зазор. Если угол поворота коллектора с соплами относительно заслонки, вызываю-

щий полное открытие того или иного сопла, невелик по сравнению с его максимальным углом поворота (что имеет место в действительности), то действие такого управляющего элемента можно рассматривать как релейное. Заслонка может иметь некоторую перекрышу сопел, что вызовет появление зоны нечувствительности.

Таким образом, сервомеханизм представляет нелинейную систему с релейным управлением при наличии зоны нечувствительности и зазора в обратной связи.

При тщательном выполнении золотника и нулевой пружины в мембранном механизме для диапазона рабочих частот сервомеханизма можно принять, что с точки зрения динамики такой мембранный механизм



Фиг. 75. Принципиальная схема пневмогидравлического сервомеханизма АП.

является статическим звеном, т. е. уравнение его движения может быть с достаточной для целей практики точностью заменено уравнением связи.

Обозначим перепад давления воздуха на мембране через p, эффективную площадь мембраны через F_m, коэфициент жесткости нулевой пружины (или суммарный коэфициент нулевой пружины и мембраны) через c и ход золотника через x. Тогда уравнение будет иметь следующий вид:

$$pF = cx. \tag{102}$$

В силу демпфирования перепад давления воздуха на мембране устанавливается не сразу, а с течением времени. Экспериментальные исследования этого вопроса показали, что для данных типов мембранных устройств и управляющих элементов (сопло — заслонка) перепад давлений на мембране нарастает (или падает) примерно по экспоненциальному закону. Таким образом, диференциальное уравнение установления перепада давлений на мембране имеет следующий вид:

$$k_1 \frac{dp}{dt} + k_2 p = \alpha, \tag{103}$$

где k_1 и k_2 — постоянные коэфициенты, физический смысл которых будет объяснен ниже;

α — угол открытия сопел.

Если в начальный момент при $t=0$ $p_0=0$ и $\alpha=\alpha_m=\text{const}$, то скорость нарастания перепада в этот момент будет

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_0=\frac{\alpha_m}{k_1}. \tag{104}$$

С другой стороны, давление в камере мембранного механизма можно представить согласно уравнению состояния газов в следующем виде:

$$p_1=\frac{GRT}{V}, \tag{105}$$

где $p_1=p_a+p$; p_a — атмосферное давление; противодавление в другой полости мембранного механизма ввиду малости не учитываем;

G — весовое количество воздуха в камере;

R — газовая постоянная;

T — температура воздуха (абсолютная);

V — объем камеры.

В дальнейшем считаем $R=\text{const}$; $T=\text{const}$; $V=\text{const}$. Диференцируя уравнение (105) по времени, получим

$$\frac{dp}{dt}=\frac{RT}{V}\frac{dG}{dt}. \tag{106}$$

Весовое количество воздуха, находящегося в камере, определяется количеством воздуха, притекающего в камеру в единицу времени от пневмореле Q_1, и если мембранный механизм имеет отводящие сопла — количеством воздуха, утекающего в единицу времени Q_2 из камеры в атмосферу.

В связи с этим можно записать, что

$$dG=(Q_1-Q_2)\,dt=Qdt. \tag{107}$$

Подставляя $\frac{dG}{dt}$ из уравнения (107) в (106), получим

$$\frac{dp}{dt}=\frac{RT}{V}Q.$$

Приток воздуха в камеру (или отток) Q зависит от давления воздуха в ней, поэтому для принятых ранее начальных условий обозначим

$$(Q)_{t=0}=Q_{\max},$$

тогда в начальный момент

$$\dot{p}_0=\frac{RT}{V}Q_{\max}. \tag{108}$$

Сопоставляя уравнения (104) и (108), найдем

$$k_1=\frac{\alpha_m V}{RTQ_{\max}}. \tag{109}$$

Коэфициент k_2 определяется по статической характеристике пневмоусилителя: $p = f_1(\alpha)$ и равен

$$k_2 = \frac{\alpha_m}{p_m}. \qquad (110)$$

Если не учитывать влияния перекрыш золотника, то для ненагруженного сервомотора скорость перемещения его поршня в некотором диапазоне перемещения золотника пропорциональна его ходу. Тогда, обозначая ход поршня через m, получим

$$\frac{dm}{dt} = k_3 x, \qquad (111)$$

где $k_3 = \frac{\dot{m}_{max}}{x_л}$ — постоянный коэфициент;

$x_л$ — ход золотника, при котором достигается $\dot{m}_{max}$.

Открытие сопел пневмореле определяется входным сигналом φ и воздействием обратной связи $\varphi_2(m)$:

$$\alpha = \varphi_1(\varphi - \varphi_2[m]). \qquad (112)$$

Зависимость (112) в силу наличия зоны нечувствительности и зазора в диференциале обратной связи является существенно нелинейной. Как и в первом примере, будем рассматривать свободные колебания сервомеханизма, т. е. положим $\varphi = 0$, тогда уравнение (112) примет вид

$$\alpha = -\varphi(m). \qquad (113)$$

Решая совместно уравнения (103) и (113), а также (102) и (111), получим

$$\left.\begin{aligned} k_1\dot{p} + k_2 p &= -\varphi(m); \\ \dot{m} &= k_3\frac{F}{c}p. \end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

Произведем преобразование уравнений, выразив переменные в относительных величинах; для этого введем следующие обозначения:

относительное изменение давления в полости мембранного механизма

$$\frac{p}{p_{max}} = \rho;$$

относительное перемещение поршня сервомотора

$$\frac{m}{m_{max}} = \mu;$$

время мембранного исполнительного устройства

$$\frac{p_m V}{RTQ_m} = \frac{G_m}{Q_m} = T_p \text{ [сек]};$$

время сервомотора

$$\frac{m_{max}}{\dot{m}_{max}} = T_s \text{ [сек]};$$

относительная величина зазора в обратной связи

$$\frac{m_\Delta}{m_{\max}} = \Delta;$$

относительная величина зоны нечувствительности пневмореле, выраженная через ход сервомотора,

$$\frac{2m_\varepsilon}{m_{\max}} = 2\mu_\varepsilon.$$

Тогда уравнения (114) в преобразованном виде примут следующий вид:

уравнение первого каскада усиления

$$T_p\dot{\rho} + \rho = -\Phi(\mu);$$

уравнение второго каскада усиления

$$T_s\dot{\mu} = \rho. \qquad (115)$$

Уравнение, описывающее свободные колебания сервомеханизма, будет иметь вид

$$T_pT_s\ddot{\mu} + T_s\dot{\mu} + \Phi(\mu) = 0. \qquad (116)$$

Нелинейная неоднозначная функция $\Phi(\mu)$ математически представляется уравнениями, аналогичными (97):

$$\Phi(\mu) = \begin{cases} +1 \text{ при } \mu \geqslant \mu_\varepsilon + \frac{\Delta}{2} \text{ и } \dot{\mu} > 0, \\ \quad \mu > \mu_\varepsilon - \frac{\Delta}{2} \text{ и } \dot{\mu} < 0, \\ \quad \mu > \mu_\varepsilon - \frac{\Delta}{2} \text{ и } \dot{\mu} > 0, \text{ если } \Phi(\mu_0) = +1; \\ 0 \text{ при } -\mu_\varepsilon + \frac{\Delta}{2} < \mu < \mu_\varepsilon + \frac{\Delta}{2} \text{ и } \dot{\mu} > 0; \\ \quad -\left(\mu_\varepsilon + \frac{\Delta}{2}\right) < \mu < \left(\mu_\varepsilon - \frac{\Delta}{2}\right) \text{ и } \dot{\mu} < 0; \\ \quad -\left(\mu_\varepsilon + \frac{\Delta}{2}\right) < \mu < \mu_\varepsilon + \frac{\Delta}{2} \\ \quad \text{и } \dot{\mu} \lesseqgtr 0, \text{ если } \Phi(\mu_0) = 0; \\ -1 \text{ при } \mu \leqslant -\left(\mu_\varepsilon + \frac{\Delta}{2}\right) \text{ и } \dot{\mu} < 0; \\ \quad \mu < -\left(\mu_\varepsilon + \frac{\Delta}{2}\right) \text{ и } \dot{\mu} > 0; \\ \quad \mu < -\left(\mu_\varepsilon - \frac{\Delta}{2}\right) \text{ и } \dot{\mu} < 0, \text{ если } \Phi(\mu_0) = 1. \end{cases} \qquad (117)$$

При исследовании динамики сервомеханизма с помощью фазовой плоскости можно пользоваться непосредственно уравнениями (115), принимая за оси координат переменные μ и ρ.

Полученное уравнение двухкаскадного пневмогидравлического сервомеханизма для того частного случая, когда динамика второго каскада описывается линейным диференциальным уравнением, по виду полностью совпадает с ранее выведенным уравнением однокаскадного электрического сервомеханизма, если принять в нем отсутствие сухого трения ($r = 0$).

Проведем на примере двухкаскадного пневмогидравлического сервомеханизма исследование его динамики при любых начальных отклонениях, т. е. „в большом".

В задачу будет входить также нахождение критического соотношения параметров сервомеханизма, разбивающего пространство его параметров на области устойчивости, наличия и отсутствия автоколебаний.

Результаты исследования целиком будут относиться и к однокаскадному электрическому сервомеханизму (при $r = 0$).

а) Исследование динамики сервомеханизмов на фазовой плоскости

Фазовая плоскость (ρ, μ) представляет собой трехлистную фазовую поверхность, каждый лист которой наложен на другой в соответствии с неоднозначной функцией (117) так, как это изображено на фиг. 69. На каждом листе нелинейная функция $\Phi(\mu)$ имеет только одно значение из трех возможных согласно уравнению (117): $+1$; 0; -1. Изображающая точка, двигаясь по фазовой поверхности, переходит с листа на лист, только дойдя до края листа. Таким образом, края листов соответствуют границам действия того или иного линейного диференциального уравнения и согласно релейной характеристике отвечают моментам переключений реле. Края листов являются линиями переключений.

Начнем рассмотрение движения сервомеханизма с того момента, когда сервомотор, двигаясь в положительном направлении, выбирает зазор в обратной связи и с помощью последней выключает первое реле. Для этого момента координата выхода сервомеханизма имеет значение $\mu_0 = -\left(\mu_\varepsilon - \frac{\Delta}{2}\right)$. Включение второго управляющего элемента запаздывает по сравнению с первым, поэтому координата входа его имеет положительное значение $\rho_0 > 0$. Тогда уравнения движения сервомеханизма на первом листе фазовой плоскости, начинающемся с этого момента, примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} T_p \dot{\rho} + \rho &= 0; \\ T_s \dot{\mu} &= \rho. \end{aligned}\right\} \qquad (118)$$

Разделив первое уравнение (118) на второе, получим диференциальное уравнение интегральных кривых:

$$\frac{d\rho}{d\mu} = -\frac{1}{\tau}, \qquad (119)$$

где

$$\tau = \frac{T_p}{T_s}.$$

Интегрируя и подставляя начальные условия, получим уравнение фазовой траектории для этого листа:

$$\mu = -\mu_\varepsilon + \frac{\Delta}{2} + \tau(\rho_0 - \rho). \tag{120}$$

Это уравнение остается справедливым до тех пор, пока сервомотор, продолжая движение в положительном направлении, не пройдет путь, соответствующий зоне нечувствительности первого реле, и не включит его снова. В этот момент произойдет смена уравнений движения сервомеханизма. В дальнейшем мы увидим, что для определенного соотношения параметров сервомотор может и не успеть пройти путь, соответствующий зоне нечувствительности, и движение сервомеханизма прекратится. Теперь же примем, что сервомотор успевает пройти зону нечувствительности и координата выхода в конце первого листа будет иметь значение $\mu_1 = \mu_\varepsilon + \frac{\Delta}{2}$. Тогда значение ρ в конце первого листа определится следующим выражением, полученным из уравнения (120) после подстановки в него конечных значений:

$$\rho_1 = \rho_0 - \frac{2\mu_\varepsilon}{\tau}. \tag{121}$$

Уравнения движения сервомеханизма на втором листе будут следующие:

$$\left.\begin{aligned} T_p\dot{\rho} + \rho &= -1; \\ T_s\dot{\mu} &= \rho. \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

Диференциальное уравнение интегральных кривых будет

$$\frac{d\rho}{d\mu} = -\frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{1}{\rho}\right). \tag{123}$$

Интегрируя и подставляя начальные условия μ_1 и $\rho_1 > 0$, получим уравнение фазовой траектории на втором листе:

$$\mu = \mu_1 + \tau(\rho_1 - \rho) - \tau \ln \frac{\rho_1 + 1}{\rho + 1}. \tag{124}$$

Уравнение остается справедливым до тех пор, пока сервомотор снова не выключит первое реле. Это произойдет, когда μ примет значение $\mu_2 = \mu_\varepsilon - \frac{\Delta}{2}$, что будет соответствовать полуобороту изображающей точки в фазовой плоскости.

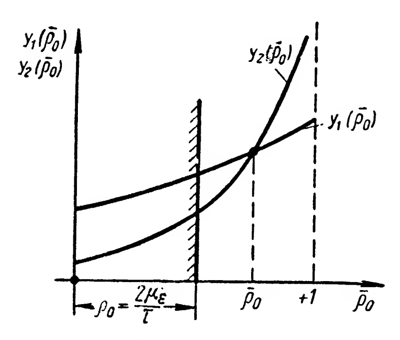
Подставляя в уравнение (124) выражения для начальных и конечных значений μ и ρ, получим

$$\Delta = -\tau(\rho_1 - \rho_2) + \tau \ln \frac{\rho_1 + 1}{\rho_2 + 1}. \tag{125}$$

При наличии периодических колебаний системы $\rho_2 = -\rho_0$, тогда, подставляя в уравнение (125) ρ_1 из уравнения (121), получим уравнение, выражающее условие существования периодических колебаний системы:

$$e^{\frac{\Delta - 2\mu_\varepsilon}{\tau}} e^{2\rho_0} = \frac{1 + \rho_0 - \frac{2\mu_\varepsilon}{\tau}}{1 - \rho_0}. \tag{126}$$

Если уравнение (126) имеет действительные и положительные корни (ρ_0), то периодические колебания системы существуют.



Фиг. 76. Диаграмма к выявлению существования периодических колебаний системы.

Обозначим

$$e^{\frac{\Delta - 2\mu_\varepsilon}{\tau}} e^{2\rho_0} = y_1(\rho_0);$$

$$\frac{1 + \rho_0 - \frac{2\mu_\varepsilon}{\tau}}{1 - \rho_0} = y_2(\rho_0) \tag{127}$$

и будем искать решение уравнения (126) графически. Величина ρ_0 может изменяться от 0 до 1; $y_1(\rho_0)$ является экспоненциальной функцией, $y_2(\rho_0)$ — гиперболой, а прямая, параллельная оси ординат и проходящая через точку $\rho_0 = 1$, — одной из ее асимптот:

$$\{y_1(\rho_0)\}_{\rho_0=0} = e^{\frac{\Delta - 2\mu_\varepsilon}{\tau}} > 0;$$

$$\{y_2(\rho_0)\}_{\rho_0=0} = 1 - \frac{2\mu_\varepsilon}{\tau} \gtrless 0. \tag{128}$$

При этом

$$\{y_1(\rho_0)\}_{\rho_0=0} > \{y_2(\rho_0)\}_{\rho_0=0}$$

при

$$\Delta > 0; \ \mu_\varepsilon > 0; \ \tau > 0.$$

Функции $y_1(\rho_0)$ и $y_2(\rho_0)$ изображены на фиг. 76.

Из анализа функций следует, что $y_1(\rho_0)$ и $y_2(\rho_0)$ пересекаются, т. е. система при определенном соотношении параметров, обеспечивающих сервомотору прохождение зоны нечувствительности, может иметь периодические колебания. Для каждого соотношения параметров сервомеханизма выше критического $y_1(\rho_0)$ и $y_2(\rho_0)$ пересекаются только 1 раз, т. е. система имеет периодические колебания только с одной определенной частотой.

Критическое соотношение параметров, определяющее качественно различные случаи разбиения фазовой плоскости на траектории, может быть определено из следующих соображений.

Из уравнения (121) следует, что при $\rho_0 = \rho_0^* = \frac{2\mu_в}{\tau}$ $\rho_1 = 0$, т. е. при ρ_0^* сервомотор, проходя путь, соответствующий зоне нечувствительности первого реле, оказывается в конце его как раз в тот момент, когда второй управляющий элемент выключается.

Интегрируя первое уравнение системы уравнений (118) и подставляя начальные условия, получим

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{T_p}}. \tag{129}$$

Подставляя ρ из уравнения (129) во второе уравнение (118) и интегрируя его с учетом начальных условий, получим

$$\mu = -\mu_в + \frac{\Delta}{2} + \tau\rho_0\left(1 - e^{-\frac{t}{T_p}}\right). \tag{130}$$

Из уравнения (130) следует, что μ через время $t = \infty$ будет равно

$$\mu_1 = -\mu_в + \frac{\Delta}{2} + \tau\rho_0. \tag{131}$$

Если $\rho_0 = \rho_0^*$, то сервомотор пройдет путь, соответствующий зоне нечувствительности:

$$\mu_1 = -\mu_в + \frac{\Delta}{2} + \tau\frac{2\mu_в}{\tau} = \mu_в + \frac{\Delta}{2}. \tag{132}$$

Отсюда следует, что при $\rho_0 > \rho_0^*$ сервомотор проходит путь, соответствующий зоне нечувствительности, за конечный промежуток времени, а при $\rho_0 < \rho_0^*$ путь, проходимый сервомотором, меньше зоны нечувствительности, в силу чего движение сервомеханизма будет затухающим.

Таким образом, необходимым условием существования периодических колебаний является выполнение неравенства

$$\rho_0 > \rho_0^*. \tag{133}$$

Тогда, подставляя в уравнение (126)

$$\rho_0^* = \frac{2\mu_в}{\tau},$$

получим следующее соотношение параметров, определяющее границу качественно различных случаев движения сервомеханизма:

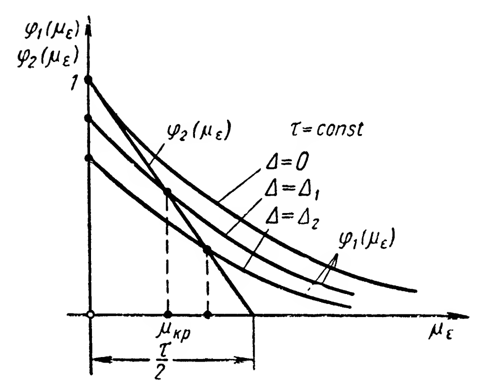
$$e^{-\frac{\Delta + 2\mu_в}{\tau}} \leqslant 1 - \frac{2\mu_в}{\tau}. \tag{134}$$

Значение $\mu_в = \mu_{в\,кр}$, при котором выполняется равенство (134), является критическим. Превышение $\mu_{в\,кр}$ означает, что движение сервомеханизма будет в зависимости от начальных отклонений периодически или колебательно затухающим.

Если $\mu_\varepsilon < \mu_{\varepsilon\,кр}$, то в системе после определенных начальных отклонений возникнут установившиеся колебания.

Обозначим через

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 |\mu_\varepsilon| &= e^{-\frac{\Delta+2\mu_\varepsilon}{\tau}}; \\ \varphi_2 |\mu_\varepsilon| &= 1 - \frac{2\mu_\varepsilon}{\tau} \end{aligned}\right\} \qquad (135)$$



Фиг. 77. Графическое определение критической величины зоны нечувствительности ($\mu_{\varepsilon\,кр}$).

и найдем графически значение $\mu_\varepsilon = \mu_{\varepsilon\,кр}$:

$$\left.\begin{aligned} \{\varphi_1(\mu_\varepsilon)\}_{\mu_\varepsilon=0} &= e^{-\frac{\Delta}{\tau}}; \\ \{\varphi_2(\mu_\varepsilon)\}_{\mu_\varepsilon=0} &= 1; \end{aligned}\right\} \qquad (136)$$

при $\Delta = 0$

$$\{\varphi_1(\mu_\varepsilon)\}_{\mu_\varepsilon=0} = \{\varphi_2(\mu_\varepsilon)\}_{\mu_\varepsilon=0};$$

при $\Delta > 0$

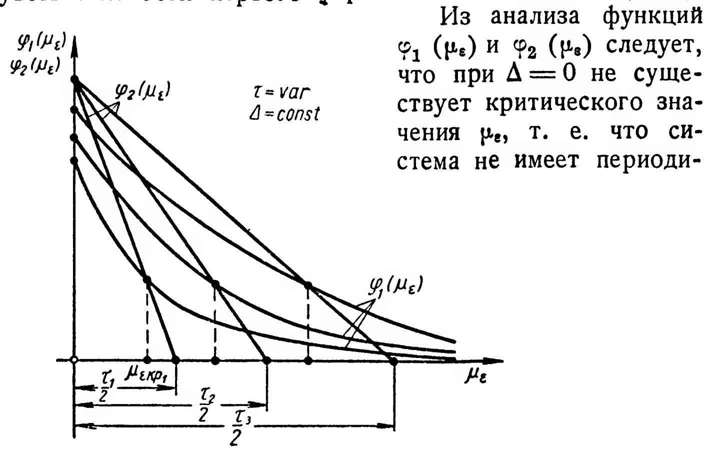
$$\{\varphi_1(\mu_\varepsilon)\}_{\mu_\varepsilon=0} < \{\varphi_2(\mu_\varepsilon)\}_{\mu_\varepsilon=0};$$

$$\{\varphi_2(\mu_\varepsilon)\}\ \mu_\varepsilon = \frac{\tau}{2} = 0;$$

$$\{\varphi_1(\mu_\varepsilon)\}_{\mu_\varepsilon=\infty} = 0.$$

На фиг. 77 и 78 показано графическое определение критической величины зоны нечувствительности первого управляющего элемента (реле).

Из анализа функций $\varphi_1(\mu_\varepsilon)$ и $\varphi_2(\mu_\varepsilon)$ следует, что при $\Delta = 0$ не существует критического значения μ_ε, т. е. что система не имеет периоди-



Фиг. 78. Графическое определение критической величины зоны нечувствительности $|\mu_{\varepsilon кр}|$.

ческих колебаний. При увеличении зазора критическое значение $\mu_{\varepsilon\,кр}$ растет. Критическое значение $\mu_{\varepsilon\,кр}$ увеличивается также при увеличении

быстродействия сервомеханизма, т. е. при уменьшении времени серво-мотора T_s.

Сервомеханизм имеет в качестве положения равновесия континуум положений, определяемых пределами

$$-\left(\mu_\varepsilon+\frac{\Delta}{2}\right)<\mu<\left(\mu_\varepsilon+\frac{\Delta}{2}\right)$$

при $\rho=0$, что следует из положения особых точек диференциального уравнения, полученного из уравнения (115):

$$\frac{d\rho}{d\mu}=\frac{1}{\tau}\left\{\frac{\Phi(\mu)-\rho}{\rho}\right\}=\frac{0}{0'}; \qquad (137)$$

$$\Phi(\mu)=0; \text{ при } -\left(\mu_\varepsilon+\frac{\Delta}{2}\right)<\mu<\left(\mu_\varepsilon+\frac{\Delta}{2}\right).$$

б) Диаграмма точечного отображения

Для того чтобы доказать, что положение равновесия системы устойчиво, а в случае появления периодических колебаний, что они будут устойчивы, т. е. что при определенном соотношении параметров в фазовой плоскости образуется устойчивый предельный цикл, рассмотрим уравнения фазовых траекторий, для чего подставим в выражение (125) начальные значения из формулы (121). Тогда получим

$$\frac{2\left(\mu_\varepsilon-\frac{\Delta}{2}\right)}{\tau}-\rho_0+\ln\left(1+\rho_0-\frac{2\mu_\varepsilon}{\tau}\right)=-\rho_2+\ln(\rho_2-1). \qquad (138)$$

Если периодические колебания существуют, то $\rho_2=-\bar{\rho}_0=-\rho_0$, и уравнение (138) может быть переписано в следующем виде:

$$\left(1-\bar{\rho}_0\right)e^{\bar{\rho}_0}=e^{\frac{2\left(\mu_\varepsilon-\frac{\Delta}{2}\right)}{\tau}-\rho_0}\left(\rho_0+1-\frac{2\mu_\varepsilon}{\tau}\right). \qquad (139)$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned}&\left(1-\bar{\rho}_0\right)e^{\bar{\rho}_0}=\bar{X}(\rho_0);\\&e^{\frac{2\mu_\varepsilon-\frac{\Delta}{2}}{\tau}-\rho_0}\left(\rho_0+1-\frac{2\mu_\varepsilon}{\tau}\right)=X(\rho_0)\end{aligned}\right\} \qquad (140)$$

и рассмотрим взаиморасположение кривых $\bar{X}(\rho_0)$ и $X(\rho_0)$.

Поскольку ранее доказано, что в системе может существовать только один предельный цикл, то кривые $\bar{X}(\rho_0)$ и $X(\rho_0)$ могут пересекаться лишь в одной точке. Кроме того, было доказано, что периодические колебания системы могут существовать лишь в том случае, если $\rho_0 \geqslant \frac{2\mu_\varepsilon}{\tau}$

и соотношение параметров удовлетворяет условию (134). Тогда при $\rho_0 = \frac{2\mu_\varepsilon}{\tau}$ получим

$$\overline{X}(\rho_0) = \left(1 - \frac{2\mu_\varepsilon}{\tau}\right) e^{\frac{2\mu_\varepsilon}{\tau}};$$

$$X(\rho_0) = e^{-\frac{\Delta}{\tau}},$$

откуда заключаем, что при выполнении условия (134)

$$\{\overline{X}(\rho_0)\}_{\rho_0 = \frac{2\mu_\varepsilon}{\tau}} > \{X(\rho_0)\}_{\rho_0 \geqslant \frac{2\mu_\varepsilon}{\tau}}.$$

При $\rho_0 = 1$ получим

$$\overline{X}(\rho_0) = 0;$$

$$X(\rho_0) = e^{\frac{2\left(\mu_\varepsilon - \frac{\Delta}{2}\right)}{\tau} - 1} \left(1 + 1 - \frac{2\mu_\varepsilon}{\tau}\right) > 0,$$

так как неравенство (134) показывает, что периодические колебания возможны лишь при условии $\frac{2\mu_\varepsilon}{\tau} < 1$. Отсюда следует, что

$$\{X(\rho_0)\}_{\rho_0 = 1} > \{\overline{X}(\rho_0)\}_{\rho_0 = 1}.$$

На фиг. 79 показано взаиморасположение кривых $X(\rho_0)$ и $\overline{X}(\rho_0)$, позволяющее сделать заключение, что образующийся предельный цикл будет устойчивым.

Фиг. 79 представляет диаграмму точечного отображения полупрямой N, параллельной оси ординат и проходящей через точку $-\left(\mu_\varepsilon - \frac{\Delta}{2}\right)$ в полупрямую N', параллельную оси ординат и проходящую через точку $-\left(\mu_\varepsilon - \frac{\Delta}{2}\right)$ (фиг. 80).

Диаграмма (фиг. 79) позволяет, задавшись ρ_0, найти ρ_2. Поэтому она и представляет диаграмму точечного отображения. Например, при $\rho_0 = \rho_{01}$, проведя вертикаль до пересечения с $X(\rho_0)$, а затем горизонталь до пересечения с $\overline{X}(\rho_0)$, найдем абсциссу, равную $-\rho_{21}$.

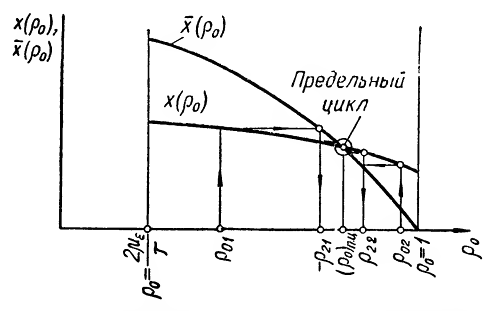
Таким образом из диаграммы нетрудно заключить, что ρ_0 стремится к $(\rho_0)_{п.ц}$, представляющей координату предельного цикла. Это обстоятельство показывает, что траектории изображающей точки в фазовой плоскости снаружи и изнутри стягиваются к предельному циклу, т. е. что последний является устойчивым.

Фазовая плоскость при существовании предельного цикла разбивается на три области. В области *I* (фиг. 81) система стремится к положению равновесия; в области *II* траектории наматываются изнутри, а в области *III* траектории наматываются снаружи на предельный цикл.

Таким образом, при $\mu_\varepsilon < \mu_{\varepsilon\, кр}$ рассматриваемый сервомеханизм имеет положение равновесия, пока начальные отклонения не превосходят определенных значений, например, при

$$\mu_0 = \mu_\varepsilon + \frac{\Delta}{2}, \quad \rho_0 < \rho_0^*.$$

Если начальные отклонения превосходят эти значения, то в системе устанавливаются устойчивые периодические колебания.

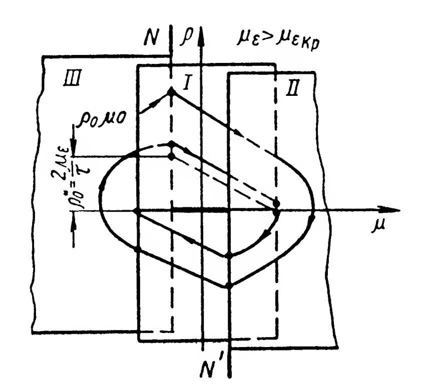


Фиг. 79. Диаграмма точечного отображения полупрямой N в полупрямую N'.

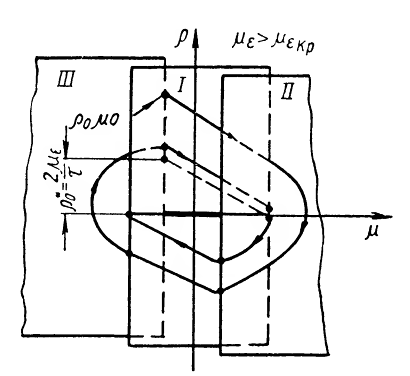
При соотношении параметров сервомеханизма $\mu_\varepsilon > \mu_{\varepsilon\, кр}$ система после любых начальных отклонений приходит в положение равновесия. Положение равновесия в этом случае — устойчивое.

„Фазовые портреты" системы для случаев, когда зона нечувствительности первого реле меньше и больше критической, изображены на фиг. 80 и 81. Траектории изображающей точки составлены из кусков прямых и логарифмических кривых.

Геометрические размеры предельного цикла определяются только



Фиг. 80. Трехлистная фазовая плоскость и фазовые траектории при $\mu_\varepsilon \leqslant \mu_{\varepsilon\, кр}$.



Фиг 81. Трехлистная фазовая плоскость и фазовые траектории $\mu_\varepsilon > \mu_{\varepsilon\, кр}$.

параметрами сервомеханизма и не зависят от начальных условий. Поэтому периодические колебания системы являются автоколебаниями.

Амплитуда автоколебаний координаты выхода сервомеханизма $(\bar{\mu})$ определится по уравнению (134), если положить в нем $\rho = 0$, и по уравнению (121), если положить в нем ρ_0 и $\bar{\rho}_0$:

$$\bar{\mu} = -\left(\mu_\varepsilon - \frac{\Delta}{2}\right) + \tau\bar{\rho}_0 - \tau \ln\left(\bar{\rho}_0 + 1 - \frac{2\mu_\varepsilon}{\tau}\right). \qquad (141)$$

в) Полуустойчивый цикл и критическое соотношение параметров

Покажем на рассмотренном примере, как определяется критическое соотношение параметров сервомеханизма с помощью полуустойчивого цикла.

Координатами полуустойчивого (вырожденного) предельного цикла являются (для полуоборота изображающей точки в фазовой плоскости)

$$\left.\begin{aligned} &\rho_0 > 0; \\ &\mu_0 = -\mu_\varepsilon + \frac{\Delta}{2}; \\ &\rho_1 = 0; \\ &\mu_1 = \mu_\varepsilon + \frac{\Delta}{2}; \\ &\rho_2 = -\rho_0; \\ &\mu_2 = -\mu_0 = \mu_\varepsilon - \frac{\Delta}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (142)$$

Согласно уравнению (121) $\rho_0 = \frac{2\mu_\varepsilon}{\tau}$ и, подставляя значения (142) в выражение (125), получим сразу критическое соотношение параметров:

$$e^{-\frac{\Delta + 2\mu_\varepsilon}{\tau}} \leqslant 1 - \frac{2\mu_\varepsilon}{\tau}. \qquad (143)$$

На основе результатов проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Двухкаскадный пневмогидравлический сервомеханизм, а также однокаскадный электрический сервомеханизм с релейным управлением при наличии зазора в обратной связи (или коэфициента возврата реле, см. главу XXVI) имеют критическое соотношение параметров и, в частности, критическую величину зоны нечувствительности.

2. Для рассмотренных примеров критические соотношения параметров имеют одинаковый вид и показывают, что в случае, если зона нечувствительности меньше критического значения, то сервомеханизмы могут после определенных начальных отклонений приходить в устойчивые автоколебания, и, наоборот, в случае, если зона нечувствительности больше критической, то сервомеханизм абсолютно устойчив и после любых начальных отклонений будет приходить в положение равновесия.

3. При отсутствии зазора в обратной связи такие системы ни при каких значениях параметров не приходят в автоколебания и являются устойчивыми „в большом".

4. Как для пневмогидравлического, так и электрического сервомеханизма существуют критические значения времени сервомотора. Если механизм при прочих постоянных параметрах выполнен слишком быстродействующим ($T_s < T_{s\,кр}$), то в нем будут возникать автоколебания.

5. Подавление автоколебаний в том случае, если они недопустимы, возможно или за счет загрубления сервомеханизма (увеличения зоны нечув-

ствительности), или за счет снижения его быстродействия (увеличение времени сервомотора). Если эти мероприятия не удовлетворяют техническим требованиям, предъявляемым к сервомеханизму, то нужно менять конструкцию его с целью уменьшения зазора в обратной связи Δ, времени мембранного механизма T_p или инерционной нагрузки сервомеханизма, характеризуемой коэфициентом R. Отметим, что подавление нежелательных автоколебаний успешно может производиться с помощью специальных стабилизирующих средств путем введения обратных связей по первой и второй производным от выходной координаты по времени, вибрационных контуров и т. п.

6. Наконец, вследствие того, что положением равновесия является континиум положений, пределы которых определяются величинами зоны нечувствительности и зазора, сервомеханизм имеет статическую погрешность в указанных пределах.

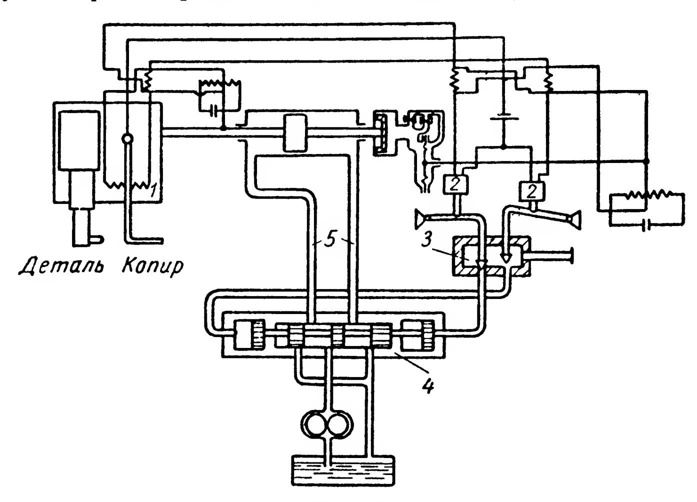
ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А. и Хайкин С. Э., Теория колебаний, ОНТИ, 1936.
2. Андронов А. А. и Баутин Н. Н., ДАН СССР, т. 43, (197), 1944.
3. Андронов А. А. и Баутин Н. Н., ДАН СССР, т. 46 (158), 1945.
4. Андронов А. А., Баутин Н. Н., Горелик Г. С., „Автоматика и телемеханика", т. VII, № 1, 1946.
5. Теодорчик К. Ф., „Журнал технической физики" № 10 (960), 1938.
6. Николаев Я. Н., „Ученые записки Горьковского университета", т. 13 (291), 1947.
7. Ольман Е. В., Соловьев Я. И., Токарев В. П., Автопилоты, Оборонгиз, 1946.
8. Петров В. В., Автоматика и телемеханика" № 1, 1951.
9. Петров В. В. и Уланов Г. М., „Автоматика и телемеханика" № 5, 1950, № 5, 1951, № 2 и № 6, 1952.

ГЛАВА XXX

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СЕРВОМЕХАНИЗМОВ

Сервомеханизм можно определить как применяемый в системах автоматического регулирования усилитель мощности и момента, выходная величина которого должна воспроизводить с определенной точностью входную величину. Усиление мощности происходит за счет источника вспомогательной энергии, подключаемого к каждому каскаду усиления, по числу которых сервомеханизмы классифицируются на одно-, двух-,

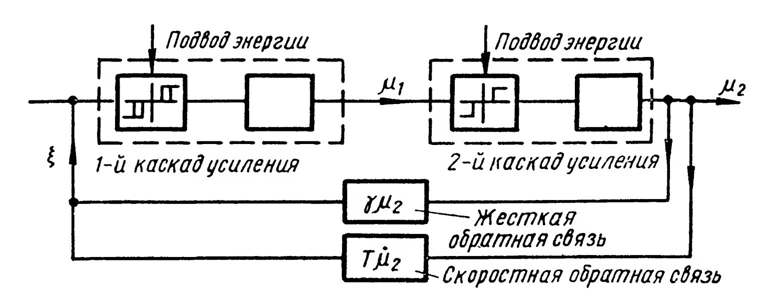


Фиг. 82. Принципиальная схема сервомеханизма электрогидропневматического типа для копировально-фрезерного станка.

трех- и вообще многокаскадные. Сервомеханизм часто представляет устройство, охватываемое обратной связью непосредственно или через ряд промежуточных преобразовательных и усилительных звеньев, вплоть до выхода чувствительного элемента регулятора. В последнем случае сервомеханизм предназначен для усиления сигнала, снимаемого с чувствительного элемента. Регуляторы с такого рода сервомеханизмами распространены и применяются для регулирования температуры, давления и других величин.

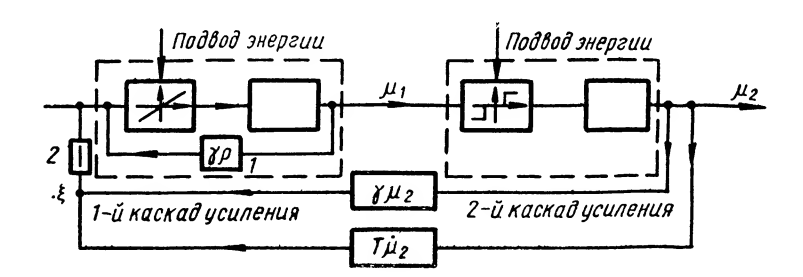
С точки зрения технического выполнения и вида вспомогательной энергии сервомеханизмы могут быть пневматического, гидравлического,

электрического, а также пневмогидравлического, электрогидравлического и тому подобных типов. Пример пневмогидравлического сервомеханизма (см. фиг. 75) был рассмотрен в предыдущей главе. Характеристики элементов *1* и *3*, управляющих включением энергии, имеют незначительные линейные участки, в связи с чем их можно рассматривать как релейные.



Фиг. 83а. Структурная схема двухкаскадного сервомеханизма с релейным управлением и дополнительной скоростной обратной связью.

В качестве второго примера рассмотрим релейный электрогидропневматический сервомеханизм (фиг. 82). Он состоит из измерительного устройства *1* и двух релейных устройств *2*, управляющих каналами *3* включения сжатого воздуха. Сжатый воздух, идущий к правой или левой полостям золотника *4*, перемещает последний в одно из крайних поло-



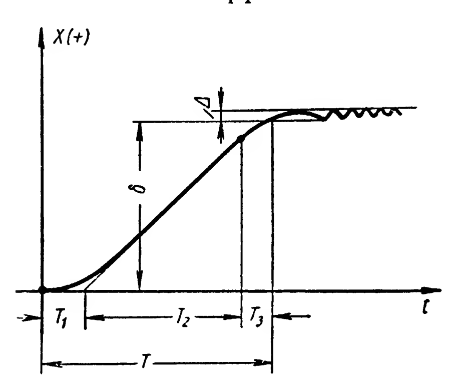
Фиг. 83б. Структурная схема двухкаскадного сервомеханизма с релейным управлением и со скоростной обратной связью при наличии жесткой обратной связи в первом каскаде (γp) (*1*).

жений. В результате перемещения золотника открывается маслопровод *5* сервомотора. Происходит перемещение сервомотора и связанного с ним супорта станка с постоянной скоростью до тех пор, пока электромагнитное реле не сработает снова. Типовые структурные схемы указанных сервомеханизмов изображены на фиг. 83.

Частными случаями этих систем являются однокаскадные сервомеханизмы, а также сервомеханизмы, в которых одна из релейных характеристик заменена линейной характеристикой.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В связи с разработкой высокачественных систем автоматического регулирования возникает потребность в построении сервомеханизмов, обеспечивающих наибольшее быстродействие. Быстродействующим сервомеханизмом будем называть такой сервомеханизм, который обеспечивает установление нового равновесного режима — переход из одного положения в другое — в возможно короткое время. Этот переход должен протекать с максимально возможными скоростями. С другой стороны, для завершения перехода без значительных колебаний сервомеханизм должен эффективно гасить эту скорость к моменту достижения заданного положения. Сочетание этих двух противоречивых требований приводит в основном к построению сервомеханизмов релейного и близкого к ним типов со специальными стабилизирующими устройствами. Целью настоящего раздела является рассмотрение теории таких устройств.



Фиг. 84. Переходные грани в быстродействующем релейном сервомеханизме.

Движение быстродействующего релейного и близкого к ним сервомеханизмов в заданное положение можно разделить на три этапа (фиг. 84): разгон T_1, движение T_2 и торможение T_3. С целью увеличения быстродействия этап торможения должен быть возможно короче. Стремление наиболее эффективно использовать движущий момент, развиваемый исполнительным устройством сервомеханизма для накопления в процессе движения наибольшей скорости и, следовательно, увеличения быстродействия его, приводит к необходимости максимального форсирования разгона и достижения, наибольшей продолжительности действия движущего момента во все время переходного процесса.

Однако если такой сервомеханизм оставить без специально предусмотренных средств стабилизации, то равновесное состояние его часто будет характеризоваться автоколебаниями. Автоколебательное состояние одного из звеньев систем автоматического регулирования, каким является сервомеханизм, при равновесном значении сигнала на его входе может в известных случаях быть источником возбуждения колебаний во всей системе автоматического регулирования в целом. Поэтому желательно иметь средства, позволяющие если не до конца снимать, то во всяком случае регулировать параметры автоколебательного процесса сервомеханизма.

Прекращения автоколебаний можно добиться изменением соотношения параметров. Последнее связано с реконструированием сервомеханизма (например, с изменением скорости исполнительного механизма, влияющей на возникновение автоколебаний) или с его огрублением. Естественно, что устранять автоколебания за счет снижения качества сервомеханизма нерационально.

Изменение параметров конструкции, как известно, не всегда может быть осуществлено. Следует отметить, что появление автоколебаний часто связано с незначительной вариацией его параметров внутри допуска или незначительным выходом за допуск (люфт, зазор в исполнительном механизме). Поэтому для конструктора весьма важно иметь такие средства, которые позволили бы воздействовать на возникающие автоколебания, не меняя в основном выходных параметров сервомеханизма и конструкции отдельных элементов его. Основными стабилизирующими средствами сервомеханизма могут служить различного рода обратные связи, введение вибрационного режима, линеаризирующего сервомеханизм (см. далее главу XXXV), и демпфирование отдельных каскадов сервомеханизма. Обратными связями, применяемыми в настоящее время для целей стабилизации сервомеханизмов, являются жесткие обратные связи, жесткие обратные связи и обратные связи по производной (скоростные), жесткие обратные связи и обратные связи по первой и по второй производным, а также изодромные обратные связи. Содержание настоящей главы составляет рассмотрение обратных связей с точки зрения их применения для стабилизации положения равновесия и управления автоколебательным режимом нелинейных сервомеханизмов.

Ввиду сложной нелинейной задачи совокупного исследования автоколебаний последние обычно изучаются в сервомеханизме отдельно от системы в предположении, что его статические и динамические характеристики (быстродействие, автоколебания по частоте и амплитуде и т. п.) заранее заданы в технических условиях на разработку сервомеханизма, процесс же установления автоколебаний в общей цепи регулирования [1] будет, естественно, иным.

Дать решение об автоколебаниях систем автоматического регулирования в общем случае весьма трудно. Однако всегда представляется возможным провести конкретный численный расчет переходного процесса для определенного вида характеристик (см. главы XXXVIII и XXIX).

Условия воспроизведения всей системой автоматического регулирования входной величины с определенной степенью точности не исключают наличия автоколебаний в сервомеханизме. Действительно, если регулируемая координата не должна выходить из заданной достаточно узкой области значений, то на другие координаты системы таких ограничений не накладывается и, например, выходная координата сервомеханизма иногда может иметь сравнительно большие отклонения в процессе автоколебаний. Отсюда становится понятным стремление к максимально возможному ослаблению связи в системе в режиме автоколебаний сервомеханизма Идеальным в этом случае было бы такое положение, при котором система практически совсем не реагировала бы на автоколебания сервомеханизма.

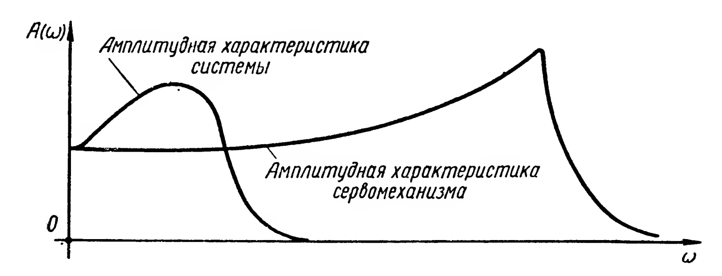
Движение такой системы можно было бы разделить на два мало реагирующих друг на друга типа движений — воспроизведение входной величины и автоколебания. Такое разделение движений в реальной системе автоматического регулирования может быть произведено на основании качественных соображений об условиях взаимной связи

---

[1] Если он будет существовать.

нескольких систем. Здесь определяющими являются частотные и, в частности, амплитудные частотные характеристики системы. Если область пропускания частот всей системы гораздо у́же, чем область пропускания частот сервомеханизма и притом амплитудная характеристика сервомеханизма в указанном диапазоне частот примерно постоянна (фиг. 85), то такой сервомеханизм может обладать хорошими воспроизводящими качествами по отношению к собственным движениям системы (см. главу XV) и, наоборот, сама система будет обладать слабыми воспроизводящими свойствами по отношению к собственному движению сервомеханизма.

Кроме того, указанный вид амплитудных характеристик исключает весьма опасные режимы резонанса системы регулирования и автоколебаний сервомеханизма.



Фиг. 85. Амплитудная характеристика системы автоматического регулирования и сервомеханизма.

Следовательно, первым ограничением в отношении режима автоколебаний сервомеханизма является разграничение частот, из которых состоит воспроизводимое им движение, и частот его автоколебаний. Частоты автоколебаний сервомеханизма должны быть по возможности выше частот, из которых состоят воспроизводимые системой движения, и лежать за пределами области частот, где амплитудная характеристика системы существенно отличается от нуля. На практике добиться такого положения бывает трудно, так как указанное ограничение связано с весьма завышенными требованиями к быстродействию сервомеханизма. Поэтому вторым ограничением в отношении режима автоколебаний сервомеханизма является требование уменьшения амплитуды автоколебания сервомеханизма с последующей проверкой поведения системы в целом.

Таким образом, требования к автоколебательному режиму сервомеханизма со стороны систем автоматического регулирования не противоречат получению высококачественного процесса регулирования или слежения. Само наличие автоколебаний высокой частоты и весьма малой амплитуды существенно улучшает процесс регулирования в системе автоматического регулирования в целом, поскольку при этом, как известно, устраняется ряд вредных влияний со стороны таких нелинейностей, как зона нечувствительности, люфт, сухое трение и т. п. (более подробно об этом см. главу XXXV).

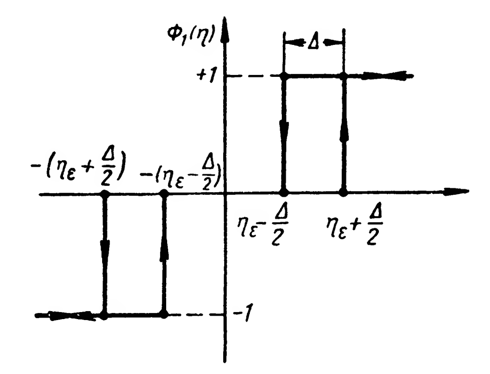
2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СЕРВОМЕХАНИЗМОВ

Уравнения движения двухкаскадного пневмогидравлического сервомеханизма, изображенного на фиг. 75, при обычных допущениях (см. предыдущую главу), но при учете зон нечувствительности управляющих элементов, релейного включения энергии в каждом каскаде и неоднозначности (петли) характеристики включения энергии в первом каскаде усиления, вызванной наличием зазора в жесткой обратной связи, коэфициента возврата в первом реле и т. п., имеют вид

$$T_p\dot{\rho} + \rho = \Phi_1(\eta); \quad (144)$$

$$T_f\dot{\xi} = \Phi_2(\rho); \quad (145)$$

$$\eta = \varphi - \gamma\xi, \quad (146)$$



Фиг. 86. Характеристика управляющего элемента первого каскада:

Δ — относительная величина зазора в обратной связи; $2\eta_\varepsilon$ — относительная величина зоны нечувствительности.

где φ — относительная величина координаты входа;

η — относительная величина ошибки;

ρ — относительная величина координаты выхода первого каскада усиления (или координаты входа второго каскада усиления);

ξ — относительная величина приведенной координаты выхода следящего механизма;

T_p — время установления первого каскада усиления;

T_f — приведенное время сервомотора, равное $T_f = \frac{T_s}{\gamma}$;

где γ — коэфициент обратной связи;

T_s — постоянная времени сервомотора.

В дальнейшем будем рассматривать свободные колебания сервомеханизма после любых начальных отклонений, поэтому в уравнении (146) положим $\varphi = 0$.

Нелинейная функция $\Phi_1(\eta)$ в уравнении (144) является характеристикой управляющего элемента первого каскада усиления (фиг. 86). Эта характеристика принадлежит управляющему элементу релейного типа при наличии коэфициента возврата или зазора в обратной связи и зоны нечувствительности. Здесь Δ — относительная величина зазора в обратной связи, а $2\eta_\varepsilon$ — относительная величина зоны нечувствительности реле.

Нелинейная функция $\Phi_1(\eta)$ может быть записана в следующем виде:

$$\Phi_1(\xi) = -\Phi_1(\eta),$$

где

$$\Phi_0(\xi) = \begin{cases} +1; \text{ при } \xi \geqslant \xi_\varepsilon + \frac{\Delta}{2} \text{ и } \dot{\xi} > 0; \\ \xi > \xi_\varepsilon - \frac{\Delta}{2} \text{ и } \dot{\xi} < 0; \\ \xi > \xi_\varepsilon - \frac{\Delta}{2} \text{ и } \dot{\xi} > 0, \text{ если } \Phi(\xi_0) = +1; \\ 0; \text{ при } -\xi_\varepsilon + \frac{\Delta}{2} < \xi < \xi_\varepsilon + \frac{\Delta}{2} \text{ и } \dot{\xi} > 0; \\ -\left(\xi_\varepsilon + \frac{\Delta}{2}\right) < \xi < \left(\xi_\varepsilon - \frac{\Delta}{2}\right) \text{ и } \dot{\xi} < 0; \\ -\left(\xi_\varepsilon + \frac{\Delta}{2}\right) < \xi < \left(\xi_\varepsilon + \frac{\Delta}{2}\right) \text{ и } \dot{\xi} \gtreqless 0, \text{ если } \Phi(\xi_0) = 0; \\ -1; \text{ при } \xi \leqslant -\left(\xi_\varepsilon + \frac{\Delta}{2}\right) \text{ и } \dot{\xi} < 0; \\ \xi < -\left(\xi_\varepsilon - \frac{\Delta}{2}\right) \text{ и } \dot{\xi} > 0; \\ \xi < -\left(\xi_\varepsilon - \frac{\Delta}{2}\right) \text{ и } \dot{\xi} < 0, \text{ если } \Phi(\xi_0) = -1. \end{cases} \qquad (147)$$

Нелинейная функция $\Phi_2(\rho)$ представляет характеристику управляющего элемента второго каскада усиления (фиг. 87). Эта характеристика также принадлежит управляющему элементу релейного типа при наличии зоны нечувствительности. Здесь $2\rho_\varepsilon$ — относительная величина зоны нечувствительности реле.

Нелинейная функция $\Phi_2(\rho)$ может быть представлена так:

$$\Phi_2(\rho) = \begin{cases} +1 \text{ при } \rho > \rho_\varepsilon; \\ 0 \text{ при } -\rho_\varepsilon < \rho < \rho_\varepsilon; \\ -1 \text{ при } \rho < \rho_\varepsilon. \end{cases} \qquad (148)$$

Уравнения (144) — (148) показывают, что рассматриваемая задача может быть сведена к рассмотрению различных линейных уравнений и к последовательному припасовыванию констант интеграции, исходя из требования непрерывности рассматриваемых функций в точках сопряжения различных систем уравнений.

Уравнения электро-гидропневматического сервомеханизма, схема которого изображена на фиг. 82, следующие.

Управляющее напряжение, действующее на электромагнитное реле, представляет напряжение измерительного устройства и обратной связи.

$$U_{реле} = U - U_{обр.св}\,.$$

Характерным для этой следящей системы является наличие обратной связи по скорости.

В случае исследуемого режима отработки начального рассогласования положим $U = 0$. Таким образом,

$$U_{реле} = -U_{обр.\,св} = -\left(\gamma\mu_2 + T\dot{\mu}_2\right);$$

здесь μ_2 — положение сервомотора;

γ и T — эффективность жесткой и скоростной обратных связей. Напряжение обратной связи равно сумме напряжений жесткой *6* и скоростной *7* обратной связи. Уравнение движения гидравлического сервомотора при линейной апроксимации характеристики золотника в безразмерной форме имеет вид

$$T_2\dot{\mu}_2 = \Phi_1(\mu_1),$$

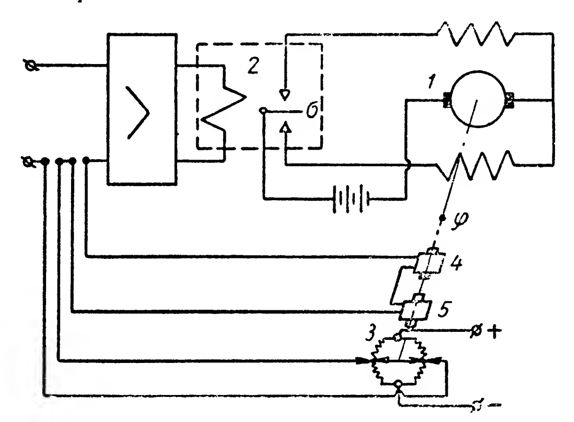
где $\Phi_1(\mu_1) = +1{,}0-1$ — координаты золотника;

T_2 — время сервомотора.

Фиг. 87. Характеристика управляющего элемента второго каскада:

$2\rho_\varepsilon$ — относительная величина зоны нечувствительности.

Статическая характеристика релейного усилителя представляет функцию напряжения $U_{реле}$ вида, изображенного на фиг. 87.



Фиг. 88. Схема релейного сервомеханизма. Сигналы по положению скорости и ускорению в обратной связи создаются при помощи потенциометрического, тахометрического и акселерометрического датчиков.

Учитывая сжимаемость воздуха в пневматической части следящей системы, уравнение релейного блока может быть представлено в следующем виде:

$$T_1\dot{\mu}_1 + \mu_1 = -\Phi\left(U_{обр.\,связи}\right);$$

здесь T_1 — постоянная времени релейного блока;

μ_1 — выходная координата первого каскада усиления;

$\Phi\left(U_{обр.\,св}\right)$ — нелинейная функция (фиг. 86).

Таким образом, свободные колебания рассматриваемого сервомеханизма описываются системой уравнений:

$$1)\quad T_1\dot{\mu}_1 + \mu_1 = -\Phi(U_{обр.\,связи});$$

$$2)\quad T_2\dot{\mu}_2 = \Phi_1(\mu_1);$$

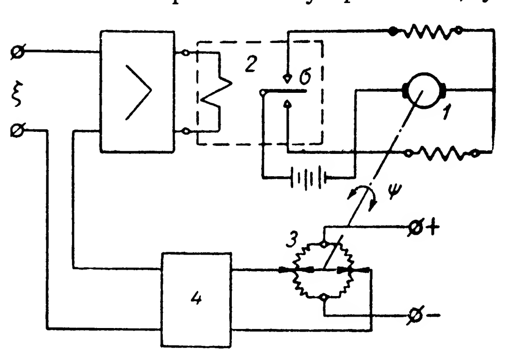
$$3)\quad U_{обр.\,связи} = \gamma\mu_2 + T\dot{\mu}_2.$$

В качестве однокаскадного сервомеханизма рассмотрим следующие схемы (фиг. 88 и 89).

Следящая система (фиг. 88) состоит из серводвигателя *1* постоянного тока и релейного устройства *2*, управляющего включением серводвигателя. В цепи обратной связи имеются последовательно включенные датчики рассогласования (потенциометр *3*), скорости (тахогенератор *4*) и ускорения (акселерометр *5*). Датчики *3*—*5* включены последовательно таким образом, что общее напряжение обратной связи равно

$$U_{обр.\,связи} = a\mu + b\dot{\mu} + c\ddot{\mu};$$

здесь a, b, c — коэфициенты, характеризующие отношение приращений соответствующих компонент напряжения обратной связи к приращениям положения, скорости и ускорения, измеряемых потенциометрическим, тахометрическим и акселерометрическим датчиками.



Фиг. 89. Схема релейного сервомеханизма. Сигнал по положению, скорости и ускорению в цепи обратной связи создается при помощи диференцирующего контура.

Следящая система (фиг. 89) состоит также из серводвигателя *1*, релейного устройства *2* и потенциометра *3*. В отличие от предыдущей схемы здесь в цепь обратной связи включен диференцирующий четырехполюсник *4*, выходное напряжение которого пропорционально рассогласованию и его первой и второй производным. Пренебрегая постоянной времени диференцирующего контура, имеем

$$U_{обр.\,связи} = a\mu + b\dot{\mu} + c\ddot{\mu}.$$

3. СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЕ ДЕЙСТВИЕ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ В СЕРВОМЕХАНИЗМАХ С РЕЛЕЙНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В соответствии с поставленной задачей рассмотрим стабилизирующее действие обратных связей в однокаскадных, двухкаскадных и т. д. сервомеханизмах с релейным управлением. Для выявления эффекта стабилизации различных сервомеханизмов с помощью обратных связей необходимо найти условия, определяющие положения равновесия системы и появление автоколебаний их. Этими условиями, как известно, являются такие соотношения конструктивных и динамических параметров сервомеханизмов, которые определяют границы в пространстве параметров

областей устойчивости, а также областей существования и отсутствия автоколебаний.

Следующим вопросом является определение влияния параметров сервомеханизма на амплитуду и частоту автоколебаний, если технологические и эксплуатационные условия всей системы регулирования допускают существование последних.

Выбор обратных связей лишь по стабилизирующему действию их на положение равновесия и другие стационарные режимы сервомеханизма не дает еще ответа о качестве переходных процессов при различного рода возмущающих воздействиях, поступающих на его вход. В то же время эффективность действия обратных связей значительно влияет на быстродействие сервомеханизма и, следовательно, на переходные процессы в нем. Поэтому выбор обратных связей следует производить с учетом их влияния на переходные процессы так, чтобы они в сочетании с характеристиками прямых связей и характеристиками управляющих элементов сервомеханизмов (например, с характеристиками релейных элементов) обеспечивали наиболее качественный переходный процесс сервомеханизма при различных возмущающих воздействиях.

Рассмотрим стабилизирующее действие обратных связей для различных сервомеханизмов, представляющих типичные устройства многих систем автоматического регулирования. Анализ динамики будем проводить методом точечных преобразований с помощью многолистной фазовой плоскости.

Приемы исследования таких нелинейных устройств изложены в главе XXIX. Поэтому здесь ограничимся лишь приведением вида фазовой плоскости, критического соотношения параметров для ряда случаев, а также результатов анализа устойчивости таких сервомеханизмов.

Для пневмогидравлического сервомеханизма (см. фиг. 75) диференциальное уравнение фазовых траекторий на основе уравнений (144) — (146) будет иметь вид

$$\frac{d\rho}{d\xi} = -\frac{T_s}{T_p\gamma}\cdot\frac{\Phi_1(\xi)+\rho}{\Phi_2(\rho)}, \tag{149}$$

и положение равновесия его в соответствии с видом функций $\Phi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$ будет представлять континимум положений, определяемый граничным значением координат

$$\rho = 0;$$
$$|\xi| \leqslant \xi_\varepsilon + \frac{\Delta}{2}. \tag{150}$$

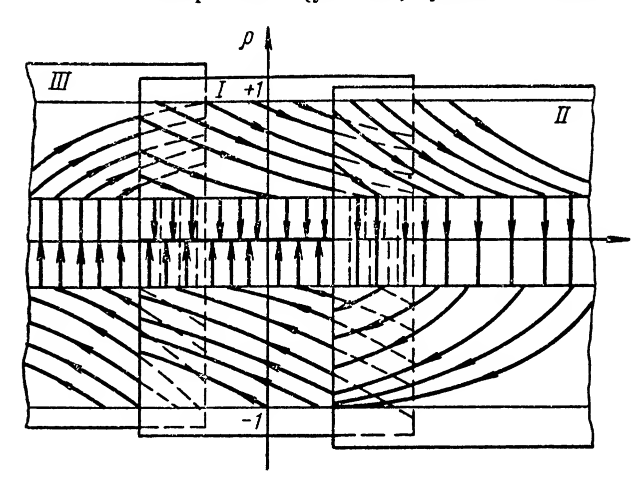
Фазовая плоскость (ρ, ξ) является не обычной, а трехлистной фазовой поверхностью вследствие наличия в уравнении (49) неоднозначной функции $\Phi_1(\xi)$. Каждый из листов дополнительно разбивается на участки в соответствии с видом функции $\Phi_2(p)$. Для каждого участка представляется возможным найти интеграл уравнения (149) и, таким образом, вид интегральных кривых:

$$\int \frac{\Phi_2(\rho)}{\Phi_1(\xi)+\rho}\,d\rho = -\frac{T_s}{T_p\gamma}\int d\xi. \tag{151}$$

Интегрируя уравнение (151) после подстановки значений функций $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\rho)$ для каждого листа и участка, получим

$$\rho = f(\xi) + C_i \tag{152}$$

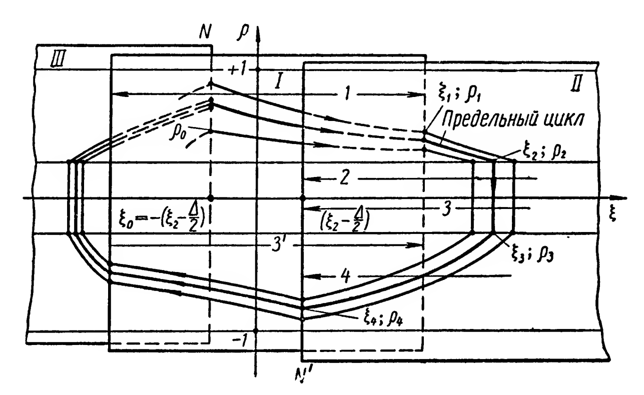
($i = 1, 3, \ldots, 6$ — номер листа (участка) фазовой плоскости).



Фиг. 90. Фазовые траектории.

Вид фазовой плоскости и интегральных кривых для рассматриваемого случая изображен на фиг. 90 и 91.

Анализ динамики такого сервомеханизма показывает, что он при определенном соотношении параметров подвержен автоколебаниям.

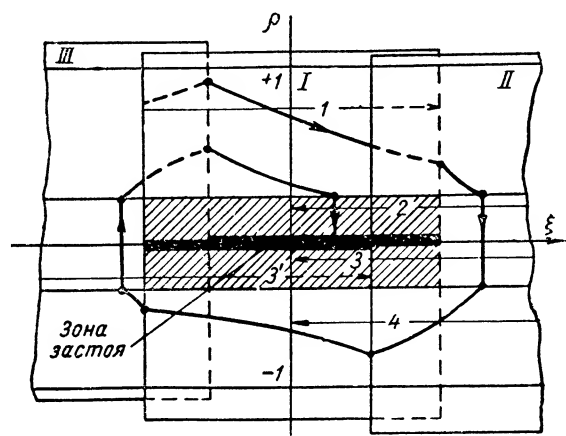


Фиг. 91. Фазовые траектории и предельный цикл.

На существование автоколебаний указывает наличие предельного цикла в фазовой плоскости (фиг. 92). Изменяя параметры сервомеханизма, можно добиться подавления автоколебаний. Тогда такой сервомеханизм будет иметь устойчивое положение равновесия и после любых начальных отклонений будет приходить в положение равновесия (фиг. 92).

Для того чтобы найти критическое соотношение параметров, а также решить вопрос об устойчивости положения равновесия и об устойчивости возможных автоколебаний, воспользуемся теорией точечных преобразований поверхностей. В силу симметричности фазовой плоскости относительно начала координат для решения поставленной задачи достаточно исследовать отображение полупрямой N в полупрямую N' (фиг. 91).

Для данной задачи удобнее проводить анализ с помощью двух кривых отображения, а именно путем исследования отображения полупрямой N в полупрямую, параллельную оси абсцисс и отстоящую от нее на расстоянии $+\rho_\varepsilon$, полупрямой N' в ту же полупрямую. Тогда по



Фиг. 92. Фазовые траектории затухающих колебаний механизма.

взаиморасположению этих двух кривых отображения можно судить о структуре разбиения фазовой плоскости на траектории и выявить критическое соотношение параметров.

Отображение полупрямой N в полупрямую, параллельную оси абсцисс, дается уравнением

$$\xi(\rho_0) = \xi_\varepsilon + \frac{\Delta}{2} + \tau \ln \frac{1 + e^{-\frac{2\xi_\varepsilon}{\tau}} \rho_0}{1 + \rho_\varepsilon}. \tag{153}$$

Отображение полупрямой N' в ту же полупрямую дается уравнением

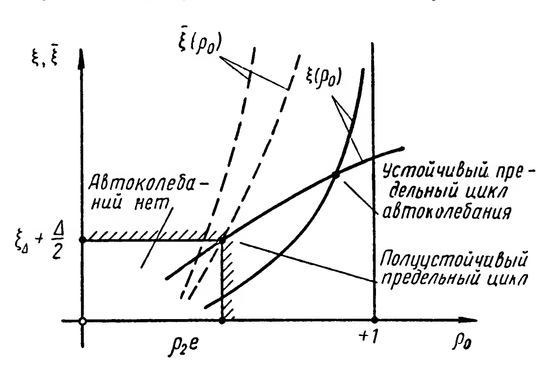
$$\bar{\xi}(\rho_0) = \xi_\varepsilon - \frac{\Delta}{2} - \tau \ln \frac{1 - \rho_0}{1 - \rho_\varepsilon}. \tag{154}$$

На фиг. 93 изображена диаграмма точечного отображения и дано расположение кривых $\xi(\rho_0)$ и $\bar{\xi}(\rho_0)$ для трех возможных случаев, определяемых соотношением параметров сервомеханизма. Первому случаю соответствует такое соотношение параметров, при котором кривые $\xi(\rho_0)$ и $\bar{\xi}(\rho_0)$ пересекаются. Это свидетельствует о возможности автоколебательного состояния сервомеханизма. Взаиморасположение кривых показывает, что колебания в этом случае будут устойчивыми, т. е. что они будут физически существовать.

Второму случаю соответствует критическое соотношение параметров сервомеханизма. Кривые $\xi(\rho_0)$ и $\bar{\xi}(\rho_0)$ пересекаются на границе зоны покоя. Возможные колебания системы будут носить полуустойчивый характер. Это означает, что при изменении соотношения параметров в одну сторону колебания будут устойчивыми, а при изменении в другую сторону колебания будут прекращаться.

В третьем случае кривые $\xi(\rho_0)$ и $\bar{\xi}(\rho_0)$ не пересекаются, что означает, что автоколебания в системе возникнуть не могут. В этом случае сервомеханизм после любых начальных отклонений возвращается в положение равновесия.

Если в первом случае положение равновесия сервомеханизма было неустойчивым, то в последнем случае, наоборот, устойчивым.



Фиг. 93. Диаграмма точечного отображения.

Критическое соотношение параметров найдем из условия существования неподвижной точки для полуустойчивого цикла так, как это изложено в главе XXIX.

Это соотношение имеет вид

$$\rho_\varepsilon = \frac{e^{\Delta^*} - 1}{e^{2\xi^* + \Delta^*} - 1}, \quad (155)$$

где

$$\Delta^* = \frac{\Delta}{\tau}; \quad \xi^* = \frac{\xi_\varepsilon}{\tau}.$$

На фиг. 94 представлено разбиение пространства параметров на области наличия и отсутствия автоколебаний, по которому легко можно проследить влияние параметров на подавление автоколебаний и в данном случае на стабилизацию положения равновесия сервомеханизма.

Параметр $\tau = \frac{T_p}{T_s}\gamma$, входящий в уравнение (155), содержит коэфициент γ, характеризующий действие жесткой обратной связи.

Коэфициент γ представляет отношение $\gamma = \frac{m_{max}}{m^*}$ где m_{max} — максимальный ход сервомотора, а m^* — ход сервомотора при максимальном входном сигнале. Поэтому изменение γ можно рассматривать как изменение конструктивного размера сервомотора, максимального хода его m_{max}. Однако, поскольку m_{max} входит также в выражение времени сервомотора $T_s = \frac{m_{max}}{\dot{m}_{max}}$, то при оценке влияния γ следует полагать T_s неизменным, принимая для этого соответствующее изменение скорости сервомотора $\dot{m}_{max}$. Это приводит к тому, что изменение коэфициента γ следует рассматривать как изменение максимальной скорости сервомотора $\dot{m}_{max}$.

Действительно, время сервомотора и коэфициент обратной связи связаны соотношением:

$$T_s = \gamma \frac{m^*}{\dot{m}_{\max}}. \tag{156}$$

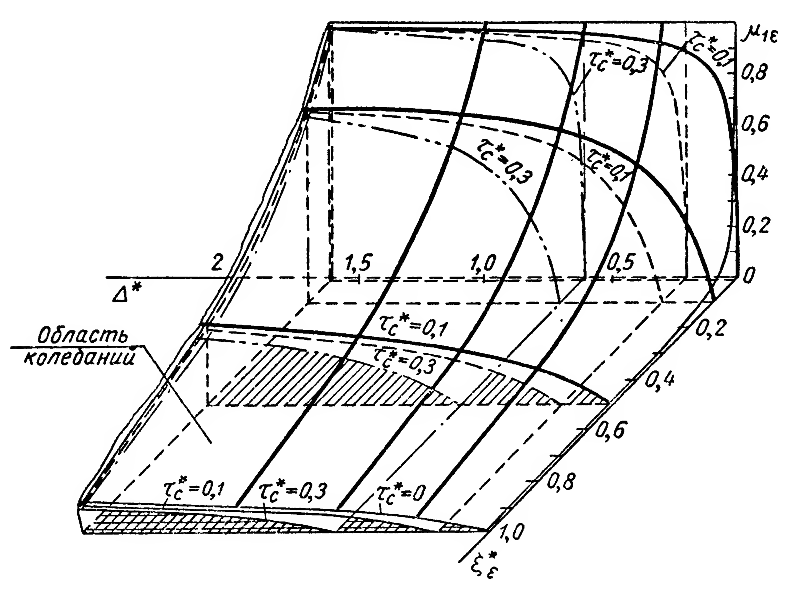
Поскольку выражение (156) содержит оба параметра T_s и γ, то, как было уже отмечено, необходимо положить $T_s = \text{const}$; тогда

$$\gamma = c\dot{m}_{\max}, \tag{157}$$

где

$$c = \frac{T_s}{m^*},$$

т. е. влияние эффективности жесткой обратной связи сервомеханизма с релейным управлением на его динамику аналогично влиянию скорости сервомотора.



Фиг. 94. Разбиение пространства параметров на области наличия и отсутствия автоколебаний для различных значений τ_c^*, выражающего эффективность действия скоростей обратной связи,

$$\tau_c^* = \frac{\tau_c}{\tau}, \quad \xi_\varepsilon^* = \frac{\xi_\varepsilon}{\tau} = \frac{\zeta_\varepsilon}{\gamma\tau}.$$

Отсюда следует основной вывод: влияние эффективности действия жесткой обратной связи в таких системах противоположно влиянию времени сервомотора; например, аналогично увеличению коэфициента обратной связи γ можно рассматривать уменьшение времени сервомотора T_s.

Для более полного суждения следует рассмотреть также связь коэфициента обратной связи γ с параметрами нелинейной характеристики $\Phi_1(\xi) = \Phi_1(\gamma\mu)$, где μ — выходная координата сервомеханизма.

Нелинейная функция $\Phi_1(\xi)$ включает три типичные зоны нелинейности: зону нечувствительности, а также участки неоднозначности и насыщения, расположенные симметрично относительно начала координат. Зона нечувствительности характеризуется координатой $\pm\left(\xi_\varepsilon + \frac{\Delta}{2}\right)$, участки неоднозначности характеризуются параметром Δ, представляющим ширину петли.

В этом случае аргумент нелинейной функции включает в себя коэфициент обратной связи γ, а скорость сервомотора характеризуется непосредственно параметром T_s.

Если нечувствительность управляющего элемента выражается величиной m_ε, а ширина петли m_Δ, то в относительном виде эти величины будут

$$\mu_\varepsilon = \frac{m_\varepsilon}{m_{\max}} \text{ и } \mu_\Delta = \frac{m_\Delta}{m_{\max}}.$$

Переменная ξ связана с переменной μ через коэфициент обратной связи γ ($\xi = \gamma\mu$). Тогда относительная величина половины зоны покоя, приведенная к ходу сервомотора, равна

$$\mu_\varepsilon + \frac{\mu_\Delta}{2} = \frac{1}{\gamma}\left(\xi_\varepsilon + \frac{\Delta}{2}\right) \tag{158}$$

Отсюда следует, что с изменением коэфициента обратной связи γ меняются приведенные к ходу сервомотора величины зоны нечувствительности μ_ε и ширина петли. При этом с увеличением коэфициента γ уменьшаются μ_ε и μ_Δ.

Таким образом, представляется возможным привести в соответствие влияние времени сервомотора T_s, влияние зоны нечувствительности μ_ε и ширины петли μ_Δ на динамику сервомеханизма, поскольку влияние как T_s так и μ_ε и μ_Δ выражается через влияние коэфициента обратной связи. Итак, увеличение γ эквивалентно соответствующему уменьшению T_s или уменьшению μ_ε и μ_Δ. Отсюда на основе выражения для критического соотношения параметров (155), а также на основе изображенного на фиг. 94 разбиения пространств параметров на области наличия и отсутствия автоколебаний можно сделать следующие основные выводы о стабилизирующем влиянии жесткой обратной связи:

1) увеличение эффективности действия жесткой обратной связи выше критического значения вызывает для рассмотренной структуры сервомеханизма неустойчивость и появление автоколебаний его;

2) коэфициент обратной связи можно увеличить, не вызывая автоколебаний сервомеханизма, лишь при условии снижения быстродействия его, т. е. уменьшения времени сервомотора или при загрублении, т. е. при увеличении его зоны нечувствительности;

3) сопоставление влияния параметров T_s, ξ_ε и Δ на динамику сервомеханизма, исходя из влияния коэфициента обратной связи γ, показывает, что пропорциональное уменьшение ширины петли и зоны нечувствительности может привести к возникновению автоколебаний сервомеханизма; при необходимости уменьшения зоны нечувствитель-

ности ξ_ε конструктор должен в большей степени уменьшить ширину петли Δ в том случае, если возникновение автоколебаний сервомеханизма нежелательно.

Необходимо отметить, что в результате проведенного анализа представляется возможным рассчитать эффективность обратной связи сервомеханизма так, чтобы положение равновесия его было устойчивым. Однако выбор коэфициента обратной связи на этом еще не заканчивается. Как уже отмечалось, дальнейшее уточнение коэфициента γ следует произвести на основании желаемого вида переходного процесса сервомеханизма. Этот вопрос для случая однократного начального возмущения не вызывает затруднений, поскольку интегральные кривые, характеризующие движение его в каждый момент времени, уже найдены, остается лишь проварьировать коэфициентом γ и выбрать тот вид фазовых траекторий, который обеспечивает наиболее быстрый переходный процесс.

4. СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЕ ДЕЙСТВИЕ СКОРОСТНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В СЕРВОМЕХАНИЗМЕ

Рассмотрим стабилизирующее действие обратной связи по скорости изменения выходной координаты сервомеханизма. На примере сервомеханизма, описываемого линейными деференциальными уравнениями, легко проследить, что действие скоростной обратной связи аналогично демпфирующему действию, т. е. действию сопротивления, пропорционального скорости.

Введение такого сопротивления в цепь сервомеханизма, как известно, оказывает стабилизирующее действие, уменьшая скорость его движения. Подобно этому действие скоростной обратной связи в нелинейном сервомеханизме также вызывает уменьшение его скорости и способствует стабилизации сервомеханизма относительно положения равновесия.

Однако имеется и существенное различие в действии скоростной обратной связи на динамику нелинейного сервомеханизма по сравнению с линейным.

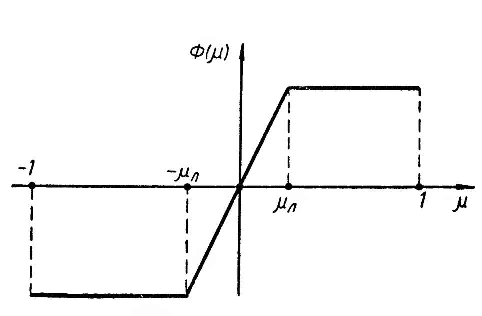
С помощью скоростной обратной связи представляется возможным не только оказывать стабилизирующее воздействие, но и улучшать переходный процесс системы с релейным управлением. Наибольшее быстродействие сервомеханизма достигается при релейном включении подводимой к нему энергии. Однако в этом случае возможны значительные перерегулирования и неустойчивость положения равновесия. Для того чтобы избежать этого, необходимо повысить за счет тех или иных средств стабилизирующие свойства сервомеханизма.

Одним из таких средств является применение управляющих элементов не с релейной характеристикой, а с характеристикой, близкой к релейной. Такая характеристика имеет незначительную зону линейности, а за этой зоной — участки насыщения, свойственные обычным релейным характеристикам (фиг. 95). Наличие линейной зоны позволяет стабилизировать сервомеханизм около нового положения равновесия,

сохраняя в то же время почти полностью все свойства релейной характеристики, способствующей получению наибольшего быстродействия сервомеханизма. Ширина зоны линейности выбирается в таких случаях как с точки зрения стабилизации, так и с точки зрения получения возможно лучшего переходного процесса.

Возможный переходный процесс для этого случая изображен на фиг. 96.

Другим средством является введение скоростной обратной связи. Наибольшее быстродействие инерционного сервомеханизма, свободные



Фиг. 95. Характеристика управляющего элемента при наличии зоны линейности $(\mu_л - \mu_л)$ и участков насыщения $(1 - \mu_л)$.

Фиг. 96. Переходный процесс сервомеханизма, управляемый элементом, имеющим характеристику, изображенную на фиг. 95.

колебания которого описываются диференциальным уравнением второго порядка вида

$$c\ddot{\mu} = \Phi(\xi), \tag{159}$$

(где c — постоянный коэфициент, характеризующий инерцию; $\Phi(\xi)$ — функция, представляющая характеристику релейного управляющего элемента; ξ — координата обратной связи), достигается в том случае, когда координата обратной связи ξ изменяется в зависимости от координаты выхода сервомеханизма μ и ее скорости $\dot{\mu}$ по закону

$$\xi = \gamma\mu + T\dot{\mu}^2 \operatorname{sgn} \mu, \tag{160}$$

где γ — коэфициент обратной связи;

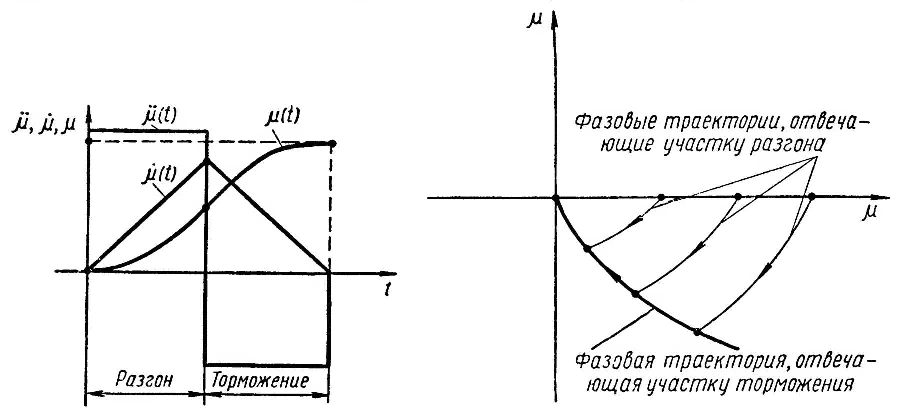
T — коэфициент скоростной обратной связи.

В этом случае переходный процесс сервомеханизма после любого начального отклонения выходной координаты протекает на участке разгона с максимальным ускорением, а на участке торможения — с максимальным замедлением. Вид переходного процесса изображен на фиг. 97, вид фазовой траектории — на фиг. 98.

Следует отметить, что если движение сервомеханизма описывается полным диференциальным уравнением второго порядка, включающим демпфирующие и восстанавливающие силы, то для такой системы изложенным путем можно получить переходный процесс, лишь приближающийся к условиям наибольшего быстродействия

Необходимо также указать, что приведенный на фиг. 97 переходный процесс будет при выбранных связях и значениях γ и T наиболее быстропротекающим только при определенном виде воздействий, а именно при однократных ступенчатых воздействиях, поданных на вход сервомеханизма.

Переходный процесс сервомеханизма при наличии жесткой и скоростной обратных связей приближается на участке торможения к опти-



Фиг. 97. Переходный процесс сервомеханизма с релейным управлением при максимальном замедлении на участке торможения.

Фиг. 98. Фазовые траектории быстродействующего сервомеханизма с релейным управлением при максимальном ускорении и максимальном замедлении на участке торможения.

мальному (наиболее быстропротекающему), если уравнение движения его имеет вид:

$$\ddot{\mu} + b\dot{\mu}^2 \operatorname{sgn} \dot{\mu} + a\mu = 0, \tag{161}$$

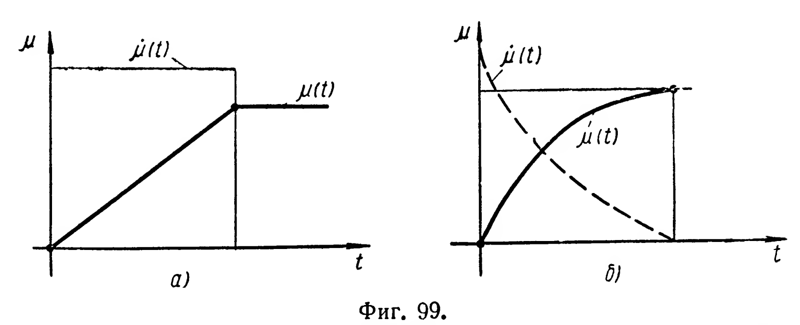
а коэфициенты жесткой обратной связи a и скоростной обратной связи b выбраны из условия оптимальности [4], [7].

Изложенное в·большей степени относилось к однокаскадным сервомеханизмам с одним управляющим элементом. Переходный процесс в двухкаскадных сервомеханизмах при наличии двух управляющих элементов может быть получен при определенных условиях (в определенном диапазоне частот входного сигнала) более быстропротекающим, нежели рассмотренный ранее (фиг. 97). Использование нелинейных характеристик управляющих элементов в каждом каскаде усиления жестких и скоростных обратных связей позволяет осуществить их так, чтобы переходные процессы имели вид, изображенный на фиг. 99.

Скоростная обратная связь имеет большое значение для стабилизации положения равновесия сервомеханизма и для регулирования амплитуды и частоты автоколебаний.

Рассмотрим влияние скоростной связи на динамику двухкаскадного сервомеханизма с релейным управлением.

Излагаемое ниже относится в полной мере и к сервомеханизму, схема которого изображена на фиг. 82.



Фиг. 99.

а и *б* — переходные процессы двухкаскадных сервомеханизмов, управляемых двумя элементами с нелинейными характеристиками и связями.

Фиг. 100. Фазовые траектории на трехлистной фазовой плоскости:

I — область, относящаяся к затухающему процессу; *II* и *III* — области, относящиеся к затухающему процессу со скользящим режимом.

Если дополнить такой сервомеханизм скоростной обратной связью, то уравнения движения его, переписанные в обозначениях предыдущей задачи, будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} T_p\dot{\rho}+\rho &= -\Phi_1(\xi);\\ T_s\dot{\mu} &= \Phi_2(\rho);\\ \varphi &= \gamma\mu + T\dot{\mu}, \end{aligned}\right\} \qquad (162)$$

где ξ — координата обратной связи (координата входа реле первого каскада усиления).

Введение скоростной обратной связи не изменяет вида интегральных кривых на фазовой плоскости. Однако, в отличие от рассмотренного ранее, листы фазовой плоскости будут иметь вырезы, и фазовая плоскость в частности будет выглядеть, как это изображено на фиг. 100.

Введение скоростной обратной связи приводит к тому, что линии переключений соответственно приближаются и отдаляются от начала координат на величину, пропорциональную сигналу по скорости выходной координаты. Вследствие этого выключение сервомеханизма как при прямом, так и при обратном движении наступает раньше.

При $\dot{\mu}>0$, т. е. в первом квадранте фазовой плоскости, края листов будут проходить через точки с абсциссами

$$(\mu_\varepsilon)_{1,2}=\frac{1}{\gamma}\left(\xi_\varepsilon\pm\frac{\Delta}{2}-\frac{T}{T_s}\right), \qquad (163)$$

при $\dot{\mu}<0$, т. е. во втором квадранте, — через

$$(\mu_\varepsilon)_{1,2}=\frac{1}{\gamma}\left(\xi_\varepsilon\pm\frac{\Delta}{2}+\frac{T}{T_s}\right). \qquad (164)$$

В отличие от фазовой плоскости для системы без скоростной обратной связи в рассматриваемой фазовой плоскости появляются дополнительные области, в которых существуют новые виды движения изображающей точки.

Наличие скоростной обратной связи увеличивает область притяжения, не изменяя в то же время зону покоя и, следовательно, не приводя к увеличению статической ошибки сервомеханизма. Критическое соотношение параметров, определяющее в данном случае устойчивость положения равновесия сервомеханизма и выделяющее области наличия и отсутствия автоколебаний, может быть легко найдено из условия существования неподвижной точки для полуустойчивого цикла.

Поступая как и ранее, найдем критическое соотношение параметров в следующем виде:

$$(\rho_\varepsilon)_{кр}=\frac{e^{\left(\frac{\Delta}{\gamma\tau}-\frac{2\tau_c}{\tau}\right)}-1}{e^{\left(\frac{2\xi_\varepsilon}{\gamma\tau}+\frac{\Delta}{\gamma\tau}-\frac{2\tau_c}{\tau}\right)}-1}, \qquad (165)$$

где

$$\tau_c=\frac{T}{\gamma T_s} \quad \text{и} \quad \tau=\frac{T_p}{T_s}.$$

Возвращаясь к фиг. 94, на которой изображено разбиение пространства параметром на области наличия и отсутствия автоколебаний при наличии скоростей обратной связи и без нее, видим, что введение скоростной обратной связи сужает область автоколебаний сервомеханизма. При $\tau_c > \frac{\Delta}{2\gamma}$ сервомеханизм, управляемый двумя реле, не будет подвержен автоколебаниям.

Таким образом, введение скоростной обратной связи в двухкаскадном релейном сервомеханизме при наличии петлевой характеристики в первом каскаде усиления является целесообразным средством стабилизации, так как позволяет повысить точность сервомеханизма, не допустив автоколебаний его.

6. ВЛИЯНИЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО УСКОРЕНИЮ

Остановимся кратко на влиянии обратной связи по ускорению в схеме однокаскадного сервомеханизма с релейным управлением (см. фиг. 88 и 89).

Уравнения движения его при обычных упрощающих допущениях запишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} T_a^2\ddot{\mu} + T_s\dot{\mu} &= +\Phi(\sigma); \\ \sigma &= a\mu + b\dot{\mu} + c\ddot{\mu}. \end{aligned}\right\} \qquad (165)$$

Нелинейная функция $\Phi(\sigma)$ имеет вид релейной характеристики с петлей, изображенной на фиг. 96, ее математическое описание аналогично данному на стр. 842.

В отличие от рассмотренных ранее случаев сервомеханизм снабжен тремя стабилизирующими обратными связями, причем в силу нелинейной характеристики управляющего элемента не представляется возможным исключить одну из связей, заменив ее простым образом действием других связей.

Объем главы не позволяет остановиться на анализе динамики таких систем. Однако на основе изложенной как здесь, так и в предыдущей главе, методики выявление вида интегральных кривых и нахождение критического соотношения параметров не могут вызвать затруднений. Поэтому остановимся лишь на физической стороне явлений, вызываемых введением обратной связи по ускорению.

Особенность действия обратной связи по второй производной заключается в уменьшении координатного запаздывания, обусловленного неоднозначной характеристикой реле. Как показывает анализ динамики такой системы, обратная связь по ускорению позволяет при определенной ее эффективности действия компенсировать неоднозначность релейной характеристики. Благодаря этому исчезает (теоретически) отрицательный эффект, вызываемый петлей характеристики, являющейся, как известно, основной причиной появления автоколебаний в сервомеханизмах такого типа. Этот результат достигается, если эффективность

обратной связи, характеризуемой коэфициентом c, выбрана из следующих условий:

$$c = T_a^2(\sigma_1 - \sigma_0), \qquad (166)$$

где σ_1 — значение координаты входа реле при включении;

σ_0 — значение координаты входа реле при выключении.

Однако введение обратной связи по ускорению влияет на замедление отработки входного сигнала. Поэтому ее эффективность следует выбирать с учетом ее влияния на переходный процесс сервомеханизма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А. и Хайкин С. Э., Теория колебаний, ОНТИ, 1937.
2. Андронов А. А. и Баутин Н. Н., ДАН СССР, т. 43, № 5, 1944.
3. Андронов А. А., Баутин Н. Н. и Горелик Г. С., „Автоматика и телемеханика" № 1, 7, 1946.
4. Фельдбаум А. А., „Автоматика и телемеханика" т. 10, № 4, 1949.
5. Петров В. В., „Автоматика и телемеханика" № 1, 1951.
6. Петров В. В. и Уланов Г. М. „Автоматика и телемеханика" № 5, 1950, № 5, 1951, № 2 и 6, 1952.
7. Лернер А. Я., „Автоматика и телемеханика" № 2 и 4, 1952.

ГЛАВА XXXI

УЛУЧШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРИ ПОМОЩИ НЕЛИНЕЙНЫХ СВЯЗЕЙ

Одной из наиболее важных задач теории автоматического регулирования является задача создания методики выбора схем и параметров систем автоматического регулирования, которые обеспечивали бы удовлетворение требований к их динамическим свойствам наиболее простыми средствами и при максимальном использовании элементов системы. Ей посвящены труды советских ученых В. С. Кулебакина [1], В. В. Солодовникова [2], [3], А. А. Фельдбаума [4], В. В. Петрова и Г. М. Уланова и др. Решение этой задачи проводилось в направлении использования элементов, обладающих линейными характеристиками, или элементов релейного типа. Как будет показано ниже, в ряде случаев использование элементов, обладающих нелинейными аналитическими характеристиками, позволяет простыми техническими средствами достигнуть существенного улучшения динамических свойств систем автоматического регулирования и удовлетворить строгим требованиям к форме процесса регулирования.

Применение нелинейных элементов особенно эффективно в случаях, когда имеют место относительно большие отклонения регулируемой величины от заданного значения. При этом, как правило, становятся существенными ограничения, накладываемые на значения пределов, в которых могут или должны изменяться координаты системы и значения их производных, при малых отклонениях не учитывающиеся.

Так, например, при регулировании подъемных машин ограничиваются три первые производные от управляемой величины (положения подъемной клети). Ограничения эти связаны с прочностью устройств, безопасностью движения и с физиологическим воздействием характера движения на организм человека. Во многих случаях регулирования уровня жидкости наибольшая скорость изменения уровня ограничивается максимальной пропускной способностью отводящей и питающей линий, а скорость перемещения дросселирующих органов, ограниченная предельной скоростью приводного двигателя, лимитирует значение второй производной от изменения уровня. В следящих системах скорость изменения положения выходного органа ограничивается предельной скоростью вращения рабочего двигателя, а ускорение — его предельным моментом вращения.

Создание систем с заданными динамическими свойствами связано с необходимостью: выявления ограничений, определяющих возможности системы в отношении удовлетворения требований к ее динамическим свойствам; построения совокупности процессов при всех рабочих режимах системы, совместимых с найденными ограничениями и в наибольшей мере соответствующих предъявляемым к ней требованиям[1]; выбора схемы системы и определения формы характеристик преобразования сигналов, обеспечивающих наилучшее приближение процессов регулирования к найденной совокупности оптимальных процессов.

Для выявления отклонений процессов регулирования от их оптимальной формы, рассчитанной таким образом, динамические свойства системы должны быть подвергнуты теоретическому или экспериментальному исследованию.

Современное состояние теории автоматического регулирования еще не дает возможности ответить на все вопросы, возникающие при синтезе систем, а тем более систем, в которых используются нелинейные элементы, однако ряд принципиальных положений, относящихся к созданию систем автоматического регулирования с использованием нелинейных связей, уже сформулирован и оказался плодотворным при решении некоторых практических задач [5], [6]. Главные из этих положений излагаются ниже.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОВОКУПНОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В большинстве случаев от системы автоматического регулирования требуется, чтобы процесс регулирования завершался за минимальное время и не сопровождался перегрузками в каком-либо из элементов системы. В этих случаях минимальная осуществимая длительность процессов регулирования и их форма однозначно определяются параметрами неизменяемой части системы (включающей, как правило, объект и силовые преобразователи), а также теми ограничениями, накладываемыми на значения координат системы и на их производные, которые оказывают существенное влияние на ее рабочие свойства.

а) Определение формы кратчайших процессов при наложении ограничений на значения производных регулируемой величины

Пусть в рассматриваемой системе ограничено значение второй производной регулируемой величины. Определим форму процесса регулирования так, чтобы система перешла из начального равновесного состояния в заданное равновесное состояние за минимальное время при соблюдении ограничения, наложенного на вторую производную.

Очевидно, что скорость изменения регулируемой величины будет нарастать тем быстрее, чем больше значение ускорения, и регулируемая величина x приблизится к ее заданному значению x_0 за минимальное время, если вторая производная будет поддерживаться на ее предельном значении. При этом первая производная — $\dot{x}$ будет нарастать линейно,

[1] Найденную таким образом совокупность процессов мы будем называть совокупностью оптимальных процессов регулирования.

а x изменяться по параболе. Регулируемая величина достигла бы в этом случае значения x_0 за минимальное время. Однако, поскольку при постоянном значении ускорения скорость изменения x все время возрастает, то в момент достижения величиной x значения x_0 скорость изменения регулируемой величины будет максимальной, режим системы в этот момент будет неравновесным и значительное перерегулирование неизбежным.

Для того чтобы в момент достижения регулируемой величиной заданного значения наступил равновесный режим, очевидно, необходимо начинать снижение скорости заранее с таким расчетом, чтобы скорость изменения регулируемой величины и ее отклонение от заданного значения обратились в нуль одновременно.

Фиг. 101. Оптимальная форма процесса в системе, где ограничено значение второй производной от регулируемой величины.

Для этого в определенный момент вторая производная должна изменить свой знак на обратный. Если положительное и отрицательное предельные значения второй производной одинаковы, то периоды ускорения и замедления системы будут длиться одинаковое время, изменения x за время ускорения и замедления будут одинаковыми, а следовательно, замедление должно начинаться в момент, когда регулируемая величина пройдет половину своего пути до заданного значения. Такой процесс показан на фиг. 101.

Если начальное или заданное состояние системы (или и то, и другое) будут неравновесными или если положительное и отрицательное предельные значения второй производной будут неодинаковыми по абсолютной величине, то длительности периодов ускорения и замедления системы будут неодинаковыми; однако во всех перечисленных случаях процесс будет состоять из двух интервалов, в течение каждого из которых вторая производная будет поддерживаться на одном из своих предельных значений.

Выясним теперь в общем виде, какова должна быть форма процесса регулирования, чтобы при наличии ограничений, наложенных на значения производных от регулируемой величины, процесс регулирования завершался за минимальное время.

Пусть в рассматриваемой динамической системе i-я производная от регулируемой величины не должна или не может выходить за заданные пределы

$$\overset{(i)}{x}_1 < \overset{(i)}{x} < \overset{(i)}{x}_2. \tag{167}$$

Изменение регулируемой величины x за время от начала рассматриваемого процесса до момента времени t может быть выражено через закон изменения i-й производной $\overset{(i)}{x}(t)$ в виде

$$x = x_н + \int_0^t \left\{ \dot{x}_н + \int_0^t \left[\ddot{x}_н + \ldots + \int_0^t \overset{(i)}{x}(t)\, dt \ldots \right] dt \right\} dt. \tag{168}$$

Здесь индексом $н$ обозначены начальные значения соответствующих величин.

Приращение изменения j-й производной от управляемой величины за время Δt, в течение которого i-ю производную можно считать неизменной и равной $\overset{\overline{(i)}}{x}$, можно найти из уравнения (168):

$$\overset{(j)}{\Delta x} = \frac{\overset{(j+1)}{x_н}\,\Delta t}{1!} + \frac{\overset{(j+2)}{x_н}\,\Delta t^2}{2!} + \dots + \frac{\overset{\overline{(i)}}{x}\,\Delta t^{(i-j)}}{(i-j)!}. \qquad (169)$$

Можно показать, что x изменится на определенную величину за наиболее короткое время в случае, если в течение этого времени будет поддерживаться предельно допустимое значение ограниченной производной $\overset{(i)}{x_к}$.

При таком процессе величина x достигает заданного значения за минимальное время, но значения ее производных в общем случае отличаются от заданных конечных их значений.

Для того чтобы не только регулируемая величина, но и все ее производные до $i-1$-й в момент окончания процесса достигли заданных значений, необходимо чтобы i-я производная не оставалась постоянной, а изменялась определенным образом.

Если процесс разбить на несколько интервалов и в течение каждого из этих интервалов поддерживать значение i-й производной поочередно на каждом из двух ее предельных значений, то за каждый такой интервал регулируемая величина и ее производные изменятся на величину, определяемую выражением (169). Суммарное приращение x и ее производных определится при этом суммой их приращений за каждый интервал.

Поскольку переход системы из начального состояния в заданное должен совершаться так, чтобы удовлетворялось i условий, характеризующих разницу между начальными и конечными значениями управляемой величины и $i-1$ ее производных, то удовлетворение этих условий может быть достигнуто выбором длительности i интервалов процесса. Следовательно, число интервалов должно быть равно порядку ограниченной производной.

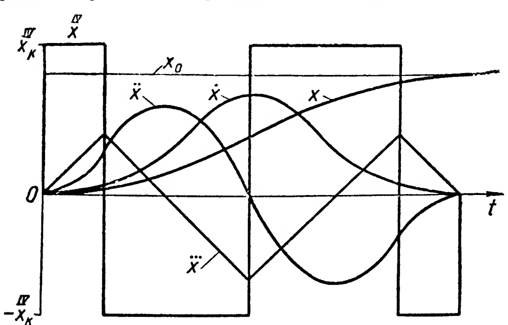
Длительность каждого из интервалов процесса может быть определена из системы i уравнений, вытекающих из выражения (169) вида

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{k=i}\left(\frac{\dot{x}_{нк}t_{ик}}{1!} + \frac{\ddot{x}_{нк}t_{ик}^2}{2!} + \dots + \frac{\overset{\overline{(i)}}{x}\,t_{ик}^{i}}{i!}\right) + x_н = x_р;\\
&\sum_{k=1}^{k=i}\left(\frac{\ddot{x}_{нк}t_{ик}}{1!} + \frac{\dddot{x}_{нк}t_{ик}^2}{2!} + \dots + \frac{\overset{\overline{(i)}}{x}\,t_{ик}^{i-1}}{(i-1)!}\right) + \dot{x}_н = \dot{x}_р;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\sum_{k=1}^{k=i}\overset{\overline{(i)}}{x}\,t_{ик} + \overset{(i-1)}{x_н} = \overset{(i-1)}{x_р}.
\end{aligned}\right\} \qquad (170)$$

Здесь известными величинами являются значения управляемой величины и ее производных в начале и в конце процесса, а неизвестными — длительности интервалов $t_{ик}$. Число уравнений в этом случае будет равно числу неизвестных, что свидетельствует о принципиальной возможности определить однозначно искомые интервалы.

Если таким образом определен оптимальный закон изменения i-й производной, то законы изменения младших производных и самой управляемой величины легко находятся для каждого интервала процесса на основании выражения (169).

В частности, если начальные значения производных управляемой величины равны нулю, то, принимая за начало отсчета x ее начальное значение, из выражения (169) найдем, что управляемая величина при неизменном значении ограниченной производной изменяется по закону



Фиг. 102. Оптимальный процесс в системе при ограниченности (по модулю) четвертой производной от управляемой величины.

$$x = \frac{\overset{\overline{(i)}}{x}\, t^i}{i!} = A_0 t^i, \qquad (171)$$

а ее i-я производная — по закону

$$\overset{(j)}{x} = \frac{\overset{\overline{(i)}}{x}\, t^{(i-j)}}{(i-j)!} = A_j t^{(i-j)}. \qquad (172)$$

При этом, в случае, когда i-я производная ограничена по модулю, $\left|\overset{(i)}{x}\right| < \left|\overset{(i)}{x}_к\right|$, то при $i = 2$ оптимальный процесс состоит из двух одинаковых интервалов, длительность каждого из которых равна

$$t_{u1} = t_{u2} = \sqrt{\frac{x_0}{\ddot{x}_к}}.$$

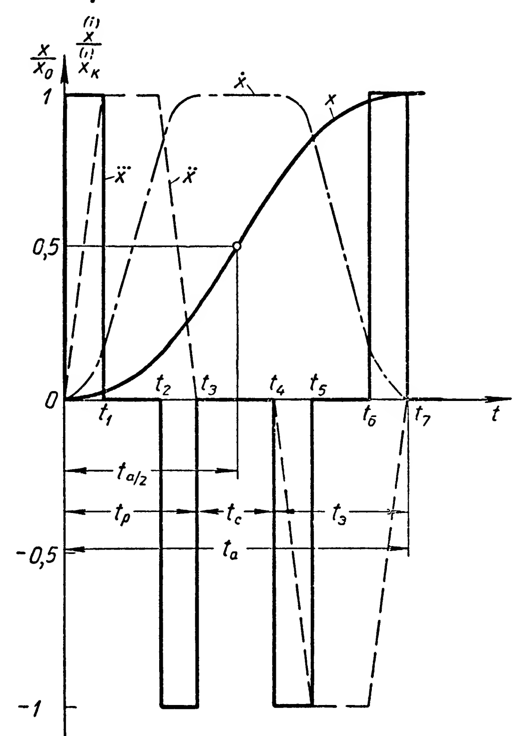
При ограниченности по модулю третьей производной от управляемой величины оптимальный процесс будет состоять из трех интервалов t_{u1}, t_{u2} и t_{u3}, длительности которых равны соответственно

$$t_{u1} = t_{u3} = \sqrt{\frac{6x_0}{16x_к}};$$

$$t_{u2} = 2\sqrt{\frac{6x}{16x_к}}.$$

Аналогично строятся оптимальные процессы и в тех случаях, когда ограничены значения более высокой или нескольких производных от регулируемой величины. При этом также следует исходить из условия, что в каждый момент времени одна из ограниченных производных поддерживается на предельном уровне.

Оптимальный процесс при ограничении значений четвертой производной показан на фиг. 102.



Фиг. 103. Оптимальный процесс перехода в системе при ограничении первой, второй и третьей производных от управляемой величины.

При достаточно больших начальных отклонениях, при которых становятся существенными ограничения нескольких

(до i-й) производных, число интервалов, на которые разбивается процесс, определяется по формуле

$$n = 2^i - 1. \tag{173}$$

Пример процесса оптимальной формы для системы, в которой ограничены по абсолютному значению первые три производные от управляемой величины, показан на фиг. 103.

б) Определение формы процесса, обеспечивающего наибольшее быстродействие и совместимого с ограничением значений координат системы автоматического регулирования

Значения координат, определяющих состояние системы автоматического регулирования, всегда ограничены. Эти ограничения определяются механической, электрической или термической прочностью элементов системы, наличием упоров, условиями безопасности работы, насыщением материалов и т. п. По этим причинам для заданной системы оказывается ограниченным и время протекания процесса регулирования. Например, время изменения температуры среды от начальной до заданной ограничено снизу из-за ограниченности температуры теплоносителя.

В связи с этим представляет интерес определение предельного быстродействия систем с ограниченными значениями координат и методов построения систем регулирования, быстродействие которых близко к предельному.

Выясним, каковы должны быть формы процессов регулирования, чтобы при наличии ограничений, наложенных на значение какой-либо координаты системы, процесс регулирования завершался за минимальное время.

Пусть какая-либо из координат заданной части системы[1] автоматического регулирования не может или не должна выходить за определенные пределы

$$x_{i1} < x_i < x_{i2}. \tag{174}$$

Для того чтобы регулируемая величина как можно быстрее приближалась к заданному значению, координата x_i должна как можно больше отличаться от ее равновесного значения, а следовательно, должна поддерживаться на предельном уровне.

При этом значения регулируемой величины и каждой ее производной будут определяться начальным состоянием системы и временем, протекшим от начала процесса до рассматриваемого момента t:

$$\begin{aligned} x &= f_0\left(x_н;\ \dot{x}_н;\ \ddot{x}_н;\ \ldots;\ t\right); \\ \dot{x} &= f_1\left(x_н;\ \dot{x}_н;\ \ddot{x}_н;\ \ldots;\ t\right); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overset{(j)}{x} &= f_{(j)}\left(x_н;\ \dot{x}_н;\ \ddot{x}_н;\ \ldots;\ t\right). \end{aligned} \tag{175}$$

[1] Состоящий из элементов, движение которых описывается уравнениями 1-го порядка.

Если ограниченная координата все время будет поддерживаться на неизменном значении, то в момент, когда регулируемая величина достигнет заданного значения, ее производные в общем случае будут отличаться от заданных, и требуемый режим в системе не будет достигнут. Для того чтобы в момент окончания процесса в системе наступил режим, соответствующий заданному, необходимо, очевидно, определенным образом изменять значение ограниченной координаты.

Разобьем процесс на интервалы, t_{u1}, t_{u2}, подобно тому как мы это делали в случае ограничений, наложенных на производные, и будем в течение каждого интервала поддерживать ограниченную координату на неизменном значении, но изменять ее величину при переходе от каждого предыдущего интервала к последующему, т. е. поддерживать ее поочередно на каждом из ее предельных значений.

Обозначим через n порядок уравнения, связывающего регулируемую величину и ее производные со значением ограниченной координаты. Начальное и заданное состояния системы будут, очевидно, определяться значением регулируемой величины и $n-1$ ее производных[1]. Тогда система уравнений, получаемых из формулы (175) путем приравнивания величины x и ее производных их заданным значениям x_p, $\dot{x}_p \ldots$, будет содержать n условий, выполнение которых необходимо для перехода системы регулирования из начального состояния в заданное. Эти условия имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} f_0\,(x_н,\ \dot{x}_н,\ \ddot{x}_н, \ldots,\ t_{u1},\ t_{u2}, \ldots) &= x_p; \\ f_1\,(x_н,\ \dot{x}_н,\ \ddot{x}_н, \ldots,\ t_{u1},\ t_{u2}, \ldots) &= \dot{x}_p; \\ f_{n-1}\,(x_н,\ \dot{x}_н,\ \ddot{x}_н, \ldots\ t_{u1},\ t_{u2}, \ldots) &= x_p. \end{aligned}\right\} \qquad (176)$$

Для удовлетворения n условий требуется, очевидно, располагать свободой выбора по крайней мере n аргументов, которыми могут являться длительности интервалов t_{u1}, t_{u2}, $t_{u3} \ldots$

Следовательно, минимальное число интервалов процесса, достаточное для удовлетворения условий перехода системы из начального состояния в заданное, равно n, т. е. порядку уравнения, описывающего движение части системы, заключенной между ограниченной координатой и регулируемой величиной, считая по направлению прохождения сигналов через систему.

Длительности интервалов процесса определяются значениями корней системы уравнений (176), в которых значения регулируемой величины и ее производных в конце процесса полагаются равными заданным. Таким образом, система перейдет в заданное состояние за минимальное время при выполнении следующих необходимых и достаточных условий, определяющих форму кратчайшего процесса регулирования:

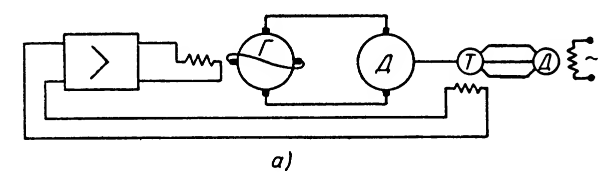
1) процесс должен состоять из интервалов, число которых равно порядку уравнения, описывающего движение части системы, заключенной между ограниченной координатой и регулируемой величиной, считая по направлению прохождения сигналов через систему;

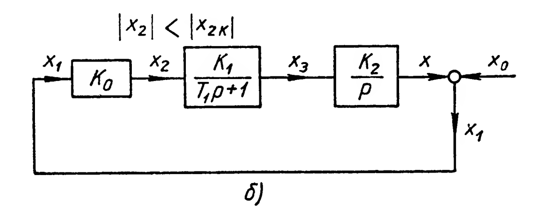
---

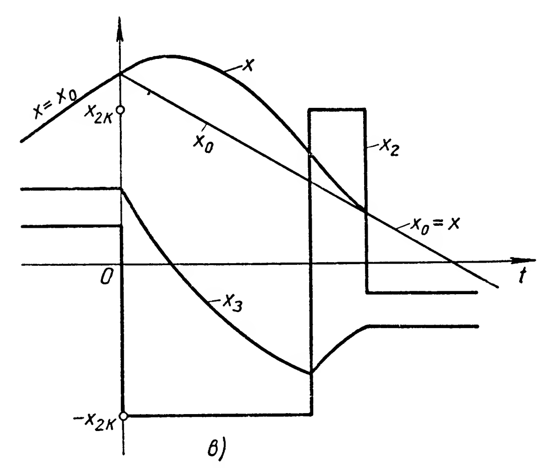
[1] Поскольку значения координат, предшествующих x_i, не ограничены, можно считать, что изменение x_i может осуществляться как угодно близко к скачкообразному.

2) ограниченная координата на каждом из этих интервалов должна поддерживаться поочередно на каждом из ее предельных значений;

3) длительности интервалов процесса должны соответствовать значениям корней системы уравнений, связывающих изменение регулируемой величины и $n - 1$ ее производных с длительностями интервалов процесса.







Фиг. 104. Принципиальная схема (*а*), структурная схема (*б*) и оптимальный процесс регулирования (*в*) в следящей системе.

На фиг. 104, *а* показана принципиальная схема, на фиг. 104, *б* — структурная схема, а на фиг. 104, *в* — оптимальная форма процесса регулирования для следящей системы в случае линейно изменяющегося во времени заданного значения регулируемой величины при ограниченном напряжении на обмотке возбуждения электромашинного усилителя *Г*.

Если, в частности, ограниченная координата отделена от регулируемой величны i интегрирующими звеньями, то ограничение координаты x_i эквивалентно ограничению i-й производной и формы оптимальных процессов могут определяться методом, изложенным выше в п. а.

в) Изображение совокупности оптимальных процессов на фазовой плоскости

Наглядное представление о всей совокупности оптимальных процессов при различных начальных состояниях системы может дать их изображение на фазовой плоскости или в фазовом пространстве.

Поскольку ограничения, наложенные на значения производных или координат системы, однозначно определяют форму оптимального процесса перехода системы из одного (начального) состояния в другое (заданное) состояние, то изложенными выше методами всегда может быть определен оптимальный закон изменения во времени регулируемой величины, а следовательно, и ее производной:

$$x = f_{onm}(t);$$
$$\dot{x} = y = f'_{onm}(t).$$

Исключая из этих зависимостей время, находим зависимость

$$y = \varphi_{onm}(x),$$

представляющую уравнение траектории оптимального процесса на плоскости x, y. Иногда оказывается более удобным представлять движение системы при помощи других величин: первой и второй производных регулируемой величины, значений двух координат системы и т. п. В таких случаях по осям фазовой плоскости откладываются значения этих величин и время исключается из законов оптимального изменения этих величин.

В тех случаях, когда состояние системы определяется более чем двумя переменными, фазовые траектории являются кривыми в пространстве с числом измерений, равным числу величин, определяющих состояние системы.

Рассмотрим в качестве примера совокупность оптимальных процессов для системы, в которой значение второй производной ограничено пределами

$$\ddot{x}_{k1} < \ddot{x} < \ddot{x}_{k2},$$

а значение первой производной — пределами

$$\dot{x}_{k1} < \dot{x} < \dot{x}_{k2}.$$

Разница в абсолютных значениях пределов изменения ограниченных величин может возникнуть, например, из-за влияния нагрузки.

Согласно изложенному в п. а ограничение второй производной приводит к тому, что участки фазовых траекторий, соответствующих каждому этапу движения системы, имеют вид парабол второй степени. Если нагрузка системы создается сухим трением, то предельное значение ускорения будет зависеть от того, увеличивается или уменьшается по абсолютной величине скорость изменения выходной величины системы. Полагая в уравнениях (171) и (172) $i = 2$; $j = 1$; $y = \dot{x}$; $x_{y=0} = \overset{\circ}{x}$ и исключая из этих уравнений время, найдем, что увеличению абсолют-

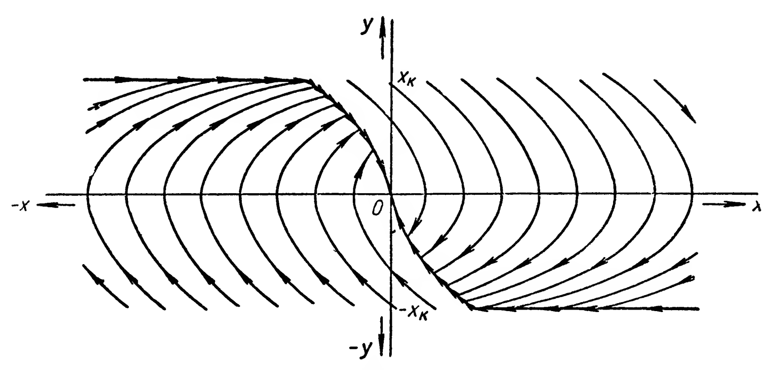
ного значения скорости будут соответствовать участки фазовых траекторий вида

$$y = -\operatorname{sgn} \overset{\circ}{x} \sqrt{2\ddot{x}_{k2} (\overset{\circ}{x} - x) \operatorname{sgn} \overset{\circ}{x}}, \tag{177}$$

а уменьшение абсолютного значения скорости

$$y = + \operatorname{sgn} \overset{\circ}{x} \sqrt{2\ddot{x}_{k1} \operatorname{sgn} \overset{\circ}{x} (\overset{\circ}{x} - x) \operatorname{sgn} \overset{\circ}{x}}. \tag{178}$$

Здесь множители $\operatorname{sgn} \overset{\circ}{x}$ введены для учета изменения знака сил трения при изменении знака скорости $\dot{x} = y$.



Фиг. 105. Совокупность оптимальных процессов при ограничении первой и второй производных от регулируемой величины.

Зависимости (177) и (178) представляют семейство парабол, отличающихся значением $\overset{\circ}{x}$, зависящим от начального состояния системы. По этим траекториям движется изображающая точка в течение первого этапа оптимального процесса.

Форма второго этапа оптимального процесса — приближения к заданному состоянию системы — не зависит от начальных условий. Уравнение фазовой траектории этого этапа движения системы получается аналогично предыдущему и имеет в данном случае вид

$$y = -\operatorname{sgn} x \sqrt{2\ddot{x}_{k2} |x|}. \tag{179}$$

Ограничение скорости движения системы выделяет на плоскости x, y полосу — $\dot{x}_{k1} < y < \dot{x}_{k2}$.

Диаграмма совокупности оптимальных процессов для системы, ограниченной по скорости и по ускорению, показана на фиг. 105.

2. ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОВ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ПРИ ПОМОЩИ НЕЛИНЕЙНЫХ СВЯЗЕЙ

Из изложенного выше следует, что, во-первых, каждому начальному и конечному состоянию системы соответствует определенная форма процесса регулирования, которая при наложенных на систему ограничениях обеспечивает минимальную длительность процесса регулирования,

и, во-вторых, форма оптимального процесса в общем случае может существенно отличаться от формы процессов, возможных в линейных динамических системах.

Эти обстоятельства указывают на целесообразность применения при синтезе быстродействующих систем нелинейных элементов с определенными характеристиками. Здесь излагается методика определения формы характеристик нелинейных элементов, обусловливающих протекание процессов регулирования по законам, близким к оптимальным.

Для того чтобы процессы регулирования в заданной системе протекали по законам, близким к оптимальным, построим систему таким образом, чтобы воздействие на ее вход осуществлялось только тогда, когда процесс отклоняется от его оптимальной формы, и чтобы это воздействие стремилось приблизить процесс к оптимальному.

Осуществление этой идеи, очевидно, связано с необходимостью формирования сигнала, который характеризовал бы отклонение процесса от оптимального при всех возможных начальных и заданных состояниях системы. Воспользуемся для этой цели следующим приемом.

Пусть состояние системы однозначно и определяется значением каких-либо ее координат, например координат x_1 и x_2. Во всех случаях, когда при оптимальном протекании процесса регулирования функции $x_1 = F_1(t)$ и $x_2 = F_2(t)$, являются монотонными и в ряде других случаев из них может быть исключено время и таким образом найдена однозначная связь между x_1 и x_2, имеющая место при оптимальном протекании процесса регулирования:

$$x_1 = \varphi(x_2) \text{ или } x_2 = \varphi^{-1}(x_1). \tag{180}$$

Поскольку установившиеся значения этих координат определяются заданным состоянием системы, зависимость (180), связывающая их значения, приобретает обратную силу в том смысле, что при соблюдении ее процесс регулирования протекает оптимально.

Будем теперь производить измерение текущих значений координат x_1 и x_2 и подавать их на вход функциональных преобразователей, подобранных так, чтобы при выполнении зависимости (180) выходные сигналы этих преобразователей x_{c1} и x_{c2} были равны друг другу. Очевидно, что при оптимальной форме процесса регулирования разность этих сигналов будет равна нулю, а при отклонении процессов от оптимальной формы разность выходных сигналов преобразователей по знаку и величине будет характеризовать величину и знак отклонения процесса от оптимального.

Найдем теперь форму характеристик функциональных преобразователей, при которых их выходные сигналы будут равны друг другу, если процесс регулирования сохраняет оптимальную форму.

Пусть эти преобразователи реализуют соотношения

$$x_{c1} = \varphi_1(x_1), \text{ а } x_{c2} = \varphi_2(x_2). \tag{181}$$

Условие равенства выходных сигналов преобразователей требует, очевидно, выполнения условия

$$\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2). \tag{182}$$

Это условие будет выполняться в любой момент процесса при оптимальном его протекании в том случае, если аргумент одной из функций в выражении (182) соответствует его значению в выражении (180), определяющем оптимальное протекание процесса регулирования. Подставляя значения x_1 и x_2 из равенств (180) в равенство (182), находим

$$\varphi_2(x_2) = \varphi_1[\varphi(x_2)] \tag{183}$$

или

$$\varphi_1(x_1) = \varphi_2\left[\varphi^{-1}(x_1)\right]. \tag{184}$$

Поэтому, если задана характеристика одного из функциональных преобразователей (например, функция φ_1), то характеристика второго преобразователя может быть найдена из выражения (183). Если задана характеристика другого преобразователя (функция φ_2), то характеристика первого определяется из выражения (184) *.

Таким образом, разность выходных сигналов преобразователей, если их характеристики удовлетворяют условию (183) или (184) по знаку и величине, определяет отклонение процесса регулирования от его оптимальной формы. Очевидно, что если эта разность, усиленная в каком-либо усилителе, будет воздействовать на вход системы в направлении уменьшения отклонения процесса от оптимального, то при достаточно высоком значении коэфициента усиления системы процессы в ней могут быть достаточно близкими к оптимальным. Задача об уменьшении неизбежных отклонений процесса от оптимального решается общими методами теории автоматического регулирования путем использования обычных средств стабилизации замкнутых динамических систем.

В качестве сигналов, используемых для формирования управляющего воздействия, следует выбирать такие, которые однозначно определяют состояние системы и при оптимальном протекании процесса регулирования изменяются во времени монотонно, т. е. либо только нарастают, либо только убывают. Одним из этих сигналов должен быть сигнал, зависящий от значения регулируемой величины (или ее отклонения от заданного значения). Другим сигналом может быть выбран сигнал, зависящий от производной регулируемой величины, или одна из координат системы. Обычно бывает трудно подобрать второй сигнал, удовлетворяющий условию монотонности его изменения в течение всего процесса регулирования, однако в ряде случаев можно ограничиться выполнением этого условия в течение части процесса — периода приближения регулируемой величины к заданному значению. При этом начальная часть процесса получается близкой к оптимальной благодаря естественным или искусственно вводимым в систему ограничителям, препятствующим превышению ограничиваемыми величинами предельных значений.

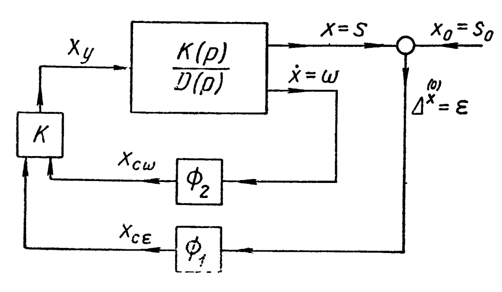
На фиг. 106 показан пример структуры системы автоматического регулирования, в которой управляющее воздействие формируется сигна-

* Свободу в выборе характеристики одного из преобразователей можно использовать для обеспечения требуемой статической точности системы, облегчения подбора параметров, обеспечивающих удовлетворение условий устойчивости системы, и т. п.

лами отклонения регулируемой величины от заданного значения и скорости изменения регулируемой величины.

Пусть, например, быстродействие этой системы ограничено предельными значениями первой и второй производных регулируемой величины. Тогда совокупность оптимальных процессов регулирования при всех возможных начальных и заданных состояниях системы определяется диаграммой, показанной на фиг. 105.

Найдем характеристики связей по отклонению и по скорости, обеспечивающие переход системы на режим замедления и приближение системы к заданному состоянию в соответствии с диаграммой совокупности оптимальных процессов,



Фиг. 106. Структурная схема системы, управляемой по отклонению и первой производной регулируемой величины.

Согласно формуле (179) зависимость между координатами ε и ω при оптимальном процессе замедления имеет вид

$$\omega = \varphi^{-1}(\varepsilon) = -\operatorname{sgn}\varepsilon \sqrt{2\ddot{\varepsilon}_{k2}|\varepsilon|}. \quad (185)$$

Если задаться линейной характеристикой связи по отклонению

$$x_{c\varepsilon} = \varphi_1(\varepsilon) = k_1\varepsilon, \quad (186)$$

то характеристика связи по скорости согласно уравнению (183) должна соответствовать выражению

$$x_{c\omega} = \varphi_2(\omega) = \varphi_1[\varphi(\omega)] = -\frac{k_1}{2\ddot{\varepsilon}_{k2}}\omega^2 \operatorname{sgn}\omega = -k_2\omega^2 \operatorname{sgn}\omega. \quad (187)$$

Если же задаться линейной характеристикой связи по скорости

$$x_{c\omega} = k_2\omega, \quad (188)$$

то характеристика связи по отклонению согласно формуле (184) должна будет удовлетворять зависимости

$$x_{c\varepsilon} = \varphi_1(\varepsilon) = \varphi_2[\varphi^{-1}(\varepsilon)] = -k_2 \operatorname{sgn}\varepsilon\sqrt{2\ddot{\varepsilon}_{k2}|\varepsilon|} = -k_1 \operatorname{sgn}\varepsilon\sqrt{|\varepsilon|}. \quad (189)$$

Вообще если ограничена i-я производная от регулируемой величины, а управляющее воздействие создается сигналом отклонения и его первой производной, то согласно (180) функции φ и φ^{-1} определяются из выражений (171) и (172):

$$x = \varphi(\dot{x}) = A_0 A_1^{-\frac{i}{i-1}} \dot{x}^{\frac{i}{i-1}} \quad (190)$$

или

$$\dot{x} = \varphi^{-1}(x) = A_0^{-\frac{i-1}{i}} A_1 x^{\frac{i-1}{i}}. \quad (191)$$

Тогда, если задана характеристика одной связи $\varphi_1(x)$, то характеристика другой $\varphi_2(\dot{x})$ может быть найдена согласно условиям (183) и (190) из выражения

$$x_{c\omega}=\varphi_2(\dot{x})=\varphi_1[\varphi(\dot{x})]=\varphi_1\left(A_0 A_1^{-\frac{l}{l-1}}\dot{x}^{\frac{l}{l-1}}\right). \qquad (192)$$

3. ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ, ИМЕЮЩИМИ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Из изложенного выше следует, что в целях осуществления процессов регулирования, близких к оптимальным, при ограниченности производных от регулируемой величины характеристики элементов, осуществляющих воздействие на систему в зависимости от отклонения и его производной, должны быть надлежащим образом согласованы.

Если в системе ограничено значение второй или первой и второй производных от регулируемой величины, то, как следует из равенства (192), процессы в системе будут близки к оптимальной форме, если характеристики этих элементов имеют форму парабол, степени которых отличаются в 2 раза. Рассмотрим наиболее важные для практики случаи, когда управляющий сигнал состоит из двух составляющих: 1) одна из составляющих пропорциональна первой степени отклонения, а другая — квадрату скорости изменения регулируемой величины и 2) одна из составляющих пропорциональна первой степени скорости, а другая — корню квадратному от отклонения. Выясним, насколько будут отличаться процессы в таких системах от оптимальных при конечных значениях коэфициентов усиления всех элементов системы.

а) Система, в которой одна из составляющих сигнала управления пропорциональна квадрату скорости изменения регулируемой величины

Пусть структурная схема системы имеет вид, показанный на фиг. 106, причем $k=k_3$; $K(p)=k_p$; $J(p)=J'p^2$, а характеристики преобразования сигналов отклонения и скорости соответствуют выражениям (186) и (187). Тогда уравнение движения системы будет иметь вид

$$\ddot{\varepsilon}+\frac{r}{2}(\dot{\varepsilon})^2\operatorname{sgn}\dot{\varepsilon}+\frac{ar}{2}\varepsilon=0 \qquad (193)$$

или с учетом сухого трения в системе $M_н \operatorname{sgn}\dot{\varepsilon}$

$$\ddot{\varepsilon}+\frac{r}{2}(\dot{\varepsilon})^2\operatorname{sgn}\dot{\varepsilon}+\frac{ar}{2}\varepsilon=\frac{M_н}{J'}\operatorname{sgn}\dot{\varepsilon}, \qquad (194)$$

где

$$a=\frac{k_p k_2}{k_1};\qquad r=\frac{k_2 k_3}{J'}.$$

Исследуем фазовый портрет этой системы.

Заменяя в уравнении (194) $\dot{\varepsilon}$ на ω и исключая из полученного уравнения время, найдем

$$\omega\frac{d\omega}{d\varepsilon}+\frac{r}{2}\omega^2\operatorname{sgn}\omega+\frac{ar}{2}\varepsilon=\frac{M_н}{J'}\operatorname{sgn}\omega. \qquad (195)$$

В пределах $\omega > 0$ (или $\omega < 0$) уравнение (195) приводится к уравнению Бернулли, в результате решения которого (см., например, [5]) находим следующие уравнения фазовых траекторий:

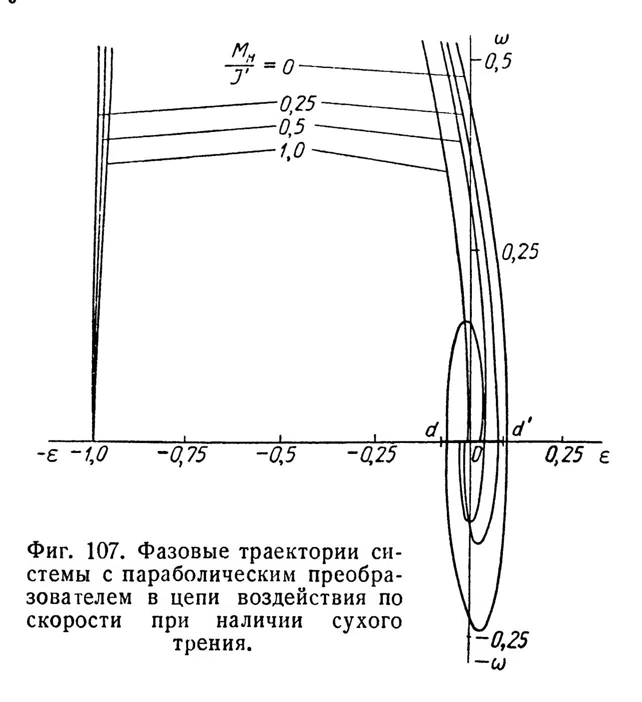
для $\omega > 0$

$$\omega = +\sqrt{\frac{a}{r} - a\varepsilon - \frac{2M_н}{rJ'} + \left(\omega_0^2 - \frac{a}{r} + a\varepsilon_0 + \frac{2M_н}{rJ'}\right)e^{r(\varepsilon_0 - \varepsilon)}}\,; \quad (196)$$

для $\omega < 0$

$$\omega = -\sqrt{\frac{a}{r} + a\varepsilon - \frac{2M_н}{rJ'} + \left(\omega_0^2 - \frac{a}{r} - a\varepsilon_0 + \frac{2M_н}{rJ'}\right)e^{r(\varepsilon - \varepsilon_0)}}\,, \quad (197)$$

где ε_0 и ω_0 — начальные значения ε и ω.



Фиг. 107. Фазовые траектории системы с параболическим преобразователем в цепи воздействия по скорости при наличии сухого трения.

На фиг. 107 и 108 приведены фазовые траектории, вычисленные при помощи выражений (196) и (197) для случая $a = 2$, $r = 10$, для различных значений момента сухого трения (фиг. 107) и без трения (фиг. 108).

Ширина отрезка равновесия, вызываемого сухим трением, согласно уравнению (194) определяется неравенством

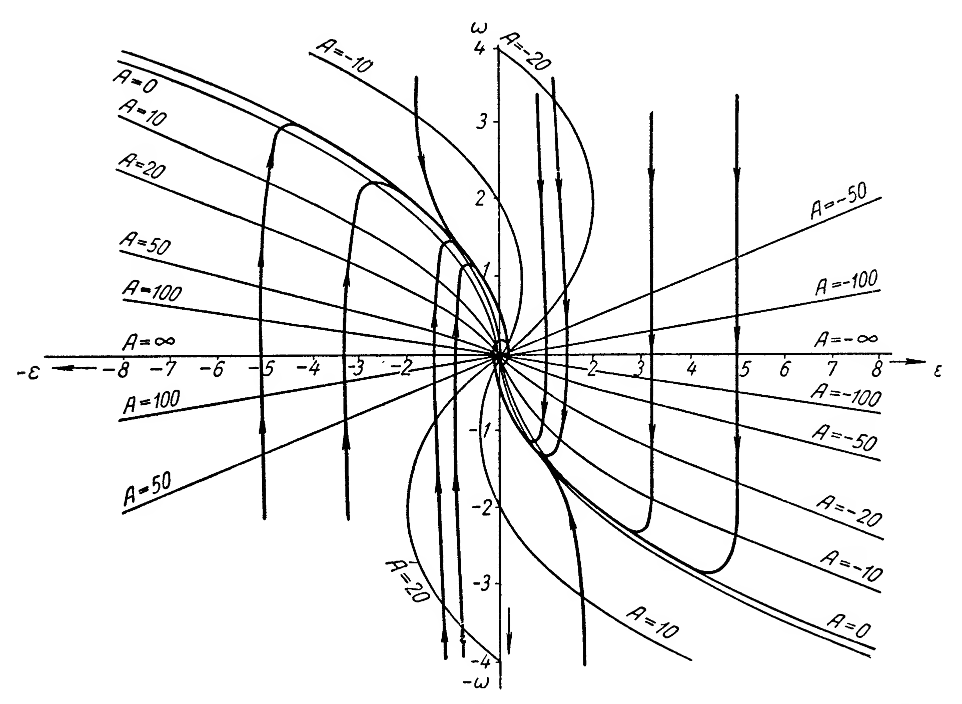
$$|\varepsilon| < \left|\frac{2M_н}{arJ'}\right|. \quad (198)$$

На фиг. 107 через dd' обозначен отрезок равновесия при $\frac{M_н}{J'} = 1$, $a = 2$, $r = 10$.

Из фиг. 107 и 108 видно, что все изображающие точки с ростом t приближаются к изоклине с нулевым наклоном, а затем устремляются к точке равновесия ($\varepsilon = \omega = 0$) или к отрезку равновесия. Траектория

движения изображающей точки при этом будет тем ближе к изоклине с нулевым наклоном, чем больше r.

Из сопоставления уравнения (195) со (185) видно, что изоклина с нулевым наклоном совпадает с фазовой траекторией оптимального процесса замедления системы. Расчеты показывают, что уже при $r = 10$



Фиг. 108. Фазовые траектории и изоклины системы с параболическим преобразователем сигнала воздействия по скорости для $a = 2$, $r = 10$.

процесс замедления мало отличается от оптимального. В пределе при $r = \infty$ процесс в точности соответствовал бы оптимальному, если бы при этом движение системы не перестало удовлетворительно описываться уравнением (193) или (194) из-за влияния малых параметров.

б) Система, в которой одна из составляющих сигнала управления пропорциональна квадратному корню из отклонения

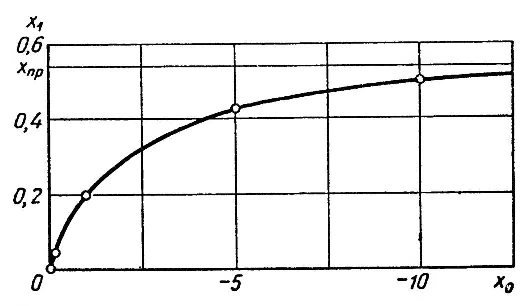
Зададимся линейным воздействием по скорости $x_{c\omega} = k_2\omega$, тогда характеристика воздействия по отклонению должна иметь вид, соответствующий выражению (189).

Уравнение движения системы в этом случае примет вид

$$\omega \frac{d\omega}{d\varepsilon} + \frac{k_2 k_3}{J'} \omega + \frac{k_1 k_3 k_p}{J'} \sqrt{|\varepsilon|} \operatorname{sgn} \varepsilon = 0, \qquad (199)$$

где $\omega = \dot{\varepsilon}$.

Фиг. 109а. Фазовые траектории и изоклины системы с параболическим воздействием по отклонению.



Фиг. 109б. Зависимость заброса от начального отклонения системы.

Заменим переменные

$$\varepsilon = \left(J' \frac{k_1 k_p}{k_2^2 k_3}\right)^2 x;$$

$$\omega = J' \frac{k_1^2 k_p^2}{k_2^3 k_3} y, \tag{200}$$

тогда уравнение (199) сводится к уравнению

$$y \frac{dy}{dx} + y + \operatorname{sgn} x \sqrt{|x|} = 0, \tag{201}$$

не содержащему параметров системы.

На фиг. 109 приведено семейство фазовых траекторий, построенных путем численного интегрирования уравнения (201) и полученная при этом зависимость заброса (перерегулирования) от величины начального отклонения. Поскольку уравнение (201) не содержит параметров системы, полученный фазовый портрет характеризует динамические свойства любой системы с параболическим преобразователем сигнала отклонения. Переход от этого общего фазового портрета к фазовому портрету каждой конкретной системы достигается путем пересчета масштабов координатных осей плоскости x, y посредством соотношений (200) на основании известных параметров системы, входящих в эти соотношения.

Из сопоставления фиг. 108 и 109 видно, что фазовые портреты обеих рассмотренных систем в значительной степени сходны, а следовательно, сходны и динамические свойства этих систем.

в) Оценка максимальных значений отклонений

Максимальные значения отклонений регулируемой величины от заданного значения, имеющие место в процессе регулирования, как всегда, определяются условием $\omega(\varepsilon_{max}) = 0$. Для систем с параболическим преобразователем сигнала скорости, как видно из выражений (199) и (197), уравнения для определения ε_{max} получаются трансцендентными и поэтому не могут быть решены аналитически.

На фиг. 110 приведен график функции

$$\rho(r\varepsilon) = \ln(1 + r\varepsilon) - r\varepsilon, \tag{202}$$

при помощи которого для системы с любыми значениями параметров может быть определено значение каждой последующей амплитуды отклонения по известной предыдущей амплитуде. Таким образом, для каждого начального значения отклонения могут быть определены все амплитуды отклонений, в том числе и наиболее важная — первая амплитуда, характеризующая максимальное перерегулирование.

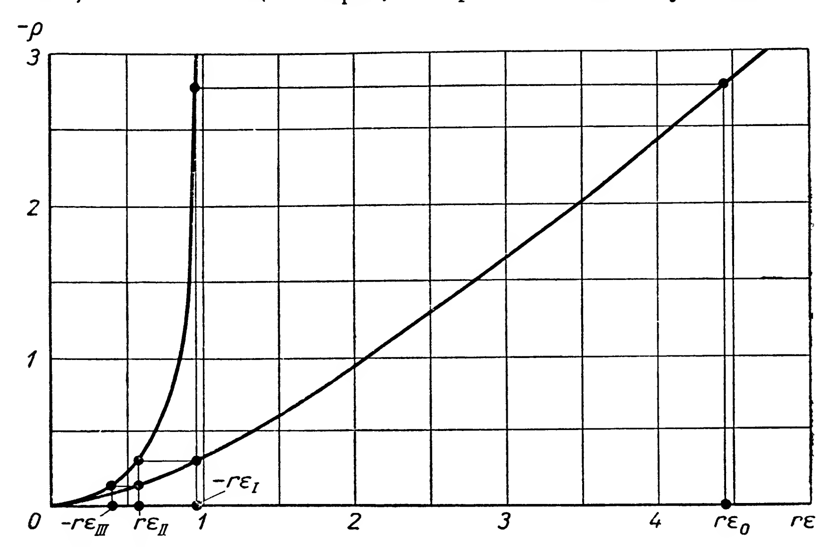
Кроме того, во всех случаях, когда $\omega_0 = 0$, как видно из фиг. 110,

$$|r\varepsilon_{i+1}| < 1,$$

откуда

$$|\varepsilon_{i+1}| < \frac{1}{r}. \tag{203}$$

Неравенство (203) свидетельствует о том, что в рассматриваемых системах перерегулирование не превышает значения $\frac{1}{r}$ при любых начальных отклонениях. Из этого неравенства легко определить параметры системы, обеспечивающие заброс, не превышающий допустимый.



Фиг. 110. График функции $\rho\,(r\varepsilon)$ для определения максимальных отклонений системы от равновесного положения.

Как видно из фиг. 109, в системах с параболическим преобразователем управляющего сигнала, зависящего от отклонения, предельное значение заброса не превышает значения $x_{np} = 0{,}54$.

Тогда согласно формуле (200)

$$\varepsilon_{np} = 0{,}54 \left(J' \frac{k_1 k_p}{k_2^2 k_3} \right)^2. \tag{204}$$

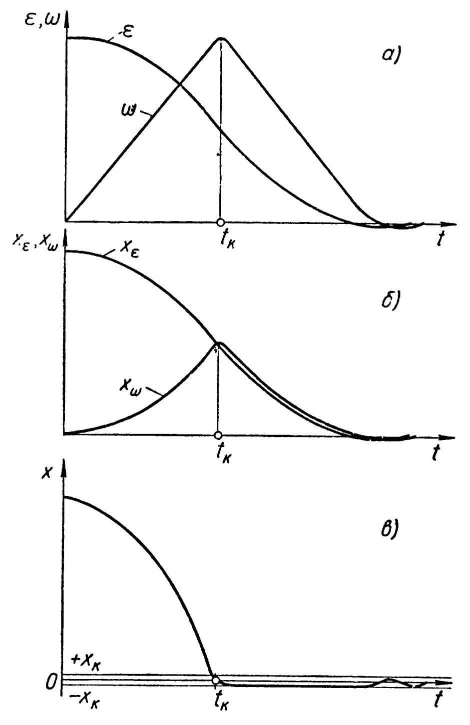
Выражение (204) может быть использовано для определения параметров системы, обеспечивающих значение перерегулирования, не превышающее допустимого.

г) Влияние ограниченности ускорения в период разгона и ограниченности скорости системы на ее динамические свойства

Выше мы рассматривали процессы в системах с нелинейными корректирующими элементами, абстрагируясь от ограничений ускорения в период разгона системы и от ограниченности ее скорости. Поэтому изложенное выше справедливо лишь для периодов замедления системы. Выясним теперь поведение системы с учетом указанных ограничений.

Если в результате насыщения усилителя, вследствие особенностей характеристик двигателя или в результате действия соответствующих ограничителей ускорение системы не может превысить значения $\ddot{\varepsilon}_k$, то,

начиная с некоторого значения сигнала x_k, подаваемого на вход усилителя, и для всех его значений, бóльших x_k, ускорение системы будет равно $\ddot{\varepsilon}_k$. Поэтому, пока $x > x_k$, разгон системы совершается с постоянным ускорением. При этом, как показано на фиг. 111, *а*, скорость системы будет нарастать по линейному закону, а отклонение убывать по параболе. Сигналы x_ε, x_ω и $x = x_\varepsilon - x_\omega$ будут при этом изменяться так, как это показано на фиг. 111, *б* и *в*.



Фиг. 111. Изменение координат системы в течение периодов разгона и замедления.

В момент t_k сигнал на входе усилителя снизится до значения x_k, и дальнейшее уменьшение этого сигнала будет вызывать уменьшение ускорения системы. Очевидно, что после момента t_k ограничение ускорения при разгоне не будет влиять на процесс, сигнал на входе усилителя не будет выходить за пределы x_k и движение системы будет происходить в соответствии с законами, установленными в пп. а — в.

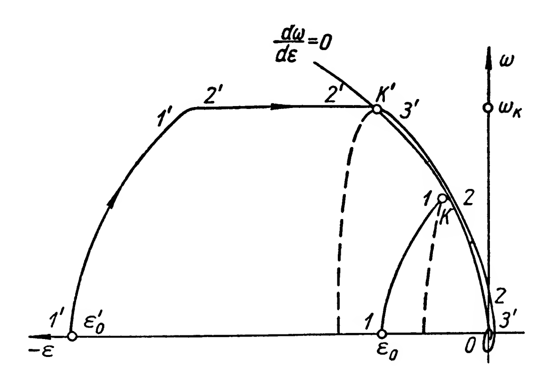
На фазовой плоскости ε, ω процессу разгона системы соответствует параболическая траектория, начинающаяся в точке ε_0 (кривая *1 — 1* на фиг. 112).

В каждой точке фазовой плоскости определенному значению ускорения системы соответствует определенный наклон фазовой траектории. Поскольку сигнал на входе усилителя, а значит и ускорение системы, не могут измениться скачком, наклон фазовых траекторий, соответствующих режимам разгона и замедления системы в точке K, изображающей состояние системы в момент t_k, должен быть одинаковым. Следовательно, переход системы на новый режим может совершиться лишь в точке касания фазовых траекторий, соответствующих режимам разгона (*1—1*) и замедления (*2—2*) системы. Таким образом, движение системы в период замедления будет изображаться той единственной траекторией из числа найденных выше (фиг. 108 или 109), которая имеет общую касательную в точке K с траекторией процесса разгона.

Рассмотрим теперь случай, когда начальное отклонение настолько велико, что скорость системы успевает достигнуть предельного значения до того, как начинается замедление.

Когда скорость системы приблизится к предельному значению ω_k, ее ускорение должно будет снизиться до нуля, после чего отклонение будет убывать с практически постоянной скоростью. Этому будет

соответствовать на фазовой плоскости (фиг. 112) переход с участка $1'—1'$ на горизонтальный участок $2'—2'$. Движение системы с предельной скоростью будет происходить до тех пор, пока сигнал на входе усилителя не изменит знака, что произойдет в момент t_k, когда фазовая траектория $2'—2'$ пересечет траекторию оптимального процесса замед-



Фиг. 112. Изображение на фазовой плоскости движения системы и периоды разгона, движения с установившейся скоростью и замедления.

ления (точка K'). Дальнейшее движение системы будет, очевидно, происходить по той траектории $3'—3'$ из числа изображенных на фиг. 108 или 109, которая пересекает траекторию оптимального процесса замедления в точке K', а следовательно, имеет общую (горизонтальную) касательную с траекторией $2'—2'$ в этой точке.

4. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СВЯЗЕЙ

а) Улучшение динамических свойств быстродействующих автоматических компенсаторов

Рассмотрим пример использования нелинейных связей для улучшения динамических свойств автоматического компенсатора, измерительная система которого приводится в движение двухфазным асинхронным короткозамкнутым двигателем.

На фиг. 113а показана принципиальная, а на фиг. 113б — структурная схема рассматриваемой системы.

Максимальный момент, развиваемый двигателем, равен $M_к = 120$ *гсм*.

Максимальная скорость вращения ротора двигателя при нагрузке, определяемой трением в системе, составляет $n_к = 1350$ об/мин.

При выбранных длине шкалы прибора и передаточном отношении от двигателя к каретке измерительной системы предельные момент и скорость вращения привода определяют следующие предельные значения скорости и ускорения измерительной системы: $\dot{x}_к = 630$ *мм/сек*, $\ddot{x}_к = 5250$ *мм/сек²*.

Совокупность оптимальных процессов компенсации, поскольку в данной системе ограничены значения первой и второй производных от регулируемой величины, будет иметь вид, изображенный на фиг. 105.

На основании положений, изложенных выше, выберем в качестве сигналов управления сигнал x_{co}, зависящий от отклонения измерительной системы от положения, при котором измерительная схема оказывается уравновешенной, и сигнал x_{c1}, зависящий от скорости перемещения измерительной системы.

Если не вводить функционального преобразователя в цепь сигнала отклонения, то он будет прямо пропорционален величине отклонения:

$$x_{c0} = \varphi_1(x) = k_1 x.$$

Коэфициент k_1 в данном случае определяется параметрами измерительной схемы. Он равен $k_1 = 0{,}01$ *мв/мм*.

Согласно уравнению (170) и (171) находим

$$x(t) = \frac{\ddot{x}_k}{2} t^2 = 2625 t^2 \text{ мм};$$

$$\dot{x}(t) = \ddot{x}_k t = 5250 t \text{ мм/сек},$$

откуда $A_0 = 2625$ *мм/сек*^{2}, $A_1 = 5250$ *мм/сек*^{2}.

Требуемая форма характеристики преобразования сигнала скорости определяется из формулы (183)

$$x_{c1} = \varphi_1\left(A_0 A^{-\frac{l}{l-1}} \dot{x}^{\frac{l}{l-1}}\right) = k_1 A_0 A^{-2} \dot{x}^2 = 1 \cdot 10^{-6} \dot{x}^2 \text{ мв}.$$

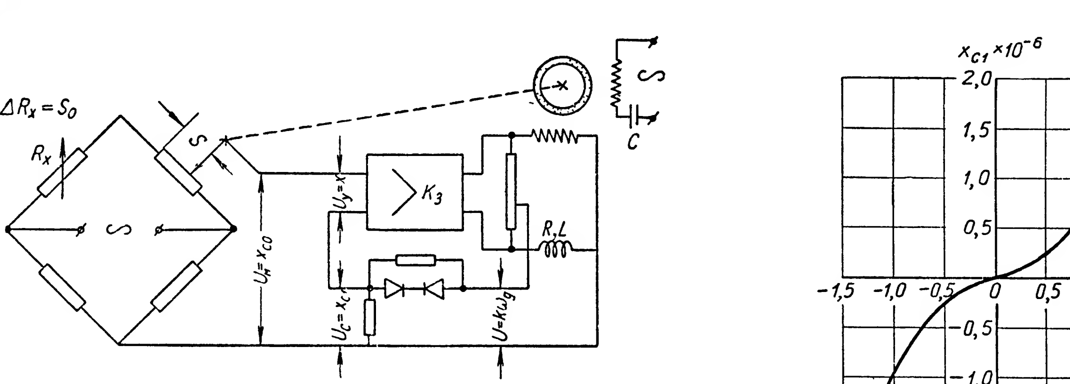
Для обеспечения однотипности процессов при компенсации отклонений разных знаков функции $x_{c1}(\dot{x})$ превращается из четной в нечетную введением сомножителя $\operatorname{sgn} \dot{x}$.

Таким образом, окончательная форма характеристики преобразования сигнала скорости принимает вид

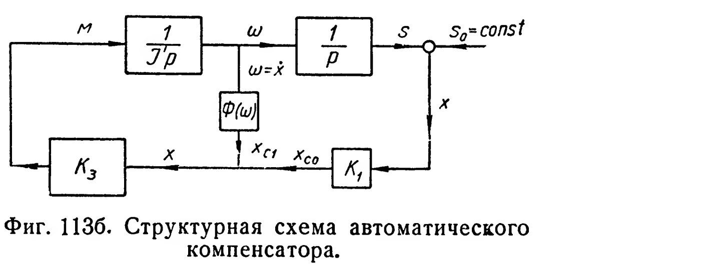
$$x_{c1} = 1 \cdot 10^{-6} \dot{x}^2 \operatorname{sgn} \dot{x} \text{ мв}.$$

Эта характеристика приведена на фиг. 114. Там же показана схема электрической цепи, с помощью которой осуществляется такое преобразование сигнала.

На фиг. 115, *а* и *б* показаны осциллограммы процессов компенсации, достигнутые в автоматическом компенсаторе с нелинейной скоростной связью. Для сопоставления на фиг. 115, *в* и *г* приведены осциллограммы процессов в том же компенсаторе при оптимальном линейном воздействии по скорости.

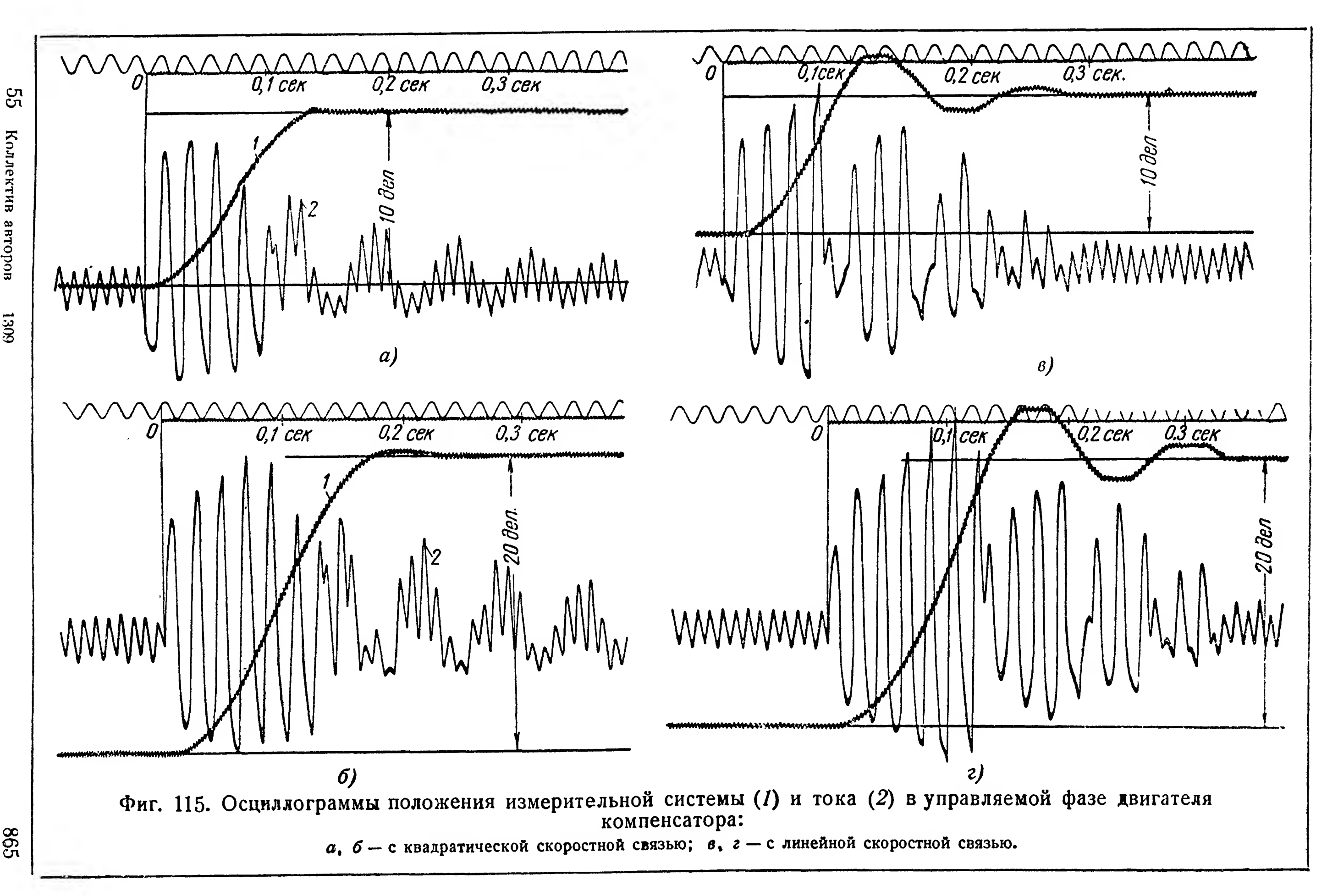


Фиг. 113а. Принципиальная схема автоматического компенсатора с нелинейной связью по скорости движения измерительной системы.



Фиг. 113б. Структурная схема автоматического компенсатора.

Фиг. 114. Характеристика (*а*) и схема (*б*) квадратического преобразователя сигнала скорости.



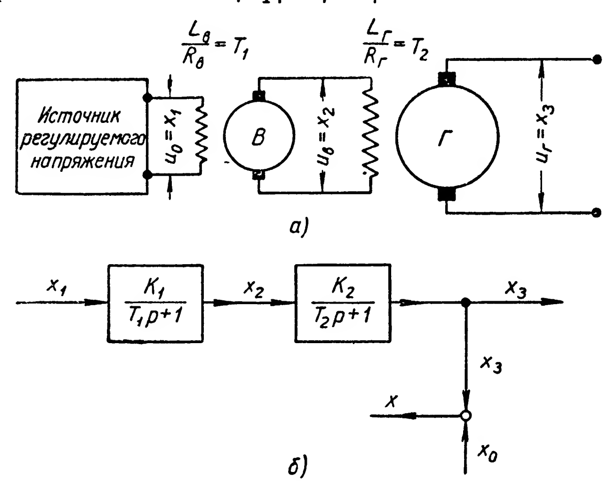
Фиг. 115. Осциллограммы положения измерительной системы (*1*) и тока (*2*) в управляемой фазе двигателя компенсатора:

а, б **— с квадратической скоростной связью;** ***в, г*** **— с линейной скоростной связью.**

б) Форсированное управление напряжением генератора

Рассмотрим задачу создания форсированной системы управления напряжением генератора, быстродействие которой ограничено предельным значением напряжения, подводимого к обмотке возбуждения возбудителя. Принципиальная и структурная схемы заданной части системы управления приведены на фиг. 116.

Пусть координата системы x_1, являющаяся напряжением на обмотке возбуждения возбудителя, не может или не должна по абсолютной величине превышать значения $|x_1| < |x_{1k}|$.



Фиг. 116. Принципиальная и структурная схема системы управления напряжением генератора.

Определим форму переходного процесса, при котором система из начального состояния, характеризующегося значениями координат

$$x_1 = x_{1н};$$
$$x_2 = x_{2н};$$
$$x_3 = x_{3н},$$

перейдет за минимальное время в новое равновесное состояние, характеризующееся значениями координат

$$x_1 = x_{1p};$$
$$x_2 = x_{2p};$$
$$x_3 = x_{3p} = x_0.$$

В соответствии с положениями, изложенными выше, оптимальный процесс управления должен состоять из двух интервалов, в течение каждого из которых ограниченная координата будет поддерживаться на одном из своих предельных значений (фиг. 117а). Для построения совокупности оптимальных процессов найдем уравнения траекторий движе-

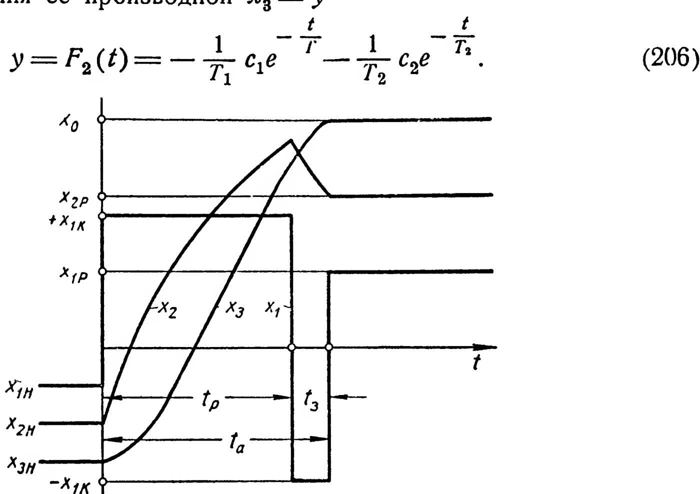
ния изображающей точки на фазовой плоскости x_3, $\dot{x}_3 = y$ при неизменных и равных предельным значениях ограниченной координаты $x_1 = \pm x_{1k}$.

Как известно, закон изменения во времени координаты x_3 при $x_1 = \text{const} = \pm x_{1k}$ имеет вид

$$x_3 = F_1(t) = x_{3y} + c_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + c_2 e^{-\frac{t}{T_2}}, \tag{205}$$

а закон изменения ее производной $\dot{x}_3 = y$

$$y = F_2(t) = -\frac{1}{T_1} c_1 e^{-\frac{t}{T}} - \frac{1}{T_2} c_2 e^{-\frac{t}{T_2}}. \tag{206}$$



Фиг. 117а. Оптимальная форма процесса изменения напряжения генератора.

Исключая время из уравнений (205) и (206), находим уравнение фазовой траектории:

$$x_3 + T_2 y - x_{3y} = s\,(x_3 - T_1 y - x_{3y})^{\frac{T_2}{T_1}}, \tag{207}$$

где

$$s = \frac{c_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)}{\left[c_2\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)\right]^{\frac{T_2}{T_1}}}.$$

Двум предельным значениям координаты x_1 соответствуют два значения величины x_{3y}, входящей в уравнение фазовой траектории (207):

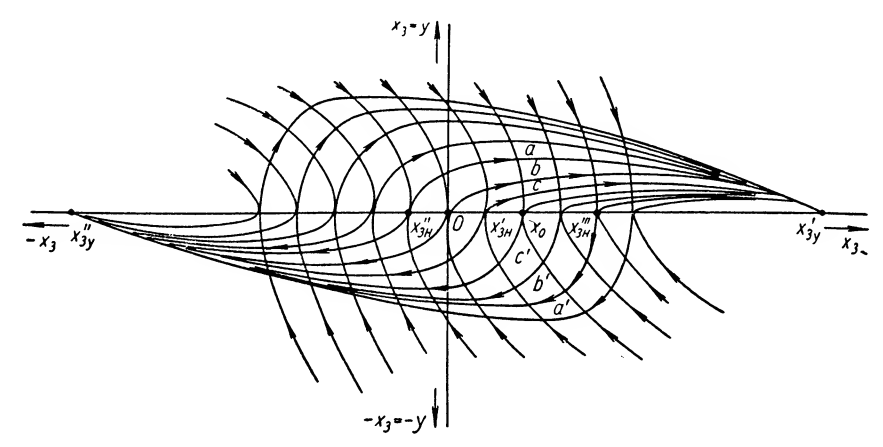
$$x'_{3y} = +k_1 k_2 x_{1k}$$

и

$$x''_{3y} = -k_1 k_2 x_{1k}.$$

Для каждого из этих значений x_{3y} может быть согласно уравнению (207) построено семейство фазовых траекторий, приведенных на фиг. 117б.

Оптимальной форме процесса изменения напряжения генератора будет соответствовать переход изображающей точки из начального состояния по траектории одного из семейств (проходящей через точку, изображающую начальное состояние системы) до пересечения с траек-

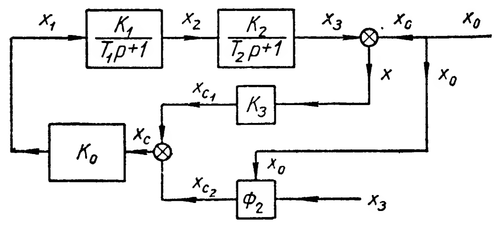


Фиг. 117б. Изображение совокупности оптимальных процессов изменения напряжения генератора на фазовой плоскости.

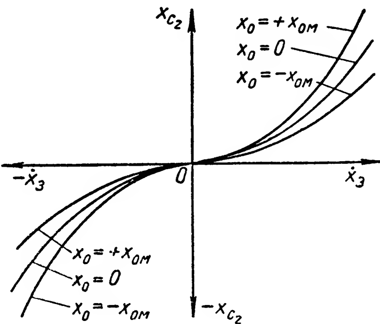
торией другого семейства (проходящей через точку, изображающую конечное — заданное состояние системы), а затем по этой последней траектории до заданного состояния.

Выберем в качестве сигналов управления сигнал, зависящий от значения управляемой величины (или ее отклонения от заданного значения), и сигнал, зависящий от производной управляемой величины.

Зададимся линейным воздействием по отклонению управляемой величины



Фиг. 118а. Структурная схема системы, осуществляющей оптимальные процессы изменения напряжения генератора.



Фиг. 118б. Характеристики функционального преобразователя сигнала воздействия по производной напряжения.

от ее заданного значения $x_{c1} = k_3(x_0 - x_3)$. Тогда согласно уравнению (183) для осуществления процесса оптимальной формы характеристика преобразования сигнала производной

$$x_{c2} = \varphi_2\left(\dot{x}_3\right)$$

должна иметь форму, совпадающую с формой фазовой траектории $x_з = G(y)$:

$$x_{c2} = k_з \varphi\left(\dot{x}_з\right).$$

Поскольку фазовые траектории оптимального процесса различны для различных заданных значений управляемой величины, то функциональный преобразователь сигнала производной должен быть построен так, чтобы устанавливать требуемую форму преобразования сигнала в соответствии со значением x_0.

Найденная таким образом структура системы управления и форма характеристик функционального преобразователя показаны на фиг. 118а и 118б.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулебакин В. С., „Автоматика и телемеханика" № 1, 6, 1940.
2. Солодовников В. В., „Известия АН СССР, ОТН" № 12, 1945.
3. Солодовников В. В., Введение в статистическую динамику систем автоматического регулирования, Техтеоретиздат, 1952.
4. Фельдбаум А. А., „Автоматика и телемеханика" № 10, 4, 1949.
5. Степанов В. В., Курс диференциальных уравнений, ГОНТИ, 1939.
6. Лернер А. Я., „Автоматика и телемеханика" № 2, 1952.
7. Лернер А. Я., „Автоматика и телемеханика" № 4, 1952.

РАЗДЕЛ VI

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В этом разделе излагаются приближенные методы определения периодических режимов в системах автоматического регулирования, состоящих из линейной части, описываемой линейным диференциальным уравнением любого порядка, и одного или нескольких нелинейных элементов.

Излагаемые методы, в отличие от методов предыдущего раздела, являются приближенными, так как они позволяют определить лишь приближенные значения амплитуды и частоты основной гармоники периодических колебаний, предполагаемых близкими к гармоническим.

В первой главе раздела излагается один из вариантов метода малого параметра Пуанкаре[1].

Идея метода Пуанкаре, применимого к системам, содержащим нелинейные элементы с аналитическими характеристиками, основана на том, что часто ряд членов, входящих в правую часть диференциальных уравнений, можно считать малыми по сравнению с остальными членами, в основном определяющими характер движения системы. Поэтому естественно принять за первое приближение решение упрощенной системы уравнений с отброшенными малыми членами, а затем, применяя метод последовательных приближений, постепенно уточнять первоначальное решение.

Особенно удобный для анализа случай, получивший наибольшее внимание в исследованиях различных авторов и представляющий собой предмет изложения первой главы настоящего раздела, имеет место, когда упрощенные уравнения представляют собой линейные диференциальные уравнения с постоянными коэфициентами, т. е. когда рассматриваемая система близка к линейной. Такого рода системы называются квазилинейными.

В следующей главе раздела излагается другой приближенный метод анализа периодических режимов в квазилинейных системах автоматического регулирования, содержащих нелинейные элементы как с аналитическими, так и с разрывными характеристиками. Этот метод основан на принципе гармонического баланса Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова[2] и на введении в рассмотрение частотных характеристик линейной части системы.

Наконец, в последней главе раздела рассматриваются условия и область применения методов приближенного определения периодических режимов, изложенных в двух предыдущих главах.

---

[1] Подробнее об этом см., например, в монографии И. Г. Малкина, „Методы Ляпунова и Пуанкаре".

[2] См. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, 1937.

ГЛАВА XXXII

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

1. ОБЩИЕ ЧЕРТЫ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Метод малого параметра возник в небесной механике в связи с решением задачи о трех телах.

Основные исследования по этому методу принадлежат французскому математику Пуанкаре. Здесь будут кратко изложены общие черты метода; подробное изложение самого метода дано в монографии И. Г. Малкина [1].

Допустим, что мы имеем диференциальные уравнения возмущенного движения системы автоматического регулирования

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, \ldots, x_n\mu); \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

определенные в некоторой области G изменения переменных $x_1, \ldots, x_n$ и некоторого параметра μ. Область должна иметь одну непременную характеристику: условия задачи должны допускать выбор малых значений μ. Вопрос о том, каковы эти малые значения μ, подлежит отдельному рассмотрению в каждой частной задаче [2]. Предполагается, что при этих условиях функции X_k могут быть разложены в степенные ряды, которые сходятся всюду в G, и в этом случае уравнениям (1) можно придать вид

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k^{(0)}(x_1, \ldots, x_n) + \mu X_k^{(1)}(x_1, \ldots, x_n) + \\ + \mu^2 X_k^{(2)}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots; \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Здесь функции $X_k^{(s)}$ также допускают разложения в кратные степенные ряды по независимым переменным, сходящиеся в G.

Основным допущением метода малого параметра является предположение о том, что решения так называемой упрощенной системы уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k^{(0)}(x_1, \ldots, x_n); \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

получающейся из системы уравнений (2) при $\mu = 0$, существуют и нам хорошо известны. Далее нас будет интересовать периодическое решение упрощенной системы уравнений

$$x_k = \overset{*}{x}_k(t, A_1, \ldots, A_s); \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Предполагается, что это решение зависит от s произвольно назначаемых параметров $A_1, \ldots, A_s$ и имеет период T.

Основная задача метода малого параметра состоит в определении и изучении условий, выполнение которых гарантирует существование периодического решения исходных уравнений (2) с периодом $T + \Delta T$, непрерывно переходящего в решение (4) упрощенных уравнений (3) при $\mu \to 0$ и обращающегося в него при $\mu = 0$, а также в построении этого решения. Возможность существования решения вытекает из следующих рассуждений.

Будем искать периодическое решение уравнений (2), обращающееся в решение (4) при $\mu = 0$. С этой целью введем новую независимую переменную τ, определяемую формулой

$$\tau = (1 + \alpha) t, \tag{5}$$

где постоянная α есть некоторая функция от μ, подлежащая дальнейшему определению; величина α определяет поправку на период решения уравнений (2). Пусть τ_0 — период искомого решения, а

$$x_{\kappa 0} = \overset{*}{x}_\kappa (0, A_1, \ldots, A_s) + \beta_\kappa; \quad (k = 1, \ldots, n)$$

его начальные значения, тогда, очевидно, разности

$$x_\kappa - \overset{*}{x}_\kappa = \xi_\kappa (\tau, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \mu); \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

будут известные функции τ, малого параметра и величин $\beta_1, \ldots, \beta_n$, определяющих начальные значения переменных.

При $\mu = \alpha = \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$ разности (6) тождественно равны нулю, и $x = \overset{*}{x}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Очевидно, если мы желаем иметь периодическое решение уравнений (2) при $\mu \neq 0$, необходимо, чтобы функции ξ_k при $\tau = 0$ и при $\tau = \tau_0$ имели одинаковые значения. В этом случае искомое решение, если оно существует, по истечении времени $\tau = \tau_0$ будет повторяться, т. е. будет действительно периодическим, периода τ_0.

Таким образом, условия периодичности искомого решения имеют вид

$$\psi_k = \xi_k (\tau_0, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \mu) - \xi_k (0, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \mu) = 0 \; (k = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Эти условия следует рассматривать как n уравнений, содержащих $n + 1$ неизвестных постоянных $\beta_1, \ldots, \beta_n$, α. Следовательно, при решении уравнений (7) одну из постоянных $\beta_1, \ldots, \beta_n$, например β_n, играющую роль так называемой фазовой константы периодического решения, можно положить равной нулю, а утраченную при этом произвольность в найденном решении всегда можно восстановить, изменив начало отсчета времени.

Вопрос о существовании периодического решения зависит от разрешимости уравнений (7). Здесь могут встретиться различные случаи,

анализ которых представляет самостоятельный математический интерес. Все зависит от матрицы[1]

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1}, \ldots, \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_{n-1}}, \frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial\beta_1}, \ldots, \frac{\partial\psi_n}{\partial\beta_{n-1}}, \frac{\partial\psi_n}{\partial\alpha} \end{matrix} \right\| \quad (8)$$

Рассмотрим случай, когда данная матрица имеет ранг[2] $n - s$. В этом случае, например, первые $n - s$ уравнений (7) могут быть разрешены относительно неизвестных $\beta_1, \ldots, \beta_{n-s-1}$, α в зависимости от величин $\beta_{n-s}, \ldots, \beta_{n-1}$. Подставляя эти значения неизвестных в остальные уравнения (4), найдем соотношения

$$\psi_i(A_1, \ldots, A_s, \beta_{n-s}, \ldots, \beta_{n-1}, \mu) = 0; \ (i = 1, \ldots, s), \quad (9)$$

где функции ψ_i должны обращаться в нули вместе с μ. Для данных уравнений (2) функции ψ_i непременно должны иметь вид

$$\psi_i = \mu\Phi_i; \quad (i = 1, \ldots, s),$$

ибо уравнения (9) при $\mu = 0$ должны удовлетворяться тождественно при любых значениях s параметров $A_1, \ldots, A_s$. Таким образом после сокращения на общий множитель μ и разложения функции Φ_j в степенные ряды по неизвестным $\beta_{n-s}, \ldots, \beta_{n-1}, \mu$ уравнения (9) примут вид

$$P_i(A_1, \ldots, A_s) + \sum_{l=1}^{s} Q_{il}\beta_{n-l} + R_i\mu + \ldots = 0; \ (i = 1, \ldots, s). \quad (10)$$

Для того чтобы эти уравнения имели решения $\beta_{n-s}, \ldots \beta_{n-1}$, обращающиеся в нуль при $\mu = 0$, необходимо, чтобы удовлетворялись условия

$$P_i(A_1, \ldots, A_s) = 0; \ (i = 1, \ldots, s). \quad (11)$$

Условия (11) служат уравнениями для нахождения тех значений параметров $\overset{\circ}{A}_1, \ldots, \overset{\circ}{A}_s$, при которых периодическому решению (4) упрощенной системы может соответствовать периодическое решение системы исходных уравнений (2), непрерывно переходящее в решение (4) при $\mu = 0$. Это — как раз те значения параметров A_k, которые отвечают поставленной выше задаче. Они называются п о р о ж д а ю щ и м и, а решение

$$x_k = x_k^*\left(\tau, \overset{\circ}{A}_1, \ldots, \overset{\circ}{A}_s\right); \ (k = 1, \ldots, n) \quad (12)$$

п о р о ж д а ю щ и м периодическим решением.

При некоторых условиях периодические решения уравнений (2) описывают периодические движения исследуемой системы автоматического регулирования, которые А. А. Андронов [2] называл автоколебаниями.

---

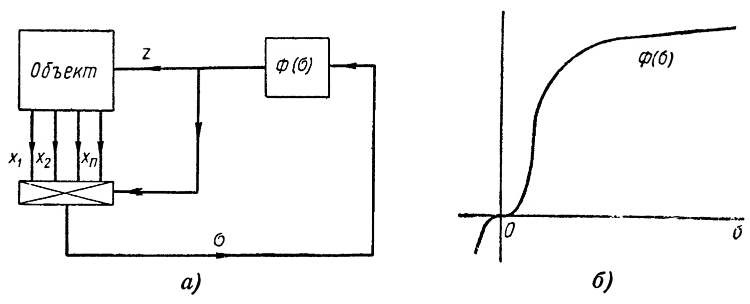
[1] Изложение элементов матричного исчисления читатель может найти, например, в книге Б. В. Булгакова „Колебания", т. 1, ГИТТЛ, 1949. — *Ред.*

[2] Матрица имеет ранг m, если по крайней мере один из ее миноров m-го порядка отличен от нуля, а все остальные миноры более высоких порядков равны нулю. — *Ред.*

Практическая ценность основной задачи метода малого параметра состоит в следующем. В тех случаях, когда в заданной системе автоматического регулирования автоколебания существуют, они могут быть приближенно охарактеризованы функциями (12), в которых значения параметров $\overset{\circ}{A}_i$ определяются соотношениями вида (11).

В большинстве задач теории автоматического регулирования упрощенная система уравнений (3) является линейной; в этом случае система уравнений (2) при достаточно малых значениях μ называется квазилинейной.

Изучением периодических решений квазилинейных систем занимались многие советские ученые. Некоторые из их трудов содержали



Фиг. 1. Типичная нелинейная функция в задачах теории автоматического регулирования.

теорию периодических решений квазилинейных систем; сама теория этих систем развивалась в связи с решением насущных проблем радиотехники. Сюда следует отнести выдающиеся труды Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Л. И, Мандельштама, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронова, С. Э. Хайкина, А. А. Витта и др.

Разработку теории периодических решений применительно к задачам автоматического регулирования за последние 10 лет вел главным образом Б. В. Булгаков [3], [4] и в последнее время А. И. Лурье [5].

Эти задачи имеют свои частные и специфические особенности, которые не позволили применять уже разработанный и готовый аппарат теории квазилинейных систем. Дело в том, что очень большой класс простейших задач теории автоматического регулирования описывается, например, уравнениями вида (см. фиг. 1)

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b x_{k\alpha} + n_k z; \ (k = 1, 2, \ldots, n);$$

$$\dot{z} = \Phi(\sigma); \ \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha x_\alpha - z,$$

в которых x_k, z — координаты, $b_{k\alpha}$ — заданные постоянные параметры объекта регулирования, n_k — постоянные параметры регулирующего органа, p_α — постоянные регулятора, а $\Phi(\sigma)$ — заданная нелинейная функция аргумента σ, обладающая свойствами $\Phi(0) = 0$; $\sigma\Phi(\sigma) > 0$ (фиг. 1, *а* и *б*).

Обычно случается так, что функция $\Phi(\sigma)$ задается графически и не может быть представлена аналитически в каком-либо виде, достаточно удобном для производства вычислений. Поэтому заслуга Б. В. Булгакова состоит в том, что он первый дал вариант метода малого параметра, учитывающий указанную особенность задач теории автоматического регулирования. В этом варианте метода, используя графическое задание функции $\Phi(\sigma)$, можно избежать большого числа промежуточных вычислений без всякого ущерба для дела и получить ответы на многие вопросы, могущие интересовать теорию автоматического регулирования.

Такие весьма ценные для практики свойства варианта метода малого параметра дают основание назвать его методом Б. В. Булгакова.

В данной главе не представляется возможным изложить этот метод полностью и в общем виде, потому остановимся лишь на изложении рабочего аппарата метода Б. В. Булгакова для построения первого приближения, иллюстрируя изложение примером.

Здесь не затронуты также последние, весьма интересные для теории автоматического регулирования работы А. И. Лурье, заслуживающие отдельного рассмотрения.

2. РАБОЧИЙ АППАРАТ МЕТОДА Б. В. БУЛГАКОВА [3]

Итак, рассмотрим квазилинейные уравнения вида

$$\sum_{k=1}^{n} f_{ik}(p, \mu)\, x_k = \mu\varphi_j(x_1, \ldots, x_n); \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

в которых $p \equiv \frac{d}{dt}$, μ—малый параметр, $f_{jk}(p, \mu)$—данные многочлены по p с постоянными коэфициентами, зависящими, вообще говоря, от параметра μ, φ_j — заданные функции переменных.

При $\mu = 0$ получаем упрощенную линейную систему

$$\sum_{k=1}^{n} f_{ik}(p, 0)\, x_k = 0; \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{14}$$

Допустим, что характеристический полином $\Delta(p)$ этой системы имеет пару чисто мнимых сопряженных корней $\pm j\omega$. Тогда сам полином имеет вид

$$\Delta(p) = (p^2 + \omega^2)\, \Delta_1(p). \tag{15}$$

Допустим, что

$$\Delta_1(\pm jL\omega) \neq 0, \tag{16}$$

где L — любое целое число. В этом случае в качестве периодического решения упрощенной системы (14) может быть взята система функций

$$\bar{x}_k = \frac{A}{2}\left[C_k e^{j(\omega t + \delta)} + \bar{C}_k e^{-j(\omega t + \delta)}\right]; \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{17}$$

содержащих две произвольных постоянных — амплитуду A и фазовую константу δ.

Пользуясь формулой (5), преобразуем уравнения (13) к новой независимой переменной τ.

Если $F_{ik}(p)$ — минор элемента $f_{ik}(p)$ определителя (15), то в силу неравенства (16) всегда можно найти такие два числа l, m, для которых

$$F_{lm}(\pm j\omega) \neq 0, \tag{18}$$

благодаря чему постоянные C_k, $\overline{C}_k$ всегда можно выбирать по формулам

$$C_k = s\frac{F_{lk}(j\omega)}{F_{lm}(j\omega)}, \qquad \overline{C}_k = s\frac{F_{lk}(-j\omega)}{F_{lm}(-j\omega)}. \tag{19}$$

Здесь s — некоторый множитель пропорциональности, который может выбираться произвольно.

Периодическое решение исходных уравнений (13) будем искать в форме бесконечных рядов по μ:

$$x_k = x_k^* + \left(\frac{\partial x_k}{\partial \mu}\right)_{\mu=0}\mu' + \left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial \mu^2}\right)_{\mu=0}\mu^2 + \ldots; \quad (k = 1, \ldots, n); \tag{20}$$

$$\alpha = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}\right)_{\varepsilon=0}\mu + \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu^2}\right)_{\mu=0}\mu^2 + \ldots, \tag{21}$$

где выражения $\frac{\partial^s x_k}{\partial \mu_k^s}$ — периодические функции τ, $\frac{\partial^s \alpha}{\partial \mu^s}$ — постоянные. Здесь первый член ряда (20) нам уже известен; второй член ряда дает, как говорят, первое приближение периодического решения (20).

В большинстве задач теории автоматического регулирования как раз и ограничиваются его исследованием. Для построения первого приближения будем диференцировать соотношения (13) по μ. Полагая

$$z_k = \left(\frac{\partial x_k}{\partial \mu}\right)_{\mu=0} (k = 1, \ldots, n); \quad C = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}\right)_{\mu=0}; \quad \frac{d}{d\tau} = p', \tag{22}$$

находим

$$\sum_{k=1}^{n} f_{ik}(p'0)\, z_k + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial f_{ik}(p,\mu)}{\partial p}\right]_{\substack{p=p'\\ \mu=0}} p' C x_k^* +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial f_{ik}(p,\mu)}{\partial \mu}\right]_{\substack{p=p'\\ \mu=0}} x_k^* = \varphi_i\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right) \; (i = 1, \ldots, n)$$

или, обозначив

$$\rho_{ik}(p,\mu) = \frac{\partial f_{ik}(p,\mu)}{\partial p} pC + \frac{\partial f_{ik}(p,\mu)}{\partial \mu}, \tag{23}$$

приведем эти соотношения для z_k к виду

$$\sum_{k=1}^{n} f_{ik}(p'0) z_k = -\sum_{k=1}^{n} \rho_{ik}(p'0) x_k^* + \varphi_i\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right); \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{24}$$

Таким образом, для построения первого приближения мы получили систему неоднородных линейных диференциальных уравнений (24), правые части которых — известные периодические функции τ. Эти уравне-

ния должны определять периодическое решение для функции z_k первого приближения.

Найдем условия периодичности первого приближения. С этой целью каждую периодическую функцию, стоящую в правой части уравнений (24), разложим в ряд Фурье по функциям $e^{j(\omega\tau+\delta)}$. Коль скоро выражение $\rho_{jk}(p,0)$ представляет полином по p, то

$$\rho_{ik}(p, 0)\, e^{jv} = \rho_{ik}(j\omega, 0)\, e^{jv}; \tag{25}$$

$$v = \omega\tau + \delta. \tag{26}$$

Следовательно, величина

$$P_i = -\frac{A}{2}\sum_{k=1}^{n}\rho_{ik}(j\omega, 0)\, C_k + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi_i\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right) e^{-jv}dv \tag{27}$$

является коэфициентом так называемой первой гармоники разложения.

Для получения искомого условия периодичности решения линейных уравнений с постоянными коэфициентами нам необходимо рассмотреть упрощенную систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} f_{ik}(p'0)\, z_k = P_i e^{jv};\ (i = 1, \ldots, n), \tag{28}$$

в которых правая часть представляет собой лишь первую гармонику разложения. Итак, система уравнений (28) должна допускать решение вида $z_k = l_k e^{iv}$. Подставляя это решение в уравнение (28), получаем соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} f_{ik}(j\omega, 0)\, l_k = P_i; \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{29}$$

Система уравнений (29) должна давать совместные решения для неизвестных l_k. Найдем условия ее разрешимости.

Умножая каждое из соотношений (29) на величину $F_{im}(j\omega, 0)$, после их почленного сложения получим

$$\sum_{i=1}^{n} F_{im}(j\omega, 0)\, P_i = 0. \tag{30}$$

Действительно, группируя слагаемые при каждом l_k для любого $k \neq m$, мы получим в качестве коэфициента определитель Δ с двумя одинаковыми столбцами; для $k = m$ коэфициентом при l_m будет являться сам определитель Δ. Подставляя в это соотношение величины P_i, находим:

$$A\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} F_{im}(j\omega, 0)\, \rho_{ik}(j\omega, 0)\, C_k =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n} F_{im}(j\omega, 0)\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi_i\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right) e^{-jv}dv. \tag{31}$$

Но миноры $F_{lk}(j\omega, 0)$ определителя Δ подчиняются известному в алгебре соотношению

$$F_{ik}F_{lm} = F_{im}F_{lk},$$

которое с помощью формул (19) преобразуется к виду

$$cF_{lk}(j\omega, 0) = F_{lm}(j\omega, 0)\, C_k. \qquad (32)$$

Соотношение (32) позволяет исключить произвольные постоянные C_k из равенства (31), левую часть которого можно теперь записать так:

$$As \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[F_{lk}(p,\mu) \frac{\partial f_{lk}(p,\mu)}{\partial p} pC + F_{lk}(p,\mu) \frac{\partial f_{jk}(p,\mu)}{\partial \mu}\right]_{\substack{p=j\omega \\ \mu=0}}.$$

Но по правилу диференцирования определителей мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[F_{ik} \frac{\partial f_{ik}}{\partial p}\right] = \frac{\partial \Delta(p,\mu)}{\partial p},$$

поэтому окончательно запишем равенства (31) в следующем виде:

$$As \left[\frac{\partial \Delta(p,\mu)}{\partial p} pC + \frac{\partial \Delta(p,\mu)}{\partial \mu}\right]_{\substack{p=j\omega \\ \mu=0}} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{n} F_{lm}(j\omega, 0) \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi_1\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right) e^{-jv} dv. \qquad (33)$$

Итак, если соотношение (33) выполняется, то уравнение (29) разрешимо по l_k, и, значит, существует периодическое решение для первого приближения. Следовательно, соотношение (33) есть искомое условие периодичности первого приближения. Оно является также необходимым, но отнюдь не достаточным условием периодичности решения исходных уравнений. Однако в большом числе встречающихся случаев, когда уравнения (13) действительно являются квазилинейными и в построении их существующих периодических решений возможно ограничиться только первым приближением, анализ условия (33) дает ответ на все вопросы, могущие интересовать теорию автоматического регулирования. В частности, условие (33) позволяет определить порождающие амплитуды и первую поправку на частоту.

Аналогичным образом может быть построено любое другое приближение искомого решения, причем сходимость приближений гарантируется лишь для достаточно малых значений μ.

3. ПРИМЕР

Рассмотрим систему автоматического регулирования, описываемую уравнениями вида [6]*:

$$T^2\ddot{\psi} + U\dot{\psi} + k\psi + z = \chi;$$

$$\dot{z} = \Phi(\sigma); \quad \sigma = a\psi + E\dot{\psi} + \frac{1}{N}\int \psi dt - \frac{1}{l} z. \qquad (34)$$

* В работе [6] содержатся некоторые опечатки, которые здесь исправлены.

Здесь ψ — координата, k, U, T — постоянные объекта регулирования, z — координата регулирующего органа, a, E, N, l — постоянные регулятора, $\Phi(\sigma)$ — заданная функция аргумента (фиг. 1), а χ — постоянная, характеризующая возмущающее воздействие на объект регулирования. В этих обозначениях прописные буквы имеют размерность секунды, а строчные — безразмерные.

Введем новые независимые переменные x_1, x_2 и безразмерное время $\bar{t}$, определив их по формулам

$$\int \psi dt = \frac{lT\mu}{c} x_1 + \frac{\chi N}{l}; \quad \sigma = \mu c^2 x_2;$$

$$t = \frac{T}{c} \bar{t}; \quad c^2 = k + al; \quad \frac{d}{d\bar{t}} = p, \tag{35}$$

где μ — произвольная, пока неопределенная постоянная.

Очевидно, символы диференцирования по t и по $\bar{t}$ связаны между собой формулой $\frac{d}{dt} = \frac{c}{T} p$.

Таким образом, находим

$$\psi = \mu l p x_1; \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\mu c l}{T} p^2 x_1; \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{\mu c^2 l}{T^2} p^3 x_1.$$

Если в исходных уравнениях исключить переменную z, то в новых переменных уравнения (34) запишутся так:

$$\left[c^2 p^3 + \frac{c}{T}(U + lE) p^2 + c^2 p + \frac{lT}{s}\right] x_1 - c^2 x_2 = 0;$$

$$\left[\frac{\mu c l E}{T} p^3 + \mu a l p^2 + \frac{\mu l T}{cN} p\right] x_1 - \mu c^2 p x_2 = \frac{T}{lc} \Phi(\mu c^2 x_2),$$

где p означает диференцирование по безразмерному времени $\bar{t}$.

Обозначив для сокращения безразмерные постоянные

$$\frac{U + lE}{cT} = \beta; \quad \frac{U}{cT} = m; \quad \frac{lT}{Nc^3} = \rho;$$

$$\frac{k}{c^2} = \alpha; \quad \frac{T}{c^3 l} \Phi(\mu c^2 x_2) = \varphi_2(x_2), \tag{36}$$

придадим уравнениям (34) следующий вид:

$$(p^3 + \beta p^2 + p + \rho) x_1 - x_2 = 0;$$
$$[(\beta - m) p^3 + (1 - \alpha) p^2 + \rho p] x_1 - p x_2 = \frac{1}{\mu} \varphi_2(x_2). \tag{37}$$

Уравнения (37) имеют очевидное решение

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0, \tag{38}$$

характеризующее тот или иной установившийся режим в данной регулируемой системе. Требуется выяснить, при каких значениях параметров регулятора установившийся режим уравнения (38) устойчив по Ляпунову, при каких значениях параметров регулятора данная система автомати-

ческого регулирования приобретает способность самовозбуждаться и входить в автоколебания и каковы при этом характеристики автоколебаний.

Для решения задачи методом Б. В. Булгакова из системы уравнений (37) образуем видоизмененную систему с параметром μ:

$$(p^3+\beta p^2+p+\rho)x_1-x_2=0;$$
$$[(\beta-m)p^3+(1-\alpha)p^2+\rho p)]x_1-(p+h)x_2=\mu\varphi_2(x_2);$$
$$\varphi_2(x_2)=\frac{1}{\mu^2}[\varphi(x_2)-h\mu x_2]. \qquad (39)$$

Здесь введена постоянная h линейного приближения $h\mu x_2$ функции $\varphi(x_2)$, которая далее выбирается в связи с необходимостью построить и изучить периодические решения уравнений (39), могущие при определенных условиях возникнуть в окрестности очевидного решения (38). Что же касается параметра μ, то после выделения в функции $f(x_2)$ линейной части он может быть выведен множителем μ^3 разности $f(x_2)-h\mu x_2$ (ибо разложение разности содержит лишь нечетные степени) и принят за „малый параметр“, каким пользуются в теории Пуанкаре.

При $\mu=0$ получаем упрощенную систему уравнений (37):

$$[p^3+\beta p^2+p+\rho]x_1-x_2=0;$$
$$[(\beta-m)p^3+(1-\alpha)p^2+\rho p]x_1-(p+h)x_2=0.$$

Это — линейная система диференциальных уравнений с постоянными коэфициентами.

По основному допущению метода малого параметра упрощенная система (37) должна иметь периодическое решение. Чтобы построить такое решение, составим характеристическое уравнение. Имеем

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} p^3+\beta p^2+p+\rho; & -1 \\ (\beta-m)p^3+(1-\alpha)p^2+\rho p; & -(p+h)\end{vmatrix}$$

Раскрывая определитель, находим

$$p^4+(m+h)p^3+(\alpha+\beta h)p^2+hp+\rho h=0. \qquad (40)$$

Как известно, корни этого уравнения определяют структуру и характер решений системы уравнений (37). Очевидно, среди этих решений тогда только появится периодическое решение, когда уравнение (40) будет иметь пару чисто мнимых сопряженных корней $p=\pm j\omega$. Но в этом случае уравнение (40) должно иметь вид

$$(p^2+\omega^2)(p^2+a_1p+a_2)=0, \qquad (41)$$

т. е. оно должно распадаться на два отдельных уравнения. Но последнее не может иметь места при любых β, m, α, ρ, h; распадение уравнения будет наблюдаться только тогда, когда его коэфициенты выбираются согласно определенной существующей между ними зависимости.

Найдем ее. Если сравнить коэфициенты уравнений (40) и (41) при одинаковых степенях p, то легко находим соотношения

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= m + h; \\ \omega^2 + a_2 &= \alpha + \beta h; \\ a_1\omega^2 &= h; \\ a_2\omega^2 &= \rho h. \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Три соотношения из написанных дают

$$a_1 = m + h; \quad a_2 = \rho(m + h); \quad \omega^2 = \frac{h}{m + h}. \qquad (43)$$

При этих значениях величин a_1, a_2, ω^2 четвертое соотношение (43) должно удовлетворяться тождественно. Это соотношение после элементарного упрощения принимает вид

$$(\beta - \rho)h^2 + (\alpha + \beta m - 2\rho m - 1)h + m(\alpha - \rho m) = 0. \qquad (44)$$

Итак, если постоянные α, β, m, ρ, h таковы, что соотношение (44) соблюдается, то упрощенная система уравнений (37) имеет периодическое решение. При фиксированных параметрах регулятора мы всегда можем это соотношение рассматривать как уравнение, определяющее коэфициенты тех линейных приближений, при которых упрощенная, линеаризованная система имеет решение периода $2\pi:\omega$. Это решение зависит от двух произвольных параметров: фазовой константы $\delta = 0$ и амплитуды A и имеет вид

$$\overset{*}{x}_1 = AB\sin(v + \varkappa); \quad \overset{*}{x}_2 = A\sin v; \quad v = \omega\bar{t}, \qquad (45)$$

где обозначено

$$B = \left(\sqrt{(\rho - \omega^2)^2 + \omega^2(\omega^2 - 1)^2}\right)^{-1}; \quad \operatorname{tg}\varkappa = -\frac{\omega(\omega^2 - 1)}{\rho - \omega^2}. \qquad (46)$$

Переходя к анализу периодических решений исходных уравнений, напишем условие периодичности его первого приближения. Согласно соотношению (41), находим

$$\frac{\partial\Delta(p)}{\partial p} = 2p(p^2 + a_1 p + a_2); \quad \frac{\partial\Delta(p)}{\partial\mu} = 0.$$

Далее, выбирая в миноре (18) число $m = 1$ и полагая $c = 1$, мы можем представить условия периодичности (33) в следующей форме:

$$A\,[2p^2(p^2 + a_1 p + a_2)C]_{p=j\omega} = \frac{1}{\pi}F_{21}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_2\left(\overset{*}{x}_2\right)\sin v\,dv.$$

Отделение в этом равенстве вещественной и мнимой частей дает два уравнения:

$$-2AC\omega^2(a_2 - \omega^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi_2\left(\overset{*}{x}_2\right)\sin v\,dv,$$

$$AC\omega a_1 = 0.$$

Поскольку $A \neq a_1 \neq 0$, последнее уравнение дает первую поправку на частоту решения, равную нулю, в связи с чем первое уравнение принимает вид

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi_2 \left(x_2^*\right) \sin v dv = 0.$$

Однако

$$\int_{-\pi}^{\pi} hA \sin v dv = hA\pi,$$

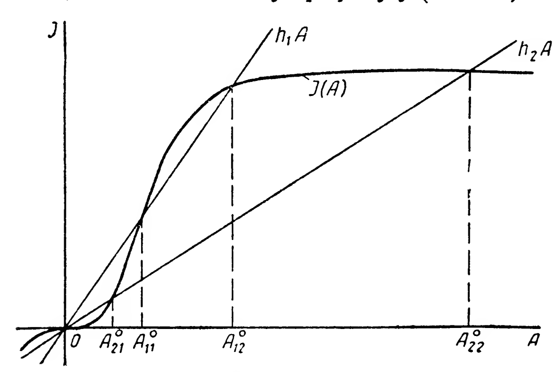
благодаря чему данное уравнение окончательно запишется так:

$$hA = J(A), \tag{47}$$

где для краткости обозначено

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(A \sin v) \sin v dv. \tag{48}$$

Функция $J(A)$ обладает свойством повторять в своем графическом представлении общий вид подинтегральной кривой $f(A \sin v)$ [3]. Допустим, что по заданному графику $f(A \sin v)$ построен график функции J(A) (фиг. 2), тогда уравнение (47) может быть решено графически; порождающие амплитуды определяются как абсциссы точек пересечения кривой $J(A)$ с лучом hA (фиг. 2).



Фиг. 2. График функции $J(A)$.

Уравнение (47) будет иметь вещественные корни, если постоянная h, будучи определена согласно соотношению (44), заключена в интервале $0 < h < h^*$, где h^* — предельное значение углового коэфициента луча hA, при котором имеет место его касание кривой (48).

Для построения граничных линий нужно определить значения параметров α, β, m, ρ, при которых h удовлетворяет условию (44) и условию $0 < h < h^*$. Построение будем вести в координатах

$$x = \alpha - \rho m; \quad y = (\beta - \rho) m. \tag{49}$$

Считая их данными, h можно рассматривать как корень уравнения (44), т. е. уравнения

$$\frac{y}{m} h^2 + (x + y - 1) h + mx = 0, \tag{50}$$

тогда первой граничной линией, отделяющей область вещественных значений h, будет парабола [6]

$$(x+y-1)^2-4xy=0. \qquad (51)$$

Эта парабола была ранее построена Б. В. Булгаковым [3] в координатах $\xi=\alpha$, $\eta=\beta m$ для случая $\rho=0$. Область, находящаяся внутри параболы (область G_2), соответствует комплексным значениям h, для которых периодических решений уравнений (34) не существует. Чтобы отделить среди всех вещественных значений h те, которые удовлетворяют условию $0<h<h^*$, построим линию (50) при $h=h^*$. Легко показать, что при данном h^* эта прямая касается параболы (51). Для исследования другой части плоскости рассмотрим корни уравнения (44):

$$h_1;\ h_2=\frac{-(x+y-1)\pm R}{\frac{y}{m}};\quad R^2=(x+y-1)^2-4xy. \qquad (52)$$

Построенные линии, а также оси координат разбивают всю плоскость параметров xy на 11 областей. Исследуя величины h_1, h_2 как непрерывные функции x, y (52), получаем следующую таблицу данных.

Область	h_1	h_2	Существование периодических решений
G_1	$h_1<0$	$h_2<0$	Не существует
G_2	Компл.	Компл.	» »
G_3	$h_1>h^*$	$h_2>h^*$	» »
G_4	$h_1<0$	$h_2<0$	» »
G_5	$h_1>h^*$	$h_2<0$	» »
G_6	$0<h_1<h^*$	$0<h_2<h^*$	Две пары
G_7	$0<h_1<h^*$	$h_2>h^*$	Одна пара
G_8	$0<h_1<h^*$	$h_2<0$	» »
G_9	$h_1<0$	$0<h_2<h^*$	» »
G_{10}	$h_1<0$	$h_2>h^*$	Не существует
G_{11}	$h_1<0$	$h_2<0$	» »

Итак, мы получили полную картину разбиения плоскости параметров x, y на области, где периодические решения существуют и где их нет. Однако вопрос об устойчивости установившегося режима уравнения (38), а также вопрос об автоколебаниях исследуемой системы автоматического регулирования существенно связан с устойчивостью периодических решений в областях G_6-G_9.

С целью их выяснения положим всюду в уравнениях (37) вместо x_1, x_2 значения $x_1^* + \delta x_1$, $x_2^* + \delta x_2$ и обычным способом получим уравнения в вариациях

$$\left.\begin{aligned} &(p^3 + \beta p^2 + p + \rho)\,\delta x_1 - \delta x_2 = 0; \\ &[(\beta - m)\,p^3 + (1 - \alpha)\,p^2 + \rho p]\,\delta x_1 - (p + H)\,\delta x_2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

где H — коэфициент линейной части разложения функции $\varphi\left(x_2^* + \delta x_2\right)$ в ряд Тейлора в окрестности x_2^*.

Уравнения (53) являются линейными, коэфициенты которых постоянны, за исключением H, который является периодической функцией t. В случае применения метода Б. В. Булгакова удобно заменить эти уравнения уравнениями упрощенными, в которых коэфициент H осреднен по периоду. Это среднее значение таково:

$$\overline{H} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi_2\,(A \sin v)\,dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_2\,(A \sin v)\,(\sin^2 v + \cos^2 v)\,dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{A} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos v \varphi_2\,(A \sin v)\,d\,(A \sin v) + \frac{d}{dA} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi_2 (A \sin v) \sin v dv \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dA} + \frac{1}{A} \right) J\,(A). \quad (54)$$

Вопрос о законности такой замены может быть всегда освещен, например, по методу Н. Г. Четаева [7] или же по методу, которым пользовался автор настоящей главы ранее в одной частной задаче [8]. Итак, для разрешения вопроса об устойчивости тех или иных периодических решений нам надлежит рассмотреть корни характеристического полинома:

$$\Delta\,(\lambda) = \lambda^4 + (m + \overline{H})\,\lambda^3 + (\alpha + \beta \overline{H})\,\lambda^2 + \overline{H}\lambda + \rho \overline{H},$$

в котором $\overline{H}$ определено согласно формуле (54).

Для устойчивости того или иного решения необходимо и достаточно, чтобы $Re \lambda_\kappa < 0$, $(k = 1, \ldots, 4)$; согласно критерию Гурвица в этом случае должно быть

$$\rho \overline{H} > 0;$$

$$(\beta - \rho)\,\overline{H}^2 + (\alpha + \beta - 2\rho m - 1)\,\overline{H} + m\,(\alpha - \rho m) > 0;$$

$$\beta \overline{H} + (\alpha + \beta m - 1)\,\overline{H} + \alpha m > 0;$$

$$m + \overline{H} > 0.$$

Легко видеть, что из всех неравенств критерия существенным является лишь второе. С помощью уравнения (50) это неравенство можно переписать так:

$$\frac{y}{m}\,(\overline{H} - h_1)\,(\overline{H} - h_2) > 0. \quad (55)$$

Допустим, что $y > 0$, тогда неравенство (55) удовлетворяется, если

$$\overline{H} > h_1; \quad \overline{H} > h_2 \tag{56}$$

или если

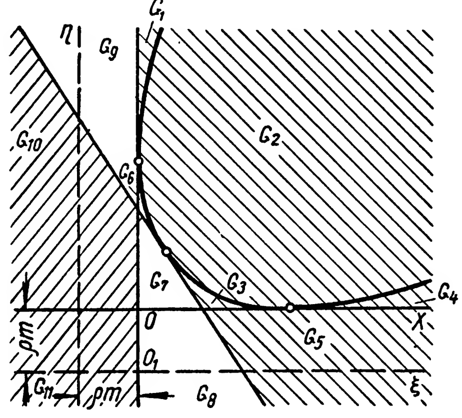
$$\overline{H} < h_1; \quad \overline{H} < h_2. \tag{57}$$

Рассмотрим область G_6 и положим, что $h_1 > h_2 > 0$, тогда следует удовлетворить неравенству

$$\frac{dJ(A)}{dA} + \frac{J(A)}{A} > 2h_1$$

либо неравенству

$$\frac{dJ(A)}{dA} + \frac{J(A)}{A} < 2h_2.$$



Фиг. 3. Разбиение плоскости параметров x, y.

Пусть $\overset{\circ}{A}_{11}$, $\overset{\circ}{A}_{12}$ — порождающие амплитуды, соответствующие лучу h_1A; $\overset{\circ}{A}_{21}$; $\overset{\circ}{A}_{22}$ — порождающие амплитуды, соответствующие лучу h_2A. Оценивая оба неравенства, из построения видим, что периодические решения с порождающими амплитудами $\overset{\circ}{A}_{21}$, $\overset{\circ}{A}_{12}$ неустойчивы, а периодические решения с порождающими амплитудами $\overset{\circ}{A}_{11}$, $\overset{\circ}{A}_{22}$ устойчивы; последним соответствуют автоколебания с малой и большой амплитудами.

Разумеется, выбор амплитуд автоколебаний зависит от начальных условий.

В области G_7 следует рассмотреть только первое неравенство (56). Его выполнение гарантирует существование автоколебаний большой амплитуды $\overset{\circ}{A}_{12}$.

В области G_8 ($y < 0$) выполнение первого неравенства (57) гарантирует существование автоколебаний большой амплитуды $\overset{\circ}{A}_{12}$, а в области G_9 выполнение второго неравенства (57) гарантирует существование автоколебаний малой амплитуды $\overset{\circ}{A}_{21}$.

Непрерывный переход от рассмотренных областей в область G_2 и области G_{10}, G_{11} показывает, что в первом случае мы имеем абсолютную устойчивость установившегося режима уравнения (38), а во втором — его абсолютную неустойчивость.

Этим завершается исследование автоколебаний системы автоматического регулирования по методу Б. В. Булгакова. Полное построение плоскости разбиения параметров и характеристика ее областей явились главной целью этого исследования.

Анализируя построение фиг. 3, мы можем давать теперь различную физическую интерпретацию тому или иному параметру системы автоматического регулирования, его роли и значения в эффективном подавлении автоколебаний или их возбуждении [6].

Разумеется, по приведенным рассуждениям могут быть сделаны возражения, касающиеся известного нарушения строгости этих рассуждений. Такие возражения будут справедливы и в большинстве случаев не могут быть отвергнуты, поскольку в методе малого параметра не делается оценка численного значения допустимых значений μ. Тогда положение могло бы быть исправлено при соответствующей идеализации задачи ее решением по методу точечных преобразований, развитому А. А. Андроновым и его учениками, или по методу А. И. Лурье [5] и сравнением указанных двух решений. В некоторых случаях все спорные вопросы по методу малого параметра могут быть устранены при соответствующей постановке и проведении эксперимента.

Во всех случаях, в которых применение метода Б. В. Булгакова может быть так или иначе оправдано, оно является эффективным и дает исчерпывающие результаты даже и тогда, когда в задаче содержится несколько нелинейных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г., Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, ОГИЗ, Гостехиздат, 1949.
2. Андронов А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, ч. I. ОНТИ НКТН, 1937.
3. Булгаков Б. В., О применении метода А. Пуанкаре к свободным псевдолинейным колебательным системам, ПММ, т. VI, вып. 4, 1942.
4. Булгаков Б. В., Некоторые задачи теории регулирования с нелинейными характеристиками, ПММ, т. X, вып. 3, 1946.
5. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, ГИТТЛ, 1951.
6. Летов А. М., К теории изодромного регулятора, ПММ, т. XII, вып. 4, 1948.
7. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, ОГИЗ, Гостехиздат, 1946.

ГЛАВА XXXIII

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ, ОСНОВАННЫЙ НА ПРИНЦИПЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА

В настоящей главе излагается метод, который позволяет с минимальной затратой труда провести исследование систем автоматического регулирования, содержащих нелинейный элемент (один или несколько) и линейную часть, описываемую диференциальными уравнениями любого порядка. Метод позволяет определить условия устойчивости нелинейных систем, найти возможные колебания в них и их устойчивость, определить частоту и амплитуду этих колебаний. Он позволяет также — и это весьма существенно — решить задачу стабилизации системы сравнительно просто и, в частности, дает возможность выбирать корректирующие цепи, обеспечивающие заданные характеристики.

Метод использует построения, аналогичные построениям частотного метода исследования линейных систем. Он основан на принципе гармонического баланса и на введении понятия эквивалентного комплексного коэфициента усиления нелинейного элемента [1], [2]. Метод предполагает гармонический характер колебаний в системе и поэтому дает решение задачи в первом приближении. Однако если линейная часть системы регулирования представляет низкочастотный фильтр, что часто имеет место, то, пользуясь излагаемым методом, мы допускаем незначительную ошибку, тем меньшую, чем выше фильтрующее действие линейной части системы.

1. ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ КОМПЛЕКСНЫЙ КОЭФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЕМЕНТА

Рассмотрим вначале линейный элемент системы регулирования. Если на вход этого элемента подать величину x_1, то на выходе его получим величину x_2, связанную с x_1 следующим линейным уравнением:

$$X_2 = W(p) X_1, \tag{58}$$

где X_1 — преобразование Лапласа для x_1;
X_2 — преобразование Лапласа для x_2;
$W(p)$ — передаточная функция линейного элемента.

Если в частном случае величина x_1 представляет синусоидальную функцию времени с амплитудой A и частотой ω, то она символически может быть представлена в виде

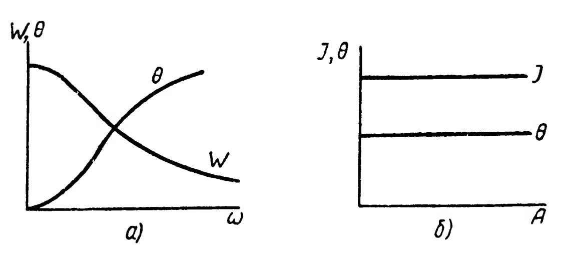
$$x_1 = Ae^{j\omega t}. \tag{59}$$

Установившееся значение величины на выходе линейного элемента при этом будет

$$x_2 = W(j\omega) Ae^{j\omega t}, \tag{60}$$

где $W(j\omega)$ — комплексный коэфициент усиления линейного элемента, получающийся из $W(p)$ при $p = j\omega$.

Согласно уравнению (60) на выходе звена получается также синусоидальное колебание, в общем случае отличающееся по амплитуде и по фазе от x_1. Это отличие в амплитуде и фазе целиком определяется комплексным коэфициентом усиления $W(j\omega) = |W(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}$. Модуль $|W(j\omega)|$ величины $W(j\omega)$ показывает, во сколько раз амплитуда на выходе больше амплитуды на входе, аргумент $\theta(\omega)$ величины $W(j\omega)$ определяет разность фаз между выходом и входом.



Фиг. 4. Характеристики линейного элемента (частный случай):
а — частотные; *б* — амплитудные.

Для линейного элемента модуль и аргумент комплексного коэфициента усиления являются в общем случае некоторой функцией частоты ω и не зависят от величины амплитуды A входного синусоидального колебания (фиг. 4).

Рассмотрим теперь нелинейный элемент. В этом случае выходная и входная величины будут связаны между собой некоторой нелинейной зависимостью вида

$$x_2 = \Phi(x_1). \tag{61}$$

Здесь для простоты предполагается, что выходная величина зависит только от входной и не зависит от ее производных или интегралов. Предполагается также, что при изменении x_1 по синусоидальному закону среднее значение x_2 за период равно нулю, т. е.

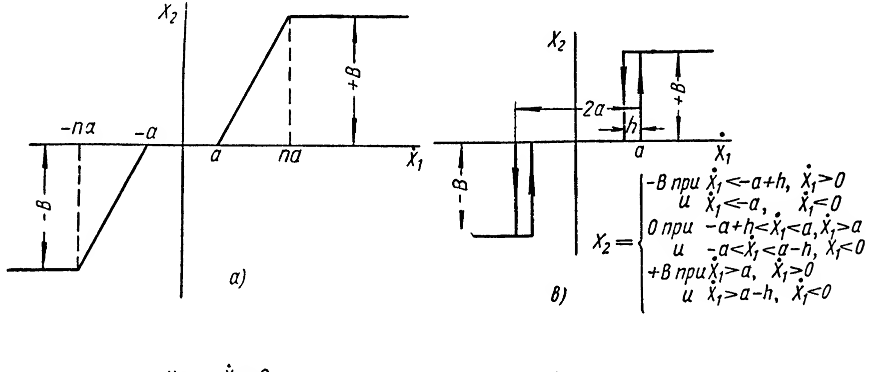
$$\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Phi(A \sin \omega t)\, dt = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^{2\pi} \Phi(A \sin \psi)\, d\psi = 0. \tag{62}$$

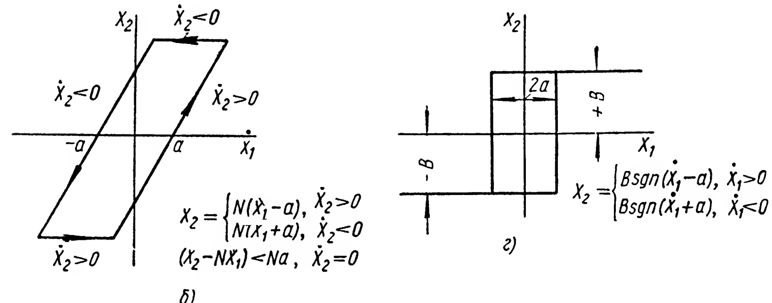
Подобные ограничения все же позволяют охватить при исследовании весьма широкий класс нелинейных систем автоматического регулирования. Более сложные случаи рассмотрены ниже и в [3].

Вид нелинейной зависимости, определяемый уравнением (61), может быть весьма разнообразным. Однако в системах регулирования наиболее часто встречаются нелинейные зависимости, приводящиеся к виду, графически показанному на фиг. 5.

Пусть на вход нелинейного элемента подано синусоидальное колебание амплитуды A и частоты ω, тогда на выходе нелинейного элемента в силу уравнений (61) и (62) получится периодическое движение, которое в общем случае будет содержать весь спектр гармоник. Ограничимся в разложении $\Phi(A\sin\omega t)$ в ряд Фурье лишь первой гармоникой, т. е. будем считать, что выходная величина также является синусоидальной, тогда

$$x_2 = \Phi(A\sin\omega t) \approx A\,[g(A)\sin\omega t + b(A)\cos\omega t]. \qquad (63)$$





Фиг. 5. Характеристики нелинейных элементов:

а — серводвигателя переменной скорости с зоной нечувствительности; *б* — элемента с сухим трением или зазором; *в* — нелинейного элемента релейного регулятора; *г* — нелинейного элемента вибрационного регулятора.

Величины $Ag(A)$ и $Ab(A)$ в выражении (63) определяются как коэфициенты первой гармоники ряда Фурье. Следовательно, они будут равны

$$Ag(A) = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Phi(A\sin\omega t)\sin\omega t\,dt;$$

$$Ab(A) = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Phi(A\sin\omega t)\cos\omega t\,dt$$

или

$$\left.\begin{aligned} g(A) &= \frac{1}{\pi A}\int\limits_0^{2\pi}\Phi(A\sin\psi)\sin\psi d\psi;\\ b(A) &= \frac{1}{\pi A}\int\limits_0^{2\pi}\Phi(A\sin\psi)\cos\psi d\psi.\end{aligned}\right\} \quad (64)$$

Выражение для $b(A)$ можно преобразовать:

$$b(A) = \frac{1}{\pi A}\int\limits_0^{2\pi}\Phi(A\sin\psi)\cos\psi d\psi = \frac{1}{\pi A^2}\int\limits_0^{2\pi}\Phi(A\sin\psi)\, d\,(A\sin\psi).$$

Согласно принятому закону изменения величины на входе нелинейного элемента

$$x_1 = A\sin\psi,$$

и поэтому

$$b(A) = \frac{1}{\pi A^2}\left[\int\limits_0^{A}\Phi(x_1)\,dx_1 + \int\limits_A^{0}\Phi(x_1)\,dx_1 + \int\limits_0^{-A}\Phi(x_1)\,dx_1 + \int\limits_{-A}^{0}\Phi(x_1)\,dx_1\right] = \frac{1}{\pi A^2}S, \quad (65)$$

где

$$S = \left[\int\limits_0^{A}\Phi(x_1)\,dx_1 + \int\limits_A^{0}\Phi(x_1)\,dx_1 + \int\limits_0^{-A}\Phi(x_1)\,dx_1 + \int\limits_{-A}^{0}\Phi(x_1)\,dx_1\right]. \quad (65а)$$

Значение S равно площади петли, образуемой характеристикой нелинейного элемента $\Phi(x_1)$ (фиг. 5, *б*, *в*, *г*). Поэтому для однозначных характеристик (фиг. 5, *а*) $b(A) = 0$.

Величину

$$J(A) = g(A) + jb(A) \quad (66)$$

будем называть эквивалентным комплексным коэфициентом усиления нелинейного элемента[1].

Модуль эквивалентного комплексного коэфициента усиления

$$|J| = \sqrt{g^2(A) + b^2(A)} \quad (67)$$

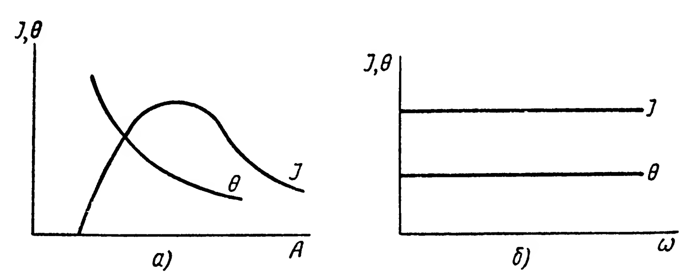
показывает, во сколько раз первая гармоника на выходе нелинейного элемента больше амплитуды A синусоидального входного сигнала. Аргумент эквивалентного комплексного коэфициента усиления

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{b(A)}{g(A)} \quad (67а)$$

[1] В [3] этой величине присвоено название „эквивалентный адмитанц".

определяет разность фаз между первой гармоникой на выходе нелинейного элемента и синусоидальным входным сигналом.

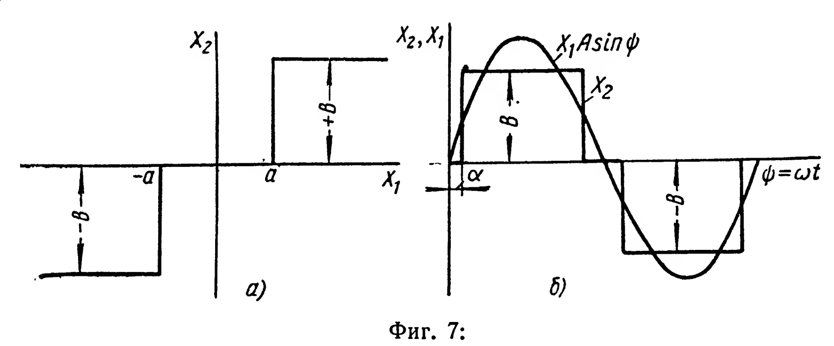
Уравнения (66) и (67) показывают, что эквивалентный комплексный коэфициент усиления нелинейного элемента **зависит от амплитуды** A **входного сигнала и не зависит от его частоты** (фиг. 6).



Фиг. 6. Характеристики нелинейного элемента (частный случай):

а — амплитудные характеристики; *б* — частотные характеристики.

Из изложенного выше следует, что понятие эквивалентного комплексного коэфициента усиления базируется на неучете высших гармоник. Однако в силу обычно фильтрующего действия линейной части системы регулирования, не пропускающей высшие гармоники, ошибка, возникающая при этом, в большинстве случаев лежит в допустимых пределах.



Фиг. 7:

а и *б* — характеристики релейного элемента.

Таким образом, согласно выражениям (63) и (66) можно написать в комплексной форме уравнение

$$x_2 = J(A)x_1, \tag{68}$$

предполагая, что x_1 и x_2 меняются по гармоническому закону. Это уравнение по внешней форме весьма напоминает уравнение (60) для линейного элемента.

В качестве примера рассмотрим вычисление $J(A)$ для релейной характеристики без гистерезиса, показанной на фиг. 7. Так как харак-

теристика однозначна, то $b(A)=0$. Согласно уравнениям (66) и (64) имеем

$$J(A)=g(A)=\frac{4}{\pi A}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} B\sin\psi d\psi=\frac{4B}{\pi A}\cos\alpha,$$

где

$$\alpha=\arcsin\frac{a}{A},$$

или, измеряя величину A в единицах a, как это мы будем делать и в дальнейшем, получим

$$J\left(\frac{A}{a}\right)=g\left(\frac{A}{a}\right)=\frac{4B}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{B}{a}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{A}{a}\right)^2}}}{\frac{A}{a}}=NJ_0\left(\frac{A}{a}\right), \qquad (69)$$

где

$$N=\frac{B}{a};$$

$$J_0\left(\frac{A}{a}\right)=\frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{A}{a}\right)^2}}}{\frac{A}{a}}. \qquad (70)$$

Величину $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$ будем называть нормированным эквивалентным комплексным коэфициентом усиления нелинейного элемента. Это понятие относится не только к рассматриваемому примеру, но и к любому случаю нелинейного элемента. Значение N в каждом случае может быть легко установлено.

График $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$, согласно уравнению (70), показан на фиг. 8. Максимальное значение J_0 равно $\frac{2}{\pi}$ и имеет место при $\frac{A}{a}=\sqrt{2}$. Если $\frac{A}{a}\to\infty$, то согласно уравнению (70) $J_0\to 0$. При неограниченном увеличении амплитуды A входного сигнала амплитуда первой гармоники на выходе будет стремиться к конечному значению $\frac{4}{\pi}B$, а это означает, что коэфициент усиления стремится к нулю.

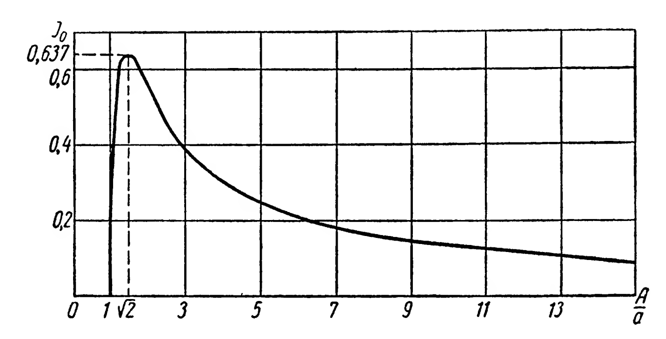
Вычисление эквивалентного комплексного коэфициента усиления для некоторых форм нелинейных характеристик дано в п. 8.

В дальнейших расчетах необходимо будет пользоваться годографом вектора J_0 или вектора $z_0=\frac{1}{J_0}$, который позволяет найти амплитуду и фазу первой гармоники величины на выходе нелинейного элемента

в зависимости от амплитуды величины на входе. Параметром этих годографов служит амплитуда $\left(\frac{A}{a}\right)$. Поэтому подобные годографы в дальнейшем будем называть **амплитудными характеристиками** нелинейного элемента[1].

Для построения амплитудной характеристики

$$J_0\left(\frac{A}{a}\right)=g_0\left(\frac{A}{a}\right)+jb_0\left(\frac{A}{a}\right)$$



Фиг. 8. График зависимости $J_0=f\left(\frac{A}{a}\right)$ для релейной характеристики.

необходимо по вещественной оси откладывать величину $g_0\left(\frac{A}{a}\right)$ и по мнимой оси $b_0\left(\frac{A}{a}\right)$.

Величина z_0 равна

$$z_0\left(\frac{A}{a}\right)=\frac{1}{J_0\left(\frac{A}{a}\right)}=\frac{1}{g_0+jb_0}=x_0\left(\frac{A}{a}\right)+jy_0\left(\frac{A}{a}\right),$$

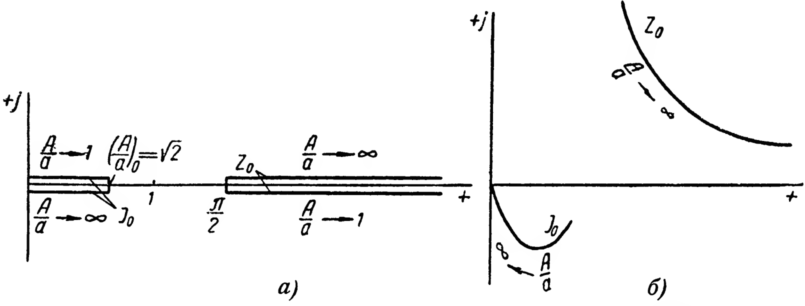
где

$$x_0\left(\frac{A}{a}\right)=\frac{g_0}{g_0^2+b_0^2};\qquad y_0\left(\frac{A}{a}\right)=-\frac{b_0}{g_0^2+b_0^2},$$

и для построения ее амплитудной характеристики необходимо по вещественной оси откладывать $x_0\left(\frac{A}{a}\right)$ и по мнимой оси $y_0\left(\frac{A}{a}\right)$. Очевидно, что амплитудная характеристика z_0 является обратной амплитудной характеристике J_0. Если нелинейный элемент имеет однозначную характеристику, то согласно уравнению (64) $b_0\left(\frac{A}{a}\right)=0$, и поэтому его амплитудные характеристики совпадают с вещественной осью. Для случая релейной характеристики нелинейного элемента амплитудные характеристики имеют вид, графически показанный на фиг. 9. Каждой точке

[1] Понятие „амплитудная характеристика нелинейного элемента“ не следует смешивать с понятием „амплитудная частотная характеристика линейной системы“.

амплитудной характеристики z_0, занимающей участок вещественной оси от $\frac{\pi}{2}$ до ∞, соответствуют два значения амплитуды $\frac{A}{a}$. В одном случае значение амплитуд изменяется от $\sqrt{2}$ до 1, во втором — от $\sqrt{2}$

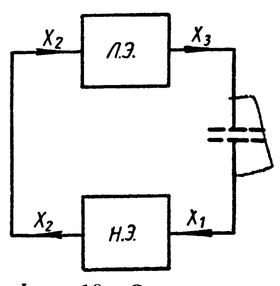


Фиг. 9. Амплитудные характеристики нелинейного элемента:
а — для релейной характеристики; *б* — общий случай.

до ∞. Этот результат непосредственно виден на фиг. 8. Амплитудная характеристика J_0 также двузначна и занимает участок вещественной оси от 0 до $\frac{2}{\pi}$. Амплитудные характеристики J_0 и z_0 для одного из общих случаев показаны на фиг. 9.

2. УРАВНЕНИЕ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Если в системе регулирования имеется один нелинейный элемент, то ее всегда можно представить в виде последовательного соединения линейного и нелинейного элементов (фиг. 10), причем под линейным элементом подразумевается вся линейная часть системы регулирования. Допустим, что система находится на границе устойчивости и в ней возникли незатухающие колебания некоторой частоты ω и амплитуды A на входе нелинейного элемента. Тогда уравнения первого приближения согласно уравнениям (60) и (68) будут иметь вид



Фиг. 10. Структурная схема системы регулирования.

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= W(j\omega)\,x_2; \\ x_2 &= J\left(\frac{A}{a}\right)x_1 = NJ_0\left(\frac{A}{a}\right)x_1; \\ x_3 &= -x_1. \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

Отсюда уравнение свободных колебаний будет

$$NW(j\omega)\,J_0\left(\frac{A}{a}\right) + 1 = 0. \qquad \textbf{(72)}$$

Левая часть уравнения (72) является комплексной величиной. Приравнивая отдельно ее вещественную и мнимую части нулю, получим два

уравнения с двумя неизвестными: частотой ω и амплитудой $\left(\frac{A}{a}\right)$ колебаний. Если в результате решения этих уравнений получаются действительные значения ω, колебания в системе возможны.

Решение того же уравнения может быть получено графически. Перепишем уравнение (72) в следующем виде:

$$-NW(j\omega) = \frac{1}{J_0\left(\frac{A}{a}\right)} = z_0\left(\frac{A}{a}\right). \qquad (73)$$

Годограф левой части этого уравнения при изменении частоты в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ представляет амплитудно-фазовую частотную характеристику линейной части системы регулирования в разомкнутом состоянии, увеличенную в N раз. Аналогичная кривая используется при решении вопроса об устойчивости системы в замкнутом состоянии по критерию Найквиста — Михайлова. Годограф правой части этого уравнения при изменении амплитуды в пределах от 0 до ∞ представляет амплитудную характеристику $z_0\left(\frac{A}{a}\right)$ нелинейного элемента системы регулирования. Эта амплитудная характеристика может быть изображена, как было показано, в виде кривой в тех же координатах, что и амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части системы. Характеристики имеют стандартный вид и для наиболее часто встречающихся нелинейностей приведены в п. 8.

Пересечение амплитудно-фазовой частотной характеристики с амплитудной характеристикой нелинейного элемента определяет частоту и амплитуду возможных колебаний. Если характеристики не пересекаются, это означает, что нет действительного значения ω, удовлетворяющего уравнению (72), и, следовательно, в рассматриваемой системе регулирования согласно первому приближению не могут существовать колебания конечной амплитуды.

Если характеристики касаются друг друга, то система находится на границе устойчивости. Изменяя амплитудно-фазовую частотную характеристику, можно избежать возникновения колебаний и сделать систему устойчивой.

Таким образом, излагаемый метод исследования нелинейных систем регулирования позволяет определить, как следует изменить амплитудно-фазовую частотную характеристику линейной части системы регулирования, чтобы обеспечить ее устойчивость.

В некоторых случаях может оказаться более удобным, переписав уравнение (72) в виде

$$-J_0\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{1}{NW(j\omega)}, \qquad (74)$$

строить для графического решения обратную амплитудно-фазовую частотную характеристику $\frac{1}{NW(j\omega)}$ и амплитудную характеристику $-J_0\left(\frac{A}{a}\right)$ нелинейного элемента.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОКОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ[1]

Пусть амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части системы и амплитудная характеристика нелинейного элемента пересекаются больше чем в одной точке.

На фиг. 11 характеристики пересекаются в двух точках: N и M. Точке N соответствует частота ω_1 [по амплитудно-фазовой частотной характеристике $-W(j\omega)$] и амплитуда колебаний $\left(\frac{A}{a}\right)_1$ (по амплитудной характеристике z); точке M соответствуют частота ω_2 и амплитуда $\left(\frac{A}{a}\right)_2$.

При заданном виде характеристик точке N соответствуют неустойчивые колебания, а точке M — устойчивые. В данном случае достаточно рассмотреть устойчивость колебаний по амплитуде.

Допустим, что амплитуда колебаний, соответствующая точке N, возросла и стала равной $\left(\frac{A}{a}\right)_1 + \delta\left(\frac{A}{a}\right)$. Тогда величина z будет определяться точкой N_1 и будет равна $z_{11} = \frac{1}{J_{11}}$. Общий коэфициент усиления системы регулирования в разомкнутом состоянии определяется как произведение коэфициентов усиления линейного и нелинейного элементов. При амплитуде колебаний $\left(\frac{A}{a}\right)_1 + \delta\left(\frac{A}{a}\right)$ общий комплексный коэфициент усиления будет равен

$$K_{N_1}(j\omega) = W_л(j\omega)\, J_{11}.$$

Система в замкнутом состоянии согласно критерию Найквиста — Михайлова будет устойчива, если частотная характеристика $-K_{N_1}(j\omega)$ не охватывает точку $+1,\ j0$, или, иными словами, система в замкнутом состоянии будет устойчива, если амплитудно-фазовая частотная характеристика $-W(j\omega)$ не охватывает точку конца вектора $z_{11} = \frac{1}{J_{11}}$*, т. е. точку N_1. Как видно из фиг. 11 амплитудно-фазовая частотная характеристика $-W(j\omega)$ охватывает точку N_1, и, следовательно, система при увеличенной амплитуде колебаний будет неустойчивой — колебания будут возрастать и далее. Процесс, характеризуемый точкой N, будет неустойчив.

Если допустить, что амплитуда колебаний уменьшится, то система при уменьшенной амплитуде колебаний устойчива и колебания будут затухать. Отсюда следует, что если начальные отклонения в системе были такими, что отклонения на входе нелинейного элемента были меньше $\left(\frac{A}{a}\right)_1$, то в ней колебания не возникнут.

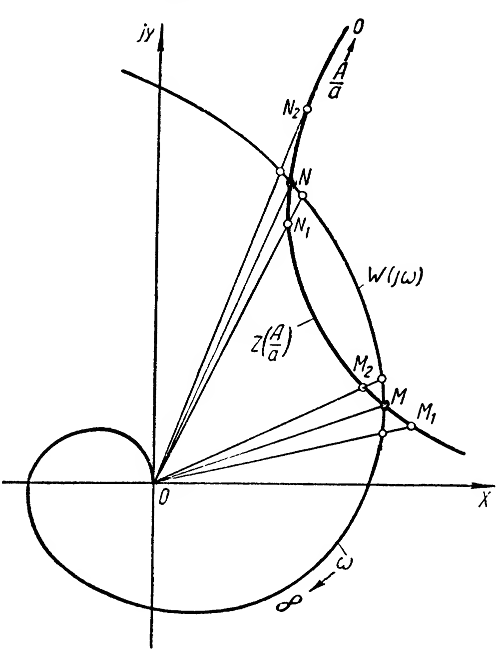
Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что колебания, соответствующие точке M, устойчивы.

---

[1] Условия устойчивости, приводимые здесь, как это показано далее в главе XXXIV, являются лишь необходимыми, но не достаточными.

* Напомним здесь, что величина z_{11} не зависит от частоты.

В самом деле, допустим, что амплитуда колебаний возросла и стала равной $\left(\frac{A}{a}\right)_2 + \delta\left(\frac{A}{a}\right)$, тогда величина z будет определяться точкой M_1. Так как амплитудно-фазовая частотная характеристика — $W(j\omega)$ не охватывает точку M_1, то система становится устойчивой и колебания будут уменьшаться. Если допустить, что колебания по амплитуде уменьшились, то легко аналогично показать, что создаются условия, при которых колебания начинают возрастать, и процесс переходит обратно в режим, характеризуемый точкой M.



Фиг. 11. Амплитудно-фазовая частотная характеристика линейного элемента $W_1(j\omega)$ и амплитудная характеристика нелинейного элемента $z\left(\frac{A}{a}\right)$.

В общем случае, если амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части системы имеет произвольный вид и пересекается с амплитудной характеристикой нелинейного элемента, то вопрос об устойчивости колебаний с частотой ω и амплитудой $\left(\frac{A}{a}\right)$, соответствующих данной точке пересечения, решается следующим образом: *если точка амплитудной характеристики, соответствующая увеличенной амплитуде* $\left(\frac{A}{a}\right) + \delta\left(\frac{A}{a}\right)$, *не охватывается амплитудно-фазовой частотной характеристикой, то рассматриваемые колебания устойчивы, в противном случае они неустойчивы.*

Доказательство, приведенное здесь, является не строгим, более строго вопрос рассмотрен в [4].

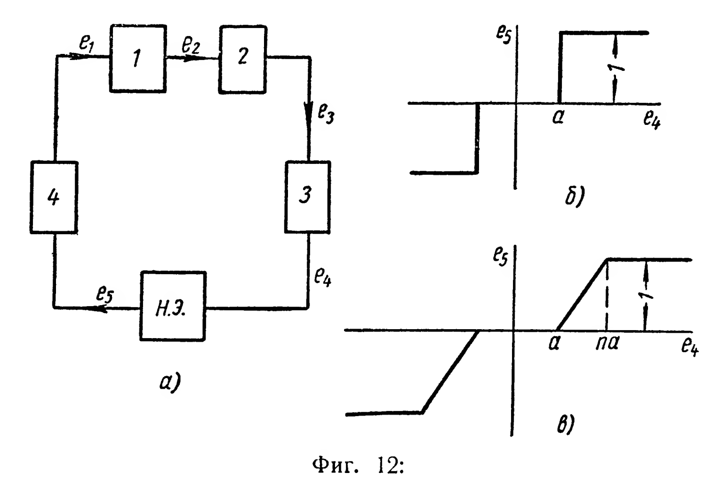
4. ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

а) Нелинейный регулятор напряжения с серводвигателем

Структурная схема системы регулирования показана на фиг. 12, *а*. Регулируемый объект состоит из возбудителя *1* и генератора *2*. Регулятор — из измерительного элемента *3* с зоной нечувствительности и серводвигателя *4*. Вначале рассмотрим поведение системы в случае постоянной скорости серводвигателя. Характеристика нелинейного элемента

(*н. э.*) структурной схемы в этом случае имеет вид, графически изображенный на фиг. 12, *б*.

Сделаем упрощающее допущение: будем считать, что скорость серводвигателя мгновенно достигает конечного значения при замыкании контактов измерительного элемента. Учет постоянной времени разгона серводвигателя привел бы к несколько более сложному выражению комплексного



Фиг. 12:

а — структурная схема системы регулирования напряжения; *б* — характеристика *н. э.* при постоянной скорости серводвигателя; *в* — характеристика *н. э.* при переменной скорости серводвигателя.

коэфициента усиления линейной части системы регулирования: необходимо было бы считать величину e_5 на выходе нелинейного элемента пропорциональной не скорости, а напряжению на якоре серводвигателя.

Напишем уравнения системы:

уравнение возбудителя

$$e_2 = \frac{k_1}{1 + pT_1} e_1;$$

уравнение генератора

$$e_3 = \frac{k_2}{1 + pT_2} e_2;$$

уравнение измерительного элемента

$$e_4 = \frac{k_3}{1 + vT_3} e_3;$$

уравнение нелинейного элемента

$$e_5 = Je_4 = N;$$

уравнение серводвигателя

$$e_1 = -\frac{1}{pT_4} e_5,$$

где k_1, k_2, k_3 — соответственно передаточные коэфициенты возбудителя, генератора и измерительного элемента;

T_1 — постоянная времени возбудителя;

T_2 — постоянная времени генератора;

T_3 — постоянная времени демпфера;

T_4 — время серводвигателя;

$N=\frac{1}{a}$ (a — относительное изменение регулируемого напряжения, при котором замыкаются контакты измерительного элемента).

Передаточная функция линейной части системы регулирования в разомкнутом состоянии будет равна

$$W(j\omega)=\frac{1}{j\omega T_4}\prod_{i=1}^{3}\frac{k_i}{1+j\omega T_i}. \tag{75}$$

Система астатична и имеет три апериодических звена. Нелинейный элемент имеет релейную однозначную характеристику, и поэтому его амплитудная характеристика z_0 лежит целиком на вещественной оси (см. фиг. 13, a).

Значение величин отрезка, отсекаемого частотной характеристикой $-NW(j\omega)$, на положительной вещественной оси дается уравнением

$$K=N\frac{k_1k_2k_3}{T_4}\cdot\frac{T_1+T_2+T_3-T_1T_2T_3\omega_0^2}{\left(1+T_1^2\omega_0^2\right)\left(1+T_2^2\omega_0^2\right)\left(1+T_3^2\omega_0^2\right)},$$

где $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3}}$ — частота пересечения, т. е. частота, соответствующая точке пересечения амплитудно-фазовой частотной характеристики с вещественной осью.

Система будет устойчивой, если амплитудно-фазовая частотная характеристика $-NW(j\omega)$ не пересекает амплитудную характеристику z_0, или иначе, если (фиг. 9, a)

$$K<\frac{\pi}{2}.$$

Обычно можно принять $k_1=k_2=k_3=1$. Пусть далее $T_1=0{,}4$ сек., $T_2=2$ сек., $T_3=0{,}1$ сек. Тогда для устойчивости необходимо, чтобы

$$\frac{N}{T_4}0{,}432<\frac{\pi}{2}$$

или

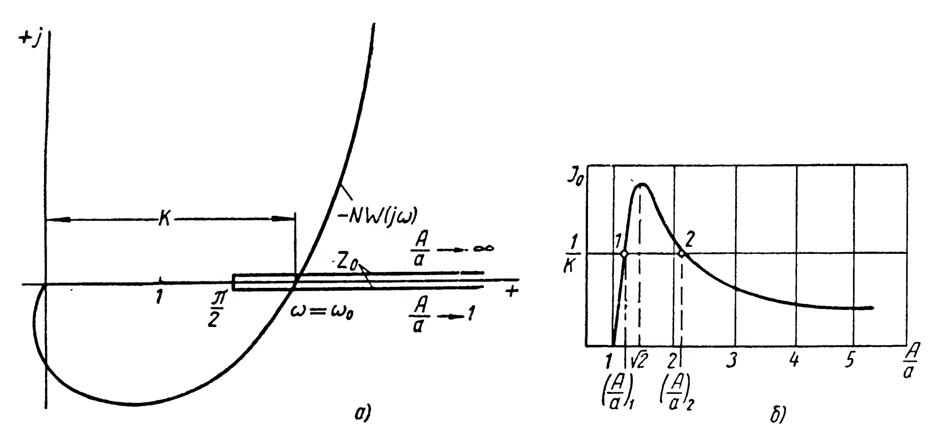
$$aT_4>\frac{2}{\pi}0{,}432=0{,}275.$$

При отсутствии демпфера ($T_3=0$) для устойчивости необходимо, чтобы $aT_4>0{,}212$ сек.

Если принять, что зона нечувствительности составляет $\pm2\%$ ($a=0{,}02$), то время серводвигателя должно быть больше 13,75 сек. при наличии демпфера и больше 10,6 сек. при отсутствии демпфера.

Если $K > \frac{\pi}{2}$, в системе возникают колебания с частотой ω_0 и амплитудой, определяемой точкой пересечения амплитудно-фазовой частотной и амплитудной характеристик (фиг. 13, *а*).

Так как амплитудная характеристика z_0 двузначна, то точке пересечения будут соответствовать два значения амплитуды. Согласно критерию, изложенному в п. 3, устойчивыми будут колебания с большей амплитудой. Значение амплитуды легко может быть получено, если на графике $J_0 = f\left(\frac{A}{a}\right)$ (фиг. 13, *б*) отложить величину $\frac{1}{k}$; тогда точки пересечения *1* и *2* определят искомые амплитуды, причем точке *2* будет



Фиг. 13. Амплитудно-фазовые частотные и амплитудные характеристики системы регулирования напряжения.

соответствовать устойчивый режим колебаний, точке *1* — неустойчивый. Это значит, если начальное отклонение в системе будет меньше $\left(\frac{A}{a}\right)_1$, то колебания в системе не возникнут — система устойчива в малом и неустойчива в большом.

Рассмотрим поведение системы регулирования напряжения при наличии зоны нечувствительности и серводвигателя переменной скорости. Характеристика нелинейного элемента для этого случая показана на фиг. 12, *в*. Уравнение нелинейного элемента будет иметь вид

$$e_5 = Je_4 = NJ_0 e_4,$$

где

$$N = \frac{1}{a(n-1)}.$$

Условие устойчивости будет

$$K < (z_0)_{\min}.$$

Если принять $n = 4$, то $(z_0)_{\min} = \frac{1}{0{,}68}$ (см. фиг. 26).

Следовательно, система будет устойчива, если

$$\frac{N}{T_4} 0,432 < \frac{1}{0,68}$$

или

$$aT_4 > 0,432 \cdot 0,68 \frac{1}{3} = 0,098 \text{ сек.}$$

при наличии демпфера и

$$aT_4 > 0,33 \cdot 0,68 \frac{1}{3} = 0,076 \text{ сек.}$$

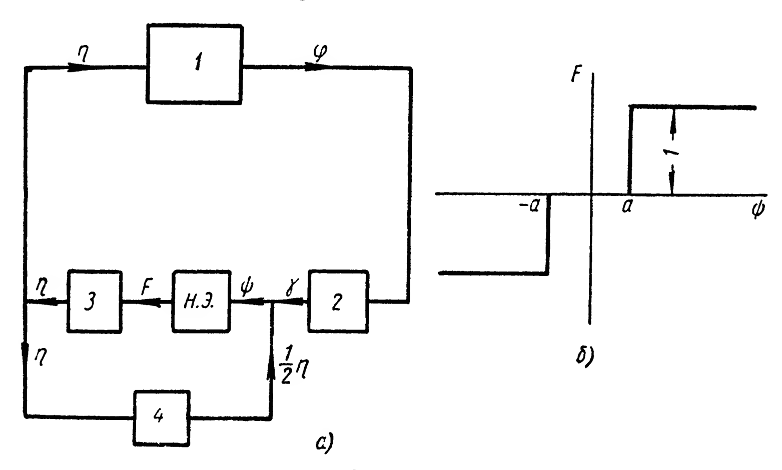
в случае отсутствия демпфера.

При $a = 0,01$ соответственно должно быть $T_4 > 9,8$ сек. при наличии демпфера и $T_4 > 7,6$ сек. в случае отсутствия демпфера.

Сравнивая результаты расчетов для серводвигателя постоянной скорости и серводвигателя переменной скорости, видим преимущества последнего: устойчивость достигается при меньших значениях T_4 при одновременном уменьшении зоны нечувствительности (вместо $a = 0,02$ в первом случае $a = 0,01$ во втором случае) и, следовательно, увеличении точности регулирования.

б) Автопилот с серводвигателем постоянной скорости

Структурная схема системы регулирования показана на фиг. 14, *а*. Регулируемый объект представляет собой самолет *1*. Регулятор состоит из измерительного элемента *2*, работающего по отклонению и производной,



Фиг. 14:

а — структурная схема регулирования курса самолета; *б* — характеристика нелинейного элемента.

серводвигателя *3* постоянной скорости и жесткой обратной связи *4*. Характеристика нелинейного элемента (*н. э.*) показана на фиг. 14, *б*. Как и в предыдущем случае, будем пренебрегать временем разгона серводвигателя.

Уравнения системы в упрощенном виде имеют следующий вид:
уравнение самолета

$$\tilde{\varphi} = -\frac{L}{p(p+M)}\tilde{\eta};$$

уравнение измерительного элемента

$$\tilde{\gamma} = (1+\beta p)\tilde{\varphi};$$

уравнение серводвигателя

$$\tilde{\eta} = \frac{1}{pT_c}\tilde{F};$$

уравнение обратной связи

$$\tilde{\psi} = \tilde{\gamma} - \frac{1}{b}\tilde{\eta};$$

уравнение нелинейного элемента

$$F = J\psi = NJ_0\psi, \tag{76}$$

где $N = \frac{1}{a}$ (фиг. 14, *б*).

Передаточная функция линейной части системы будет определяться отношением ψ к F при обходе по линейной части системы. Она будет равна

$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_c}\left[\frac{L(1+\beta j\omega)}{j\omega(j\omega+M)} + \frac{1}{b}\right]. \tag{77}$$

В дальнейшем удобнее рассматривать величину $-NW(j\omega)$, т. е.

$$-NW(j\omega) = -\frac{1}{j\omega T_c a}\left[\frac{L(1+\beta j\omega)}{j\omega(j\omega+M)} + \frac{1}{b}\right]. \tag{77а}$$

Сделаем подстановку $\Omega = \frac{\omega}{M}$ и введем обозначения $A = \beta M$; $B = \frac{M^2}{Lb}$; $C = bMT_c a$. Тогда уравнение (77а) принимает вид

$$-NW(j\Omega) = -\frac{1}{Cj\Omega}\left[\frac{1+Aj\Omega}{Bj\Omega(1+j\Omega)} + 1\right] = x(\Omega) + jy(\Omega). \tag{77б}$$

Так как амплитудная характеристика z_0 нелинейного элемента в данном случае лежит на положительной вещественной оси справа от точки $\left(\frac{\pi}{2}, j0\right)$, то, очевидно, условием абсолютной устойчивости системы будет

$$y(\Omega) > 0$$

или согласно уравнению (77б)

$$\frac{A-1}{B(1+\Omega^2)} + 1 > 0.$$

Это неравенство будет удовлетворяться при всех Ω при

$$A + B > 1. \tag{78}$$

При таком условии амплитудно-фазовая частотная характеристика $-NW(j\omega)$ (для значений $0 < \Omega < \infty$) лежит целиком в первом квадранте, и система устойчива при любом значении C. Если $A + B < 1$, то амплитудно-фазовая частотная характеристика $-NW(j\omega)$ будет иметь один из видов, графически изображенных на фиг. 15, *а*. Отрезок K, отсекаемый

характеристикой на вещественной оси, как это следует из равенства (77б), равен

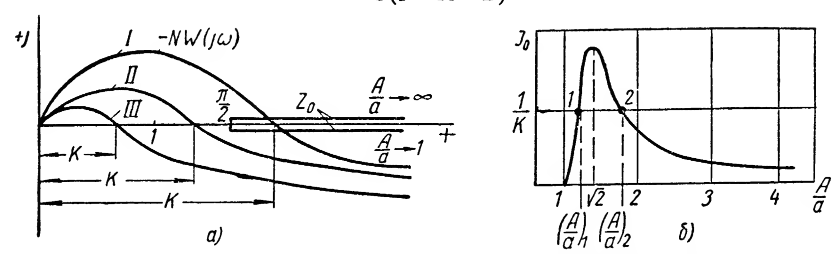
$$K = x(\Omega_0) = \frac{1 + A\Omega_0^2}{BC\Omega_0^2\left(1 + \Omega_0^2\right)},$$

где относительная частота пересечения Ω_0 равна

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{1 - A - B}{B}}, \qquad (79)$$

и поэтому

$$K = \frac{A + B}{C(1 - A - B)}.$$



Фиг. 15. Частотные и амплитудные характеристики системы регулирования курса самолета.

Система в отсутствии нелинейного элемента $|J_0 = 1|$ будет устойчивой, если $K > 1$, и неустойчивой, если $K < 1$. При наличии нелинейного элемента релейного типа система будет устойчивой, если (фиг. 15, *а*)

$$1 < K < \frac{\pi}{2}.$$

Если $K > \frac{\pi}{2}$, возникают колебания с относительной частотой

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{1 - A - B}{B}}$$

и амплитудой, определяемой уравнением

$$K = z_0 = \frac{1}{J_0}. \qquad (80)$$

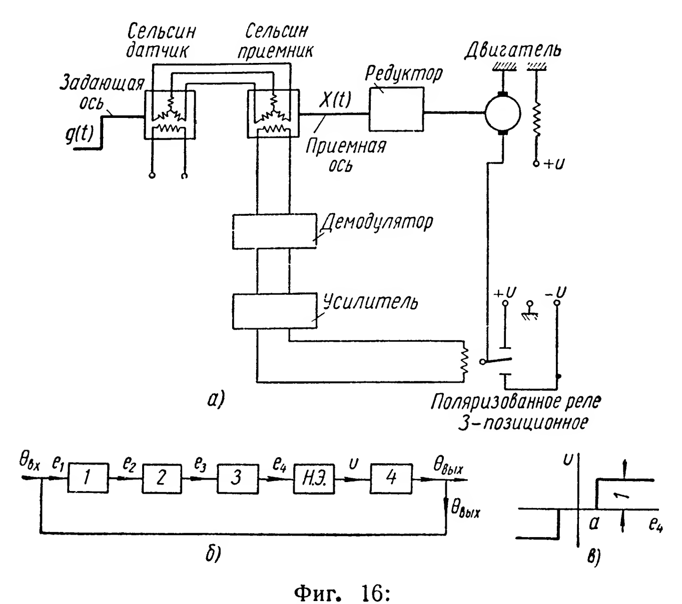
Уравнению (80) соответствуют два значения амплитуд (фиг. 15, *б*), определяемых точками *1* и *2*. Точка *1* согласно изложенному критерию устойчивости колебаний определяет устойчивый режим, точка *2* — неустойчивый, или, иными словами, колебания с малой амплитудой устойчивы, с большой — неустойчивы. Как видно из фиг. 15, *б*, амплитуда колебаний $\frac{A}{a}$ не может быть больше $\sqrt{2}$.

Если $K < 1$, то в системе возникают колебания, амплитуда которых не может быть ограничена рассматриваемой нелинейностью.

в) Релейная следящая система

Принципиальная и структурная схемы релейной следящей системы показаны на фиг. 16. Угол рассогласования между задающей и приемной осями с помощью сельсинов, соединенных по трансформаторной

схеме, превращается в электрический сигнал e_1, который после демодуляции поступает на усилительный контур. К выходу последнего подключено трехпозиционное поляризованное реле, которое управляет двигателем приемной оси.



Фиг. 16:

а — принципиальная схема релейной следящей системы; *б* — структурная схема релейной следящей системы; *1* — демодулятор; *2* — усилитель; *3* — элемент запаздывания реле; *4* — серводвигатель; *н. э.* — нелинейный элемент; *в* — характеристика нелинейного элемента.

Для простоты будем считать, что времена срабатывания и отпускания реле одинаковы и равны T_p и что реле не обладает гистерезисом и имеет характеристику, показанную на фиг. 16, *в*.

Уравнения системы в упрощенном виде имеют следующий вид:

уравнение демодулятора
$$e_2 = k_1 e_1;$$
уравнение усилителя
$$e_3 = W_1(p)\, e_2;$$
уравнение элемента запаздывания
$$e_4 = e^{-pT_p} e_3;$$
уравнение серводвигателя
$$\theta_{вых} = \frac{1}{pT(1 + pT_м)}\, u;$$
уравнение нелинейного элемента
$$u = Je_4 = NJ_0 e_4, \qquad (81)$$

где $N = \frac{1}{a}$ (фиг. 16).

Уравнение обратной связи

$$e_1 = k_2 (\theta_{вх} - \theta_{вых}),$$

где k_1, k_2 — соответственно коэфициенты усиления демодулятора и элемента обратной связи;

$W_1(p)$ — передаточная функция (в общем виде) усилителя;

T — время серводвигателя;

$T_м$ — электромеханическая постоянная времени двигателя с редуктором.

Определим условия, при которых в рассматриваемой системе будут отсутствовать колебания.

Передаточная функция линейной части системы определяется отношением e_4 к U при обходе по линейной части системы. Она равна

$$W(j\omega) = \frac{k_1 k_2 e^{-j\omega T_p}}{j\omega T (1 + j\omega T_м)} W_1(j\omega). \qquad (82)$$

Будем предполагать вначале, что усилитель не имеет запаздывания и, следовательно, $W_1(j\omega) = k_3$, где k_3 — коэфициент усиления усилителя.

Величина $NW(j\omega)$ будет равна

$$-NW(j\omega) = -\frac{k_1 k_2 k_3 e^{-j\omega T_p}}{j\omega T (1 + j\omega T_м) a}. \qquad (83)$$

Сделаем подстановку $\Omega = \omega T_м$ и введем обозначения

$$\tau = \frac{T_p}{T_м}; \quad G = \frac{k_1 k_2 k_3 T_м}{aT} = \frac{\omega_{вых.\,н} T_м}{\Delta\Theta},$$

где $\omega_{вых.\,н}$ — установившаяся скорость приемной оси при напряжении на двигателе, равном U;

$\Delta\Theta$ — половина ширины зоны нечувствительности в единицах угла поворота приемной оси;

$$\Delta\Theta = \frac{a}{k_1 k_2 k_3}.$$

Тогда уравнение (83) принимает вид

$$-NW(j\Omega) = -\frac{G}{j\Omega(1 + j\Omega)} e^{-j\Omega\tau} = U(\Omega) + jV(\Omega).$$

Релейная следящая система будет устойчивой, если амплитудно-фазовая частотная характеристика $-NW(j\Omega)$ не пересекает амплитудную характеристику z_0 релейного нелинейного элемента, т. е. если

$$U(\Omega_0) < \frac{\pi}{2}, \qquad (84)$$

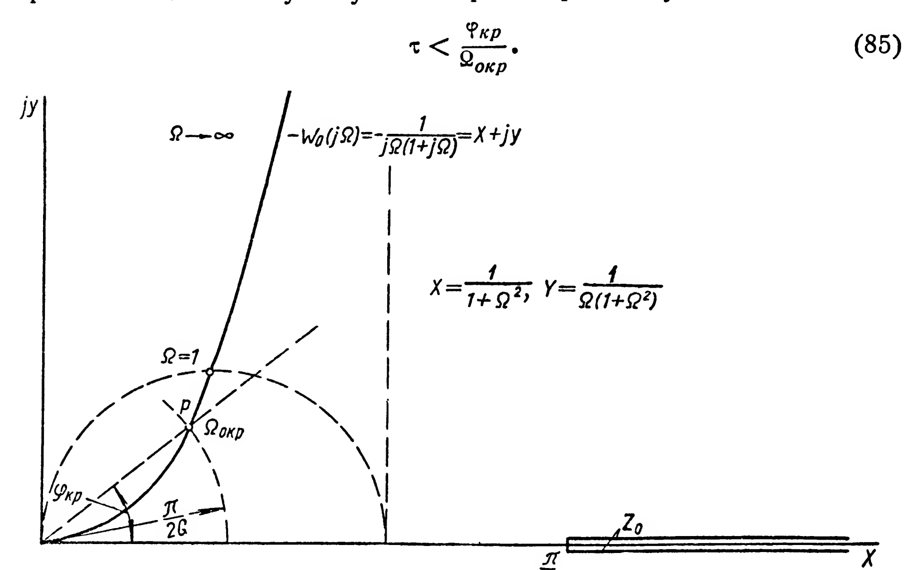
где Ω_0 — относительная частота пересечения, равная наименьшему корню уравнения $V(\Omega) = 0$.

Соотношение параметров следящей системы, которые удовлетворяют условию (84), наиболее легко определяется из графического построения

(фиг. 17). Для этого строим нормированную амплитудно-фазовую частотную характеристику $-\frac{1}{j\Omega(1+j\Omega)}$ и радиусом $\frac{\pi}{2G}$ проводим окружность до пересечения с амплитудно-фазовой частотной характеристикой [6]. Точка пересечения p определяет относительную критическую частоту пересечения $\Omega_{окр}$ и угол $\varphi_{кр}$.

Релейная следящая система будет устойчивой, если относительное время запаздывания будет удовлетворять неравенству

$$\tau < \frac{\varphi_{кр}}{\Omega_{окр}}. \tag{85}$$



Фиг. 17. График для определения критического времени запаздывания в релейной следящей системе.

При $G \gg 1$ относительная критическая частота пересечения $\Omega_{окр} > 1$, и уравнение нормированной частотной характеристики в параметрической форме при $\Omega > 1$ может быть приближенно написано в следующем виде:

$$U = \frac{1}{\Omega^2}; \quad V = \frac{1}{\Omega^3}$$

и

$$\rho = \sqrt{U^2 + V^2} \approx \frac{1}{\Omega^2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \varphi_{кр} \approx \varphi_{кр} = \frac{V}{U} = \frac{1}{\Omega_{окр}}.$$

Значение $\Omega_{окр}$ определяется из соотношения

$$\rho_{кр} = \frac{1}{\Omega_{окр}^2} = \frac{\pi}{2G}.$$

Таким образом, условие устойчивости приближенно может быть записано в следующем виде;

$$\tau < \frac{\varphi_{кр}}{\Omega_{окр}} = \frac{1}{\Omega^2_{окр}} = \frac{\pi}{2G}$$

или иначе

$$T_p < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta Q}{\omega_{вых.\, н}}.$$

Если неравенство (84) не соблюдается, в системе возникают колебания. Относительная частота колебаний, равная относительной частоте пересечения, будет определяться уравнением *

$$\operatorname{ctg} \Omega_0 \tau = \Omega_0. \tag{86}$$

Амплитуда колебаний находится из соотношения

$$U(\Omega_0) = K = z_0. \tag{87}$$

Уравнение (87) аналогично уравнению (80) и определяет два значения амплитуд $\frac{A}{a}$ (см. фиг. 15, *б*). В данном случае согласно критерию устойчивости колебаний будет устойчивой бо́льшая из амплитуд. Если начальное отклонение оси меньше $\left(\frac{A}{a}\right)_1 \Delta\Theta$, то колебания затухнут до нуля, если начальное отклонение больше $\left(\frac{A}{a}\right)_1 \Delta\Theta$, то в системе возникнут колебания с амплитудой $\left(\frac{A}{a}\right)_2 \Delta\Theta$. Значения $\left(\frac{A}{a}\right)_1$ и $\left(\frac{A}{a}\right)_2$ определяются из фиг. 15, *б*.

Допустим теперь, что усилитель имеет запаздывание и может быть представлен в виде инерционного звена с коэфициентом усиления k_3 и постоянной времени T_y, тогда

$$W_1(p) = \frac{k_3}{1 + pT_y}$$

и соответственно величина $-NW(j\Omega)$ принимает вид

$$-NW(j\Omega) = -\frac{Ge^{-j\Omega\tau}}{j\Omega(1 + j\Omega)(1 + j\Omega\tau_y)} = U(\Omega) + jV(\Omega), \tag{88}$$

где

$$\tau_y = \frac{T_y}{T_м}.$$

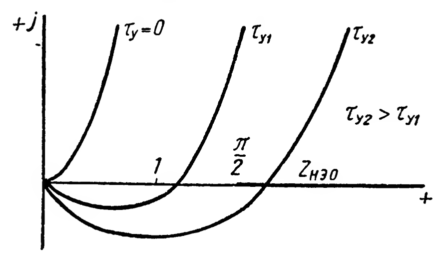
Система будет устойчивой, если

$$U(\Omega_0) < \frac{\pi}{2},$$

где Ω_0 — относительная частота пересечения, равная наименьшему корню уравнения $V(\Omega) = 0$.

* Уравнение (86) получается из условия $V(\Omega) = 0$.

Задачу наиболее наглядно можно решить графически. Для этого следует построить ряд нормированных амплитудно-фазовых частотных характеристик — $\frac{1}{j\Omega(1+j\Omega)(1+j\Omega\tau_y)}$ при различных значениях τ_y (фиг. 18). Если эта характеристика при заданном τ_y отсекает на вещественной оси отрезок, больший $\frac{\pi}{2G}$, то система неустойчива в большом при любом значении τ. Если отсекаемый отрезок меньше $\frac{\pi}{2G}$, то нахождение предельного τ производится построением, приведенным в примере, когда $\tau_y = 0$.



Фиг. 18. Амплитудно-фазовые частотные и амплитудная характеристики релейной следящей системы.

При весьма малом времени запаздывания реле можно с некоторой погрешностью представить реле в виде апериодического звена с постоянной времени, равной времени запаздывания T_p. В этом случае уравнение (88) становится аналогичным уравнению (75) и задача решается так, как показано в примере „а". Исследование релейных следящих систем с использованием излагаемого метода приведено в [6].

г) Влияние сухого трения на устойчивость систем регулирования

Рассмотрим систему регулирования, в которой нелинейный элемент с сухим трением включен последовательно с линейной частью системы регулирования согласно схеме фиг. 10. Анализ такой системы в первом приближении сводится к исследованию уравнения

$$-W(j\omega) = z\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{1}{N}\, z_0\left(\frac{A}{a}\right).$$

Согласно изложенному выше методу необходимо рассмотреть взаимные расположения амплитудно-фазовой частотной характеристики $-W(j\omega)$ и амплитудной характеристики z. Амплитудная характеристика нелинейного элемента с сухим трением при $N = 1$, т. е. характеристика $z_0\left(\frac{A}{a}\right)$, показана на фиг. 30. Поэтому взаимное расположение характеристик определяется видом только амплитудно-фазовой частотной характеристики $-NW(j\omega)$.

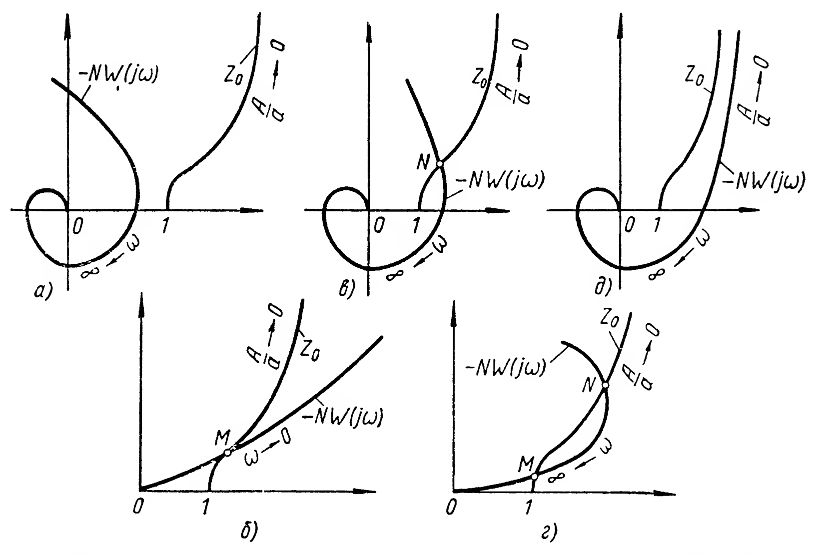
Некоторые из возможных случаев взаимного расположения характеристик показаны на фиг. 19.

На фиг. 19, *а* показана амплитудно-фазовая частотная характеристика $-NW(j\omega)$, которая не охватывает точку $(1, j0)$ и не пересекает амплитудной характеристики z_0. Такая система, будучи устойчивой в отсутствие нелинейного элемента (сухого трения), остается устойчивой и при его наличии.

На фиг. 19, *б* показана амплитудно-фазовая частотная характеристика $-NW(j\omega)$, которая не охватывает точку $(1, j0)$ и пересекает амплитудную характеристику z_0 в точке M. Эта точка определяет

частоту и амплитуду возникающих колебаний. Колебания эти устойчивы согласно изложенному критерию устойчивости колебаний. Таким образом, рассматриваемая система, будучи устойчивой при отсутствии нелинейного элемента, оказывается неустойчивой (в смысле возникновения колебаний) при наличии нелинейного элемента.

На фиг. 19, *в* показана амплитудно-фазовая частотная характеристика $-NW(j\omega)$, которая охватывает точку $(1, j0)$ и пересекает амплитудную характеристику z_0 в точке N. Точке N соответствуют неустойчивые колебания. Система устойчива в малом. Это означает, что если



Фиг. 19. Различные случаи взаимного расположения частотной и амплитудной характеристик.

начальное отклонение меньше, чем соответствующее точке N, то колебания в системе не возникают, если же оно больше, то амплитуда колебаний возрастает и не может быть ограничена данным нелинейным элементом.

На фиг. 19, *г* показан случай, когда характеристики пересекаются в двух точках N и M. Первая из них соответствует неустойчивым колебаниям, вторая — устойчивым. Если начальное отклонение меньше, чем соответствующее точке N, колебания в системе затухают, если больше, то возникают колебания, определяемые точкой M. Поскольку амплитудно-фазовая частотная характеристика $-NW(j\omega)$ не охватывает точку $(1, j0)$, рассматриваемая система при отсутствии нелинейного элемента является устойчивой.

На фиг. 19, *д* показан случай, когда характеристики не пересекаются; при этом амплитудно-фазовая частотная характеристика $-NW(j\omega)$ охватывает амплитудную характеристику z_0. В этом случае линейная система, будучи неустойчивой при отсутствии нелинейного элемента, остается неустойчивой и при его наличии.

5. АНАЛИЗ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ НЕНУЛЕВОГО ПОРЯДКА

В некоторых случаях уравнение нелинейного элемента системы регулирования может быть задано в виде

$$F(p)x_2+\psi(x_2)=x_1, \tag{89а}$$

где $F(p)$ — полином от p $\left(p\equiv\frac{dt}{d}\right)$ или в виде

$$x_2=\Phi(x_1, \dot{x}_1), \tag{89б}$$

где x_1 и $\dot{x}_1$ входят не в линейной комбинации[1].

Уравнения (89а) и (89б), описывающие нелинейный элемент, мы будем называть уравнениями ненулевого порядка в отличие от уравнения (61), причем для уравнения (89а) порядок уравнения будем определять степенью полинома $F(p)$.

В качестве примеров систем, в которых уравнение нелинейного элемента дается в виде уравнения (89а), можно указать на систему с насыщенным генератором, на систему с нелинейной пружиной при учете массы подвижных частей, на электрическую цепь, содержащую нелинейное сопротивление, и т. д.

К уравнению вида (89б) может привести задача регулирования по отклонению величины и ее производной, задача с нелинейной пружиной и нелинейным демпферным устройством и т. д.

а) Система регулирования с нелинейным элементом, уравнение которого задано в виде $F(p)x_2+\psi(x_2)=x_1$.

Рассмотрим систему регулирования, уравнение которой имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_3&=W_л(p)x_2;\\ x_1&=-x_3;\\ F(p)x_2+\psi(x_2)&=x_1. \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Если искать решение для установившегося режима в виде

$$x_2=A_2\sin\omega t,$$

то допускается существенная ошибка, так как x_2 представляет выходную величину нелинейного элемента, которая в системах автоматического регулирования наиболее резко (по сравнению с x_1 — входной величиной нелинейного элемента) отличается от синусоидальной функции. Такое соотношение величин x_1 и x_2 целиком обусловлено характеристикой линейной части системы как низкочастотного фильтра. Поэтому вначале целесообразно из выражения

$$\psi(x_2)=y$$

---

[1] В противном случае уравнение (89б) может быть переписано в виде

$$x_2=\varphi(ax_1+b\dot{x}_1)=\varphi(z),$$

где $z=ax_1+b\dot{x}_1$, т. е. сведено к виду уравнения (61).

найти обратную функцию

$$x_2 = \psi^{-1}(y) = \Phi(y) \tag{91}$$

и далее, полагая $y = A_1 \sin \omega t$, решать задачу указанным выше методом

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= W_л(j\omega)\, x_2; \\ x_1 &= -x_3; \\ F(j\omega)\, x_2 + y &= x_1; \\ x_2 &= J(A_1)\, y. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Отсюда получаем

$$J(A_1) = -\frac{1}{W_л(j\omega) + F(j\omega)} = W_п(j\omega) \tag{93}$$

Таким образом, решение системы уравнений (92) сводится к построениям, аналогичным тем, которые были приведены в п. 2. Необходимо, следовательно, для решения задачи построить амплитудно-фазовую частотную характеристику $W_п(j\omega)$ и амплитудную характеристику нелинейного элемента $J(A_1)$.

б) Системы регулирования с нелинейным элементом, уравнение которого задано в виде $x_2 = \Phi(x_1, \dot{x}_1)$

Уравнения системы регулирования в этом случае будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= W(p)\, x_2; \\ x_2 &= \Phi(x_1; \dot{x}_1); \\ x_3 &= -x_1. \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

Как и в п. 2, будем искать решение для установившегося режима в виде

$$x_1 = A_1 \sin \omega t,$$

тогда уравнения (94) принимают вид

$$x_1 = -W(j\omega)\, x_2; \tag{95}$$

$$x_2 = \Phi(A_1 \sin \omega t;\ \omega A_1 \cos \omega t). \tag{96}$$

Согласно методу гармонического баланса последнее уравнение можно записать в виде

$$x_2 = J(A_1; \omega)\, x_1, \tag{97}$$

где

$$J(A_1;\ \omega) = g(A_1;\ \omega) + jb(A_1;\ \omega);$$

$$g(A_1; \omega) = \frac{1}{A_1 \pi} \int_0^{2\pi} \Phi(A_1 \sin \omega t;\ A_1 \omega \cos \omega t) \sin \omega t dt;$$

$$b(A_1; \omega) = \frac{1}{A_1 \pi} \int_0^{2\pi} \Phi(A_1 \sin \omega t;\ A_1 \omega \cos \omega t) \cos \omega t dt.$$

Таким образом, эквивалентный комплексный коэфициент усиления нелинейного элемента в данном случае зависит не только от амплитуды входного сигнала A_1, но и его частоты ω. В этом состоит существенное отличие полученных формул для эквивалентного комплексного коэфициента усиления от ранее найденных формул (64) и (66).

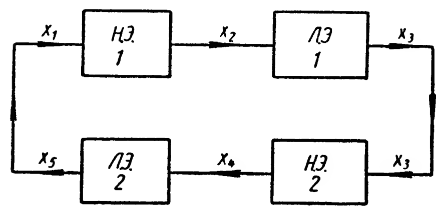
Из уравнений (95) и (97) непосредственно следует:

$$-W(j\omega)=\frac{1}{J(A_1;\omega)}=z(A_1;\ \omega). \tag{98}$$

Построив сетку амплитудных характеристик $z(A_1;\omega)$ для разных значений ω, можно уравнение (97) решить графически. Решение будет определяться точкой пересечений амплитудно-фазовой частотной характеристики $-W(j\omega)$ с амплитудной характеристикой $z(A_1;\ \omega)$, для которой частота ω будет совпадать со значением частоты на амплитудно-фазовой частотной характеристике в точке пересечения.

в) Системы регулирования с несколькими нелинейными элементами, между которыми включены линейные элементы

Пусть дана система регулирования, состоящая из последовательно включенных двух линейных и двух нелинейных элементов (фиг. 20). Уравнения нелинейных элементов заданы в виде $x_2=\Phi_1(x_1)$ и $x_4=\Phi_2(x_3)$. Между нелинейными элементами включены линейные элементы. Будем предполагать, что линейные элементы представляют фильтры низкой частоты.



Фиг. 20. Структурная схема системы регулирования с двумя нелинейными элементами *н. э.-1* и *н. э.-2*, разъединенных линейными элементами *л. э.-1* и *л. э.-2*.

Это значит, что, допуская изменение входной величины *н. э.-1* (фиг. 20) — x_1 по закону $x_1=A_1\sin\omega t$, будем считать, что выходная величина *л. э.-1* — x_3 также содержит только первую гармонику. Сделанное допущение, следовательно, предполагает, что высшие гармоники, входящие в спектр x_2, гасятся при прохождении через *л. э.-1*. Мы предполагаем также, что указанное относится в равной мере к системе, состоящей из *н. э.-2* и *л. э.-2*. Эти допущения имеют практически, как правило, тем бо́льшую силу, чем выше порядок уравнения, описывающий *л. э.-1* и *л. э.-2*.

Учитывая сказанное, можно написать следующую систему уравнений для структурной схемы, показанной на фиг. 20:

$$x_2=J_1(A_1)x_1;$$
$$x_3=W_1(j\omega)x_2=W_1(j\omega)J_1(A_1)x_1;$$
$$x_4=J_2(|x_3|)x_3=J_2(|W_1(j\omega)J_1(A_1)A_1|)W_1(j\omega)J_1(A_1)x_1;$$
$$x_5=W_2(j\omega)x_4=W_2(j\omega)J_2(|W_1(j\omega)J(A_1)A_1|)W_1(j\omega)J_1(A_1)x_1;$$
$$x_5=-x_1.$$

Из последних двух уравнений следует

$$-W_1(j\omega)\,W_2(j\omega)=\frac{1}{J_1(A_1)\,J_2(|W_1(j\omega)\,J_1(A_1)\,A_1|)}.$$

Обозначая

$$W_1(j\omega)\,W_2(j\omega)=W(j\omega)$$

и

$$\frac{1}{J(|a|)}=z(|a|),$$

получим

$$-W(j\omega)=z_1(A_1)\,z_2(|W_1(j\omega)\,J_1(A_1)\,A_1|)$$

или

$$-W(j\omega)=z_n(A_1;\ \omega), \tag{99}$$

где

$$z_n(A_1;\omega)=z_1(A_1)\,z_2(|W_1(j\omega)\,J_1(A_1)\,A_1|). \tag{99a}$$

Уравнение (99) можно решить графически: левая часть представляет амплитудно-фазовую частотную характеристику линейной части системы, правая — приведенную амплитудную характеристику нелинейной части, которая должна быть построена для разных значений A_1 и ω_1 (семейство амплитудных характеристик при $\omega=\text{const}$). Точка пересечения амплитудно-фазовой частотной характеристики линейной части системы с амплитудной характеристикой нелинейной части при условии, что частоты в точке пересечения для амплитудно-фазовой частотной характеристики и амплитудной характеристики совпадают, определяет значение A_1 и ω. Подобные построения можно провести при наличии не двух, а большего количества нелинейных элементов, разъединенных линейными элементами. Необходимо отметить, что построения сильно усложняются с ростом числа нелинейных элементов.

В качестве примера рассмотрим систему регулирования, состоящую из четырех последовательно соединенных элементов, из которых два нелинейны. Характеристика первого нелинейного элемента показана на фиг. 21, *а*, второго — на фиг. 21, *б*. Передаточная функция первого линейного элемента пусть будет $W_1(p)$ и второго — $W_2(p)$. Для решения задачи об автоколебаниях необходимо согласно уравнению (99) построить приведенную амплитудную характеристику $z_n(A_1;\ \omega)$, которая задается уравнением (99а).

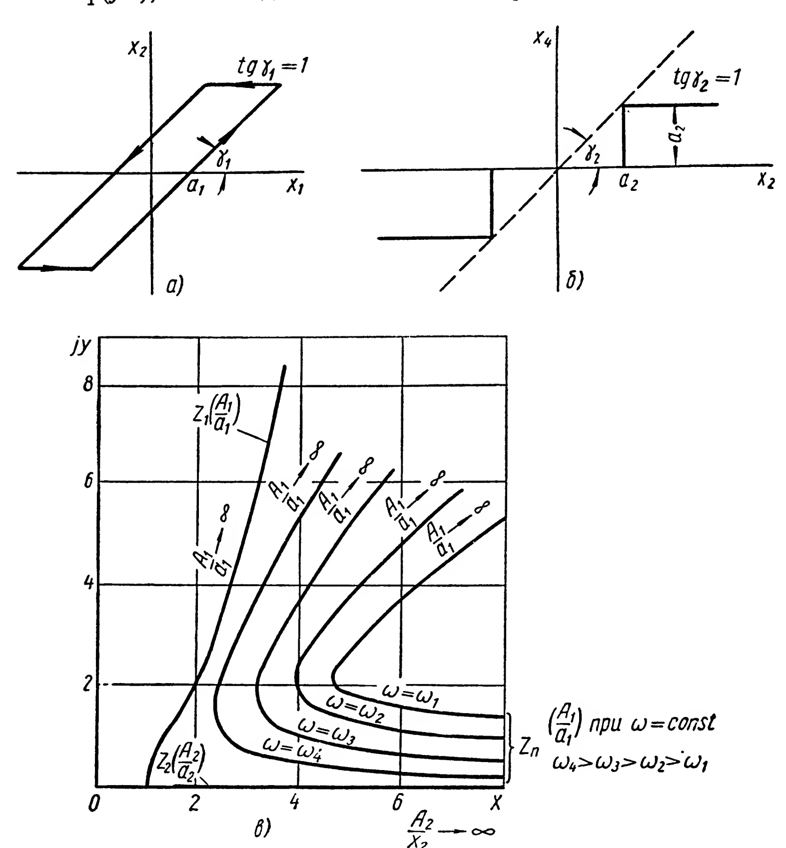
Крутизна нелинейных характеристик в обоих случаях принята равной единице ($\operatorname{tg}\gamma_1=\operatorname{tg}\gamma_2=1$) (фиг. 21). Если крутизна отлична от единицы, то соответствующий множитель следует ввести в передаточную функцию первого или второго линейного элемента. Будем измерять амплитуды колебаний в относительных единицах. В этом случае уравнение (99а) перепишется в виде

$$z_n\left(\frac{A_1}{a_1};\ \omega\right)=z_1\left(\frac{A_1}{a_1}\right)z_2\left(\frac{A_2}{a_2}\right),$$

где

$$\frac{A_2}{a_2}=\left|W_1(j\omega)\,J_1\left(\frac{A_1}{a_1}\right)\frac{A_1}{a_1}\cdot\frac{a_1}{a_2}\right|.$$

На фиг. 21, *в* приведены амплитудные характеристики $z_1\left(\frac{A_1}{a_1}\right)$ и $z_2\left(\frac{A_2}{a_2}\right)$. Задаваясь значением $\frac{A_1}{a_1}$ и зная величину $\frac{a_1}{a_2}$, а также амплитудно-фазовую частотную характеристику первого линейного элемента — $W_1(j\omega)$, можно для заданного ω построить приведенную ампли-



Фиг. 21. Построение приведенных амплитудных характеристик $z_n\left(\frac{A_1}{a_1}\right)$:

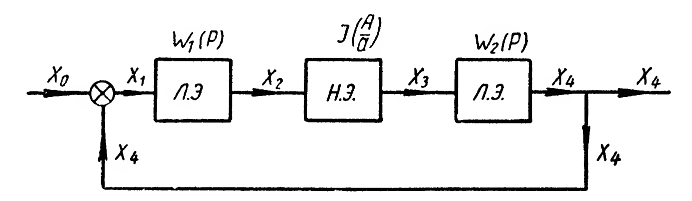
а — характеристика первого нелинейного элемента z_1; *б* — характеристика второго нелинейного элемента z_2; *в*—приведенные амплитудные характеристики $z_n\left(\frac{A_1}{a_1}\right)$ при $\omega=$ const.

тудную характеристику $z_n\left(\frac{A_1}{a_1}\right)$. Общий вид этих характеристик для разных значений ω показан на фиг. 21, *в*. Если модуль $W_1(j\omega)$ с увеличением ω уменьшается, что обычно имеет место, то характеристики $z_n\left(\frac{A_1}{a_1}\right)$ при $\omega=$ const с увеличением ω будут охватывать друг друга. Имея сетку характеристик $z_n\left(\frac{A_1}{a_1}\right)$ при $\omega=$ const, необходимо для решения уравнения (99) построить амплитудно-фазовую частотную харак-

теристику линейной части системы — $W(j\omega) = -W_1(j\omega)W_2(j\omega)$. Точка пересечения характеристики — $W(j\omega)$ с характеристикой $z_n\left(\frac{A_1}{a_1}\right)$ при условии, что частоты для обеих характеристик совпадают, определяет значение $\frac{A_1}{a_1}$ и ω. Для каждого конкретного случая можно определить условия, при которых автоколебания не возникают, т. е. когда характеристики — $W(j\omega)$ и $z_n\left(\frac{A_1}{a_1}\right)$ не пересекаются и не охватывают друг друга.

6. СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

При анализе линейных систем регулирования иногда в качестве грубой оценки их качества рассматривают максимальную величину отношения выхода к входу системы — M_m при изменении частоты сигнала на входе от 0 до ∞. Считают, что система в первом приближении удовлетворительна, если $M_m < 1{,}2$.



Фиг. 22. Структурная схема следящей системы.

Подобный метод оценки качества может быть использован при исследовании нелинейной системы. В этом случае результаты должны рассматриваться, конечно, как первое грубое приближение.

Рассмотрим нелинейную следящую систему, структурная схема которой показана на фиг. 22. Если входная величина x_0 изменяется по гармоническому закону и в нелинейной системе при этом возникают колебания, первая гармоника которых имеет частоту входной величины, то можно написать следующее уравнение:

$$M(j\omega) = \frac{x_4}{x_0} = \frac{W(j\omega)\,J\left(\frac{A}{a}\right)}{1 + W(j\omega)\,J\left(\frac{A}{a}\right)}, \tag{100}$$

где

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)\,W_2(j\omega);$$

A — амплитуда величины x_2 на входе нелинейного элемента.

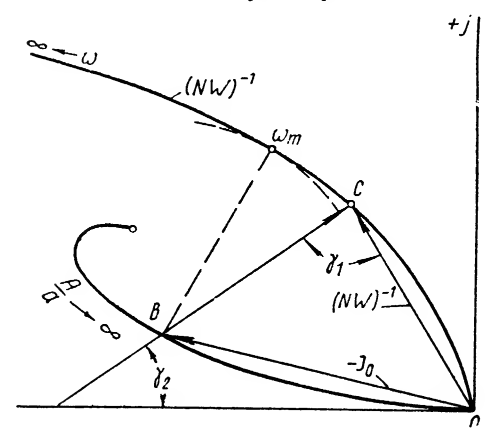
Уравнение (100) может быть представлено в виде

$$M(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{z\left(\frac{A}{a}\right) + W(j\omega)} = \frac{NW(j\omega)}{z_0 + NW(j\omega)} \tag{100a}$$

или

$$M(j\omega)=\frac{J\left(\frac{A}{a}\right)}{[W(j\omega)]^{-1}+J\left(\frac{A}{a}\right)}=\frac{J_0\left(\frac{A}{a}\right)}{[NW(j\omega)]^{-1}+J_0\left(\frac{A}{a}\right)}. \qquad (100б)$$

В первом случае для графического определения $M(j\omega)$ необходимо построение амплитудно-фазовой частотной характеристики — $NW(j\omega)$ и амплитудной $z_0\left(\frac{A}{a}\right)$, во втором случае — соответственно $[NW(j\omega)]^{-1}$ и $-J_0\left(\frac{A}{a}\right)$.



Фиг. 23. Амплитудно-фазовая частотная и амплитудная характеристики нелинейной системы.

Воспользуемся вторым, в данном случае более удобным, приемом. Амплитудно-фазовая частотная характеристика и амплитудная характеристика $-J_0\left(\frac{A}{a}\right)$ показаны на фиг. 23.

Определим величину $|M(j\omega)|$ для данного значения амплитуды $\left(\frac{A}{a}\right)$ и частоты ω. Амплитуда $\left(\frac{A}{a}\right)$ определяет точку B, частота ω — точку C (см. фиг. 23). Согласно равенству (100б) и фиг. 23 имеем

$$M=|M(j\omega)|=\frac{\left|J_0\left(\frac{A}{a}\right)\right|}{\left|[NW(j\omega)]^{-1}+J_0\left(\frac{A}{a}\right)\right|}=\frac{OB}{BC}. \qquad (101)$$

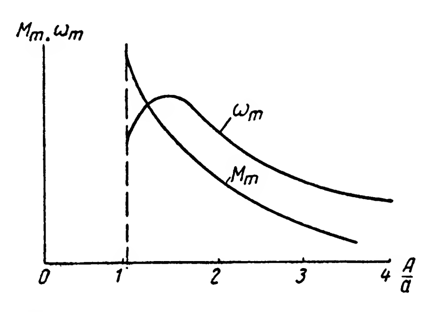
Для данного значения $\left(\frac{A}{a}\right)$ отрезок OB остается постоянным, и, таким образом, величина M будет изменяться при изменении частоты ω вследствие изменения отрезка BC. Величина M будет максимальна при минимальном значении BC:

$$M_m=\frac{OB}{BC_{\min}}. \qquad (102)$$

Величина $BC_{\min}$ определяется как минимальный радиус окружности, касающейся амплитудно-фазовой частотной характеристики и имеющей центр в точке B. Частоту в точке касания (фиг. 23), соответствующую максимуму M, обозначим ω_m. Указанным построением можно для каждого значения $\left(\frac{A}{a}\right)$ определить M_m и ω_m. На фиг. 24 показан вид

кривых $M_m\left(\frac{A}{a}\right)$ и $\omega_m\left(\frac{A}{a}\right)$ для частного случая. При больших значениях $\left(\frac{A}{a}\right)$ величина M_m меньше, и поэтому можно считать, что отработка больших возмущений происходит с меньшими колебаниями, чем отработка малых. Удовлетворительные результаты получаются, если наибольшее значение M_m меньше 2 и для больших значений $\frac{A}{a}$ не превышает 1,3.

В тех случаях, когда качество процесса регулирования неудовлетворительно, введение корректирующих контуров, деформируя амплитудно-фазовую частотную характеристику, может значительно улучшить характер переходного процесса.



Фиг. 24. Графики зависимости (частный случай).

В одном примере релейной следящей системы можно было получить сравнительно удовлетворительные результаты путем увеличения зоны нечувствительности (уменьшение величины N), и значительно лучшие результаты были получены при использовании корректирующего контура из сопротивления и емкости. Переходный процесс во втором случае оказывается более удовлетворительным, и зона нечувствительности сокращалась примерно в 8 раз.

7. НЕЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Рассмотрим поведение нелинейной системы, к которой приложено гармоническое воздействие [1]. Предположим, как и ранее, что частота первой гармоники установившихся колебаний в системе равна частоте воздействия. В этом случае согласно схеме (см. фиг. 22), можно написать:

$$x_2 = \frac{W_1(j\omega)}{1 + W(j\omega)\, J\left(\frac{A}{a}\right)}\, x_0, \tag{103}$$

где

$$x_0 = x_{0\,m} e^{j\omega t};\quad W(j\omega) = W_1(j\omega)\, W_2(j\omega);$$

A — амплитуда первой гармоники x_2.

Уравнение (103) позволяет весьма просто определить значение амплитуды возмущающего воздействия x_{0m} при заданном значении его частоты ω, если задаться величиной A.

---

[1] Способ построения амплитудно-фазовых характеристик замкнутой нелинейной системы, при котором используется эквивалентный комплексный коэфициент усиления и обратная амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части, был предложен М. А. Айзерманом. Здесь приводится несколько измененное построение.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $W_1(j\omega)=1$.

Согласно уравнению (103) имеем

$$\frac{x_2}{x_0}=\frac{1}{1+WJ}=\frac{[W]^{-1}}{[W]^{-1}+J}=\frac{[NW]^{-1}}{[NW]^{-1}+J_0}. \tag{104}$$

Амплитуда A при заданном значении a определяет точку B на амплитудной характеристике $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$, частота ω определяет точку C на амплитудно-фазовой частотной характеристике $[NW(j\omega)]^{-1}$ (см. фиг. 23).

Из уравнения (104) и фиг. 23 следует:

$$\left|\frac{x_2}{x_0}\right|=\frac{A}{x_{0m}}=\frac{[NW]^{-1}}{[NW]^{-1}+J_0}=\frac{OC}{BC},$$

откуда

$$x_{0m}=\frac{BC}{OC}A; \tag{105}$$

фаза колебаний x_2 определяется углом γ_1 (см. фиг. 23).

Второй случай: $W_2(j\omega)=1$, т. е. $W(j\omega)=W_1(j\omega)$.

Согласно уравнению (103) имеем

$$\frac{x_2}{x_0}=\frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)J\left(\frac{A}{a}\right)}=\frac{\frac{1}{N}}{[NW]^{-1}+J_0},$$

откуда

$$\left|\frac{x_2}{x_0}\right|=\frac{A}{x_{0m}}=\frac{\frac{1}{N}}{|[NW]^{-1}+J_0|}=\frac{\frac{1}{N}}{BC}$$

и

$$x_{0m}=BCNA. \tag{106}$$

Фаза колебаний x_2 определяется углом γ_2.

В случае, когда $W_1(j\omega)\neq 1$ и $W_2(j\omega)\neq 1$, построения усложняются. Если заданы частота ω и амплитуда x_{0m} возмущающего воздействия, то задача нахождения точки C на амплитудно-фазовой частотной характеристике и определение амплитуды A сводятся к нахождению точки B на амплитудной характеристике, которая удовлетворяла бы уравнениям (105) или (106). Более полно этот вопрос рассмотрен в [8].

8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОГО КОМПЛЕКСНОГО КОЭФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Значение эквивалентного комплексного коэфициента усиления нелинейного элемента определяется уравнениями (64) и (66). Определим величину нормированного эквивалентного комплексного коэфициента усиления нелинейного элемента $J_0=\left(\frac{J}{N}\right)=g_0+jb_0$ и величину N для ряда нелинейных характеристик.

а) Характеристика показана на фиг. 25. Значение $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$ определяется соотношением

$$J_0\left(\frac{A}{a}\right) = 1 - \frac{2\alpha - \sin 2\alpha + 4\frac{a}{A}\cos\alpha}{\pi},$$

где $\alpha = \arcsin\frac{a}{A}$; $N = \operatorname{arctg}\beta$.

График $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$ приведен на фиг. 25.

б) Характеристика показана на фиг. 26. Значение $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$ определяется соотношением

$$J_0\left(\frac{A}{a},\ n\right) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} - \frac{\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1}{4} - \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{\frac{A}{a}} + \frac{\cos\alpha_2}{\frac{A}{a(n-1)}}\right];$$

$$\alpha_1 = \arcsin\frac{a}{A};$$

$$\alpha_2 = \arcsin\frac{na}{A};$$

$$N = \operatorname{arctg}\beta = \frac{B}{a(n-1)}.$$

Фиг. 25. Графики зависимости $J_0 = f\left(\frac{A}{a}\right)$.

Графики $J_0\left(\frac{A}{a},\ n\right)$ приведены на фиг. 26.

в) Характеристика показана на фиг. 27. Значение $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$ определяется соотношением

$$J_0\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\cos\alpha}{\frac{A}{a}}\right];$$

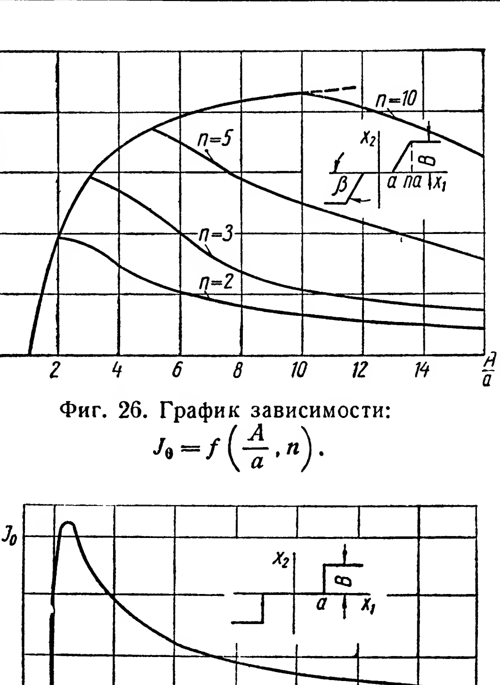
$$\alpha = \arcsin\frac{a}{A}; \quad N = \operatorname{arctg}\beta = \frac{B}{a}.$$

График $J_0 = \left(\frac{A}{a}\right)$ приведен на фиг. 27.

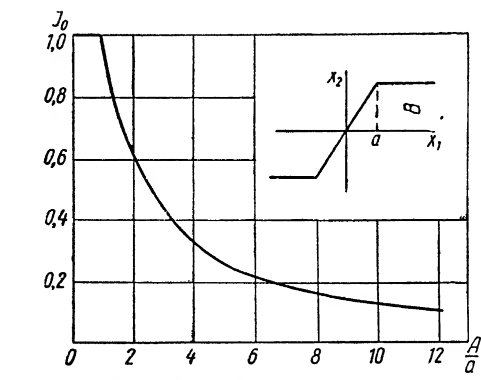
г) Характеристика показана на фиг. 28. Значение $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$ определяется соотношением

$$J_0\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{a}{A}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}; \qquad N = \frac{B}{a}.$$

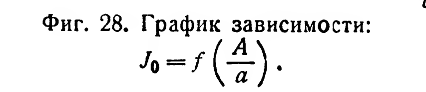
График $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$ приведен на фиг. 28.



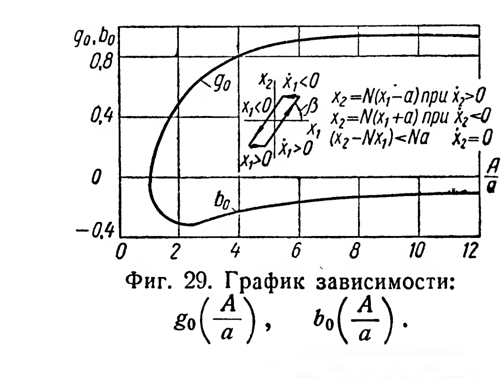
Фиг. 26. График зависимости:
$$J_0 = f\left(\frac{A}{a}, n\right).$$



Фиг. 27. График зависимости:
$$J_0 = f\left(\frac{A}{a}\right).$$



Фиг. 28. График зависимости:
$$J_0 = f\left(\frac{A}{a}\right).$$



Фиг. 29. График зависимости:
$$g_0\left(\frac{A}{a}\right), \quad b_0\left(\frac{A}{a}\right).$$

д) Характеристика показана на фиг. 29. Характеристика неоднозначна, и поэтому $b_0\left(\frac{A}{a}\right) \neq 0$. Значение $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$ определяется соотношением

$$J_0\left(\frac{A}{a}\right) = g_0\left(\frac{A}{a}\right) + jb_0\left(\frac{A}{a}\right),$$

где

$$g_0\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{3}{4}\pi - \frac{\alpha}{2} - \cos\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{a}{A}\,2\cos\alpha\right];$$

$$b_0\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{3}{4} + \sin^2\alpha + \frac{1}{4}\cos 2\alpha\right);$$

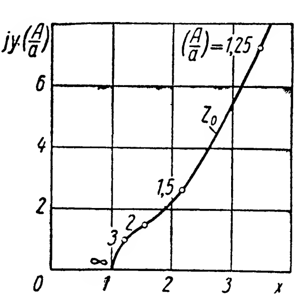
$$\alpha = \arcsin\left(1 - 2\frac{a}{A}\right);$$

$$N = \operatorname{arctg}\beta.$$

Подставляя значение α в выражение $b_0\left(\frac{A}{a}\right)$, получим

$$b_0\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{3}{4} + \sin^2\alpha + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\cos 2\alpha\right] = -\frac{4}{\pi}\cdot\frac{a}{A}\left(1 - \frac{a}{A}\right),$$

что совпадает с результатом, непосредственно получаемым согласно уравнениям (65) и (65а).



Фиг. 30. Амплитудная характеристика нелинейного элемента с сухим трением или зазором.

Графики $g_0\left(\frac{A}{a}\right)$ и $b_0\left(\frac{A}{a}\right)$ приведены на фиг. 29.

Амплитудная характеристика $z_0\left(\frac{A}{a}\right)$ приведена на фиг. 30.

е) Характеристика показана на фиг. 31. Значение $J_0\left(\frac{A}{a}, m\right)$ определяется соотношениями

$$J_0\left(\frac{A}{a}, m\right) = g_0\left(\frac{A}{a}, m\right) + jb_0\left(\frac{A}{a}, m\right) = |J_0|\,e^{-j\gamma},$$

где

$$g_0\left(\frac{A}{a}, m\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{a}{A}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2);$$

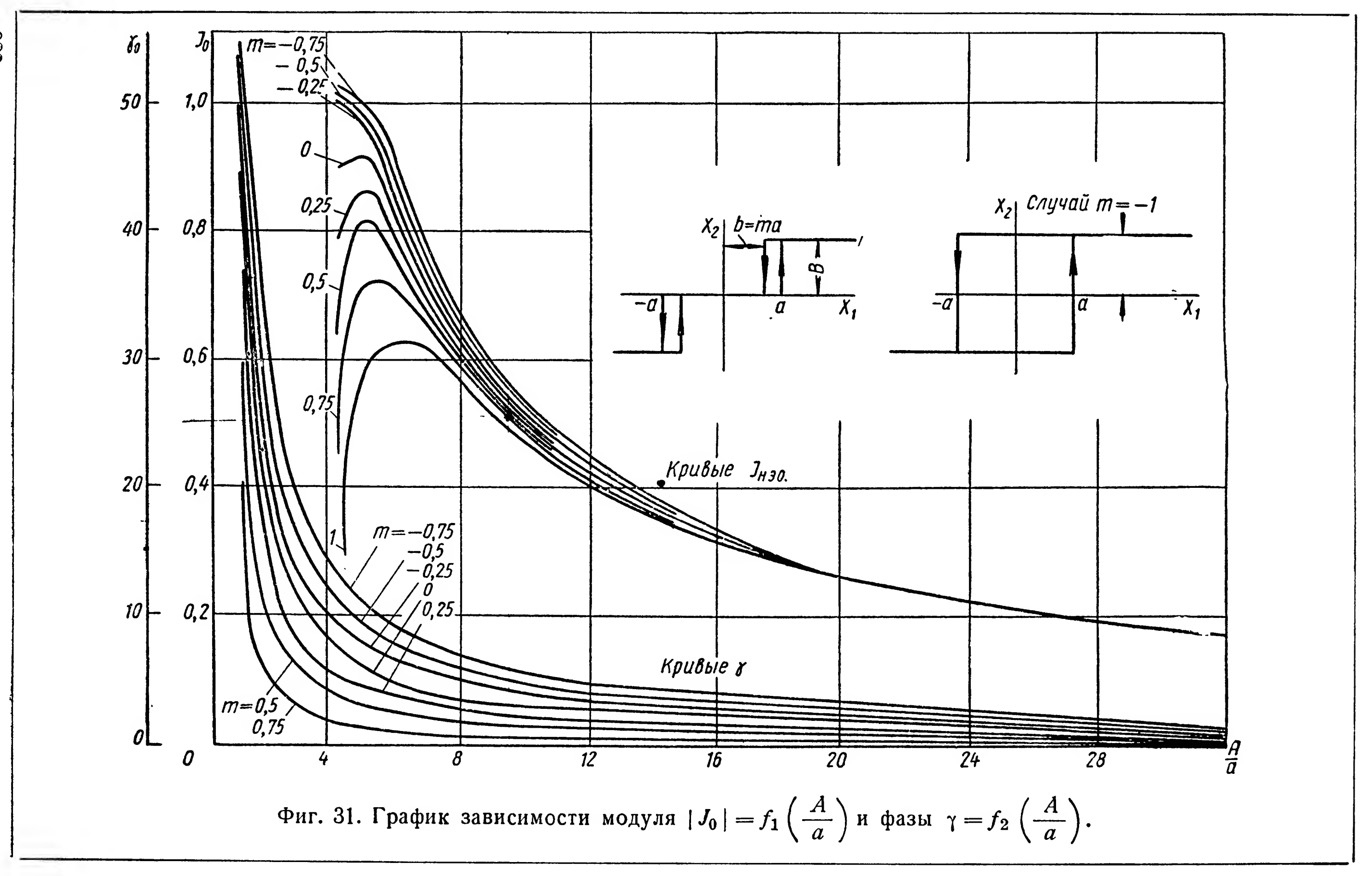
$$b_0\left(\frac{A}{a}, m\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{a}{A}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1);$$

$$\alpha_1 = \arcsin\frac{a}{A}; \quad \alpha_2 = \pi - \arcsin\frac{ma}{A}; \quad N = \frac{B}{a}.$$

Подставляя значение α_1 и α_2 в выражение $b_0\left(\frac{A}{a}, m\right)$, получим

$$b_0\left(\frac{A}{a}, m\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{A}{a}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{A}\right)^2(1 - m),$$

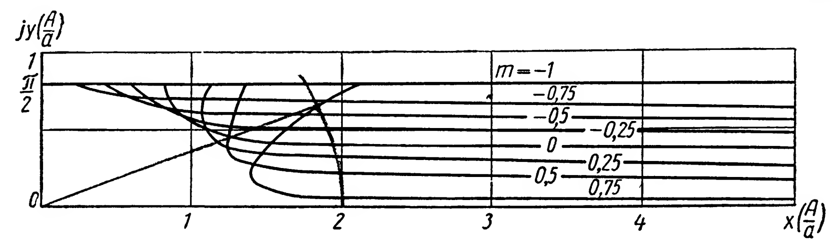
что совпадает с результатом, непосредственно получаемым согласно уравнениям (65) и (65а).



Фиг. 31. График зависимости модуля $|J_0| = f_1\left(\frac{A}{a}\right)$ и фазы $\gamma = f_2\left(\frac{A}{a}\right)$.

Графики $|J_0|$ и γ в функции $\frac{A}{a}$ приведены на фиг. 31 для различных m. На фиг. 32 приведены амплитудные характеристики z_0 для различных значений m.

При исследовании вибрационных регуляторов особый интерес представляет случай, когда $m = -1$ и характеристика имеет вид, графи-



Фиг. 32. Амплитудные характеристики $z_0 = f\left(\frac{A}{a}; m\right)$.

чески изображенный на фиг. 31. Выражение для $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$ упрощается и имеет вид

$$J_0\left(\frac{A}{a}\right) = |J_0| e^{-j\gamma},$$

где

$$|J_0| = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{a}{A}; \quad \gamma = \arcsin\frac{a}{A},$$

отсюда

$$z_0\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{A}{a} e^{j\gamma}.$$

Амплитудная характеристика $z_0\left(\frac{A}{a}\right)$ в этом случае представляет прямую, параллельную вещественной оси на расстоянии $\frac{\pi}{4}$ от нее (фиг. 32).

Более подробно вычисление эквивалентного комплексного коэфициента усиления нелинейных элементов приведено в [2] и [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, изд. АН УССР, 1937.
2. Гольдфарб Л. С., „Автоматика и телемеханика“, т. 8, № 5, 1947.
3. Гольдфарб Л. С., „Автоматика и телемеханика“, т. 9, № 6, 1948.
4. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, ГИТТЛ, 1951.
5. Цыпкин Я. З., „Автоматика и телемеханика“, т. 7, № 2—3, 1946.
6. Лехтман И. Я., „Автоматика и телемеханика“, т. 12, № 1, 1951.
7. Кохенбургер К. — Tr AI. E. E., vol. 69, part I, p. 270—284.
8. Гольдфарб Л. С., Статья в сборнике „Теория автоматического регулирования“, Машгиз, 1951.

ГЛАВА XXXIV

СОПОСТАВЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ И ОБЛАСТЬ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

В двух предыдущих главах были изложены два различных приема, применяемых для приближенного определения периодических режимов, которые могут устанавливаться в системах автоматического регулирования, содержащих нелинейный элемент.

Один из этих приемов (глава XXXIII) использует метод гармонического баланса, предложенный Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [3], а другой прием (глава XXXII) был разработан Б. В. Булгаковым [2] на базе метода Пуанкаре [1]. Необходимость применения таких методов вызвана тем, что точное решение задачи об определении периодических режимов может быть проведено лишь в наиболее простых случаях, когда нелинейная характеристика составлена из отрезков прямых. Даже в этом сравнительно простом случае построение точных решений сопряжено с громоздкими выкладками, так что рассмотрение каждой новой задачи требует самостоятельного исследования, выходящего далеко за пределы обычных инженерных расчетов[1].

В тех случаях, когда необходимо получить результат сравнительно простыми расчетами и построениями, приходится обращаться к помощи приближенных методов. Разумеется, упрощения, которые вносятся ими, опираются на далеко идущие гипотезы, ограничивающие область применения таких методов. Чтобы выяснить область применения тех методов, о которых выше шла речь, необходимо проанализировать гипотезы, положенные в их основу, и выяснить, в какой мере условия этих гипотез выполняются в системах автоматического регулирования [10]. Этот анализ позволит одновременно сопоставить различные приближенные методы и выяснить, в каких случаях эти методы приводят к одинаковым, а в каких к различным результатам и какие из этих результатов более точны.

1. УСЛОВИЯ СИНУСОИДАЛЬНОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ

Оба метода, описанные в главах XXXII и XXXIII, исходят прежде всего из предположения, что рассматриваемые колебания по форме мало отличаются от синусоидальных.

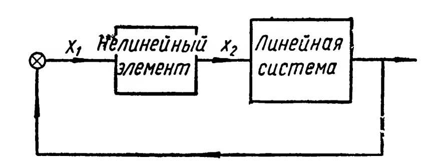
---

[1] Исключение составляют релейные системы, для которых точные методы определения периодических режимов доведены до простоты. Этому кругу вопросов посвящен следующий раздел книги.

При каких условиях такое предположение можно считать обоснованным?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим установившийся колебательный режим в цепи, состоящей из произвольной линейной системы, замкнутой через нелинейный элемент (фиг. 33). Предположим, что колебания входной координаты нелинейного элемента x_1 точно синусоидальны. Тогда колебания выходной координаты нелинейного элемента x_2 отличаются по форме от колебаний на входе и являются уже несинусоидальными. Разложим эти колебания координаты x_2, вызванные гармоническим воздействием, поданным на вход нелинейного элемента, в ряд Фурье.

Если характеристика нелинейного элемента несимметрична, ряд этот будет содержать свободный член, т. е. колебания выходной координаты будут происходить относительно средней линии, смещенной по отношению к средней линии входных колебаний. Кроме того, ряд этот будет содержать гармоники, т. е. гармоническое воздействие на входе нелинейного элемента порождает на выходе нелинейного элемента спектр частот. Все составляющие колебания этого спектра действуют на линейную часть системы. В силу принципа суперпозиции, свойственного линейным системам, каждое составляющее колебание этого спектра пропускается линейной частью системы независимо от остальных составляющих колебаний. Амплитуда и фаза каждой составляющей на выходе линейной части системы отличается от амплитуды и фазы соответствующего колебания на ее входе, причем это изменение амплитуды и сдвиг фазы могут быть определены по амплитудно-фазовой характеристике линейной части системы[1].



Фиг. 33. Система с нелинейным элементом.

Из изложенного следует, что действие синусоидального возмущения на нелинейный элемент порождает на его выходе спектр и что все линии этого спектра проходят через линейную часть системы, изменяясь по величине, но новые линии при этом не появляются. Следовательно, само предположение, что колебания координаты x_1 могут быть синусоидальными, оказывается ошибочным. Установившиеся колебания каждой координаты системы содержат все частоты, порождаемые нелинейностью, и различие между спектрами колебаний для разных координат состоит лишь в различии амплитуд и фаз, но колебания любой из координат содержат одни и те же линии в своем спектре.

Колебания координаты x_1 можно рассматривать близкими к синусоидальным лишь в тех случаях, когда амплитуда основной гармоники несоизмеримо больше амплитуды остальных гармоник.

Это может иметь место, во-первых, тогда, когда амплитудная характеристика линейной части системы имеет большой и острый максимум

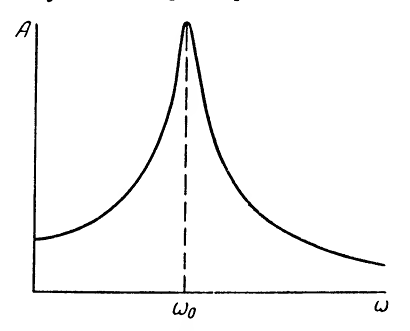
[1] Для этого надо отметить на амплитудно-фазовой характеристике точку, соответствующую рассматриваемой частоте, и провести вектор из начала координаты до этой точки. Модуль вектора равен отношению амплитуды, а аргумент его — сдвигу фаз.

(фиг. 34), и поэтому одна из линий спектра — именно линия, соответствующая частоте этого максимума, усиливается значительно сильнее остальных линий спектра.

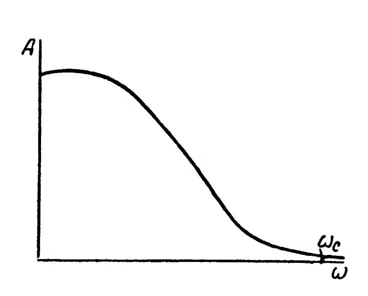
Это может иметь место, во-вторых, в таких системах, у которых амплитудная характеристика имеет явно выраженную полосу пропускания частот, т. е. ординаты амплитудных характеристик, начиная с некоторой частоты ω_c, мало отличаются от нуля (фиг. 35).

Если частота основной гармоники лежит левее этой частоты ω_c, а частоты остальных гармоник — правее ее, то амплитуды гармоник, порождаемых нелинейностью, сильно уменьшаются при прохождении через линейную часть системы, играющую в этом случае роль фильтра высоких частот [1].

Таким образом, возможны два принципиально различных типа амплитудных характеристик линейной части системы, при которых



Фиг. 34. Амплитудная частотная характеристика с резонансным пиком.



Фиг. 35. Амплитудная частотная характеристика с частотой среза $\omega_c J(A)$.

с равным основанием можно считать колебания координаты x_1 близкими к синусоидальным.

Условимся говорить далее, что имеет место авторезонанс или что справедлива гипотеза авторезонанса в тех случаях, когда близость колебаний к синусоидальным оправдывается наличием большого и острого пика у амплитудной характеристики линейной части системы. Будем говорить также далее, что имеет место срез частот или справедлива гипотеза фильтра (или условия среза) в тех случаях, когда близость колебаний к синусоидальным определяется непропусканием высоких частот линейной частью системы, т. е. наличием на амплитудной характеристике линейной части системы частоты среза ω_c.

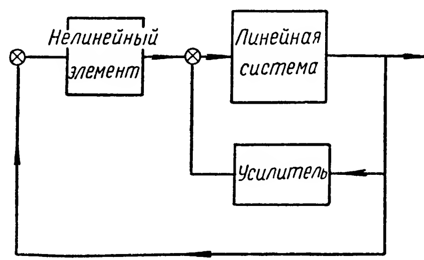
Заметим теперь, что высокий и острый пик у амплитудной характеристики свидетельствует о том, что характеристическое уравнение линейной части системы имеет пару комплексных корней, близко расположенных к мнимой оси (см. главу XV).

Если бы максимум был бесконечно высоким, то это значило бы, что характеристическое уравнение имеет пару мнимых корней и система

[1] Указания на возможность пренебрегать гармониками благодаря фильтрующим способностям линейного контура в отчетливой форме содержались впервые в работах Л. С. Гольдфарба [5], [11].

находится на границе устойчивости. Простейшим примером такого рода может служить система, у которой линейная часть мало отличается от консервативной или содержит хотя бы одно консервативное звено, не охваченное обратными связями.

Наличие консервативного звена не обязательно для того, чтобы система была на границе устойчивости, и в случае если система содержит обратную связь, она может быть выведена на границу устойчивости увеличением коэфициента усиления (фиг. 36). В этом случае максимум на амплитудной характеристике свидетельствует о том, что рассматриваемая система близка к линейной системе, хотя и не консервативной, но выведенной на границу устойчивости.



Фиг. 36. Система с внутренней обратной связью.

Разумеется, частота, при которой характеристика имеет острый пик, совпадает с мнимой частью пары либо чисто мнимых корней, либо пары комплексных корней характеристического уравнения, с достаточно малой действительной частью. Следовательно, если мы говорим, формулируя какой-либо метод исследования, что рассматриваемая система близка к линейной консервативной, либо что она близка к линейной системе, хотя и не консервативной, но такой, что ее характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней, то тем самым мы утверждаем, что выполняются условия гипотезы авторезонанса и, кроме того, подтверждаем, что рассматриваемая нелинейность мала по модулю и, следовательно, малы амплитуды порождаемых нелинейностью гармоник.

Наоборот, наличие среза, в той же степени гарантирующего малое отличие колебаний координаты x_1 от синусоидальных, не связано с требованием близости рассматриваемой системы к линейной, находящейся на границе устойчивости. Поэтому в случае авторезонанса линейная часть системы имеет порождающую частоту, соответствующую частоте пика (или мнимой части чисто мнимых корней характеристического уравнения, близкого к мнимой оси), а в случае среза порождающих частот нет. В этом случае все корни характеристического уравнения линейной части системы могут быть просто отрицательными действительными числами. Например в случае системы, которая описывается уравнениями

$$(T^2p^2+1)(T_1p+1)(T_2p+1)x_1 = kx_2;\ x_2 = \Phi(x_1),$$

т. е. тогда, когда линейная часть системы содержит консервативное звено, выполняются условия гипотезы авторезонанса, а в случае системы, описываемой уравнением

$$\prod_{j=1}^{n}(T_jp+1)x_1 = kx_2;\ x_2 = \Phi(x_1),$$

когда линейная часть системы составлена из последовательно включенных апериодических звеньев, при достаточно большой постоянной

времени хотя бы одного из них или при достаточном их числе выполняются условия гипотезы среза.

Наконец, в случае системы, имеющей уравнение

$$\left[\prod_{j=1}^{n}(T_j p + 1) + (1+\mu)\, k_{кр}\right] x_1 = \Phi(x_1),$$

где $k_{кр}$ — критическое значение коэфициента усиления k, выполняются условия гипотезы авторезонанса, если параметр μ мал, а условия гипотезы среза могут выполняться и при больших значениях этого параметра.

Из изложенного следует, что возможность установления колебаний, близких по форме к синусоидальным, далеко не всегда требует близости системы к линейной, имеющей порождающую частоту, и может быть обусловлена часто иными соображениями, не связанными с наличием порождающей частоты и основывающимися не на колебательных, а, наоборот, на фильтрующих свойствах линейной части контура.

2. ДВЕ ГРУППЫ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ

Самые различные приближенные методы, применяемые для приближенного определения периодических режимов, могут быть разбиты на две группы.

К методам первой группы отнесем такие методы, которые исходят лишь из предположения, что искомые колебания синусоидальны и что эта синусоидальность обеспечивается свойствами системы, но не предполагают наличия порождающей частоты. При использовании этих методов отыскивается амплитуда и частота установившихся колебаний, причем искомая частота не связана какими бы то ни было заранее устанавливаемыми зависимостями с частотами, свойственными линейной части системы. Более того, методы этой первой группы вообще не предполагают наличия у линейной части системы порождающих частот.

Методы второй группы, наоборот, исходят из того, что колебания не только близки к синусоидальным по форме, но и что частота этих колебаний либо равна порождающей частоте линейной части системы либо отличается от нее на малую величину, называемую поправкой на частоту. Эта поправка на частоту считается величиной того же порядка малости, как и входящий в уравнение малый параметр μ, обращение которого в нуль превращает рассматриваемое уравнение в линейное, имеющее порождающую частоту.

К методам первой группы относится, например, метод, описанный в главе XXXIII. Типичным примером методов второй группы является метод, описанный в главе XXXII. Ко второй группе относятся также известные методы медленно изменяющихся параметров, метод уничтожения секулярных членов, метод энергетических циклов Теодорчика и многие другие.

Из изложенного выше следует, что методы второй группы исходят из того, что в системе выполняются условия авторезонанса, так как только в этом случае одновременно колебания близки к синусоидальным

и имеется порождающая частота. Методы первой группы, наоборот, в равной мере применимы как в тех случаях, когда близость колебаний к синусоидальным обусловлена авторезонансом, так и в тех случаях, когда эта близость обеспечена наличием среза. Если не выполнены условия ни авторезонанса, ни среза, то, разумеется, любой метод как первой, так и второй группы может привести к ошибочным результатам.

В системах автоматического регулирования условия гипотезы авторезонанса выполняются чрезвычайно редко[1], а условия гипотезы среза значительно более часто. Несмотря на это, часто применяют методы второй группы к рассмотрению такого рода задач теории автоматического регулирования, считая, что система мало отличается от линейной, находящейся на границе устойчивости, в то время как система в действительности этим свойством не обладает. Хотя незаконность такого приема и очевидна, однако он приводит в ряде случаев к точным результатам, совпадающим с теми, которые получаются в результате применения к этим же задачам методов первой группы. Разумеется, такое совпадение получается далеко не всегда, и известно много случаев, когда незаконное применение методов второй группы к задачам, где синусоидальность обусловлена наличием среза, приводит к результатам ошибочным, причем ошибки могут быть не только количественными, но и качественными.

Замечено, что совпадение результатов отмечается всегда, когда в результате исследования задачи методами второй группы обнаруживается, что поправка на частоту равна нулю, т. е. частота колебаний совпадает с порождающей частотой. Наоборот, в тех случаях, когда поправка на частоту отлична от нуля, обычно отмечаются существенные расхождения в результатах применения к одной и той же задаче методов первой и второй групп.

Раньше чем перейти к выяснению причин этого обстоятельства, отметим, что из изложенного следует возможность рассматривать методы второй группы как частный случай методов первой группы, именно как тот частный случай, когда могут быть сделаны некоторые предварительные высказывания о значении искомой частоты.

3. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДОВ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ ГРУПП ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

Ограничимся случаем, когда характеристика нелинейного элемента однозначна, т. е. когда выходная координата нелинейного элемента однозначно определяется значением входной координаты и не зависит от ее производных. В этом случае при наличии на входе нелинейного элемента гармонического возмущения на его выходе возникает периодическое движение, разложение которого в ряд Фурье содержит основную гармонику, совпадающую по фазе с гармоническим движением, поданным на вход нелинейного элемента.

---

[1] В отличие от радиотехнических задач и задач небесной механики, где они выполняются часто. Методы второй группы разрабатывались именно для решения таких задач.

Действительно [8], если $x_1 = A \sin \omega t$, то члены частоты ω в разложении $y = \Phi(x_1) = \Phi(A \sin \omega t)$ в ряд Фурье равны

$$g(A) \sin \omega t + b(A) \cos \omega t.$$

Но

$$b(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin z) \cos z dz = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \Phi(A \sin z) d(A \sin z) = \\ = \frac{1}{\pi A} F(A \sin z) \Big|_0^{2\pi},$$

где $F(\sigma)$ является первообразной функцией для $\Phi(\sigma)$.

Из равенства

$$F(A \sin 2\pi) = F(A \sin 0)$$

следует, что $b(A) = 0$ и колебания $x_1 = A \sin \omega t$ и $x_2 = g(A) \sin \omega t$ совпадают не только по частоте, но и по фазе.

Для того чтобы в замкнутой системе могли установиться незатухающие колебания координаты x_1, необходимо, чтобы колебания, прошедшие через всю разомкнутую цепь, совпали по фазе и амплитуде с колебаниями, подведенными ко входу этой цепи, т. е. необходимо, чтобы были удовлетворены условия фазового и амплитудного баланса [1].

Если нелинейный элемент не меняет фазы основной гармоники, то из условия фазового баланса следует, что в системе могут установиться только колебания, имеющие частоты, при которых не изменяется фаза и при прохождении колебаний через линейную часть цепи.

Предположим теперь, что из системы удален нелинейный элемент и вместо него включен линейный безинерционный усилитель. Каждый раз, когда характеристическое уравнение системы при увеличении коэфициента усиления этого усилителя будет иметь пару чисто мнимых корней, их мнимая часть как раз и будет равна частоте колебаний, которые проходят через систему без искажения фазы.

Заметим теперь, что линейный безинерционный усилитель фазы не меняет. Следовательно, при этих частотах не меняет фазы и линейная часть системы, показанная на фиг. 33. Поэтому в этой системе и при наличии нелинейности, не меняющей фазы первой гармоники, колебания возможны только на частотах, равных мнимой части корня характеристического уравнения системы, которая получается заменой нелинейного элемента линейным безинерционным усилителем.

Предположим теперь, что вместо системы, показанной на фиг. 33, рассматривается система по фиг. 36, в которую включена отсутствующая в действительности линейная обратная связь. Предположим, кроме того, что коэфициент усиления мало отличается от критического.

---

[1] Если характеристика не нечетна, то должен быть увязан также баланс по нулевым составляющим, т. е. колебания, поданные на вход разомкнутой системы, и колебания, установившиеся в результате на выход из нее, должны происходить относительно одной и той же средней линии.

В такой системе выполняются условия авторезонанса, и можно законно применить какой-либо метод второй группы. При этом будет получен вывод о точном совпадении частоты с порождающей частотой (поправка на частоту равна нулю). Из изложенного выше следует, что этот вывод верен и для системы, показанной на фиг. 33, хотя условия авторезонанса для нее не соблюдаются и методы первой группы, строго говоря, не могут быть применены. Разумеется, предполагается, что условия гипотезы фильтра выполнены и пренебрежение гармониками оправдано.

Таким образом, *в случае системы по фиг. 33 с однозначной характеристикой при выполнении условий среза можно условно предполагать, что выполняются условия авторезонанса, и не ошибиться, несмотря на это ложное предположение, при определении возможных частот периодических движений.*

Рассмотрим теперь случай, когда основная гармоника колебаний на выходе нелинейного элемента смещена по фазе по отношению к гармоническим колебаниям, подведенным к его входу. С таким положением встречаются в тех случаях, когда выходная координата элемента зависит не только от самой входной координаты, но и от скорости изменения входной координаты (например, при петлевой характеристике). В такого рода системах фаза первой гармоники колебания на входе нелинейного элемента не совпадает с фазой колебания на входе этого элемента, и колебания установятся, если сдвиг фазы в линейной части системы скомпенсирует сдвиг фазы в нелинейном элементе и если будут выполнены условия амплитудного баланса. Из фазового баланса следует, что в этом случае частота установившихся колебаний не совпадает с частотой колебаний линейной системы на границе устойчивости, т. е. поправка на частоту отлична от нуля.

При использовании методов второй группы уравнение движения содержит малый параметр μ, и поправка на частоту считается величиной порядка μ. Методы исходят из возможности пренебрегать в ходе выкладок величинами, порядок малости которых μ^2 и выше. Следовательно, *поправка на частоту этими методами будет определена достаточно точно, только если μ мало. Применение этих методов к системам, которые малого μ не содержат, но содержат неоднозначную нелинейную характеристику, приведет к ошибкам, даже если в системе выполняются условия среза и пренебрежение гармониками оправдано.*

Значительно более точные результаты даст в этом случае применение любого метода первой группы, основывающегося лишь на пренебрежении гармониками и не предполагающего, что частота искомых колебаний близка к порождающей частоте линейной части системы.

Из изложенного видно, что для *суждения о том, могут ли методы второй группы (методы малого μ) быть использованы для приближенного определения периодических режимов, в каждом конкретном случае необходимо знать характеристику нелинейного элемента (однозначна она или нет) и амплитудную характеристику линейной части контура (выполняются условия авторезонанса или среза или нет).*

Рассмотрим теперь детальнее вопрос о сопоставлении методов первой и второй группы применительно к задаче об определении периодических режимов.

4. СОПОСТАВЛЕНИЕ МЕТОДОВ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ ГРУПП ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} D(p)x_1 &= M(p)\,[x_2 + C\sin\omega t];\\ x_2 &= \Phi(x_1). \end{aligned}\right\} \qquad (107)$$

Считая, что в системе реализуются условия среза, будем искать периодическое решение в форме

$$x_1 = A\sin(\omega t - \gamma). \qquad (108)$$

Подставив уравнения (108) в (107), получим

$$AW^{-1}(p)\sin(\omega t - \gamma) = \Phi\,[A\sin(\omega t - \gamma)] + C\sin\omega t, \qquad (109)$$

где

$$W^{-1}(p) = \frac{D(p)}{M(p)}.$$

Ограничимся случаем, когда $\Phi(x)$ — нечетная функция [1], и разложим $\Phi\,[A\sin(\omega t - \gamma)]$ в ряд Фурье. Гармоники этого ряда подавляются при прохождении через линейную часть контура, и так как искомыми являются колебания координаты x_1, то можно этими гармониками пренебречь. Тогда

$$\Phi\,[A\sin(\omega t - \gamma)] \approx Ag(A)\sin(\omega t - \gamma) + Ab(A)\cos(\omega t - \gamma), \qquad (110)$$

где

$$g(A) = \frac{\omega}{\pi A}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Phi\,[A\sin(\omega t - \gamma)]\sin\omega t\,dt;$$

$$b(A) = \frac{\omega}{\pi A}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Phi\,[A\sin(\omega t - \gamma)]\cos\omega t\,dt.$$

Используя очевидные тождества

$$\left.\begin{aligned} W^{-1}(j\omega)\sin(\omega t - \gamma) &= Re\,W^{-1}(j\omega)\sin(\omega t - \gamma) + \\ &+ Jm\,W^{-1}(j\omega)\cos(\omega t - \gamma) \end{aligned}\right.$$

и

$$\left.\sin\omega t = \cos\gamma\sin(\omega t - \gamma) + \sin\gamma\cos(\omega t - \gamma),\right\} \qquad (111)$$

[1] Если $\Phi(x)$ — не нечетная, а $D(p)$ не содержит множителя p, то необходимо определить также и смещение средней линии, относительно которой происходит колебание. Это усложняет выкладки, но не вносит ничего принципиально нового. Поэтому рассматриваем лишь нечетные характеристики.

сводим уравнение (109) к виду

$$A Re W^{-1}(j\omega)\sin(\omega t-\gamma)+A Jm W^{-1}(j\omega)\cos(\omega t-\gamma)=$$
$$=Ag(A)\sin(\omega t-\gamma)+Ab(A)\cos(\omega t-\gamma)+$$
$$+C\cos\gamma\sin(\omega t-\gamma)+C\sin\gamma\cos(\omega t-\gamma).$$

Приравнивая коэфициенты членов, содержащих $\sin(\omega t-\gamma)$, и членов, содержащих $\cos(\omega t-\gamma)$, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными (A и γ):

$$\left.\begin{aligned} A Re W^{-1}(j\omega)&=Ag(A)+C\cos\gamma;\\ A Jm W^{-1}(j\omega)&=Ab(A)+C\sin\gamma.\end{aligned}\right\}$$

Если теперь умножить второе уравнение на j и сложить с первым, то придем к одному уравнению в комплексной записи:

$$W^{-1}(j\omega)=J(A)+\frac{C}{A}e^{j\gamma}, \qquad (112)$$

где

$$J(A)=g(A)+jb(A).$$

Если положить в уравнении (112) $C=0$, то получим уравнение для определения A и ω в автоколебательных режимах:

$$W^{-1}(j\omega)=J(A), \qquad (113)$$

которое в форме

$$W(j\omega)=z(A),$$

где $z(A)=\frac{1}{J(A)}$, было получено ранее в главе XXXIII. Там было описано удобное построение для его решения[1].

Зная ω (при наличии внешнего воздействия) или определив его из уравнения (113) (в случае автоколебаний), можно по амплитудной характеристике линейной части системы либо прямо по годографу $W^{-1}(j\omega)$ или $W(j\omega)$ проверить, удовлетворяет ли значение ω неравенству

$$\frac{\omega_c}{k}<\omega<\omega_c,$$

где k — порядок первой порождаемой нелинейностью гармоники.

Никаких предположений, кроме предположения о наличии среза, в приведенных выкладках не делалось, и, следовательно, нигде не предполагалось, что рассматриваемая система близка к линейной, имеющей порождающую частоту.

Определим теперь периодические режимы, исходя из предположения о наличии авторезонанса, т. е. предполагая, что система близка к линейной консервативной или к линейной неконсервативной, но находящейся на границе устойчивости системе, имеющей порождающую частоту $\bar{\omega}$.

Положим поэтому в уравнении (107) $\Phi(x)=k_{kp}x+\mu\Phi_1(x)$ и выберем k_{kp} так, чтобы характеристическое уравнение линейной системы,

[1] Для случая $C\neq 0$ аналогичное построение описано в [7].

получающееся при $\mu = 0$, имело пару мнимых корней $\pm j\bar{\omega}$, а остальные его корни (если порядок системы выше второго) лежали слева от мнимой оси. Кроме того, ограничимся случаем автоколебательной системы, т. е. положим в уравнении (107) $C = 0$.

Будем искать периодические решения в форме

$$x = A \sin(\bar{\omega} + \delta\omega)\, t, \tag{114}$$

где $\delta\omega$ — поправка на частоту.

Следуя допущениям, применяемым обычно при использовании методов второй группы, будем считать поправку на частоту малой величиной порядка μ и будем пренебрегать членами, имеющими больший порядок малости.

Подставив уравнение (114) в формулу (107), положив предварительно в уравнении (107) $C = 0$, получим

$$D(p) A \sin(\bar{\omega} + \delta\omega)\, t = M(p)\, \Phi\left[A \sin(\bar{\omega} + \delta\omega)\, t\right]. \tag{115}$$

Действуя далее совершенно так же, как и выше при подстановке решения в формуле (109), получим уравнение установившегося процесса:

$$D\left[j(\bar{\omega} + \delta\omega)\right] = J(A)\, M\left[j(\bar{\omega} + \delta\omega)\right]. \tag{116}$$

Разложим $D\,[j(\bar{\omega} + \delta\omega)]$ и $M\,[j(\bar{\omega} + \delta\omega)]$ в ряды по степеням $j\delta\omega$ и пренебрежем членами, содержащими $\delta\omega^k$ $(k > 1)$, так как их порядок малости равен μ^k. В результате получим

$$D(j\bar{\omega}) + \left|\frac{dD(j\omega)}{d(j\omega)}\right|_{\omega=\bar{\omega}} j\delta\omega - \left\{M(j\bar{\omega}) + \right.$$
$$\left. + \left|\frac{dM(j\omega)}{dj\omega}\right|_{\omega=\bar{\omega}} j\delta\omega\right\} I(A) = 0. \tag{117}$$

Вспомним теперь, что

$$\varphi(x) = k_{кр} x + \mu \Phi_1(x)$$

и, следовательно,

$$J(A) = k_{кр} + \mu J_1(A).$$

Подставим это выражение в уравнение (117) и пренебрежем членами, содержащими произведение $\delta\omega \mu J_1(A)$, так как их порядок малости больше первого.

В результате получаем уравнение

$$D(i\bar{\omega}) - J(A)\, M(j\bar{\omega}) = -j\Delta'(j\bar{\omega})\, \delta\omega, \tag{118}$$

где

$$\Delta'(j\omega) = \left|\frac{d\Delta(j\omega)}{dj\omega}\right|_{\omega=\bar{\omega}},$$

а

$$\Delta(j\omega) = D(j\omega) - k_{кр} M(j\omega).$$

Из изложенного следует, что уравнение (118) получится и при применении любого другого метода, опирающегося на наличие авторезонанса, если в ходе выкладок считать поправку на частоту порядка μ и пренебрегать членами, порядок малости которых выше μ.

Вернемся к уравнению (118) и поделим теперь обе его части на $M(j\bar{\omega})$:

$$W^{-1}(j\bar{\omega}) - J(A) = -j\frac{\Delta'(j\bar{\omega})}{M(j\bar{\omega})}\delta\omega.$$

Заметим теперь, что

$$\Delta'(j\bar{\omega}) = \left|\frac{d[D(j\omega) - k_{кр}M(j\omega)]}{dj\omega}\right|_{\omega=\bar{\omega}} = \left|\frac{d\,\dfrac{D(j\omega) - k_{кр}M(j\omega)}{M(j\omega)}M(j\omega)}{dj\omega}\right|_{\omega=\bar{\omega}},$$

а так как

$$\Delta(j\bar{\omega}) = D(j\bar{\omega}) - k_{кр}M(j\bar{\omega}) = 0,$$

то получим

$$\Delta'(j\bar{\omega}) = M(j\bar{\omega})\left|\frac{d\,\dfrac{D(j\omega) - k_{кр}M(j\omega)}{M(j\omega)}}{dj\omega}\right|_{\omega=\bar{\omega}},$$

откуда

$$\Delta'(j\bar{\omega}) = M(j\bar{\omega})\left|\frac{dW^{-1}(j\omega)}{dj\omega}\right|_{\omega=\bar{\omega}}.$$

Следовательно,

$$-j\frac{\Delta'(j\bar{\omega})}{M(j\bar{\omega})} = -\left|\frac{dW^{-1}(j\bar{\omega})}{d\omega}\right|_{\omega=\bar{\omega}}$$

и уравнение (118) сводится к виду

$$W^{-1}(j\bar{\omega}) = J(A) - \left|\frac{dW^{-1}(j\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\bar{\omega}}\delta\omega. \qquad (119)$$

Теперь легко сопоставить результаты, которые получаются для одной и той же задачи при применении методов, опирающихся на наличие авторезонанса (т. е. методов второй группы) и опирающихся на наличие срезов (т. е. методов первой группы).

Во втором случае амплитуда и частота находится пересечением порознь построенных годографов $W^{-1}(j\omega)$ и $J(A)$ (фиг. 37, *а*).

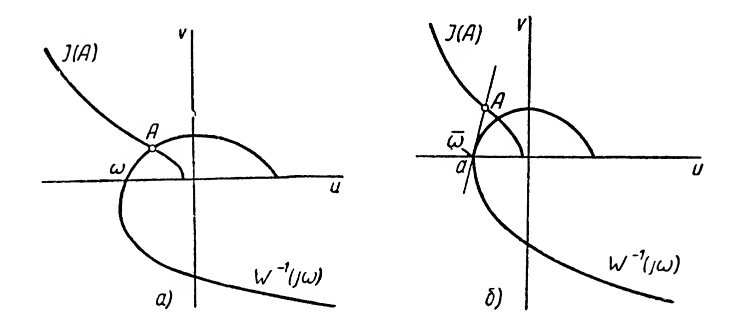
В первом же случае в силу уравнения (119) надо дополнить это построение касательной к годографу $W^{-1}(j\omega)$ в точке $\omega=\bar{\omega}$, соответствующей порождающей частоте, т. е. в той точке, где этот годограф впервые пересекает действительную ось слева от начала координат (фиг. 37, *б*). Амплитуда установившегося режима определяется отметкой годографа $J(A)$ в той точке, где указанная касательная пересекает этот годограф, а поправка на частоту $\delta\omega$ определяется отношением

$$\frac{\left|\dfrac{dW^{-1}(j\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\bar{\omega}}}{aA},$$

где aA — отрезок, показанный на фиг. 37, *б*.

Знак $\delta\omega$ положителен, если направление векторов $\left|\frac{dW^{-1}(j\omega)}{d\omega}\right|$ совпадает, и отрицателен, если эти векторы направлены противоположно

Из сопоставления построений, показанных на фиг. 37, *а* и *б*, следует, что значения частоты и амплитуды автоколебательных режимов, определяемые методами, основанными на наличии авторезонанса, и мето-



Фиг. 37. Обратная амплитудно-фазовая частотная характеристика $W^{-1}(j\omega)$ линейной части системы и амплитудная характеристика $J(A)$ нелинейного элемента.

дами, основанными на наличии среза, будут точно совпадать в тех случаях, когда $J(A)$ — действительная функция. Поэтому в таких случаях применение методов малого параметра μ к системам, не содержащим малого μ, но удовлетворяющим условиям среза, приводит к правильным результатам. Совпадение либо несовпадение с результатами точных методов зависит только от того, сколь точно удовлетворяются эти последние условия, и совершенно не зависит от величины μ.

Фиг. 38. Определение наличия периодического режима по кривым $W^{-1}(j\omega)$ и $J(A)$.

Иначе обстоит дело в тех случаях, когда $J(A)$ — комплексная функция A. Амплитуды и частоты, определяемые методами малого μ, в таких случаях существенно отличаются от амплитуд и частот, определяемых методами, опирающимися только на наличие среза.

Это различие может быть не только количественным, но и качественным. Так, например, в случае (фиг. 38) из методов малого μ будет следовать отсутствие периодических решений, тогда как из уравнения (113) следует наличие периодического режима (точка A на фиг. 38).

Расхождения эти не являются следствием пренебрежения гармониками (такое пренебрежение делается и в методах, основанных на условиях среза), а следствием пренебрежения членами, порядок малости которых превышает μ^2. Чем меньше μ, тем меньше и эти расхождения.

Следовательно, в случае, когда $J(A)$ — комплексная функция, применение методов, основанных на условиях авторезонанса (методов малого μ), к системам, у которых пренебрежение гармониками основано на условиях среза, может привести к ошибкам.

Наоборот, применение методов, основанных на условиях среза, к системам, в которых осуществляются условия авторезонанса, не только не может привести к противоречивым результатам, но дает более точное решение.

Если, наконец, в системе не реализуются ни условия среза, ни условия авторезонанса, т. е. если гармониками на выходе из линейной части контура пренебречь нельзя, то методы, основанные на условиях среза и авторезонанса, могут приводить к ошибочным результатам, причем ошибки эти будут тем более существенными, чем больше при прочих равных условиях амплитуды гармоник.

Все выводы, полученные сопоставлением однотипных построений, к которым приводят в конечном итоге методы первой и второй групп, согласуются с выводами, которые были получены выше, исходя только из физических соображений.

5. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

Переходя к исследованию устойчивости периодических режимов (автоколебаний или вынужденных периодических движений в полосе захватывания), также можно исходить из условий среза или из условий авторезонанса.

В первом случае нельзя считать, что процесс установления колебаний после малого отклонения может рассматриваться как процесс медленного установления амплитуды и фазы колебания, имеющего частоту ту же, что и в установившемся режиме. Во втором случае такое предположение возможно, и для малых отклонений от установившегося режима процесс установления ищут в форме

$$x = A(t) \sin [\omega t - \gamma(t)], \tag{120}$$

где $A(t)$ и $\gamma(t)$ считают функциями, изменяющимися медленно за период $\frac{2\pi}{\omega}$.

Функция $\Phi [A(t) \sin \omega t - \gamma(t)]$ не является периодической и, следовательно, не может быть, строго говоря, представлена в виде ряда Фурье, но, исходя из медленного изменения $A(t)$ и $\gamma(t)$ за период, можно приближенно представить эту функцию в виде разложения в ряд Фурье, усредняя ее за период.

В остальном мы временно не будем считать производные от $A(t)$ и $\gamma(t)$ малыми величинами и не будем пренебрегать ими. Такое пренебрежение будет сделано позже, и это позволит выяснить, в какой мере такое пренебрежение может отразиться на правильности выводов об устойчивости рассматриваемого колебательного режима.

Будем рассматривать случай, когда на систему действует внешнее периодическое воздействие, так как автоколебательный случай получается из него при $C = 0$.

Вернемся к уравнению (107) и, имея в виду малые отклонения от периодического режима, будем искать процесс установления в форме

$$X = (A_0 + \Delta A) \sin [\omega t - (\gamma_0 + \Delta\gamma)]. \qquad (121)$$

Подставим уравнение (121) в уравнение (107):

$$D(p) [(A_0 + \Delta A) \sin (\omega t - \gamma_0 - \Delta\gamma)] = M(p) \times \times \{\Phi [(A_0 + \Delta A) \sin (\omega t - \gamma_0 - \Delta\gamma)] + C \sin \omega t\}. \qquad (122)$$

Воспользовавшись указанными выше свойствами функции

$$\Phi [(A_0 + \Delta A) \sin (\omega t - \gamma_0 - \Delta\gamma)],$$

усредним ее за период [1]

$$\Phi [(A_0 + \Delta A) \sin (\omega t - \gamma_0 - \Delta\gamma)] \approx (A_0 + \Delta A) [g (A_0 + + \Delta A) \sin (\omega t - \gamma_0 - \Delta\gamma) + b (A_0 + \Delta A) \cos (\omega t - \gamma_0 - \Delta\gamma)]. \qquad (123)$$

Следовательно, выражение (122) сводится к виду

$$D(p) [(A_0 + \Delta A) \sin (\omega t - \gamma_0 - \Delta\gamma)] = M(p) [(A_0 + \Delta A) g (A_0 + + \Delta A) \sin (\omega t - \gamma_0 - \Delta\gamma) + (A_0 + \Delta A) b (A_0 + \Delta A) \cos (\omega t - \gamma_0 - \Delta\gamma) + + C \sin \omega t] \qquad (124)$$

или в комплексной записи

$$D(p) \left[(A_0 + \Delta A) e^{j\omega t} e^{-j(\gamma_0 + \Delta\gamma)} \right] = M(p) \left[J (A_0 + \Delta A) (A_0 + + \Delta A) e^{j\omega t} e^{-j(\gamma_0 + \Delta\gamma)} + C e^{j\omega t} \right]. \qquad (125)$$

Воспользовавшись легко проверяемым тождеством

$$S(p) e^{j\omega t} \varphi (t) = e^{j\omega t} S (p + j\omega) \Phi (t), \qquad (126)$$

где $S(p)$ — любой полином относительно p, преобразуем уравнение (125) к виду

$$D(p + j\omega) (A_0 + \Delta A) e^{-j(\gamma_0 + \Delta\gamma)} = = M(p + j\omega) \left[J (A_0 + \Delta A) (A_0 + \Delta A) e^{-j(\gamma_0 + \Delta\gamma)} + C \right]. \qquad (127)$$

Если положить в уравнении (127) $\Delta A = 0$ и $\Delta\gamma = 0$, то получим уравнение (112), служившее для определения установившихся колебаний. Интересуясь теперь малыми отклонениями от этих установившихся колебаний, разложим нелинейные функции, содержащиеся в уравне-

---

[1] Предполагается, что разложение это не содержит свободного члена. Если такой член есть, а $D(p)$ не содержит множителя p, выкладки усложняются, однако чего-либо принципиально отличного это в результаты исследования не вносит.

нии (127), в ряды по степеням ΔA и $\Delta\gamma$ и пренебрежем нелинейными членами этих рядов:

$$D(p+j\omega)\left[A_0e^{-j\gamma_0}+e^{-j\gamma_0}\Delta A-jA_0e^{-j\gamma_0}\Delta\gamma\right]=$$
$$=M(p+j\omega)\left\{J(A_0)A_0e^{-j\gamma_0}+\left[\frac{J(A)}{dA}\right]_{A=A_0}A_0e^{-j\gamma_0}\Delta A+\right.$$
$$\left.+J(A_0)e^{-j\gamma_0}\Delta A-jJ(A_0)A_0e^{-j\gamma_0}\Delta\gamma+C\right\}. \qquad (128)$$

Учитывая уравнение установившегося режима

$$D(j\omega)A_0e^{-j\gamma_0}=M(j\omega)\left[J(A_0)A_0e^{-j\gamma_0}+C\right],$$

сведем полученное уравнение (128) к виду

$$\left\{D(p+j\omega)-M(p+j\omega)J(A_0)-M(p+j\omega)\left[\frac{dJ(A)}{dA}\right]_{A=A_0}A_0\right\}\Delta A-$$
$$-jA_0\left[D(p+j\omega)-M(p+j\omega)J(A_0)\right]\Delta\gamma=0 \qquad (129)$$

или

$$-jA_0M_1\Delta\gamma+M_2\Delta A=0, \qquad (130)$$

где

$$\left.\begin{aligned}M_1&=D(p+j\omega)-M(p+j\omega)J(A_0);\\ M_2&=D(p+j\omega)-M(p+j\omega)J(A_0)-M(p+j\omega)\left[\frac{dJ(A)}{dA}\right]_{A=A_0}.\end{aligned}\right\} \qquad (131)$$

Уравнение (130) является линейным уравнением относительно ΔA и $\Delta\gamma$ с комплексными коэфициентами.

Пусть

$$M_1=U_1+jV_1 \quad \text{и} \quad M_2=U_2+jV_2,$$

тогда, отделяя в уравнении (130) действительную и мнимую части, получим

$$\left.\begin{aligned}V_2\Delta A-A_0U_1\Delta\gamma&=0;\\ U_2\Delta A+A_0V_1\Delta\gamma&=0,\end{aligned}\right\} \qquad (132)$$

где U_1, V_1, U_2 и V_2 — уже полиномы по p с действительными коэфициентами.

Характеристическое уравнение линейной системы уравнений (132)

$$\begin{vmatrix}V_2 & -A_0U_1\\ U_2 & +A_0V_1\end{vmatrix}=A_0(U_1U_2+V_1V_2), \qquad (133)$$

и, следовательно, характеристическим уравнением, распределение корней которого относительно мнимой оси решает вопрос об устойчивости рассматриваемого периодического режима, служит уравнение

$$Re\overline{M}_1M_2=0, \qquad (134)$$

где

$$\overline{M}_1=D(\overline{p}-j\omega)-M(\overline{p}-j\omega)\overline{J}(A_0);$$

$\overline{p}$ — величина сопряженная p, а $\overline{J}(A_0)$ — комплексная функция A, сопряженная $J(A_0)$; умножение в формуле (134) понимается в смысле обычного умножения комплексных чисел.

Разложив $D(p+j\omega)$ и $M(p+j\omega)$ в ряды по степеням p и подставив эти ряды в выражения (131), сводим их к виду

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= L + \sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r!}\cdot\frac{d^r L}{d(j\omega)^r}\, p^r; \\ M_2 &= L + \sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r!}\cdot\frac{d^r L}{d(j\omega)^r}\, p^r + A_0 \sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r!}\cdot\frac{d^r}{d(j\omega)^r}\left[\frac{dL}{dA}\right]_{A=A_0} p^r, \end{aligned}\right\} \quad (135)$$

где

$$L = D(j\omega) - M(j\omega)\, J(A_0). \quad (136)$$

Если теперь подставить уравнение (135) в уравнение (134), то характеристическое уравнение, решающее вопрос об устойчивости периодического движения, сводится к виду

$$b_0\lambda^{2n} + b_1\lambda^{2n-1} + \ldots + b_{2n-1}\lambda + b_{2n} = 0, \quad (137)$$

где

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{(n!)^2}\, Re\, \frac{d^n L}{d(j\omega)^n}\, \overline{\frac{d^n L}{d(j\omega)^n}} = \frac{1}{(a!)^2}\left|\frac{d^n L}{d(j\omega)^n}\right|^2; \\ b_1 &= \frac{2}{n!\,(n-1)!}\, Re\, \overline{\frac{d^{n-1} L}{d(j\omega)^{n-1}}}\, \frac{d^n L}{d(j\omega)^n}; \\ b_2 &= \frac{2}{n!\,(n-2)!}\, Re\, \overline{\frac{d^{n-2} L}{d(j\omega)^{n-2}}}\, \overline{\frac{d^n L}{d(j\omega)^n}} + \frac{1}{[(n-1)!]^2}\left|\frac{d^{n-1} L}{d(j\omega)^{n-1}}\right|^2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{2n-1} &= Re\, \frac{dL}{dj\omega}\left(2L + A_0\, \overline{\frac{dL}{dA_0}}\right); \\ b_{2n} &= Re L\left(L + A_0\, \frac{dL}{dA_0}\right). \end{aligned}\right\} \quad (138)$$

Черта сверху указывает на необходимость взять сопряженную величину.

Рассматриваемые движения устойчивы в малом, если все корни уравнения (137) лежат слева от мнимой оси и если линейная часть системы не пропускает гармоник, порождаемых нелинейностью.

В частном случае, когда $C = 0$ (режим автоколебаний), в силу уравнения установившегося режима $L = 0$ и, следовательно, $b_{2n} = 0$. Тогда характеристическое уравнение имеет нулевой корень, но в силу теоремы Андронова — Витта [9] этот нулевой корень может быть отброшен, и вопрос об устойчивости решается распределением относительно мнимой оси остальных корней уравнения (137), т. е. характеристическое уравнение сводится к виду

$$b_0\lambda^{2n-1} + b_1\lambda^{2n-2} + \ldots + b_{2n-2}\lambda + b_{2n-1} = 0, \quad (139)$$

где коэфициенты b_i имеют указанные выше значения, если положить в них $L = 0$.

Характеристическое уравнение линейной системы получается из уравнения (134) с учетом уравнения (131), если принять $f(x) = kx$. Действи-

тельно, в этом случае $J(A) = k$; $\frac{dJ(A)}{dA} = 0$, и уравнение (134) сводится поэтому к виду

$$Re\overline{M}_1 M_2 = Re\,[D(\overline{p} - j\omega) - kM(\overline{p} - j\omega)]\,[D(\overline{p} + j\omega) - \\ - kM(\overline{p} + j\omega)] = 0$$

или

$$[D(\overline{p} + j\omega) - kM(\overline{p} + j\omega)]\,[D(\overline{p} - j\omega) - kM(\overline{p} - j\omega)] = 0 \quad (140)$$

в силу того, что произведение сопряженных комплексных чисел есть действительное число.

Из уравнения (140) следуют два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} D(\overline{p} + j\omega) - kM(\overline{p} + j\omega) = 0; \\ D(\overline{p} - j\omega) - kM(\overline{p} - j\omega) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (141)$$

корни которых имеют одинаковые действительные части, совпадающие с действительными частями корней уравнения

$$D(\lambda) - kM(\lambda) = 0,$$

которое является характеристическим уравнением для рассматриваемой линейной системы.

Вспомним теперь, что при наличии авторезонанса производная $\frac{d^r \Delta A}{dt^r}$ имеет порядок малости r. Это значит, что в характеристическом уравнении (137) или (139) для оценки степени малости отдельных членов следует заменить λ на $\mu\lambda$. Тогда при стремлении μ к нулю корни характеристического уравнения поочередно стремятся к ∞. Если заведомо известно, что они стремятся к ∞ только слева от мнимой оси, и если пренебречь поэтому коэфициентами, порядок малости которых больше μ, то вопрос об устойчивости будет решаться знаками двух последних коэфициентов уравнения (137), т. е. знаками b_{2n} и b_{2n-1} при исследовании вынужденных колебаний в полосе захватывания и знаком b_{2n-1} при исследовании автоколебаний уравнения.

При выполнении условий гипотезы авторезонанса такие предложения могут быть обоснованы соображениями непрерывности. Действительно, выше было показано, что при замене нелинейной характеристики линейной найденное характеристическое уравнение (137) степени $2n$ распадается на два уравнения степени n с корнями, имеющими одинаковые действительные части, причем такие же, какие имеет характеристическое уравнение соответствующей линейной системы. Если при $\mu = 0$ все корни характеристического уравнения линейной системы лежат слева от мнимой оси, кроме пары мнимых корней, то при достаточно малом μ в силу непрерывной зависимости корней уравнения (137) от его коэфициентов вопрос об устойчивости решается тем, в какую сторону смещаются с мнимой оси корни, которые при $\mu = 0$ располагались на ней. Главная часть этих корней определяется младшими членами уравнения (137). Поэтому эти корни уравнения (137) смещаются при малом μ

с мнимой оси влево, если коэфициенты b_{2n-1} и b_{2n} (а в автоколебательном случае только b_{2n-1}) положительны.

Подведем теперь некоторые итоги. Если предполагается, что в рассматриваемой системе удовлетворяются условия гипотезы авторезонанса, то вопрос об устойчивости периодических режимов может быть сведен к вопросу о знаках коэфициентов b_{2n-1} и b_{2n} (в случае, когда $C \neq 0$) или о знаке одного коэфициента b_{2n-1} (в случае, когда $C = 0$). При этом факт, что в рассматриваемой системе μ мало используется в ходе выкладок как для обоснования допустимости усреднения непериодической функции за период периодической функции, к которой она близка, так и для обоснования пренебрежения всеми старшими членами полученного характеристического уравнения. Мы видим, таким образом, что суждение об устойчивости только по знаку коэфициентов b_{2n-1} и b_{2n} (либо одного коэфициента b_{2n-1}) непосредственно опирается на малость μ, т. е. на гипотезу авторезонанса и не может быть обоснована, исходя только из гипотезы среза. Применяя гипотезу среза, мы не предполагаем, что μ мало. Следовательно, в этом случае не только младшие коэфициенты, но и все уравнение (137) не решит вопроса об устойчивости, так как, исходя только из гипотезы среза, нельзя обосновать законность усреднения непериодической функции. $A(t)$ и $\gamma(t)$ уже не меняются медленно и в процессе установления возможны любые частоты, меньшие ω_0.

Покажем теперь, что методы суждения об устойчивости периодических режимов, приведенные в главе XXXIII, сводятся к выяснению знака b_{2n-1} и, следовательно, могут быть обоснованно применены лишь в случае авторезонанса.

В главе XXXIII использовался метод первой группы, а автоколебательные режимы находились путем построения двух годографов: $W^{-1}(j\omega)$ и $J(A)$. Условия устойчивости автоколебательного режима определяются там следующим образом: *периодический режим считается устойчивым, если точка характеристики $J(A)$, соответствующая $A_0 + \Delta A$, при $\Delta A > 0$ охватывается годографом $J(j\omega)$. В противном случае рассматриваемый периодический режим с амплитудой A_0 неустойчив.* В связи с тем, что при этом рассматриваются малые приращения ΔA, это условие сводится к тому, чтобы касательная к годографу $J(A)$ в рассматриваемой точке A_0 $\left(\text{т. е. } \left[\frac{dJ(A)}{dA}\right]_{A=A_0}\right)$ была направлена внутрь области, ограничиваемой годографом $W^{-1}(j\omega)$. Это равносильно требованию, чтобы касательная $\left[\frac{dJ(A)}{dA}\right]_{A=A_0} = T$ составила угол меньший, чем $\frac{\pi}{2}$ с направленной внутрь указанной области нормалью к кривой $W^{-1}(j\omega)$ в рассматриваемой точке пересечения годографов. Аналитически это условие можно выразить следующим неравенством:

$$(TN) > 0,$$

где (TN) обозначает скалярное произведение векторов T и N, причем

$$N = j\frac{dW^{-1}(j\omega)}{d\omega}. \tag{142}$$

Вернемся теперь к характеристическому уравнению (139). Его свободный член равен

$$b_{2n-1} = Re\,\overline{\frac{dL}{dj\omega}}\left(2L + A_0\frac{dL}{dA_0}\right).$$

Заметим, что

$$\frac{dL}{dj\omega} = \frac{d\,\dfrac{L}{M(j\omega)}M(j\omega)}{dj\omega} = \frac{L}{M(j\omega)}\cdot\frac{dM(j\omega)}{dj\omega} + M(j\omega)\frac{d\,\dfrac{L}{M(j\omega)}}{dj\omega}.$$

Но первое слагаемое уничтожается в силу того, что $L=0$. Следовательно,

$$\frac{dL}{dj\omega} = M(j\omega)\frac{d\,\dfrac{D(j\omega)-J(A_0)M(j\omega)}{M(j\omega)}}{dj\omega} = M(j\omega)\frac{d\,\dfrac{D(j\omega)}{M(j\omega)}}{dj\omega} = M(j\omega)\frac{dW^{-1}(j\omega)}{dj\omega}$$

и соответственно

$$\overline{\frac{dL}{dj\omega}} = \overline{M}(j\omega)\,\overline{\frac{dW^{-1}(j\omega)}{dj\omega}}.$$

Кроме того, учитывая уравнение (136), находим

$$A_0\frac{dL}{dA_0} = -A_0M(j\omega)\frac{dW^{-1}(j\omega)}{dA_0},$$

следовательно, окончательно

$$b_{2n-1} = -\overline{M}(j\omega)M(j\omega)A_0Re\,\overline{\frac{dW^{-1}(j\omega)}{dj\omega}}\cdot\frac{dJ(A_0)}{dA_0} =$$

$$= -A_0|M(j\omega)|^2 Re\,\overline{\frac{dW^{-1}(j\omega)}{dj\omega}}\cdot\frac{dJ(A_0)}{dA_0}.$$

Это можно также записать в форме скалярного произведения

$$b_{2n-1} = C_0|M(j\omega)|^2(TN). \qquad (143)$$

Из сравнения уравнений (142) и (143) следует, что условие устойчивости, приведенное в главе XXXIII, сводится к требованию $b_{2n-1} > 0$, т. е. исходит из предположения о наличии авторезонанса.

При использовании методов второй группы для определения устойчивости периодических режимов, возможных в системе уравнений (107) при $C=0$ (например, метода Пуанкаре), условия устойчивости сводятся к виду

$$Re\frac{K(j\overline{\omega})}{\Delta'(j\overline{\omega})}\cdot\frac{dJ(A)}{dA_0} < 0.$$

Эти условия устойчивости получены, исходя из уравнений с периодическими коэфициентами, но в ходе выкладок члены высших порядков малости отбрасывались.

Напомним теперь, что

$$\frac{M(j\overline{\omega})}{\Delta'(j\overline{\omega})} = \frac{j}{W^{-1}(j\overline{\omega})},$$

и поэтому уравнение (143) сводится к виду

$$Re \frac{j}{(W')^{-1}(j\bar{\omega})} J'(A) < 0, \qquad (145)$$

где

$$J'(A) = \left[\frac{dJ(A)}{dA}\right]_{A=A_0}.$$

Умножив и разделив $(W')^{-1}(j\bar{\omega})$ на сопряженную величину $\overline{(W')^{-1}(j\omega)}$, получим

$$\frac{Rej\overline{J'(j\omega)}\,J'(A)}{|(W')^{-1}(j\omega)|^2} < 0.$$

Отбрасывая всегда положительный знаменатель и меняя знак, получаем неравенство

$$Re\{-j\overline{(W')^{-1}(j\omega)}\,J'(c)\} > 0.$$

Это неравенство совпадает с требованием положительности свободного члена уравнения (139). Следовательно, и в этом случае условие устойчивости относится только к системам, удовлетворяющим условиям гипотезы авторезонанса.

6. О ДВУПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ

Наряду с периодическими движениями в системах с нелинейной обратной связью (см. фиг. 33) методы малого μ применяются для изучения почтипериодических или многопериодических движений. К этому классу относятся движения, являющиеся суммой гармонических колебаний нескольких частот, между которыми не существует целочисленных соотношений, например колебания вида $a\sin(\omega t + \varphi) + b\sin(\Omega t + \psi)$. Если координата x совершает такого рода колебания, то на выходе нелинейного элемента, кроме колебаний этой же частоты и их гармоник, появляются разностные тона, имеющие более низкую частоту, чем ω и Ω порознь.

При применении методов малого μ часто пренебрегают этими тонами, так же как и гармониками (см., например, [12]).

В тех случаях, когда система рассматривается как близкая к консервативной, заранее известны все частоты, возможные в системе, и определение почти периодических движений не составляет труда. В этом случае пренебрежение разностными тонами может быть обосновано совершенно такими же соображениями, как и пренебрежение гармониками.

Если исходить из наличия авторезонанса, но систему считать близкой не к консервативной, а к линейной, находящейся на границе устойчивости, то почтипериодические режимы могут рассматриваться в тех случаях, когда характеристические уравнения линейной системы, к которой близка рассматриваемая, имеют несколько пар чисто мнимых корней. Если частота разностного тона не совпадает с какой-либо из порождающих частот, то и в этом случае пренебрежение разностными тонами

оправдывается теми же соображениями, что и пренебрежение гармониками.

Принципиально иначе обстоит дело тогда, когда пренебрежение гармониками основывается на условиях среза и, следовательно, амплитудная характеристика линейной части системы не содержит максимума, наличие которого связано с порождающими частотами. В таких случаях пренебрегать разностными тонами при определении почтипериодических колебаний координаты x можно лишь, если в линейной части контура подавляются не только гармоники, но и разностные тона. Иначе говоря, в тех случаях, когда гипотеза авторезонанса не выполняется, определить почтипериодические движения и пренебрегать при этом разностными тонами можно только тогда, когда линейная часть контура играет роль полосового фильтра, пропускающего узкую полосу частот, но подавляющего как высокие, так и низкие частоты вне этой полосы.

Разумеется, искомые частоты, выходящие в почтипериодические движения, должны пропускаться полосовым фильтром, а порождаемые нелинейной частью гармоники и разностные тона — не пропускаться им.

ВЫВОДЫ

Подведем некоторые итоги изложенного.

Многие приближенные методы, применяющиеся для исследования периодических режимов, могут быть отнесены к одной из следующих групп.

Первая группа. Методы, опирающиеся только на предположение о том, что рассматриваемые колебания мало отличаются от гармонических.

Вторая группа. Методы, в которых уточняется, что предположение о близости колебаний к гармоническим связано с наличием в уравнениях движения малого множителя μ, входящего так, что при $\mu = 0$ уравнение обращается в линейное, имеющее порождающую частоту. При применении методов этой группы не только используют факт близости колебаний к гармоническим, но и пренебрегают в ходе выкладок величинами, имеющими порядок малости μ и выше.

Строго говоря, методы второй группы могут применяться лишь в тех случаях, когда уравнения содержат малый параметр μ в указанном смысле. Однако опыт многих технических приложений показывает, что в ряде случаев незаконное приложение этих методов к системам, которые малого μ в указанном смысле не содержат, приводит к достаточно точным результатам. В настоящей главе показано, что это объясняется тем, что колебания какой-нибудь координаты системы могут мало отличаться от гармонических не только в том случае, когда система близка к линейной, имеющей порождаюшую частоту (т. е. амплитудная характеристика линейной части системы имеет пик при этой частоте), но и в тех случаях, когда линейная часть системы не пропускает гармоник, порождаемых нелинейностью (т. е. амплитудная характеристика линейной части системы имеет срез). В первом случае мы говорим о наличии авторезонанса, а во втором — о наличии среза.

Если не выполняются условия ни авторезонанса, ни среза, то само предположение о близости колебаний к гармоническим не обоснованно,

и применение методов первой группы, равно как и применение методов второй группы, может привести к ошибкам тем более существенным, чем сильнее влияют гармоники. Если же близость колебаний к гармоническим обоснована наличием авторезонанса, т. е. если уравнение движения действительно содержит малое μ в указанном выше смысле, то применение методов как первой, так и второй групп приводит, разумеется, к результатам, тем менее отличающимся друг от друга, чем острее пик на амплитудной характеристике, т. е. чем меньше μ. При этом результаты применения методов первой группы точнее в том смысле, что при этом учитывают влияние величин высших порядков малости и пренебрегают только наличием гармоник.

Если, наконец, пренебрежение гармоники основано на наличии среза, то формально оправдано лишь применение методов первой группы и не оправдано применение методов второй группы.

Выше показано, в тех случаях, когда характеристика $J(A)$ однозначна (а если не учитывается смещение средней линии колебаний, то и нечетная), применение методов второй группы приводит к результатам, точно совпадающим с теми, которые дает применение методов первой группы. Таким образом, в этих случаях методы второй группы оказываются приложимыми к системам, которые малого μ в указанном выше смысле не содержат.

Иначе обстоит дело тогда, когда характеристика $J(A)$ неоднозначна, хотя быть может и нечетна. В этом случае применение методов первой и второй групп даже к системам, в которых выполнены условия среза, приводит к результатам, существенно отличающимся друг от друга. Различие может быть не только количественным, но и качественным. Методы второй группы могут указывать, например, на отсутствие периодических движений в том случае, когда они имеются. Методы же первой группы решают в этом случае задачу тем точнее, чем точнее выполняются условия гипотезы среза.

Исследование устойчивости периодических движений также зависит от того, как объясняется близость колебаний к гармоническим.

Применение методов второй группы к исследованию устойчивости периодических движений приводит к условиям, которые соответствуют требованию положительности двух последних коэфициентов уравнения (137) или одного свободного члена уравнения (139).

В связи с этим применение методов второй группы к решению задач об устойчивости колебаний в тех случаях, когда условия авторезонанса не выполняются, хотя бы и выполнялись условия среза, может привести к ошибкам даже тогда, когда сами периодические режимы определяются этими методами достаточно точно.

Метод оценки устойчивости периодических режимов, описанный в главе XXXIII, также сводится лишь к оценке знака свободного члена характеристического уравнения (139).

Применение методов малого параметра к определению почтипериодических движений, связанное с пренебрежением разностными тонами, возможно только в тех случаях, когда выполняются условия авторезонанса, или, когда амплитудная характеристика линейной части системы имеет срезы как в области низких, так и в области высоких частот,

т. е. когда линейная часть системы является полосовым фильтром, не пропускающим как низкие частоты (включая частоты разностных тонов), так и высокие частоты (гармоники). При иных амплитудных характеристиках линейной части системы неучет разностных тонов или гармоник может быть причиной существенных ошибок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г., Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1949.

2. Булгаков Б. В., О применении метода Ван-дер-Поля к псевдолинейным колебательным системам со многими степенями свободы, „Прикладная математика и механика", т. VI, вып. 6, 1942.

3. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, Издание АН УССР, 1937.

4. Теодорчик. К. Ф., Автоколебательные системы, Гостехиздат, 1952.

5. Гольдфарб Л. С., О некоторых нелинейностях в системах регулирования. „Автоматика и телемеханика", т. VIII, вып. 5, 1947.

6. Баутин Н. Н., Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, Гостехиздат, 1950.

7. Айзерман М. А., О построении резонансных графиков для систем с нелинейной обратной связью, „Инженерный сборник", вып. 13, 1952.

8. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.

9. Андронов А. А., и Витт А., Об устойчивости по Ляпунову, „Журнал технической физики", т. 3, вып. 5, 1933.

10. Айзерман М. А. и Смирнова И. М., О применении методов малого параметра для исследования периодических режимов в системах автоматического регулирования, которые малого параметра не содержат. Сборник памяти А. А. Андронова, Издательство АН СССР, 1954.

11. Гольдфарб Л. С., Метод исследования нелинейных систем регулирования, основанный на принципе гармонического баланса, Сборник „Теория автоматического регулирования", Машгиз, 1951.

12. Бутенин Н. В., К теории вынужденных колебаний в системе с двумя степенями свободы, „Прикладная математика и механика", т. XIII, № 4, 1949.

РАЗДЕЛ VII

МЕТОДЫ АНАЛИЗА РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Релейные системы имеют большое распространение в различных областях техники. К ним относятся системы регулирования напряжения генераторов с вибрационными регуляторами, релейно-контактные следящие системы, все системы регулирования, имеющие в своем составе сервомотор постоянной скорости, и т. п[1].

Релейные системы относятся к классу существенно нелинейных систем автоматического регулирования, поведение которых в целом принципиально не может быть описано линейными уравнениями.

Введение релейного элемента в линейную систему, т. е. превращение ее в релейную, как правило, приводит к автоколебаниям. Для многих релейных систем автоколебательный режим является нормальным рабочим режимом (вибрационные регуляторы, некоторые типы релейно-контактных следящих систем и систем с сервомоторами постоянной скорости). Если автоколебательный режим является нормальным рабочим режимом, то амплитуда колебаний регулируемой величины ограничивается определенными техническими требованиями. Поскольку линейная часть релейной системы всегда представляет фильтр низкой частоты, то небольшое значение амплитуды колебаний регулируемой величины может быть обеспечено за счет повышения частоты стационарных колебаний. Для ограничения амплитуды автоколебаний (или повышения частоты) используются корректирующие цепи. Применение корректирующих устройств может полностью подавить автоколебания, если в системе имеются элементы с зонами нечувствительности.

Кроме применения корректирующих устройств, в релейных системах используется способ принудительной синхронизации автоколебаний внешними колебаниями высокой частоты. В этом случае происходит подавление автоколебаний и в системе устанавливается периодический режим частоты внешнего воздействия. Частота колебаний внешнего воздействия берется настолько высокой, чтобы амплитуда колебаний регулируемой величины не превосходила значения, заданного техническими требованиями.

При исследовании и проектировании релейных систем, стабилизированных за счет корректирующих цепей или внешних высокочастотных колебаний, возникают следующие задачи:

1) определение параметров автоколебательных процессов (амплитуды и частоты) и исследование влияния на эти параметры корректирующих устройств;

---

[1] Вводные замечания к разделу VII составлены Г. С. Поспеловым.

2) исследование вынужденных колебаний при стабилизации внешними высокочастотными колебаниями и определение условий подавления автоколебаний или условий синхронизации;

3) расчет реакции релейной стабилизированной системы на медленно меняющееся воздействие и в том числе расчет переходного процесса при единичном воздействии.

Первая задача, относящаяся к исследованию автоколебательных процессов, имеет в настоящее время достаточно полное решение, благодаря работам главным образом советских ученых.

Вторая задача в применении к релейным системам исследована значительно меньше.

Третья задача сводится к линейной задаче, так как существование в системе стационарных высокочастотных колебаний обеспечивает ее реакцию на медленно меняющиеся воздействия, сходную с реакцией линейных систем. Высокочастотные колебания (внешние колебания или автоколебания) производят вибрационную линеаризацию релейной системы. Для медленно меняющихся процессов в системе релейные характеристики нелинейных элементов оказываются деформированными (линеаризованными). На основании теоремы Н. Н. Боголюбова А. А. Красовским впервые было дано обоснование явления вибрационной линеаризации.

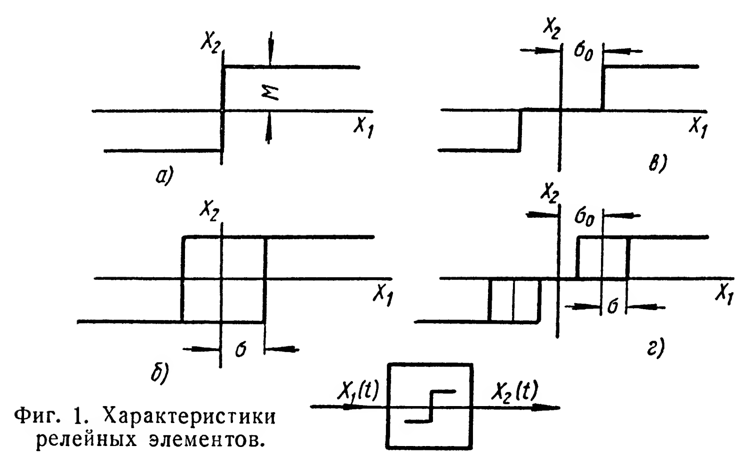
Задача настоящего раздела — охарактеризовать современное состояние методов решения перечисленных выше задач.

ГЛАВА XXXV

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Релейными системами автоматического регулирования обычно называют системы, имеющие в своем составе элементы (измерительные органы, усилители и т. п.) с релейными характеристиками (см. фиг. 1).

Ниже излагается метод определения параметров автоколебаний в релейных системах, основанный на представлении передаточной функции



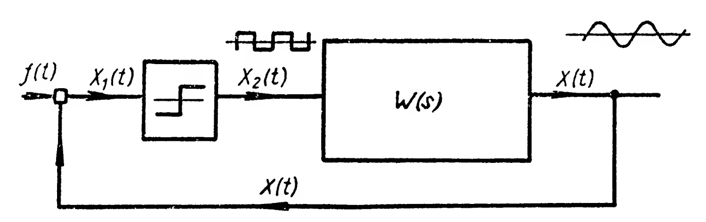
Фиг. 1. Характеристики релейных элементов.

линейной части системы в виде суммы элементарных дробей. Значительное внимание уделено вопросам подавления автоколебаний высокочастотными автоколебаниями, способу вибрационной линеаризации релейных систем и реакции релейных систем на медленно изменяющиеся воздействия.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ АВТОКОЛЕБАНИЙ

Под параметрами автоколебаний будем понимать частоту (или период) автоколебаний и выходные величины звеньев системы, являющиеся периодическими функциями времени. Структура любой релейной системы с одним релейным элементом в результате соответствующих преобразований может быть сведена к структурной схеме, изображенной на фиг. 2. Здесь через $f(t)$ обозначено внешнее воздействие, приложенное к релейному элементу.

При автоколебаниях на вход линейной части системы с передаточной функцией $W(s)$ будут действовать колебания прямоугольной формы периода $2T$. Выходная величина линейной части системы и все другие переменные в установившемся автоколебательном режиме являются периодическими функциями $x_1 = x_1\left(\frac{t}{2T}\right)$, $x_2 = x_2\left(\frac{t}{2T}\right)$ и т. д. Если задаться значением периода колебаний $2T$, то выходная величина $x\left(\frac{t}{2T}\right)$ может быть определена как реакция в установившемся режиме линейной части системы на последовательность прямоугольных знакопеременных



Фиг. 2. Структурная схема релейной системы.

импульсов амплитуды M (фиг. 3). Функцию $x\left(\frac{t}{2T}\right)$ можно определить аналитически в пределах каждого полупериода прямоугольных колебаний. Для релейных элементов с характеристиками, изображенными на фиг. 1, *а* и *б*, аналитическое выражение $x\left(\frac{t}{2T}\right)$ в пределах положительного полупериода обозначим $F(t)$. При $f(t) = 0$ выходная величина $x\left(\frac{t}{2T}\right)$ — нечетная функция, поэтому для отрицательного полупериода $x\left(\frac{t}{2T}\right)$ равна $-F(t)$.

При характеристике релейного элемента типа *а* знак выходной величины релейного элемента x_2 определяется знаком его входной величины x_1. Поэтому в автоколебательном режиме при $f(t) = 0$ будет справедливо соотношение

$$x_2\left(\frac{t}{2T}\right) = M \operatorname{sgn}\left[-x\left(\frac{t}{2T}\right)\right]. \qquad (1)$$

Соотношение (1) и автоколебательный режим возможны, если периодическое решение линейной части системы $F(t)$ будет удовлетворять следующим двум условиям:

$$F(t)|_{t=T} = F(T) = 0; \qquad (2)$$

$$\left.\frac{dF(t)}{dt}\right|_{t=T} = F'(T) > 0. \qquad (3)$$

Условие (2) можно рассматривать как уравнение периодов, при решении которого можно найти периоды всех возможных в системе автоколебательных режимов. Условие (3) является условием переключения в надлежащую сторону.

При нелинейной характеристике типа *б* переключение при $t = T$ происходит при достижении x_1 значения $-\sigma$, и, следовательно, уравнение периодов примет вид

$$F(T) = \sigma. \qquad (4)$$

Условие переключения остается прежним.

Очень часто нелинейный элемент, имеющий релейную характеристику, имеет и постоянное временное запаздывание Δt. Как правило, все релейные усилители обладают таким запаздыванием. При наличии временного запаздывания в релейном элементе в цепи регулирования появится запаздывающее звено с передаточной функцией $e^{-s\Delta t}$. При запаздывании Δt переключение будет опаздывать на время Δt по отношению к переходу через нуль входной величины релейного элемента x_1. Эти соображения позволяют записать уравнение периодов и условие переключения в следующем виде:

$$F(T - \Delta t) = 0; \qquad (5)$$

$$\left.\frac{dF(t)}{dt}\right|_{t = T - \Delta t} > 0. \qquad (6)$$

Из последнего уравнения периодов можно получить также наибольший период автоколебаний для случая, когда релейный усилитель имеет характеристику, графически изображенную на фиг. 1, *а* или *б*, а линейная система имеет постоянное временное запаздывание Δt, и поэтому передаточная функция линейной части будет содержать множитель $e^{-s\Delta t}$. Уравнение периодов в этом случае может иметь бесконечное множество корней, и система будет иметь бесконечное множество автоколебательных процессов. Для периода наибольшего основного автоколебания выполняется условие $T > \Delta t$. Для остальных автоколебательных процессов частоты более высокой, чем частота основного автоколебания $\Delta t > Tn$, где $n = 1, 2, \ldots, \infty$.

Релейный усилитель с запаздыванием Δt не сможет переключаться под воздействием колебаний, полупериод которых T меньше времени запаздывания Δt. Поэтому при релейном усилителе с запаздыванием Δt в отличие от системы с идеальным реле и с постоянным запаздыванием Δt в линейной части может иметь место только основной автоколебательный режим, при котором полупериод T всегда больше времени запаздывания Δt.

Для характеристик типа, графически изображенных на фиг. 1, *в* и *г**, прямоугольные колебания на выходе релейного колебания будут с паузами (фиг. 3).

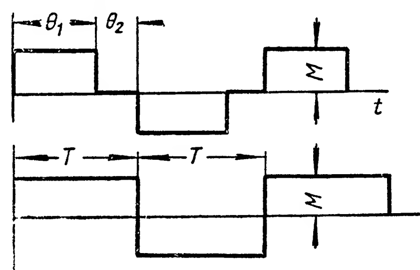
Обозначим длительность полуколебания $x_2\left(\frac{t}{2T}\right)$ как Θ_1, длительность паузы Θ_2. Полупериод колебаний T будет суммой Θ_1 и Θ_2. При характеристиках *в* и *г* будут две функции: $F_1(t)$ и $F_2(t)$, определяющие периодическое решение уравнения линейной части при

---

* В дальнейшем характеристики релейных элементов, изображенных на фиг. 1, *а, б, в, г,* условимся называть характеристиками *а, б, в, г,* или просто релейными элементами *а, б, в, г.*

воздействии прямоугольных колебаний с паузами. Функцию $F_1(t)$ определим в промежутке от $t=0$ до $t=\Theta_1$, а функцию $F_2(t)$ — в промежутке от $t=0$ до $t=\Theta_2$.

В случае характеристики типа *в* выключение будет происходить при $t=\Theta_1$ в начале паузы, когда x_1 спадет до значения σ_0, и включение произойдет в конце паузы, когда x_1 достигнет значения — σ_0. Из этих соображений можно написать уравнения периодов в случае характеристики типа *в*. Таких уравнений будет два: для определения Θ_1 и Θ_2. Соответственно будут и два условия переключения. В табл. 1 дана сводка уравнений периодов и условий переключения для характеристик, приведенных на фиг. 1, как для случая временного запаздывания Δt, так и при $\Delta t=0$.



Фиг. 3. Колебания на выходе релейных элементов.

Из изложенного следует, что для определения параметров автоколебаний в первую очередь необходимо найти периодические решения уравнений линейной части системы, т. е. найти функции $F(t)$, а также $F_1(t)$ и $F_2(t)$. Для решения задачи должна быть известна передаточная функция линейной части системы $W(s)$. Полюсы $W(s)$ в отличие от передаточной функции замкнутой системы или известны, или легко определяются, поэтому дробно-рациональную функцию $W(s)$ без труда можно разложить на сумму элементарных составляющих вида

$$W_s(s)=\frac{C_k}{s+s_k}.$$

В более общем случае дробно-рациональная функция может быть разложена на сумму элементарных дробей, имеющих вид, аналогичный передаточным функциям типовых звеньев: апериодических, колебательных, интегрирующих, двойных интегрирующих и т. п. *Если известны периодические решения для элементарных звеньев, то периодическое решение для всей линейной части с передаточной функцией $W(s)$ будет суммой периодических решений элементарных звеньев.*

В связи с этим целесообразно найти периодические решения для всех основных элементарных звеньев. Поскольку в данном случае может быть два вида периодического возмущения (фиг. 3), найдем сначала периодическое решение для элементарного апериодического звена при произвольном виде периодической возмущающей функции $\psi(t)$, определенной на полупериоде T. Изображение этой функции обозначим через $\Psi(s)$. При воздействии на апериодическое звено последовательности положительных и отрицательных импульсов $\psi(t)$ изображение выходной величины от воздействия первого импульса запишется в виде

$$H_1(s)=\frac{k}{T_1 s+1}\Psi(s),$$

Таблица 1

Сводка уравнений периодов и условий переключения для характеристик, приведенных на фиг. 1

Характеристика нелинейного элемента	Без запаздывания		С запаздыванием	
	Уравнения периодов	Условия переключения	Уравнения периодов	Условия переключения
X_2, X_1	$F(T) = 0$	$F'(T) > 0$	$F(T - \Delta t) = 0$	$F'(T - \Delta t) > 0$
X_2, σ, X_1	$F(T) = \sigma$	$F'(T) > 0$	$F(T - \Delta t) = \sigma$	$F'(T - \Delta t) > 0$
X_2, X_1, σ_0	$F_1(\Theta_1, \Theta_2) = -\sigma_0$ $F_2(\Theta_1, \Theta_2) = \sigma_0$	$\left.\frac{dF_1}{dt}\right\|_{t=\Theta_1} > 0$ $\left.\frac{dF_2}{dt}\right\|_{t=\Theta_2} > 0$	$F_1(\Theta_1 - \Delta t, \Theta_2) = -\sigma_0$ $F_2(\Theta_1, \Theta_2 - \Delta t) = \sigma_0$	$\left.\frac{dF_1}{dt}\right\|_{t=\Theta_1 - \Delta t} > 0$ $\left.\frac{dF_2}{dt}\right\|_{t=\Theta_2 - \Delta t} > 0$
X_2, $\sigma + \sigma_0$, X_1	$F_1(\Theta_1, \Theta_2) = -(\sigma_0 - \sigma)$ $F_2(\Theta_1, \Theta_2) = \sigma_0 + \sigma$	$\left.\frac{dF_1}{dt}\right\|_{t=\Theta_1} > 0$ $\left.\frac{dF_2}{dt}\right\|_{t=\Theta_2} > 0$	$F_1(\Theta_1 - \Delta t) = -(\sigma_0 - \sigma)$ $F_2(\Theta_2 - \Delta t) = \sigma_0 + \sigma$	$\left.\frac{dF_1}{dt}\right\|_{t=\Theta_1 - \Delta t} > 0$ $\left.\frac{dF_2}{dt}\right\|_{t=\Theta_2 - \Delta t} > 0$

откуда по теореме свертывания реакция на первый импульс в интервале от $t = 0$ до $t = T$

$$H_1(t) = \frac{k}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{T_1}} \psi(\tau)\, d\tau. \tag{7}$$

Реакция на первый импульс в интервале $T < t < \infty$

$$H_T(t) = H_1(T)\, e^{-\frac{t}{T_1}}, \tag{8}$$

где

$$H_1(T) = \frac{k}{T_1} e^{-\frac{T}{T_1}} \int_0^T e^{\frac{\tau}{T_1}} \psi(\tau)\, d\tau.$$

В выражении (8) время отсчитывается от $t=0$. Найдем значение выходной величины элементарного звена в промежутке от 0 до T во время воздействия n-го положительного импульса:

$$H_n(t)=H_1(t)-H_T(t)+H_T(t+T)-H_T(t+2T)+\ldots.$$

или

$$H_n(t)=H_1(t)-H_1(T)\,e^{-\frac{t}{T_1}}\left[1-e^{-\frac{T}{T_1}}+e^{-\frac{2T}{T_1}}-e^{-\frac{3T}{T_1}}+\ldots\right].$$

В пределе при $n\to\infty$ получим искомое периодическое решение $H(t)$ для апериодического звена:

$$H(t)=\underset{n\to\infty}{H_n}(t)=H_1(t)-\frac{H_1(T)}{1+e^{-\frac{T}{T_1}}}e^{-\frac{t}{T_1}}$$

или в развернутом виде

$$H(t)=\frac{k}{T_1}\left[\int\limits_0^t e^{\frac{\tau}{T_1}}\psi(\tau)\,d\tau-\frac{\int\limits_0^T e^{\frac{\tau}{T_1}}\psi(\tau)\,d\tau}{e^{\frac{T}{T_1}}+1}\right]e^{-\frac{t}{T_1}}. \qquad (9)$$

Если $\psi(t)$ — прямоугольный импульс длительностью T и амплитуды M, то

$$\psi(t)=M$$

и

$$F(t)=Mk\left[1-\left(1+\operatorname{th}\frac{T}{2T_1}\right)e^{-\frac{t}{T_1}}\right]. \qquad (10)$$

Для того чтобы найти периодическое решение для интегрирующего звена, достаточно в выражении (9) положить $\frac{1}{T_1}=0$. В этом случае

$$H(t)=Mk\left[\int\limits_0^t\psi(\tau)\,d\tau-\frac{1}{2}\int\limits_0^T\psi(\tau)\,d\tau\right]. \qquad (11)$$

Для серии прямоугольных импульсов длительностью T и амплитуды M из уравнений (11) или (10) при $\frac{1}{T_1}\to 0$ получим

$$F(t)=Mk\left(t-\frac{T}{2}\right). \qquad (12)$$

Двойное интегрирующее звено можно представить в виде последовательного соединения двух интегрирующих звеньев. Исходя из этого, подставим в уравнение (11) взамен $\psi(t)$ функцию $F(t)$, определяемую выражением (12), и, осуществив интегрирование, найдем периодическое решение для двойного интегрирующего звена:

$$F(t)=Mk\left[\frac{t^2}{2}-\frac{tT}{2}\right]. \qquad (13)$$

Пользуясь выражением (9), можно получить периодические решения $F(t) = H(t)$ для колебательного звена, а также звена второго порядка, передаточная функция которого имеет один полюс второй кратности, и т. п. На основании этого же выражения можно вычислить периодические решения для серии прямоугольных импульсов длительностью θ_1 с пропусками θ_2.

Суммируя периодические решения $F_k(t)$ или $F_{1k}(t)$, $F_{2k}(t)$ всех k параллельно соединенных звеньев линейных частей, найдем функции $F(t)$ или $F_1(t)$, $F_2(t)$, т. е. периодическое решение для линейной части рассматриваемой системы.

Зная функции $F(t)$ или $F_1(t)$, $F_2(t)$, на основании табл. 1 можно составить уравнение периодов.

Для характеристик, изображенных на фиг. 1 *а* и *б*, уравнение периодов будет одним уравнением с одним неизвестным T, для характеристик типа изображенных на фиг. 1 *в* и *г* будем иметь два уравнения с двумя неизвестными θ_1 и θ_2.

В табл. 2 даны периодические решения, т. е. функции $F(t)$, $F_1(t)$, $F_2(t)$ для различных релейных элементов и различных передаточных функций линейной части системы, и приведены случаи симметричных и несимметричных колебаний $x(t)$ и $x_2(t)$ (фиг. 2). При релейных элементах *а*, *б*, *в*, *г* автоколебания теряют симметрию относительно оси времени: при постоянных по величине возмущающих силах, действующих на автоколебательную систему. Периодические решения для симметричных случаев вычислялись при помощи формул (9) и (11). Для несимметричных случаев вычисления проводились особо.

Изложенный способ определения параметров автоколебаний исходит из предположения, что автоколебания существуют, поэтому он должен быть дополнен исследованием устойчивости найденного автоколебательного режима. Устойчивость найденного режима будет гарантией его физической реализуемости. Точное исследование устойчивости сводится к исследованию нелинейных разностных уравнений. Для малых отклонений от исследуемого автоколебательного режима можно получить линейные разностные уравнения, которые являются уравнениями первого приближения по отношению к исходным нелинейным уравнениям, и с помощью их исследовать сходимость или устойчивость автоколебательного режима [3]. Из уравнений первого приближения вытекает и частотный метод исследования устойчивости релейных систем, предложенный Я. З. Цыпкиным (см. главу XXXVII).

Оценить устойчивость можно также по характеру кривой $F(T)$.

Уравнение периодов $F(T) = 0$ или $F(T) = \sigma$ может иметь несколько корней.

Число корней уравнения периодов равно числу автоколебательных процессов, причем устойчивыми будут только те процессы, для которых выполняется условие [4].

$$\left.\frac{dF(T)}{dT}\right|_{T=T_{0\nu}} > 0, \tag{14}$$

где $T_{0\nu}$ — корень уравнения периодов.

Условие (14) имеет в виду характеристики *а* и *б*. Аналогичные условия устойчивости могут быть составлены для других случаев. Уравнение периодов обычно приходится решать графически, и при построении кривой $F(T)$ и определении корней одновременно устанавливается, какие корни уравнения периодов соответствуют устойчивым решениям. Как правило, условие (14) совпадает по существу с необходимым условием устойчивости, использующимся при исследовании автоколебаний методом гармонического баланса (см. главу XXXIII).

2. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Пример 1. Рассмотрим релейно-контактную следящую систему (фиг. 4). При неподвижной входной оси и релейном элементе типа, изображенного на фиг. 1*а*, уравнение следящей системы будет иметь следующий вид:

$$T_м \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{d\alpha}{dt} + \omega_у \operatorname{sgn} \alpha = 0,$$

где $T_м$ — электромеханическая постоянная времени двигателя;
$\omega_у$ — установившаяся скорость вращения двигателя, приведенная к выходной оси;
α — угол поворота выходной оси.

Вводя новую переменную $x = \frac{\alpha}{T_м \omega_у}$ и изменяя масштаб времени в $T_м$ раз, получим уравнение в нормированной форме:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \operatorname{sgn} x = 0.$$

Передаточная функция линейной части системы равна произведению передаточных функций апериодического и интегрирующего звена:

$$W(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}.$$

Записываем передаточную функцию в виде алгебраической суммы передаточных функций апериодического и интегрирующего звена:

$$W(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}.$$

Найдем периодическое решение при воздействии на вход линейной части серии прямоугольных, знакопеременных импульсов длительности T. Имеем

$$F(t) = t - \frac{T}{2} - 1 + \left(1 + \operatorname{th} \frac{T}{2}\right) e^{-t}.$$

Найдем значение $F(t) = F(t)_{t=T}$ в момент переключения:

$$F(T) = \frac{T}{2} - \operatorname{th} \frac{T}{2}.$$

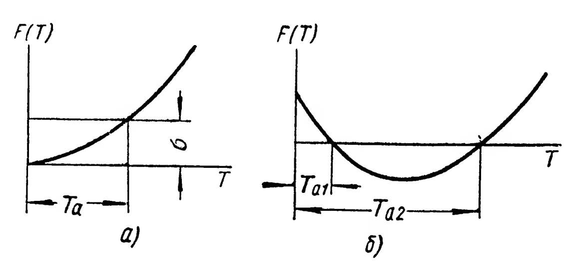
Отсюда уравнение периодов при идеальном реле (характеристика *а*):

$$\frac{T}{2} - \operatorname{th} \frac{T}{2} = 0.$$

Гиперболический тангенс всегда меньше своего аргумента, поэтому уравнение имеет один корень $T = 0$, что при идеальном реле означает автоколебания бесконечно большой частоты и бесконечно малой амплитуды.

Фиг. 4. Релейно-контактные следящие системы:

а — релейный элемент следящей системы имеет характеристику типа *а* или *в* с запаздыванием Δt; *б* — релейный элемент имеет характеристику типа *б* или *г*, контакторы дают запаздывание Δt.



Фиг. 5. Решение уравнений периодов.

Если реле имеет характеристику типа *б* (фиг. 1), то уравнение периодов примет вид

$$\frac{T}{2} - \operatorname{th}\frac{T}{2} = \sigma.$$

На фиг. 5, *а* приведено графическое решение уравнения периодов. Уравнение имеет один корень T_a. Автоколебания периода T_a устойчивы, так как в точке пересечения кривой $F(T)$ и прямой $F(T) = \sigma$ условие устойчивости (14) удовлетворяется. Пусть теперь каждое переключение происходит с опозданием на Δt по отношению к изменению знака входной величины релейного усилителя. В этом случае уравнение периодов примет вид

$$F(T - \Delta t) = \frac{T}{2} - \Delta t - 1 + \left(1 - \operatorname{th}\frac{T}{2}\right) e^{\Delta t} = 0.$$

На фиг. 5, *б* приведено графическое решение уравнения периодов для $\Delta t = 0{,}5$ единицы. Уравнение имеет два корня. При большом корне $T_{a2} = 2{,}75$ удовлетворяются как условие переключения, так и условие устойчивости.

Пример 2. Рассмотрим систему автоматического регулирования, в которой объект без самовыравнивания управляется сервомотором постоянной скорости с жесткой обратной связью. Сервомотор включается пусковым устройством с релейной характеристикой типа *г* (фиг. 1).

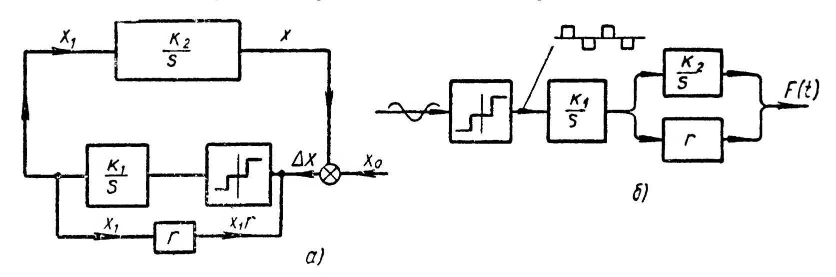
Структурная схема системы регулирования представлена на фиг. 6.

При размыкании системы у входа в нелинейный элемент линейная часть преобразуется в параллельно последовательное соединение трех звеньев (фиг. 6, *б*).

Находим передаточную функцию линейной части системы

$$W(s) = \left(\frac{k_2}{s} + r\right)\frac{k_1}{s} = \frac{k_1 k_2}{s^2} + \frac{k_1 r}{s}.$$

Передаточная функция является суммой передаточных функций интегрирующего и двойного интегрирующего звеньев. На линейную часть системы в автоколебательном режиме будет действовать серия знакопеременных импуль-



Фиг. 6. Схема системы регулирования.

сов длительностью θ_1 с паузами θ_2. Пользуясь данными табл. 2, находим периодическое решение, т. е. выходную величину линейной части системы при периодическом режиме, определенную в интервале импульса и в интервале паузы:

$$F_1(t) = k_1 r\left(t - \frac{1}{2}\theta_1\right) + k_1 k_2\left(\frac{t^2}{2} - \frac{\theta_1}{2}t - \frac{1}{4}\theta_1\theta_2\right);$$

$$F_2(t) = k_1 r\frac{\theta_1}{2} + k_1 k_2\left(\frac{\theta_1}{2}t - \frac{\theta_1\theta_2}{4}\right).$$

Уравнения периодов:

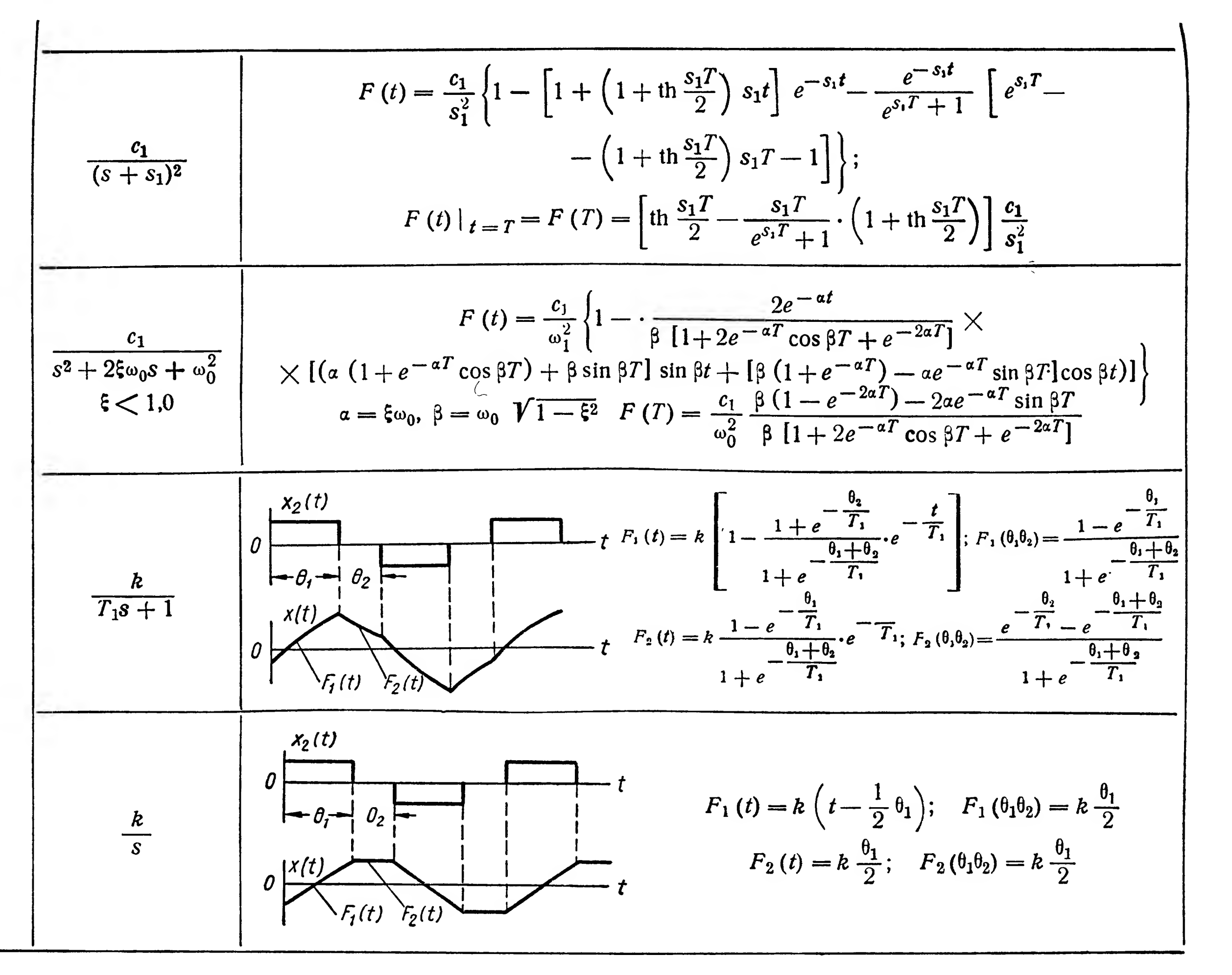
$$F_1(\theta_1, \theta_2) = F_1(t)_{t=\theta_1} = -(\sigma_0 - \sigma);$$

$$F_2(\theta_1, \theta_2) = F_2(t)_{t=\theta_2} = \sigma_0 + \sigma$$

Таблица 2

Периодические колебания для различных релейных элементов и передаточных функций линейной части системы

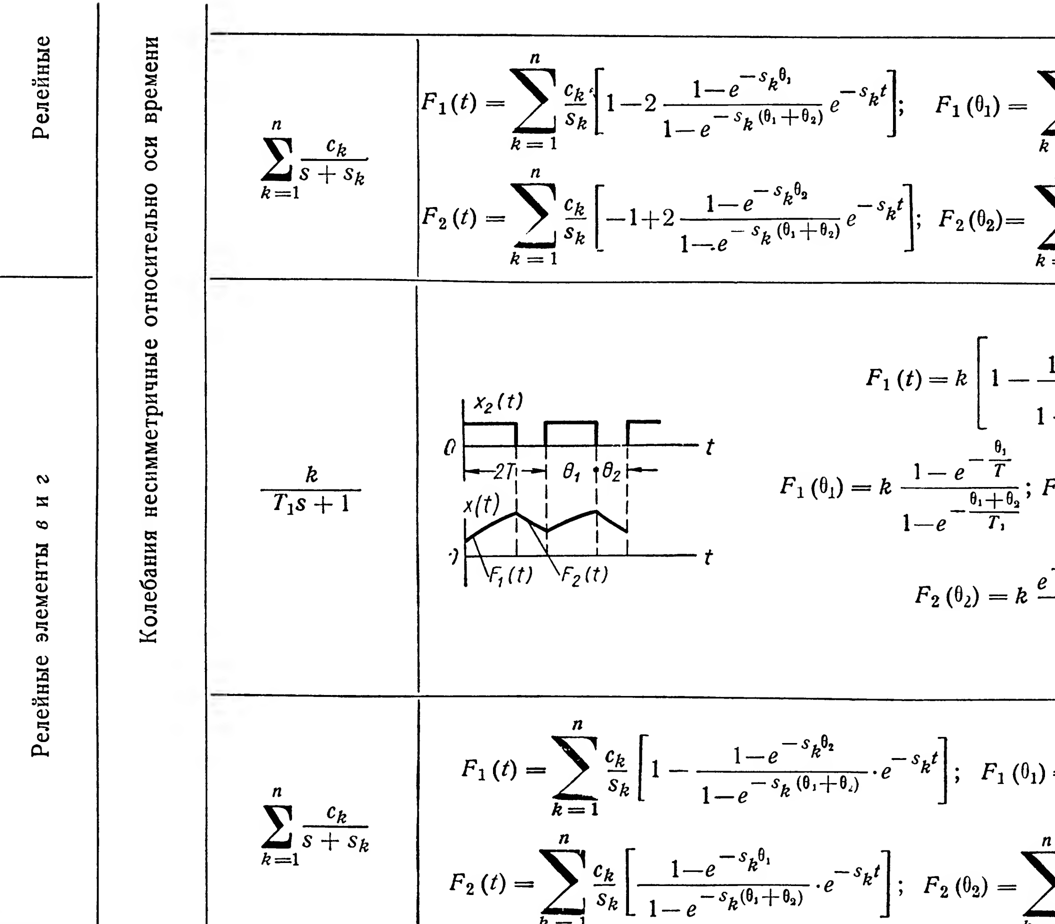
Вид релейного элемента	Форма колебаний	Передаточная функция линейной части системы	Аналитические выражения функций $F(t)$, $F_1(t)$ и $F_2(t)$ и их значения в момент переключения. Графики колебаний на входе и выходе линейной части системы
Релейные элементы *а* и *б*	относительно оси времени	$\frac{k}{T_1 s+1}$	$x_2(t)$, 0, 1,0, T, t; $x(t)$, T, 0, $F(t)$, t $F(t)=k\left[1-\left(1+\text{th}\frac{T}{2T_1}\right)e^{-\frac{t}{T_1}}\right]$ $F(t)\vert_{t=T}=F(T)=k\cdot\text{th}\frac{T}{2T_1}$
		$\frac{k}{s}$	$x(t)$, 0, $F(t)$, T, T, t $F(t)=k\left(t-\frac{T}{2}\right)$ $F(t)\vert_{t=T}=F(T)=k\cdot\frac{T}{2}$
		$\frac{k}{s^2}$	$x(t)$, 0, T, T, t $F(t)=k\left(\frac{t^2}{2}-\frac{tT}{2}\right)$ $F(t)\vert_{t=T}=F(T)=0$
		$\frac{k}{s^3}$	$F(t)=\frac{k}{2}\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2T}{2}+\frac{T^3}{3\cdot 4}\right]$ $F(t)\vert_{t=T}=F(T)=-k\frac{T^3}{24}$
		$\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s+s_k}$	$F(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s_k}\left[1-\left(1+\text{th}\frac{s_kT}{2}\right)e^{-s_kt}\right]$ $F(t)\vert_{t=T}=F(T)=\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s_k}\text{th}\frac{s_kT}{2}$



	Колебания симметричные	$\dfrac{c_1}{(s+s_1)^2}$	$F(t)=\dfrac{c_1}{s_1^2}\left\{1-\left[1+\left(1+\operatorname{th}\dfrac{s_1T}{2}\right)s_1t\right]e^{-s_1t}-\dfrac{e^{-s_1t}}{e^{s_1T}+1}\left[e^{s_1T}-\left(1+\operatorname{th}\dfrac{s_1T}{2}\right)s_1T-1\right]\right\};$ $F(t)\mid_{t=T}=F(T)=\left[\operatorname{th}\dfrac{s_1T}{2}-\dfrac{s_1T}{e^{s_1T}+1}\cdot\left(1+\operatorname{th}\dfrac{s_1T}{2}\right)\right]\dfrac{c_1}{s_1^2}$
		$\dfrac{c_1}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}$ $\xi<1{,}0$	$F(t)=\dfrac{c_1}{\omega_1^2}\left\{1-\cdot\dfrac{2e^{-\alpha t}}{\beta\,[1+2e^{-\alpha T}\cos\beta T+e^{-2\alpha T}]}\times\right.$ $\left.\times[(\alpha\,(1+e^{-\alpha T}\cos\beta T)+\beta\sin\beta T]\sin\beta t+[\beta\,(1+e^{-\alpha T})-\alpha e^{-\alpha T}\sin\beta T]\cos\beta t)]\right\}$ $\alpha=\xi\omega_0,\ \beta=\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\quad F(T)=\dfrac{c_1}{\omega_0^2}\,\dfrac{\beta\,(1-e^{-2\alpha T})-2\alpha e^{-\alpha T}\sin\beta T}{\beta\,[1+2e^{-\alpha T}\cos\beta T+e^{-2\alpha T}]}$
Релейные элементы *в* и *г*		$\dfrac{k}{T_1s+1}$	$F_1(t)=k\left[1-\dfrac{1+e^{-\frac{\theta_2}{T_1}}}{1+e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{T_1}}}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}\right];\ F_1(\theta_1\theta_2)=\dfrac{1-e^{-\frac{\theta_1}{T_1}}}{1+e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{T_1}}}$ $F_2(t)=k\,\dfrac{1-e^{-\frac{\theta_1}{T_1}}}{1+e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{T_1}}}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}};\ F_2(\theta_1\theta_2)=\dfrac{e^{-\frac{\theta_2}{T_1}}-e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{T_1}}}{1+e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{T_1}}}$
		$\dfrac{k}{s}$	$F_1(t)=k\left(t-\dfrac{1}{2}\theta_1\right);\quad F_1(\theta_1\theta_2)=k\,\dfrac{\theta_1}{2}$ $F_2(t)=k\,\dfrac{\theta_1}{2};\quad F_2(\theta_1\theta_2)=k\,\dfrac{\theta_1}{2}$

61 Коллектив авторов 1309

Вид релейного элемента	Форма колебаний	Передаточная функция линейной части системы	Аналитические выражения функции $F(t)$, $F_1(t)$ и $F_2(t)$ и их значения в момент переключения. Графики колебаний на входе и выходе линейной части системы
Релейные элементы *в* и *г*	Колебания симметричные относительно оси времени	$\frac{k}{s^2}$	$F_1(t) = k\left(\frac{t^2}{2} - \frac{\theta_1 t}{2} - \frac{\theta_1\theta_2}{4}\right);\quad F_1(\theta_1\theta_2) = -\frac{\theta_1\theta_2}{4}$ $F_2(t) = k\left(\frac{\theta_1 t}{2} - \frac{\theta_1\theta_2}{4}\right);\quad F_2(\theta_1\theta_2) = \frac{\theta_1\theta_2}{4}$
		$\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s+s_k}$	$F_1(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s_k}\left[1 - \frac{1+e^{-s_k\theta_2}}{1+e^{-s_k(\theta_1+\theta_2)}}e^{-s_k t}\right];\quad F_1(\theta_1\theta_2) = \sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s_k}\frac{1-e^{-s_k\theta_1}}{1+e^{-s_k(\theta_1+\theta_2)}}$ $F_2(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s_k}\frac{1-e^{-s_k\theta_1}}{1+e^{-s_k(\theta_1+\theta_2)}}e^{-s_k t};\quad F_2(\theta_1\theta_2) = \sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s_k}\frac{e^{-s_k\theta_2}-e^{-s_k(\theta_1+\theta_2)}}{1+e^{-s_k(\theta_1+\theta_2)}}$
элементы *а* и *б*		$\frac{k}{T_1 s+1}$	$F_1(t) = k\left[1-2\frac{1-e^{-\frac{\theta_2}{T_1}}}{1-e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{T_1}}}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}\right];\quad F_1(\theta_1) = k\cdot\frac{1-2e^{-\frac{\theta_1}{T_1}}+e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{T_1}}}{1-e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{T_1}}}$ $F_2(t) = k\left[-1+2\frac{1-e^{-\frac{\theta_1}{T_1}}}{1-e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{T_1}}}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}\right];\quad F_2(\theta_2) = k\cdot\frac{-1+2e^{-\frac{\theta_2}{T_1}}+e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{T_1}}}{1-e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{T_1}}}$

Релейные	Колебания несимметричные относительно оси времени	$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s+s_k}$	$F_1(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s_k}\left[1-2\frac{1-e^{-s_k\theta_1}}{1-e^{-s_k(\theta_1+\theta_2)}}e^{-s_kt}\right]$; $F_1(\theta_1)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s_k}\frac{1-2e^{-s_k\theta_1}+e^{-s_k(\theta_1+\theta_2)}}{1-e^{-s_k(\theta_1+\theta_2)}}$ $F_2(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s_k}\left[-1+2\frac{1-e^{-s_k\theta_2}}{1-e^{-s_k(\theta_1+\theta_2)}}e^{-s_kt}\right]$; $F_2(\theta_2)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s_k}\frac{-1+2e^{-s_k\theta_1}-e^{-s_k(\theta_1+\theta_2)}}{1-e^{-s_k(\theta_1+\theta_2)}}$
Релейные элементы *в* и *г*		$\frac{k}{T_1s+1}$	 $F_1(t)=k\left[1-\frac{1-e^{-\frac{\theta_2}{T_1}}}{1-e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{T_1}}}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}\right]$; $F_1(\theta_1)=k\frac{1-e^{-\frac{\theta_1}{T}}}{1-e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{T_1}}}$; $F_2(t)=k\frac{1-e^{-\frac{\theta_1}{T_1}}}{1-e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{T}}}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$ $F_2(\theta_2)=k\frac{e^{-\frac{\theta_2}{T_1}}-e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{T}}}{1-e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{T}}}$
		$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s+s_k}$	$F_1(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s_k}\left[1-\frac{1-e^{-s_k\theta_2}}{1-e^{-s_k(\theta_1+\theta_2)}}\cdot e^{-s_kt}\right]$; $F_1(\theta_1)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s_k}\frac{1-e^{-s_k\theta_1}}{1-e^{-s_k(\theta_1+\theta_2)}}$ $F_2(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s_k}\left[\frac{1-e^{-s_k\theta_1}}{1-e^{-s_k(\theta_1+\theta_2)}}\cdot e^{-s_kt}\right]$; $F_2(\theta_2)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s_k}\frac{e^{-s_k\theta_2}-e^{-s_k(\theta_1+\theta_2)}}{1-e^{-s_k(\theta_1+\theta_2)}}$

или

$$\frac{k_1}{2}\left(r\theta_1 - k_2\frac{\theta_1\theta_2}{2}\right) = -\sigma_0 + \sigma;$$

$$\frac{k_1}{2}\left(r\theta_1 + k_2\frac{\theta_1\theta_2}{2}\right) = \sigma_0 + \sigma,$$

откуда

$$\theta_{a1} = \frac{2\sigma}{k_1 r};$$

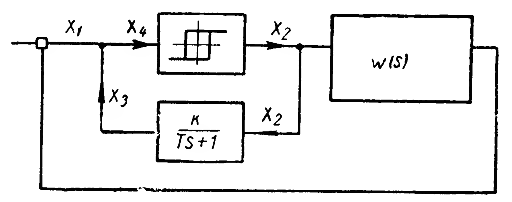
$$\theta_{a2} = \frac{2\sigma_0 r}{\sigma k_2}.$$

Условия переключения, как и условия устойчивости автоколебаний, в данном случае выполняются.

Из полученного выражения для θ_1 и θ_2 следует, что при $\sigma \to 0$ $\theta_1 \to 0$ и $\theta_2 \to \infty$. Это означает, что при характеристике типа *в* в системе автоколебаний не будет, и она будет устойчивой. При коэфициенте обратной связи $r \to 0$ $\theta_1 \to \infty$ и $\theta_2 \to 0$. Это означает, что система без обратной связи вокруг серво-мотора неустойчива, и колебания в ней безгранично нарастают. Если при $r = 0$ положить также $\sigma = 0$, система станет консервативной. Колебания в такой системе будут определяться начальными условиями.

3. ВЛИЯНИЕ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ЦЕПЕЙ НА АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Корректирующие цепи, как последовательные, так и параллельные, в линейной части системы повышают частоту и снижают амплитуду автоколебаний в системе. В этом обстоятельстве можно убедиться на любом примере. Особое значение имеют запаздывающие обратные связи, охватывающие нелинейный элемент. Чаще всего применяется обратная связь вокруг релейных элементов *б* и *г* через апериодическое звено. Эта обратная связь действует очень эффективно в смысле снижения амплитуды и повышения частоты автоколебаний. Пусть, например, без обратной связи уравнение периодов для системы, изображенной на фиг. 7, имело вид



Фиг. 7. Структурная схема системы с обратной связью вокруг релейного элемента.

$$F(T) = \sigma.$$

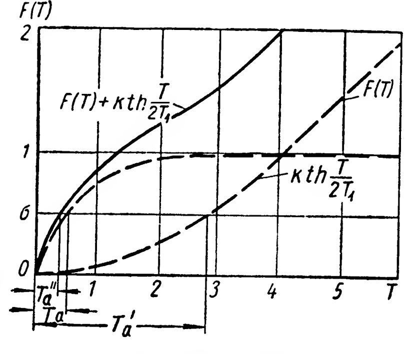
Из его решения (фиг. 8) был определен период T'_a. Цепь обратной связи включена параллельно всей линейной части системы, поэтому для системы с обратной связью в левой части уравнения периодов появится слагаемое $Mk\,\mathrm{th}\,\frac{T}{2T_1}$. Следовательно, теперь период колебаний T'_a найдется из выражения

$$F(T) + Mk\,\mathrm{th}\,\frac{T}{2T_1} = \sigma. \qquad (15)$$

Если в системе до включения обратной связи был автоколебательный режим с периодом колебаний T'_a, то при обратной связи, как следует из выражения (15), период колебаний уменьшится (фиг. 8) и станет равным T''_a.

Параметры цепи обратной связи k и T_1 всегда выбираются так, чтобы в несколько раз повысить частоту автоколебаний. При высокой частоте колебаний выходной величины линейной части по амплитуде они становятся очень малыми, а это значит, что слагаемое $F(T)$ становится ничтожным в сравнении со слагаемым $Mk \operatorname{th} \frac{T}{2T_1}$ в выражении (15), и период автоколебаний практически определяется только цепью обратной связи и характеристикой нелинейного элемента σ. Таким образом, период автоколебаний T''_a с достаточной точностью получается из выражения

$$T''_a \approx T_a \ln \frac{kM + \sigma}{kM - \sigma}. \quad (16)$$



Фиг. 8. Решение уравнения периодов.

В рассмотренном выше примере (см. фиг. 6) введением дополнительной запаздывающей обратной связи вокруг нелинейного элемента можно не только повысить частоту автоколебаний, но и сделать систему устойчивой.

4. ПОДАВЛЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ ВНЕШНИМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Рассмотрим поведение нелинейной системы (см. фиг. 2), если ее входная величина является периодической функцией. Независимо от того, была ли система устойчивой или в системе был автоколебательный режим, в ней в результате внешнего периодического воздействия может установиться периодической режим частоты, равной частоте периодического воздействия. Этот периодический режим будем называть вынужденным режимом.

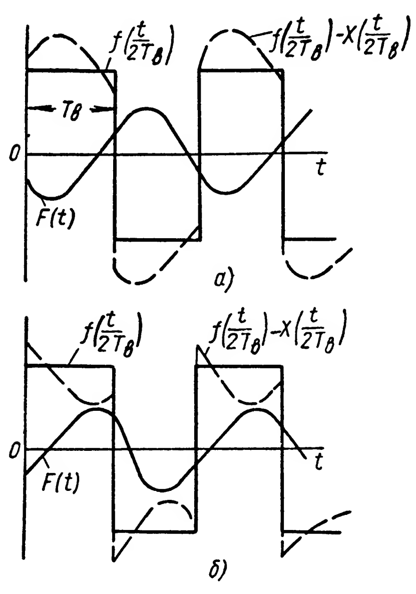
При вынужденном режиме, так же как и при автоколебательном, на линейную часть системы будет действовать последовательность прямоугольных импульсов (или импульсов с паузами). Частота (или период) этих импульсов известна, она равна частоте воздействия. Периодическое решение и колебания выходной величины при вынужденном режиме будут совершенно те же, что и в случае автоколебательного процесса.

Если в системе до приложения периодического воздействия были автоколебания, то возможность установления периодического режима частоты воздействия будет означать подавление автоколебаний внешними колебаниями, действующими на систему.

Поскольку вид периодического решения для автоколебательного и вынужденного режимов одинаков, то воздействие колебаниями более высокой частоты обеспечит достаточно малую амплитуду колебаний регулируемой величины. Это означает, что неустойчивая, неработоспособная

автоколебательная система, если приложить к ней периодическое воздействие, становится работоспособной и практически является устойчивой.

Рассмотрим условия существования вынужденного режима. Как и при анализе автоколебаний, разомкнем цепь обратной связи (см. фиг. 2) и подадим на вход периодическое воздействие $f\left(\frac{t}{2T_b}\right)$ ($2T_b$ — период внешнего воздействия $f(t)$. Далее, не снимая воздействия, замкнем систему. Если периодический режим при данной частоте возможен, то замыкание не должно нарушить установленный до замыкания периодический режим Наиболее просто решается задача о существовании периодического режима, если возмущающие колебания имеют прямоугольную форму. На фиг. 9, *а* показано, как в результате воздействия колебаний прямоугольной формы в разомкнутой системе на выходе линейной части установились колебания $x\left(\frac{t}{2T_b}\right)$. При замыкании системы все останется попрежнему, так как изменение знака суммарной входной величины $f\left(\frac{t}{2T_b}\right) - x\left(\frac{t}{2T_b}\right)$, а следовательно, переключение происходит в те же моменты, что и до замыкания цепи обратной связи.



Фиг. 9. Фазовые соотношения при вынужденном режиме.

Таким образом, как и в случае автоколебаний, для существования периодического режима необходимо выполнение следующих условий:

$$f\left(\frac{t}{2T_b}\right)_{t=T_b} - F(t)_{t=T_b} = 0; \tag{17}$$

$$\left|\frac{d\left[f\left(\frac{t}{2T_b}\right) - F(t)\right]}{dt}\right|_{t=T_b} < 0. \tag{18}$$

Второе условие является условием переключения.

Фазовые соотношения между $f\left(\frac{t}{2T}\right)$ и $F(t)$ могут оказаться, однако, такими (фиг. 9, *б*), что необходимое условие (17) станет недостаточным. Для того чтобы при всех фазовых соотношениях был периодический режим, необходимо, чтобы в положительном полупериоде на отрезке от $t=0$ до $t=T_b$ величина $f\left(\frac{t}{2T_b}\right)$ была больше $F(t)$, т. е.

$$f\left(\frac{t}{2T_b}\right) > F(t) \tag{19}$$

и соответственно для каждого отрицательного полупериода

$$f\left(\frac{t}{2T_b}\right) < F(t). \tag{19a}$$

Выполнение условия (19) будет гарантировать от непредусмотренных переключений за время положительного и отрицательного полупериодов T_b.

При достаточной амплитуде прямоугольных колебаний $f\left(\frac{t}{2T_b}\right)$ условия (17) и (19) всегда могут быть выполнены.

Устойчивость вынужденного режима также можно обеспечить выбором амплитуды $f\left(\frac{t}{2T_b}\right)$.

Пусть в процессе установления вынужденного режима значение выходной величины в течение положительного полупериода равно $H_n(t)$, причем

$$H_n(t) = F(t);$$
$$n \to \infty.$$

Очевидно, что периодический режим установится, если будет выполнено условие

$$f\left(\frac{t}{2T_b}\right) > H_n(t) \tag{20}$$

для каждого положительного полупериода n в процессе установления.

При достаточном значении амплитуды прямоугольных колебаний $f\left(\frac{t}{2T}\right)$ условие (20) будет выполнено, и, следовательно, вынужденный режим непременно установится и будет устойчив. В итоге можно сделать следующий вывод: если для линейной части системы в разомкнутом состоянии существует периодическое решение $F(t)$ периода T_b, то в замкнутой релейной системе всегда можно обеспечить вынужденный устойчивый периодический режим частоты $\frac{1}{2T_b}$ надлежащим выбором амплитуды возмущающих колебаний. Из этого следует, что если в системе имели место автоколебания, то они непременно будут подавлены периодическим воздействием $f(t)$ любой частоты, если только его амплитуда удовлетворяет условиям (19) и (20). Более того, при выполнении этих условий установится устойчивый периодический режим в неустойчивой системе, автоколебания в которой нарастают безгранично[1].

Заметим, что условия (19) и (20) очень нежесткие. В практически интересных случаях автоколебания подавляются при амплитудах периодических возмущений гораздо ниже тех значений, которые выбираются из условий вибрационной линеаризации (см. ниже).

---

[1] Случаи резонанса исключаются, так как при этом не существует $F(t)$ при данной частоте $\frac{1}{2T_b}$.

Изложенное справедливо с некоторыми дополнениями и для внешних колебаний всякой другой формы, в частности синусоидальной, действующих на вход релейного элемента системы. Необходимые условия периодического режима (17) и (18) для синусоидального воздействия амплитуды A запишутся в следующем виде:

$$\left[A \sin\left(\frac{\pi}{T_b} t - \varphi\right) - F(t)\right]_{t=T_b} = 0; \tag{21}$$

$$\frac{d}{dt}\left[A \sin\left(\frac{\pi}{T_b} t - \varphi\right) - F(t)\right]_{t=T_b} < 0. \tag{22}$$

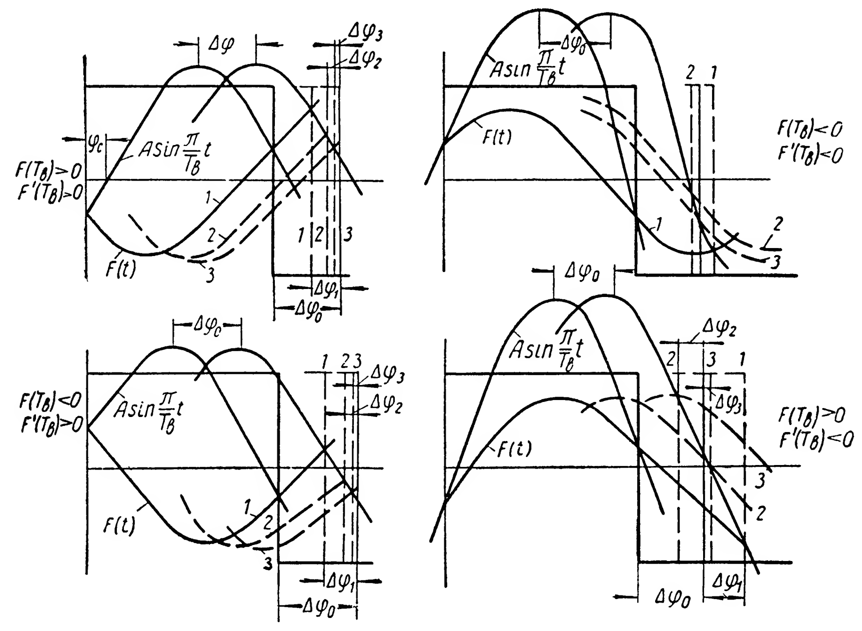
Как и в случае прямоугольных колебаний, при некоторых фазовых соотношениях эти необходимые условия могут оказаться недостаточными, и во избежание непредусмотренных переключений в течение полупериода потребуется выполнение условия (19).

Вынужденный периодический режим в нелинейной системе частоты $\frac{\pi}{T_b}$ в теории колебаний называется синхронным режимом. Условия (17) и (18), а равно и условия (21) и (22) являются условиями синхронизации. Фаза φ_c, определенная из выражения (21), является фазой переключения или фазой синхронизации. Вопрос об устойчивости синхронного режима при синусоидальном воздействии и выполнении условий синхронизации сводится к устойчивости фазы синхронизации φ_c. Такое исследование устойчивости фазы синхронизации возможно при изучении процесса установления синхронного режима из анализа системы нелинейных разностных уравнений или разностных уравнений первого приближения.

Можно определить необходимые условия устойчивости синхронного режима, аналогичные необходимому условию устойчивости автоколебаний (14). Причем эти необходимые условия представляют условия (21), (22), (19) и (20) (последнее и для процесса установления). При выполнении указанных условий всякое нарушение синхронного режима, выразившееся в изменении фазы синхронизации на $\Delta\varphi_0$, приводит к изменению момента переключения, так что возникшее отклонение $\Delta\varphi_0$ уменьшается и синхронный режим восстанавливается. На фиг. 10 изображены периодические функции $F(t)$ и $A \sin \frac{\pi}{T_b} t$ при четырех возможных фазовых соотношениях в установившемся синхронном режиме. Из диаграмм следует, что если изменить внезапно на $\Delta\varphi_0$ фазу синусоидального колебания, то во всех случаях переключение изменится так, что вся кривая $F(t)$ перемещается в сторону сместившихся колебаний $A \sin \frac{\pi}{T} t$ и возникшее отклонение $\Delta\varphi_0$ от фазы синхронизации последовательно уменьшится. Таким образом во всех случаях синхронный режим оказывается устойчивым.

Необходимые условия устойчивости для синхронного режима и условие (14) для автоколебаний представляют собой своеобразные „статические"

условия устойчивости периодических режимов. Для релейных систем, у которых линейная часть описывается уравнением не выше 2-го порядка, эти необходимые условия являются также и достаточными.



Фиг. 10. Процессы установления фазы синхронизации.

5. ПРИМЕРЫ СИНХРОНИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ

Пример 1. **Синхронизация генератора пилообразных колебаний.** Простейший генератор пилообразных колебаний представляет замкнутую систему из апериодического звена и релейного элемента с характеристикой типа изображенной на фиг. 1, *б*. Пусть на вход релейного элемента действуют синусоидальные колебания $A\sin\left(\frac{\pi}{T_в}t-\varphi\right)$. Найдем условие, при котором частота колебаний генератора будет равной частоте синусоидальных колебаний.

Для апериодического звена имеем

$$F(t)=Mk\left[1-\left(1+\operatorname{th}\frac{T}{2T_1}\right)e^{-\frac{t}{T_1}}\right].$$

Составим уравнение периодов и найдем полупериод T_a собственных колебаний (автоколебаний) генератора

$$F(T)=\sigma;$$

$$Mk\operatorname{th}\frac{T_a}{2T_1}=\sigma,$$

откуда

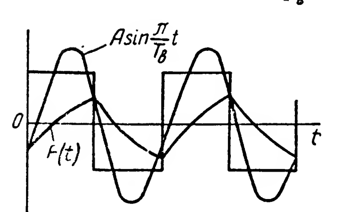
$$T_a=T_1\ln\frac{1+\frac{\sigma}{Mk}}{1-\frac{\sigma}{Mk}}.$$

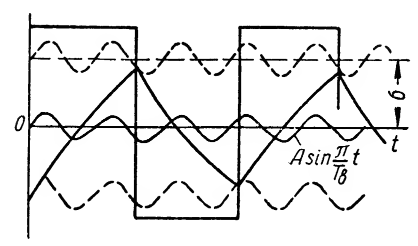
Пусть теперь ко входу релейного элемента генератора приложены синусоидальные колебания $A\sin\left(\frac{\pi}{T_в}t-\varphi\right)$.

Составим условия существования периодического режима:

$$A\sin\varphi-Mk\,\mathrm{th}\frac{T_в}{2T_1}=-\sigma; \tag{23}$$

$$\frac{A\pi}{T_в}\cos\varphi+\frac{Mk}{T}\left(1-\mathrm{th}\frac{T_в}{2T_1}\right)>0. \tag{24}$$





Фиг. 11. Синхронизированные колебания релаксационного генератора.

Первое условие можно переписать следующим образом:

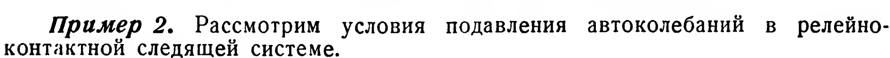
$$\sin\varphi_c=\frac{Mk}{A}\left[\mathrm{th}\frac{T_в}{2T_1}-\mathrm{th}\frac{T_a}{2T_1}\right]. \tag{25}$$

Последнее соотношение показывает что синхронизация возможна при вполне определенной разности между частотой синусоидальных колебаний и частотой автоколебаний, причем разность может быть тем больше, чем выше амплитуда синусоидальных колебаний.

Далее в зависимости от соотношения периодов $2T_a$ и $2T_в$ меняется также знак фазы φ_c. Если частота синусоидальных колебаний меньше частоты автоколебаний, то $\varphi_c>0$, если наоборот, то $\varphi_c<0$.

Уравнение (25) дает два решения относительно фазы φ_c, причем устойчивой будет фаза, при которой выполняется условие (24).

Заметим, что при $A<\sigma$ в разомкнутой системе синусоидальные колебания не могут вызвать переключения. В замкнутой системе это обстоятельство открывает возможность для так называемой групповой синхронизации, когда период колебаний генератора будет равен целому числу периодов синусоидальных колебаний. На фиг. 11 приведены синхронизированные колебания генератора для случая $\sigma=0$ и случай групповой синхронизации $A<\sigma$.



Пример 2. Рассмотрим условия подавления автоколебаний в релейно-контактной следящей системе.

Релейный усилитель следящей системы имеет характеристику „а“ с запаздыванием Δt. На вход релейного элемента для подавления автоколебаний подаются синусоидальные колебания $A\sin\left(\frac{\pi}{T_в}t-\varphi\right)$. Уравнения системы, как и выше, возьмем в нормированной форме.

Рассмотрим сначала более простой случай, когда запаздывание в усилителе равно нулю. Условия синхронного режима (21) и (22) запишутся в виде

$$A\sin\varphi-\frac{T_в}{2}+\mathrm{th}\frac{T_в}{2}=0;$$

$$A\frac{\pi}{T_в}\cos\varphi+\mathrm{th}\frac{T_в}{2}>0.$$

Минимальная критическая амплитуда $A_к$, при которой возможна синхронизация, равна значению $F(t)$ в момент переключения, т. е.

$$A_к=\frac{T_в}{2}-\mathrm{th}\frac{T_в}{2}=\frac{\pi}{4\omega}-\mathrm{th}\frac{\pi}{4\omega}.$$

Условия переключения при критической амплитуде выполняются, так как фаза при критической амплитуде всегда равна $\frac{\pi}{2}$. Если амплитуда синусоидальных колебаний при данной частоте ω окажется ниже критической, то синхронный периодический режим станет невозможным. При амплитудах значительно меньших критической следящая система начинает воспроизводить входную синусоидальную величину. На фиг. 12 построена кривая критической амплитуды в зависимости от частоты $\omega = \frac{\pi}{T_в}$. Вся область правее и выше кривой является областью синхронного режима. Вся область левее и ниже кривой является областью воспроизведения или областью следящего режима.

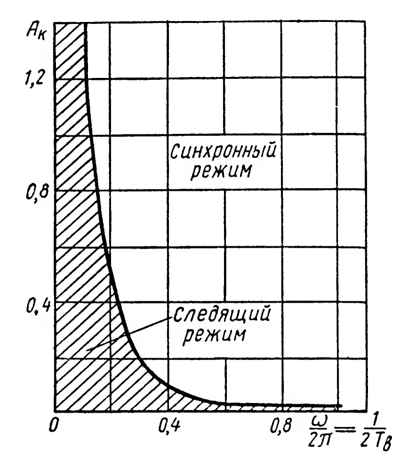
Рассмотрим ту же следящую систему, но при наличии запаздывания в релейном усилителе Δt. Условия синхронного режима для этого случая запишутся в следующем виде:

$$A\sin\varphi - \frac{T_в}{2} + \Delta t + 1 - \left(1 - \operatorname{th}\frac{T_в}{2}\right)e^{\Delta t} = 0; \quad (26)$$

$$A\frac{\pi}{T_в}\cos\varphi + \left(1 - \operatorname{th}\frac{T_в}{2}\right)e^{\Delta t} > 0. \quad (27)$$

Фаза синхронизации определяется уравнением

$$\sin\varphi = \frac{1}{A}\left[\frac{T_в}{2} - \Delta t - 1 + \left(1 - \operatorname{th}\frac{T_в}{2}\right)e^{\Delta t}\right]. \quad (28)$$

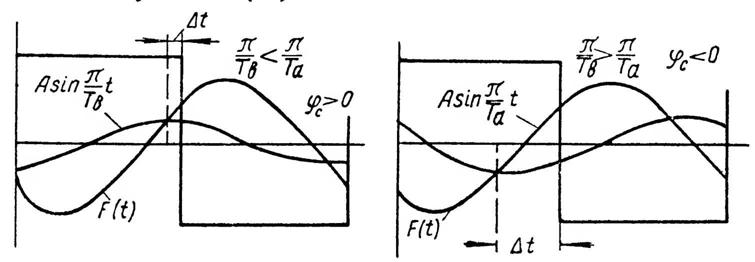


Фиг. 12. Кривая критических амплитуд.

Если частота синусоидальных колебаний равна частоте автоколебаний, то фаза синхронизации равна нулю, так как выражение в скобках в правой части обращается в нуль, и автоколебания синхронизируются при сколь угодно малой амплитуде A. Критическая амплитуда в этом случае будет равна нулю. Если частота синусоидальных колебаний меньше частоты автоколебаний, то фаза φ_c, как это следует из уравнения (28), положительна. Если частота синусоидальных колебаний выше частоты автоколебаний, то фаза отрицательна. При критической амплитуде фаза для обоих случаев равна $\pm\frac{\pi}{2}$ по отношению к моменту изменения знака суммарной величины, действующей на вход релейного усилителя. Так как переключение всегда опаздывает на Δt по отношению к этому моменту, то фаза по отношению к переключению при $\frac{\pi}{T_в} < \frac{\pi}{T_a}$ будет равна $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{T_в}\cdot\Delta t$, а при $\frac{\pi}{T_в} > \frac{\pi}{T_a}$ будет равна $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{T_в}\Delta t$. В первом случае при уменьшении частоты фаза стремится к $\frac{\pi}{2}$, во втором случае абсолютное значение фазы возрастает с ростом частоты. При этом предельное значение фазы равно $-\pi$, так как дальше окажется, что $T_в < \Delta t$. Последнее невозможно по условию реагирования реле (реле не реагирует на колебания, полупериод которых $T_в$ меньше запаздывания Δt).

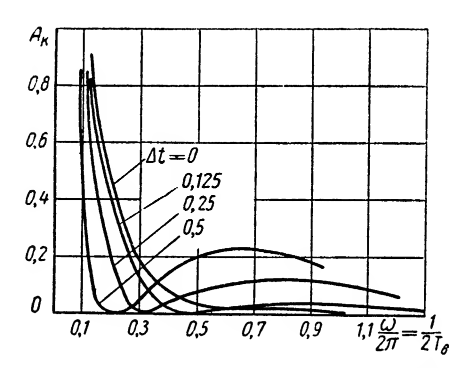
Более подробные исследования показывают, что при критической амплитуде условия переключения выполняются во всем диапазоне частот от $\frac{\pi}{T_в} = 0$ до $\frac{\pi}{T_в} = \frac{\pi}{\Delta t}$. В диапазоне частот от $\frac{\pi}{T_в} = 0$

до $\frac{\pi}{T_в} = \frac{\pi}{2\Delta t}$ критическая амплитуда может быть вычислена из выражения (26). При частотах, больших $\frac{\pi}{2\Delta t}$, при критической амплитуде, вычисленной по уравнению (26), дополнительное условие (19) не будет выполняться. Критическая амплитуда должна быть увеличена так, чтобы дополнительное условие (19) было выполнено.

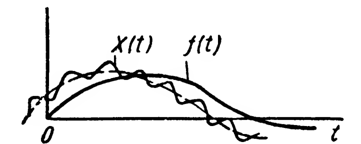


Фиг. 13. Синхронные режимы в следящей системе с запаздыванием в релейном усилителе.

На фиг. 13 показаны синхронные режимы для случаев положительной и отрицательной фаз синхронизации при критических амплитудах. На фиг. 14 даны зависимости критической амплитуды от частоты и запаздывания Δt. При частотах, равных частотам автоколебаний, кривые касаются оси абсцисс. Область, где амплитуды выше критических, является областью синхронных режимов. При этом автоколебания подавлены, и выходная величина колеблется с частотой синусоидальных колебаний. Область под кривой критических амплитуд при частотах, бо́льших частоты автоколебаний, является областью беспорядочных неизохронных колебаний выходной величины. Область под кривой критических амплитуд при



Фиг. 14. Кривые критических амплитуд для следящей системы с запаздыванием в релейном усилителе.



Фиг. 15. Реакция релейной системы на медленно меняющееся воздействие.

частотах меньших частоты автоколебаний, как и в предыдущем случае, есть область воспроизведения или область следящего режима. Чем меньше амплитуда и частота синусоидальных колебаний в этой области, тем точнее выходная величина воспроизводит в среднем входную синусоидальную величину. Выходную величину в этом случае приближенно можно рассматривать как сумму синусоидальной составляющей и деформированных автоколебаний (фиг. 15).

6. ВИБРАЦИОННАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ. РЕАКЦИЯ РЕЛЕЙНЫХ СТАБИЛИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ НА МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Реакция релейных стабилизированных систем, как за счет синхронизации автоколебаний высокочастотными колебаниями, так и за счет применения корректирующих устройств, на медленно меняющиеся воздействия сходна с реакцией линейных систем. Поэтому собственно и применяются релейные системы в качестве следящих систем. Только у релейной системы в отличие от линейной на основной закон изменения выходной величины, определяемый входной величиной, накладываются высокочастотные колебания. При стабилизации за счет корректирующих устройств это — автоколебания, при стабилизации за счет синхронизации автоколебаний эти колебания являются вынужденными колебаниями (фиг. 15).

Релейные системы как следящие имеют практическое значение только в случае, если обеспечивается удовлетворительное слежение за определенным классом медленно меняющихся возмущений.

Релейная система, обладающая такими свойствами, может быть названа квазилинейной. Система, не являющаяся квазилинейной в отношении нужного класса возмущений, является неработоспособной. У квазилинейной системы медленно меняющаяся вслед за входной выходная величина $x(t)$ содержит высокочастотные колебания. Эти высокочастотные колебания содержит и любая величина $x_k(t)$ рассматриваемой системы. Уравнение системы, содержащей линейную часть и релейный элемент и стабилизированной высокочастотными колебаниями частоты ω, можно записать в виде канонической системы уравнений первого порядка [3]

$$\frac{dx_k}{dt} + s_k x_k = F\left[f(t) - \sum_{k=1}^{n} c_k x_k + A\psi(\omega t)\right] + g_k(t), \tag{29}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

где F — релейная функция;

$f(t)$ — медленно меняющееся возмущение, действующее на релейный элемент;

$g(t)$ — медленно меняющееся возмущение, действующее на линейную часть системы;

$A\psi(\omega t)$ — синхронизирующие колебания.

Если при $f(t) = g(t) = 0$ система уравнений имеет периодическое решение $a_k\varphi_k(\omega t)$ частоты $\frac{\pi}{T_в}$, что означает синхронизацию или подавление автоколебаний, то интеграл системы уравнений (29) для промежутка от некоторого момента t до $t = \infty$ можно представить в форме

$$x_k = \overline{x}_k + a_k(\omega_t)\varphi_k(\omega_t t), \tag{30}$$

где $a_k(\omega_t)\,\varphi_k(\omega_t t)$ — функция, близкая к периодической;

ω_t — медленно меняющаяся частота, близкая к ω;

$\tilde{a}_k(\omega_t)$ — медленно меняющаяся амплитуда, близкая к a_k;

$\bar{x}_k$ — усредненная медленно меняющаяся реакция системы на возмущения $f(t)$, $g(t)$, зависящая также от начальных условий.

Поскольку линейная часть релейной системы регулирования всегда является фильтром нижних частот, то $a_k(\omega)$ — убывающая функция частоты. Выбором достаточно большой частоты можно обеспечить малое значение a_k, удовлетворяющее техническим требованиям. При упомянутых условиях $\bar{x}_k$ можно приближенно определить как среднее значение x_k за период, равный $\frac{2\pi}{\omega} = 2T_в$

$$\bar{x}_k \approx \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x_k(t)\,dt. \tag{31}$$

$$\omega \to \infty.$$

Чем выше частота ω, тем, очевидно, точнее будет это определение $\bar{x}_k$, так что в пределе будем иметь

$$\bar{x}_k = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x_k(t)\,dt. \tag{32}$$

$$\omega \to \infty.$$

Аналогичное выражение справедливо и для производных x_k

$$\frac{d\bar{x}_k}{dt} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{dx_k}{dt}\,dt. \tag{33}$$

Поскольку нас интересуют значения $\bar{x}_k$, то на основании уравнений (31) — (33) систему уравнений можно записать относительно $\bar{x}_k$:

$$\frac{d\bar{x}_k}{dt} + s_k\bar{x}_k = \Phi\left(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, x_n\right) + g(t), \tag{34}$$

где

$$\Phi\left(t, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\right) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F\left\{f(t) + \sum_1^n \left[b_k\left[\bar{x}_k + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + a_k(\omega_t)\,\varphi_k(\omega_t t)\right]\right] + A\psi(\omega t)\right\}. \tag{35}$$

Для вычисления функции Φ необходимо знать $a_k(\omega_t)\,\varphi_k(\omega_t t)$. Но так как в квазилинейных системах эта функция мало отличается от периодического решения $a_k\varphi_k(\omega t)$, то можно заменить $a_k(\omega_t)\,\varphi_k(\omega_t t)$

на $a_k\varphi_k(\omega t)$ для вычисления функции Ф. Систему уравнений (34) можно записать тогда в следующем виде:

$$\frac{d\bar{x}_k}{dt} + s_k\bar{x}_k = \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F\left\{f(t) - \sum_{k=1}^{n}[c_k\,[\bar{x}_k + a_k\varphi_k(\omega t)]\,] + A\psi(\omega t)\right\} + g_k(t), \tag{36}$$

$$k = 1,2\ \ldots\ n.$$

Чем выше частота ω, тем точнее интеграл уравнений (36) описывает усредненные значения.

Форма колебаний $A\psi(\omega t)$ определяет вид функции Ф. Можно так подобрать форму кривой $\psi(\omega t)$, что функция Ф окажется практически линейной функцией своих аргументов в определенном диапазоне, и уравнения (36) обратятся в систему линейных диференциальных уравнений.

Это превращение системы нелинейных уравнений в систему линейных уравнений отражает существо вибрационной линеаризации, т. е. квазилинейное поведение нелинейных систем. То же самое явление происходит в релейных системах, где автоколебания за счет корректирующих устройств доведены до приемлемых значений. В этом случае вибрационная линеаризация осуществляется за счет автоколебаний. Любая из величин x_k также может быть записана в форме уравнения (30), и система уравнений соответственно может быть записана в виде

$$\frac{d\bar{x}_k}{dt} + c_k\bar{x}_k + \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F\left\{f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\,[\bar{x}_k + a_k\varphi_k(\omega t)]\right\} dt + g_k(t), \tag{37}$$

$$k = 1,2\ \ldots\ n.$$

Линеаризирующими колебаниями являются колебания $a_k(\omega_t)\varphi_k(\omega_t t)$, которые можно заменить автоколебаниями $a_k\varphi_k(\omega t)$, т. е. периодическим решением исходной системы уравнений при $g(t) = f(t) = 0$.

В этом случае мы не имеем возможности влиять на вид функций Ф, однако они и в этом случае, особенно при малых значениях аргументов, мало отличаются от линейных зависимостей.

Найдем значения функции Ф для релейной функции, изображенной на фиг. 1, *а*, при различных формах кривой $A\psi(\omega t)$. Поскольку в практически интересных случаях слагающее $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(\omega t)$ в уравнении (36) незначительно, не будем учитывать ее влияние на форму функции Ф. Обозначим выходную величину релейного элемента x_2. Входная величина x_1 пусть содержит периодическую составляющую $A\psi(\omega t)$, тогда

$$\bar{x}_2 = \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} M\,\mathrm{sgn}\,[x_1 + A\psi(\omega t)]\,dt. \tag{38}$$

Если $[x_1] < A$, то подинтегральное выражение — периодическая функция (фиг. 16), среднее значение которой и будет искомой величиной $\bar{x}_2$. Если же $|x_1| \geqslant A$, то подинтегральное выражение и $\bar{x}_2$ равно $\pm M$ (знак определяется знаком x_1). Так как выходная величина релейного элемента — последовательность прямоугольных импульсов, то всегда

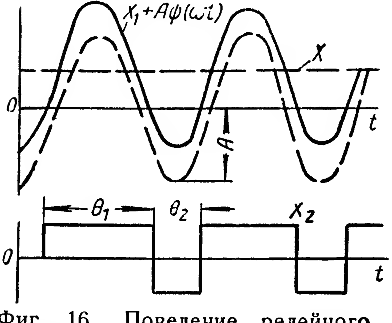
$$\bar{x}_2 = M \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2}. \tag{39}$$

Выражая θ_1 и θ_2 через величину x_1 и A, найдем для $\psi(\omega t) = \sin \omega t$

$$\bar{x}_2 = M \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = M \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{x_1}{A}, \tag{40}$$

для пилообразных (треугольных) колебаний

$$\bar{x}_2 = M \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{M}{A} x_1. \tag{41}$$



Фиг. 16. Поведение релейного элемента при вибрационной линеаризации.

Как видно, в последнем случае в диапазоне $-A \leqslant x_1 \leqslant A$ величина $\bar{x}_2$ является линейной функцией x_1 и релейный усилитель может быть заменен линейным усилителем с коэфициентом усиления $\frac{M}{A}$.

При синусоидальных линеаризирующих колебаниях нелинейный усилитель также можно считать линейным с коэфициентом усиления $M \frac{2}{\pi A}$.

В табл. 3 приведены функции $\bar{x}_2 = \Phi(x_1)$ для различных форм кривой $\psi(\omega t)$. Необходимо отметить, что наилучшей формой кривой следует считать треугольную форму. Линеаризацию с помощью колебаний прямоугольной формы надо считать недопустимой, так как это означает появление зоны нечувствительности для средних значений $\bar{x}_2$.

Все расчеты линеаризованных систем производятся точно так же, как и линейных систем, характеристика усилителей которых имеет область насыщения.

Для линеаризации рассмотренной выше следящей системы (см. фиг. 4) достаточно одну из обмоток поляризованного реле подключить к генератору пилообразных колебаний. В этом случае поведение следящей системы не будет отличаться от поведения линейной следящей системы с коэфициентом усиления усилителя $\frac{M}{A}$. Переходный процесс в системе протекает, как в линейной, при условии, что амплитуда единичной функции на входе системы не превосходит значения A.

Если релейный усилитель имеет запаздывание Δt, то при расчетах переходных процессов это обстоятельство можно учесть, введя в структуру системы запаздывающее звено с передаточной функцией $e^{-s\Delta t}$. В большинстве случаев влияние этого запаздывания на переходный

Таблица 3

Функции $\bar{x}_2 = \Phi(x_1)$ для различных форм кривой $\psi(\omega t)$

Форма линеаризующих колебаний	$\bar{x}_2 = \Phi(x_1)$	
	График	Аналитическое выражение
		Для $-A < x_1 < A$ $\bar{x}_2 = M \cdot \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{x_1}{A}$ Для $\lvert x_1 \rvert > A$ $x_2 = \pm M$
		Для $-A < x_1 < A$ $\bar{x}_2 = \frac{M}{A} \cdot x_1$ Для $\lvert x_1 \rvert > A$ $x_2 = \pm M$
		Для $-A < x_1 < A$ $\bar{x}_2 = 0$ Для $\lvert x_1 \rvert > A$ $x_2 = \pm M$

процесс ничтожно. Если релейный элемент имеет характеристику, изображенную на фиг. 1, *б*, то после линеаризации эквивалентный линейный усилитель будет давать постоянный сдвиг фаз на всех рабочих частотах.

7. РЕЛЕЙНЫЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С КОРРЕКТИРУЮЩИМИ УСТРОЙСТВАМИ. РЕАКЦИЯ НА МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Как уже упоминалось, в схемах, где обратная связь вокруг нелинейного элемента осуществляется через апериодическое звено с коэфициентом усиления k и постоянной времени T, обе эти величины выбираются таким образом, чтобы частота автоколебаний была достаточно высокой. В связи с этим можно не считаться с влиянием колебаний выходной величины на процессы в автоколебательном контуре, состоящем из релейного элемента и апериодического звена. В этих условиях для расчетов всей системы при медленно меняющихся воздействиях, в том числе для расчета переходных процессов, достаточно определить передаточную функцию автоколебательного контура для медленно меняющихся воздействий (см. фиг. 7).

62 Коллектив авторов 1309

Обозначим входную величину контура x_1, выходную x_2, сигнал обратной связи на входе релейного элемента x_3 и входную величину релейного элемента x_4. Поведение автоколебательного контура описывается следующей системой уравнений:

$$x_2 = F(x_4);$$

$$x_4 = x_1 - x_3;$$

$$T_1 \frac{dx_3}{dt} + x_3 = kx_2.$$

Та же система относительно средних значений запишется в виде

$$\overline{x}_2 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F\left[\overline{x}_4 + \psi(\omega t)\right] dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(x_1 - x_3)\, dt;$$

$$\overline{x}_4 = x_1 - \overline{x}_3;$$

$$T_1 \frac{d\overline{x}_3}{dt} + \overline{x}_3 = kx_2.$$

Рассмотрим случай нелинейной функции, изображенной на фиг. 1, *б*, и вычислим на основании первого уравнения функцию

$$\overline{x}_2 = \Phi = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(x_1 - x_3)\, dt.$$

Так как и в этом случае $\overline{x}_2 = M \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2}$, то необходимо найти $\theta_1 = \theta_1(x_1)$ и $\theta_2 = \theta_2(x_1)$. При $x_1 = 0$ $\theta_1 = \theta_2$, и в контуре будут автоколебания, период которых определяется выражением (16).

Если $x_1 \neq 0$, то $\theta_1 \neq \theta_2$, и закон изменения x_3 найдется как периодическое решение для апериодического звена при воздействии прямоугольных колебаний с неравными полупериодами θ_1 и θ_2 (см. табл. 2).

Величина $x_3(t)$ в промежутках между переключениями изменяется по экспоненциальному закону, поэтому для промежутка времени от $t = 0$ до $t = \theta_1$ имеем

$$x_3(t) = (x_1 - \sigma) e^{-\frac{t}{T}} + kM\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right), \tag{42}$$

и для промежутка времени от $t = 0$ до $t = \theta_2$

$$x_3(t) = (x_1 + \sigma) e^{-\frac{t}{T}} - kM\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right). \tag{42a}$$

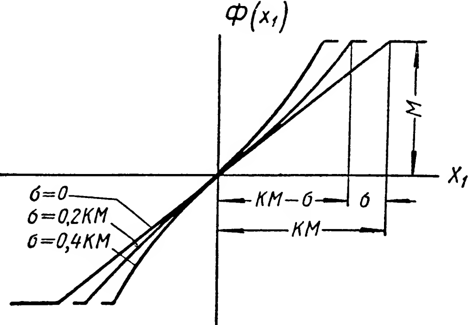
Поскольку x_1 — медленно меняющаяся функция, то ее можно считать постоянной в течение периода θ_1 и θ_2.

На основании уравнений (42) и (42а) находим θ_1 и θ_2 и среднее значение выходной величины $\overline{x}_2$:

$$\overline{x}_2 = \Phi(x_1) = M \frac{\ln\frac{kM - x_1 + \sigma}{kM - x_1 - \sigma} - \ln\frac{kM + x_1 + \sigma}{kM + x_1 - \sigma}}{\ln\frac{kM - x_1 + \sigma}{kM - x_1 - \sigma} + \ln\frac{kM + x_1 + \sigma}{kM + x_1 - \sigma}}. \qquad (43)$$

На фиг. 17 построены значения $\Phi(x_1)$ для различных значений σ. Полученные функции мало отличаются от прямых.

Предельный случай получим при $\sigma \to 0$. Частота колебаний $\frac{1}{\theta_1 + \theta_2}$ в этом случае стремится к бесконечности, а $\Phi(x_1)$ — к линейной функции в диапазоне $-kM \leqslant x_1 \leqslant kM$.



Фиг. 17. Характеристики релейного усилителя типа *б* с обратной связью.

Функции выражения (43) представляют статические характеристики релейного усилителя с обратной связью. Найдем передаточную функцию усилителя для предельного случая, когда $\sigma \to 0$ и $\frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \to \infty$.

При увеличении частоты автоколебаний разность $\overline{x}_4$ между x_1 и средним значением $\overline{x}_3$ стремится к нулю, поэтому в пределе имеем следующую систему уравнения для средних значений:

$$0 = x_1 - \overline{x}_3;$$

$$T_1 \frac{d\overline{x}_3}{dt} + \overline{x}_3 = k\overline{x}_2$$

или

$$\overline{x}_2 = \frac{1}{k}\left(x_1 + T_1 \frac{dx_1}{dt}\right).$$

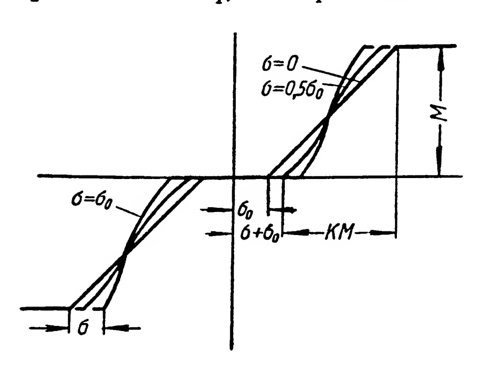
Следовательно, при $\sigma \to 0$ передаточная функция автоколебательного контура стремится к передаточной функции идеального диференцирующего звена:

$$\frac{\overline{x}_2(s)}{x_1(s)} = \frac{1}{k}(T_1 s + 1).$$

Кроме диференцирующих свойств, автоколебательный контур (т. е. релейный усилитель с обратной связью) (фиг. 18) имеет и запаздывание, определяемое величиной σ и неизбежным в релейном усилителе временным запаздыванием Δt, поэтому диференцирование входной величины происходит с неизбежными погрешностями.

Рассмотрим релейный элемент, изображенный на фиг. 1, *г*, охваченный также апериодическим звеном. Так как релейный элемент имеет

зону нечувствительности, то в контуре не будет автоколебаний при $x_1 = 0$. В контуре возникнут автоколебания лишь при $x_1 > x_{1\,пор}$, причем в отличие от предыдущего случая выходная величина будет представлять серию импульсов одной полярности длительностью θ_1 с паузами θ_2. Чем выше x_1, тем продолжительнее будут импульсы и тем меньше паузы. При некотором значении x_1 длительность пауз станет равной нулю, и на выходе релейного элемента будет получаться постоянный сигнал величин M.



Фиг. 18. Характеристики релейного усилителя типа г с обратной связью.

Для определения автоколебательного режима при $x_1 \neq 0$ необходимо найти реакцию апериодического звена на последовательность импульсов одной полярности длительностью θ_1 с паузами θ_2.

Пользуясь данными табл. 2 (строка 14), получим:

для промежутка времени от $t = 0$ до $t = \theta_1$

$$F_1(t) = x_3(t) = Mk\left[1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\left(\frac{1 - e^{-\frac{\theta_2}{T_1}}}{1 - e^{-\frac{\theta_1 + \theta_2}{T_1}}}\right)\right];$$

для промежутка времени от $t = 0$ до $t = \theta_2$

$$F_2(t) = x_3(t) = Mk\frac{1 - e^{-\frac{\theta_1}{T_1}}}{1 - e^{-\frac{\theta_1 + \theta_2}{T_1}}}e^{-\frac{t}{T_1}};$$

для моментов включения и выключения получим соответственно

$$F_1(0) = F_2(\theta_2) = kM\frac{e^{-\frac{\theta_2}{T_1}} - e^{-\frac{\theta_1 + \theta_2}{T_1}}}{1 - e^{-\frac{\theta_1 + \theta_2}{T_1}}};$$

$$F_1(\theta_1) = F_2(0) = kM\frac{1 - e^{-\frac{\theta_1}{T_1}}}{1 - e^{-\frac{\theta_1 + \theta_2}{T_1}}}.$$

Входная величина релейного элемента равна:

во время импульса

$$x_4 = x_1 - F_1(t),$$

во время паузы

$$x_4 = x_1 - F_2(t).$$

Входная величина x_4 спадает во время импульса и нарастает во время паузы. Когда x_4 спадает до величин $\sigma_0 - \sigma$, происходит отклю-

чение, когда же x_4 нарастает до величины $\sigma_0+\sigma$, происходит включение. Из этих соображений получаем два уравнения периодов:

$$x_1 - F_1(\theta_1) = \sigma_0 - \sigma;$$
$$x_1 - F_2(\theta_2) = \sigma_0 + \sigma.$$

Подставляя в уравнение периодов значения $F_1(\theta_1)$ и $F_2(\theta_2)$, найдем

$$\theta_1 = T_1 \ln \frac{kM - x_1 + \sigma_0 + \sigma}{kM - x_1 + \sigma_0 - \sigma} = T_1 \ln \frac{1 - \frac{x_1}{kM} + \frac{\sigma_0+\sigma}{kM}}{1 - \frac{x_1}{kM} + \frac{\sigma_0-\sigma}{kM}};$$

$$\theta_2 = T_1 \ln \frac{x_1 - \sigma_0 + \sigma}{x_1 - \sigma_0 - \sigma} = T_1 \ln \frac{\frac{x_1}{kM} - \frac{\sigma_0-\sigma}{kM}}{\frac{x_1}{kM} - \frac{\sigma_0+\sigma}{kM}}.$$

Из выражения для θ_2 следует, что пороговое значение x_1, при котором начинается автоколебательный режим, равно $x_{1\,пор} = \sigma_0+\sigma$. При значении $x_1 = x_{1\,пор}$ длительность паузы θ_2 равна бесконечности. Из этого же выражения следует, что с увеличением x_1 пауза θ_2 сокращается и стремится к нулю. Наоборот, с увеличением x_1 длительность импульса возрастает и при $x_1 \geqslant kM + \sigma_0 - \sigma$ становится равной бесконечности, что означает прекращение автоколебательного режима и замыкание реле в какую-либо сторону.

Если $x_1 = \text{const}$, то

$$\bar{x}_2 = \Phi(x_1) = M\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2} =$$

$$= M\frac{\ln \frac{kM - x_1 + \sigma_0 + \sigma}{kM - x_1 + \sigma_0 - \sigma}}{\ln \frac{kM - x_1 + \sigma_0 + \sigma}{kM - x_1 + \sigma_0 - \sigma} + \ln \frac{x_1 - \sigma_0 + \sigma}{x_1 - \sigma_0 - \sigma}}.$$

Полученная зависимость $\bar{x}_2 = \Phi(x_1)$, как и в предыдущем случае, близка к линейной зависимости в определенном диапазоне. Эта зависимость тем ближе к линейной, чем выше частота автоколебаний. Частота колебаний тем выше, чем выше σ. С уменьшением σ, как видно из выражений для θ_1 и θ_2, обе величины уменьшаются. Рассмотрим предельный случай, когда $\sigma \to 0$ и частота стремится к бесконечности. В этом случае выражение для $\bar{x}_2$ оказывается неопределенным. Раскрывая неопределенность, получим

$$\bar{x}_2 = \Phi(x_1) = -\frac{\sigma_0}{k} + \frac{1}{k}x_1.$$

Таким образом, при $x_1 > x_{1\,пор}$, равном в данном случае σ_0, среднее значение $\bar{x}_2$ пропорционально входной величине x_1. Коэфициент пропорциональности при этом равен $\frac{1}{k}$.

Характеристика *г* (фиг. 1) релейного усилителя благодаря обратной связи через апериодическое звено для медленно меняющихся возмущений $x_1(t)$ стала линейной с зоной нечувствительности. Если положить $\sigma = \sigma_0$, то

предельная характеристика не будет иметь зоны нечувствительности, и коэфициент усиления, как и в предыдущем случае, будет равен $\frac{1}{k}$. Точно так же передаточная функция автоколебательного контура в предельном случае при $\sigma \to 0$ будет передаточной функцией идеального диференцирующего контура:

$$\frac{\overline{x}_2(s)}{x_1(s)} = \frac{1}{k}(T_1 s + 1).$$

Рассмотренные примеры касаются случая, когда корректирующая цепь использована как обратная связь вокруг релейного элемента.

В тех случаях, когда корректирующие цепи используются в линейной части системы, задача исследования реакции на медленно меняющиеся воздействия также может быть сведена к линейной задаче. Введение корректирующих средств приводит к резкому увеличению частоты автоколебаний и, следовательно, среди всех параллельных звеньев, на которые разбивается линейная часть системы, появляются звенья, имеющие определяющие значения для параметров автоколебаний. Эти звенья можно представить соединенными параллельно релейному элементу (фиг. 7) и свести задачу к только что рассмотренной.

Исследования переходных процессов[1] в синхронизированных системах и в системах, где релейные усилители охвачены запаздывающими обратными связями, производится точно так же, как и в линейных системах, в которых встречаются усилители с областью насыщения. Полученное таким способом решение всегда будет иметь некоторое несущественное ограничение в смысле достоверности для самого начала процесса.

Переходные процессы в релейных системах, стабилизированных за счет корректирующих цепей в линейной части системы, являются, в сущности, процессами установления автоколебаний. В некоторых случаях процесс установления среднего значения интересующей величины также можно рассматривать как переходный процесс в линейной системе. Это возможно в тех случаях, когда введение корректирующих средств обеспечивает так называемый скользящий режим в релейных системах. Заметим, что непосредственный охват релейных усилителей с запаздывающей обратной связью как раз и приводит к скользящему режиму в системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский В. А., Применение вибраторов для устранения нелинейностей в автоматических регуляторах, „Автоматика и телемеханика", т. VIII, 1947.

2. Лурье А. И., Операционное исчисление, ГИТТЛ, 1951.

3. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории регулирования, т. VIII, ГИТТЛ, 1951.

4. Цыпкин Я. З., Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях, Госэнергоиздат, 1951.

5. Рябов Б. А., ДАН, т. 71, № 4, 1950.

[1] Под переходным процессом понимается реакция системы на единичную функцию при нулевых начальных условиях.

ГЛАВА XXXVI

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА АВТОКОЛЕБАНИЙ ОДНОГО КЛАССА РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В настоящей главе излагается метод изучения автоколебаний одного широко распространенного класса релейных систем, разработанный А. И. Лурье. Этот метод опирается на известный метод интегрирования диференциальных уравнений — метод припасовывания — и каноническую форму записи исходных уравнений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему автоматического регулирования (см. фиг. 1, *а* гл. XXXII), возмущенное движение которой описывается уравнениями вида

$$\left.\begin{aligned} \dot{\eta}_k &= \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + n_k\xi; \quad (k=1, \ldots, n); \\ \dot{\xi} &= \Phi^*(\sigma); \quad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \eta_\alpha - \xi; \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

здесь η_α — координаты;

$b_{k\alpha}$ — заданные постоянные параметры объекта регулирования;

ξ — координата;

n_k — постоянные параметры регулирующего органа;

p_α — параметр регулятора;

σ — суммарный сигнал;

$\Phi^*(\sigma)$ — функция, определенная с помощью равенства

$$\Phi^*(\sigma) = \left.\begin{aligned} +H \quad &\text{при } \sigma > 0; \\ 0 \quad &\text{при } \sigma = 0; \\ -H \quad &\text{при } \sigma < 0, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

где H — заданное, положительное число.

График этой функции представлен на фиг. 19.

Приведем уравнения (44) к так называемой канонической форме. С этой целью рассмотрим линейную подстановку:

$$x_k = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(k)}\eta_\alpha + \xi; \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{46}$$

Диференцируя x_k, после исключения с помощью уравнений (44) величин $\dot{\eta}_\alpha$ находим

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(k)} \left[\sum_{\beta=1}^{n} b_{\alpha\beta}\eta_\beta + n_\alpha \xi \right] + \Phi(\sigma). \tag{47}$$

Для того чтобы придать уравнениям в новых переменных каноническую форму

$$\dot{x}_k = \lambda_k x_k + \Phi(\sigma); \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{48}$$

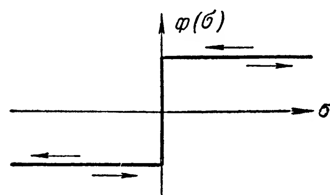
подберем постоянные $C_\alpha^{(k)}$ преобразования (46) так, чтобы удовлетворялись соотношения

$$\lambda_k C_\beta^{(k)} = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{\alpha\beta} C_\alpha^{(k)}; \quad (\beta, \ k = 1, \ldots, n); \tag{49}$$

$$\lambda_k = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(k)} n_\alpha,$$

где λ_k — параметры преобразования, определение которых сводится к следующему.

Первые n соотношений (49) следует рассматривать как линейные однородные уравнения относительно неизвестных $C_\alpha^{(k)}$. Как доказывается в алгебре, они тогда лишь имеют ненулевые решения, когда их определитель равен нулю.



Фиг. 19. Идеальная характеристика релейного элемента.

Таким образом, для того чтобы построить преобразование (46) и привести уравнения (44) к каноническому виду, мы должны выбрать числа λ_k как корни уравнения

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda, & \ldots, & b_{n1} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ b_{1n} & & b_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{50}$$

Чтобы закончить преобразование уравнений (44), остается выразить σ через новые переменные. Для этой цели надлежит определить из соотношений (49) все значения $C_\alpha^{(s)}$ и разрешить соотношения (46) относительно старых переменных.

Выполнив эти операции, получим

$$\eta_\alpha = \sum_{k=1}^{n} D_k^{(\alpha)} x_k + G_\alpha \xi; \quad (\alpha = 1, \ldots, n). \tag{51}$$

С помощью этих соотношений, диференцируя величину σ, найдем

$$\dot{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k z_k - \Phi(\sigma), \tag{52}$$

где постоянные β_k известны.

Итак, вместо исходных уравнений (44) мы получили канонические уравнения

$$\dot{x}_k = -\rho_k x_k + \Phi(\sigma); \quad (k = 1, \ldots, n); \tag{53}$$

$$\dot{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k - \Phi(\sigma), \tag{53a}$$

где $-\rho_k = \lambda_k$ — простые корни уравнения

$$\Delta(\lambda) = |b_{k\alpha} - \lambda\delta_{\alpha\beta}| = 0. \tag{54}$$

Что же касается функции $\Phi(\sigma)$, то путем должного выбора нового масштаба времени и в соответствии с равенством (45) она может быть определена равенством

$$\Phi(\sigma) = \left.\begin{matrix} +1 \text{ при } \sigma > 0; \\ 0 \text{ при } \sigma = 0; \\ -1 \text{ при } \sigma < 0. \end{matrix}\right\} \tag{55}$$

Уравнения (53) имеют очевидное решение

$$x_1^* = 0, \ldots; \quad x_n^* = 0; \quad \sigma^* = 0. \tag{56}$$

Оно характеризует невозмущенное движение системы автоматического регулирования, которое должен поддерживать регулятор. Однако мы заранее предполагаем, что регулятор не может обеспечить устойчивости по Ляпунову очевидного решения (56) и регулируемая система совершает в окрестности этого решения автоколебательные движения. Эти движения описываются периодическими решениями уравнений (53).

Задача состоит в том, чтобы найти эти решения и среди них отобрать те, которые отвечают автоколебательным движениям системы автоматического регулирования.

2. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Будем искать симметрические периодические (периода $2T$) решения уравнений (53). Очевидно, свойство периодичности решений будет выражаться равенствами

$$x_k(t) = -x_k(t+T); \quad (k = 1, \ldots, n); \ \sigma(t) = -\sigma(t+T). \tag{57}$$

Для решения уравнений (53) будем отсчитывать время от момента, в который $\sigma(0) = 0$. Однако при этом может быть $\dot{\sigma}(0) < 0$ либо $\dot{\sigma}(0) > 0$. Допустим, что имеет место последнее. Следовательно, в течение первого полупериода движения системы должно быть $\sigma(t) > 0$ $(0 < t < T)$. Этому движению должно отвечать решение уравнений

(53) при $\Phi(\sigma) = +1$. Найдем его. Интегрируя первые n уравнений, получим

$$x_k = x_k(0)\, e^{-\rho_k t} + \frac{1}{\rho_k}\left(1 - e^{-\rho_k t}\right); \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{58}$$

где $x_k(0)$ — значения координат x_k в момент времени $t = 0$.

В соответствии с решением (58) и дополнительным условием, что при $t = 0$ $\sigma = 0$, находим из уравнения (53а)

$$\sigma = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{\rho_k} - 1\right) t - \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{\rho_k^2}\left(1 - e^{-\rho_k t}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{\rho_k} x_k(0)\left(1 - e^{-\rho_k t}\right). \tag{59}$$

Формулы (58) и (59) определяют общее решение системы уравнений (53) при $\Phi(\sigma) = 1$ и дополнительном предположении, что при $t = 0$ $\sigma = 0$. Для определения симметрических периодических решений следует так распорядиться пока произвольными начальными значениями $x_k(0)$, чтобы удовлетворялись условия (57) при $t = 0$. Таким образом, подставляя в первые n равенств (57) x_k, определенные по формулам (58), получим

$$\overset{*}{x}_k(0) = -\frac{1}{\rho_k} \cdot \frac{1 - e^{-\rho_k T}}{1 + e^{-\rho_k T}}; \quad (k = 1, \ldots, n)$$

или в сокращенной записи

$$\overset{*}{x}_k(0) = -\frac{1}{\rho_k} \operatorname{th} \frac{\rho_k T}{2}; \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{60}$$

Далее, из последнего равенства (57) при учете выражений (59) и (60) и дополнительного условия, что при $t = 0$ $\sigma = 0$, будем иметь

$$\sigma(T) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{\rho_k} - 1\right) T - \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{\rho_k^2}\left(1 - e^{-\rho_k T}\right) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{\rho_k^2} \operatorname{th} \frac{\rho_k T}{2}\left(1 - e^{-\rho_k T}\right) = 0,$$

откуда после несложных преобразований получаем условие

$$\sigma(T) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{\rho_k} - 1\right) \frac{T}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{\rho_k^2} \operatorname{th} \frac{\rho_k T}{2} = 0, \tag{61}$$

которое носит специальное название *уравнения периодов*.

Положительный корень T уравнения (61) определяет полупериод искомого периодического решения, если $\sigma(t)$, определяемая формулой (69), при $x_k(0) = \overset{*}{x}_k(0)$ не обращается в нуль внутри интервала $0 < t < T$ и если $\dot{\sigma}(0) > 0$.

Внутри промежутка $0 \leqslant t \leqslant T$ найденное периодическое решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_k &= -\frac{1}{\rho_k} \operatorname{th} \frac{\rho_k T}{2} e^{-\rho_k t} + \frac{1}{\rho_k}\left(1 - e^{-\rho_k t}\right); \\ & 0 \leqslant t \leqslant T; \qquad (k = 1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Это решение продолжается в промежуток $T \leqslant t \leqslant 2T$ по формулам (57) и далее строится для любого промежутка из условий периодичности.

Полученное решение отвечает автоколебательному движению системы и описывает его, если оно обладает свойством устойчивости.

Следовательно, дальнейшее изучение автоколебательных движений систем автоматического регулирования сводится к изучению устойчивости периодических решений (62) уравнений (53).

В заключение отметим, что если среди корней $\rho_k = -\lambda_k$ есть один, равный нулю, например $\rho_n = 0$, необходимые соотношения для определения периодического решения получаются из найденных формул путем предельного перехода при $\rho_n \to 0$. В частности, для этого случая в уравнении периодов (61) пропадают члены, соответствующие корню $\rho_n = 0$.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Допустим, что уравнение (61) имеет положительный корень T и что этому корню действительно соответствует периодическое решение (62). Чтобы разрешить интересующий нас вопрос, проведем следующие рассуждения.

При начальных условиях (при $t = 0$)

$$x_k(0) = x_k^*(0); \ \sigma(0) = 0; \ (k = 1, \ldots, n) \tag{63}$$

выражения (58) и (59) определяют периодическое решение, меняющее знак через полупериод T, так что по прошествии времени $t = T$ имеют место равенства

$$x_k(T) = -x_k^*(0); \quad \sigma(T) = -\sigma(0); \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{64}$$

Значения $t = 0$ и $t = T$ определяют в этом случае два последовательных момента прохождения через нуль величины σ. Рассмотрим новые начальные условия [1]:

$$x_k(0) = x_k^*(0) + \delta x_k(0); \quad \sigma(0) = 0; \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{65}$$

При новых начальных условиях выражения (58) и (59) будут определять, вообще говоря, непериодическое решение. Однако, как и прежде, мы можем изучить это решение уравнений (53) по этапам.

В рассматриваемом случае на первом этапе величина σ снова пройдет через нулевое значение не через промежуток времени, равный T, как это имело место при начальных условиях (63), а по прошествии времени $T + \delta T$, так что при $t = T + \delta T$ будут иметь место равенств

$$x_k(T + \delta T) = -x_k^*(0) - \delta x_k^{(1)}(0); \ \sigma(T + \delta T) = -\sigma(0);$$
$$(k = 1, \ldots, n). \tag{66}$$

При $\delta x_k(0)$, очевидно, $\delta T = 0$.

[1] Здесь $\delta x_k(0)$ $(k = 1, \ldots, n)$ являются достаточно малыми по абсолютному значению постоянными величинами.

Подставим сюда выражения $x_k(T+\delta T)$ и $\sigma(T+\delta T)$ по формулам (58) и (59), в которых $x_k(0)$ возьмем согласно первым равенствам (65), разложим затем эти выражения в строку Тейлора по малым количествам δT, $\delta x_k(0)$, $(k=1, \ldots, n)$ и в полученных выражениях удержим члены первого порядка малости относительно указанных количеств. Тогда члены, не содержащие множителем величины δT и $\delta x_k^{(0)}$, сократятся, и в результате получим уравнения

$$\left.\begin{aligned}
&-\delta x_k^{(1)} = \delta x_k^{(0)} e^{-\rho_k T} + \{-\rho_k x_k^*(0) + 1\} e^{-\rho_k T}\delta T; \ (k=1, \ldots, n);\\
&\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{\rho_k}\delta x_k^{(0)}\left(1-e^{-\rho_k T}\right) + \left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k}{\rho_k} - 1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k}{\rho_k}e^{-\rho_k T} + \right.\\
&\qquad\left. + \sum_{k=1}^{n}\beta_k x_k^*(0)\, e^{-\rho_k T}\right\}\delta T = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Подставляя в полученные уравнения $x_k^*(0)$ из формул (60), получим после соответствующих приведений

$$\left.\begin{aligned}
&-\delta x_k^{(1)} = \delta x_k^{(0)} e^{-\rho_k T} + \left(1 - \operatorname{th}\frac{\rho_k T}{2}\right)\delta T; \quad (k=1, \ldots, n);\\
&\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k}{\rho_k}\left(1-e^{-\rho_k T}\right)\delta x_k^{(0)} = \left(1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k}{\rho_k}\operatorname{th}\frac{\rho_k T}{2}\right)\delta T.
\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Определим из второго уравнения (68) δT и подставим в первое уравнение, тогда получим

$$-\delta x_k^{(1)} = \delta x_k^{(0)} e^{-\rho_k T} + \left(1 - \operatorname{th}\frac{\rho_k T}{2}\right) \times$$

$$\times \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{\rho_i}\left(1-e^{-\rho_i T}\right)\delta x_i^{(0)}}{1 - \sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{\rho_i}\operatorname{th}\frac{\rho_i T}{2}}; \ (k=1, \ldots, n). \tag{69}$$

Аналогичным образом можно рассмотреть второй этап движения, в котором $\Phi(\sigma) = -1$, приняв за начальные условия конечные значения координат на предыдущем этапе движения и соответствующим образом изменив начало отсчета времени. В результате мы получили бы опять систему соотношений типа (69), которая только связывала бы теперь величины $\delta x_k^{(1)}$ с величинами $\delta x_k^{(2)}$, характеризующими отклонения

значений переменных $x_k(t)$ от их значений в рассмотренном выше периодическом движении в начале и в конце второго этапа движения.

И далее вообще нетрудно показать, что, заменяя в уравнении (69) $\delta x_k^{(1)}$ на $\delta x_k^{(s)}$, а $\delta x_k^{(0)}$ на $\delta x_k^{(s-1)}$, получим выражения

$$-\delta x_k^{(s)} = \delta x_k^{(s-1)} e^{-\rho_k T} + \left(1 - \operatorname{th}\frac{\rho_k T}{2}\right) \times$$

$$\times \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\rho_i}(1 - e^{-\rho_i T})\,\delta x_i^{(s-1)}}{1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\rho_i} \operatorname{th}\frac{\rho_i T}{2}}; \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{70}$$

которые определяют отклонения переменных $x_k(t)$ от их значений в периодическом движении в конце и в начале этапа.

Стационарный режим движения, соответствующий найденному выше периодическому решению — периодическое движение, будет асимптотически устойчивым, если выполняются предельные равенства

$$\lim_{s\to\infty} \delta x_k^{(s)} = 0; \quad (k = 1, \ldots, n); \lim_{s\to\infty} \delta T = 0. \tag{71}$$

Система уравнений (70) представляет систему линейных разностных уравнений с постоянными (т. е. не зависящими от номера s) коэфициентами. Решение этой системы находится в виде

$$\delta x_k^{(s)} = c_k \lambda^s; \ \delta x_k^{(s+1)} = c_k \ \lambda^{(s+1)}; \ (k = 1, \ldots, n). \tag{72}$$

После подстановки этих выражений в уравнение (70) получаем для определения постоянных коэфициентов c_k систему линейных однородных уравнений

$$-c_k\left(\lambda + e^{-\rho_k T}\right) = \left(1 - \operatorname{th}\frac{\rho_k T}{2}\right) \times \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\rho_i}\left(1 - \operatorname{th}\frac{\rho_i T}{2}\right) c_i}{1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\rho_i} \operatorname{th}\frac{\rho_i T}{2}}. \tag{73}$$

Система уравнений (73) будет тогда и только тогда иметь решение, отличное от нулевого, когда ее определитель будет равен нулю. Определитель системы уравнений (73) представляет полином n-й степени относительно величины λ, и соответствующее уравнение, которое здесь, так же как и в аналогичном случае теории диференциальных уравнений, называется характеристическим уравнением, имеет n корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Если все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ по модулю меньше единицы, то согласно уравнениям (72) величины $\delta x_1^{(s)}, \ldots, \delta x_n^{(s)}$ стремятся к нулю при беспредельном возрастании номера s. В этом случае стационарный режим

движения, соответствующий найденному периодическому решению (периодическое движение), будет асимптотически устойчив. Если хотя бы один из корней характеристического уравнения будет по модулю больше единицы, то периодическое движение будет неустойчивым.

Таким образом, вопрос об устойчивости свелся к исследованию величины численных значений корней характеристического уравнения. А. И. Лурье [1] указал весьма простой способ решения указанного выше характеристического уравнения.

Введем обозначение

$$A = -\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\rho_i}(1 - e^{-\rho_i T}) c_i}{1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\rho_i} \operatorname{th} \frac{\rho_i T}{2}}, \tag{74}$$

тогда из уравнения (73) получим

$$c_k = A \frac{1 - \operatorname{th}\frac{\rho_k T}{2}}{\lambda + e^{-\rho_k T}}; \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{75}$$

Подставляя отсюда c_k в формулу (74) и сокращая на A, получим после простейших преобразований характеристическое уравнение в виде

$$1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\rho_i} \operatorname{th} \frac{\rho_i T}{2} \cdot \frac{\lambda - e^{-\rho_i T}}{\lambda + e^{-\rho_i T}} = 0. \tag{76}$$

Чтобы рассматриваемое периодическое движение было устойчивым, все корни уравнения (76) должны быть по модулю меньше единицы. Однако для практических приложений удобно это уравнение преобразовать с помощью известной подстановки

$$\mu = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}, \tag{77}$$

которая преобразует внутренность круга $|\lambda| < 1$ в полуплоскость $\operatorname{Re} \mu < 0$. Уравнение (76) преобразовывается при этом к виду

$$1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\rho_i} \frac{\mu \operatorname{th}^{\rho_i T} + 1}{\mu \operatorname{cth} \frac{\rho_i T}{2} + 1} = 0. \tag{78}$$

Теперь очевидно, что все корни λ_i уравнения (76) будут по модулю меньше единицы только тогда, когда все корни μ уравнения (78) будут иметь отрицательные вещественные части.

Последняя задача может быть решена, например, применением критерия Рауса-Гурвица.

Характеристическое уравнение для случая, когда один из корней $\rho_1, \ldots, \rho_n$ равен нулю, например $\rho_n = 0$, получается из уравнения (78)

путем предельного перехода при $\rho_n \to 0$. В этом случае характеристическое уравнение имеет вид

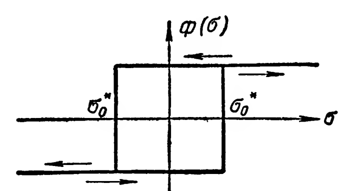
$$1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{\rho_i}\cdot\frac{\mu\,\text{th}\,\frac{\rho_i T}{2}+1}{\mu\,\text{cth}\,\frac{\rho_i T}{2}+1}-\frac{\beta_n T}{2\mu}=0. \tag{79}$$

Примечание. Полученные формулы легко обобщаются на случай, когда функция $\Phi(\sigma)$ задается табличкой значений

$$\Phi(\sigma)=\begin{cases}\left.\begin{array}{l}1 \text{ при } \sigma>\sigma_0^*\\ 0 \text{ при } \sigma=\sigma_0^*\\ -1 \text{ при } \sigma<\sigma_0^*\end{array}\right\}\dot\sigma>0;\\ \left.\begin{array}{l}+1 \text{ при } \sigma>-\sigma_0^*\\ 0 \text{ при } \sigma=\sigma_0^*\\ -1 \text{ при } \sigma<-\sigma_0^*\end{array}\right\}\dot\sigma<0,\end{cases}$$

или графически в виде петлеобразной кривой, представленной на фиг. 20, где σ_0^* — неотрицательное число.

В этом случае характеристическое уравнение (78) остается без изменения, а в правой части уравнения периодов (61) теперь вместо нуля следует писать σ_0^*.



Фиг. 20. Петлеобразная характеристика релейного элемента.

Пример. Рассмотрим задачу непрямого регулирования

$$\left.\begin{array}{r}\ddot\varphi+M\dot\varphi=-N\xi;\\ \dot\xi=\Phi(\sigma);\\ \sigma=\varphi+\beta\dot\varphi-\xi.\end{array}\right\} \tag{80}$$

Полагая

$$\eta_1=\varphi,\quad \eta_2=\dot\varphi, \tag{81}$$

приведем уравнения (80) к нормальной форме уравнения (44):

$$\left.\begin{array}{r}\dot\eta_1=\eta_2;\\ \dot\eta_2=-M\eta_2-N\xi;\\ \dot\xi=\Phi(\sigma);\\ \sigma=\eta_1+\beta\eta_2-\xi.\end{array}\right\} \tag{82}$$

Характеристическое уравнение (50)

$$\rho(\rho-M)=0$$

имеет два корня:

$$\rho_1 = M$$

и

$$\rho_2 = 0. \qquad (83)$$

Каноническая форма уравнений такова:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\rho_1 x_1 + \Phi(\sigma); \\ \dot{x}_2 &= \Phi(\sigma); \\ \dot{\sigma} &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 - \Phi(\sigma), \end{aligned}\right\} \qquad (84)$$

где

$$\beta_1 = \frac{N}{M}(1 - M\beta); \quad \beta_2 = -\frac{N}{M}.$$

Дальнейшее исследование сводится к анализу уравнений периодов (61) и характеристического уравнения (78), которые в данном конкретном случае выписываются сразу из общих формул с учетом соотношений (84) и того факта, что один из корней ρ_2 равен нулю.

Эти уравнения имеют вид

$$\left(1 - \frac{\beta_1}{\rho_1}\right)\frac{T}{2} = \frac{\beta_1}{\rho_1^2}\,\mathrm{th}\,\frac{\rho_1 T}{2};$$

$$1 = \frac{\beta_1}{\rho_1}\cdot\frac{\mu\,\mathrm{th}\,\frac{\rho_1 T}{2} + 1}{\mu\,\mathrm{cth}\,\frac{\rho_1 T}{2} + 1} + \frac{\beta_2 T}{2\mu}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И., Об автоколебаниях в некоторых регулируемых системах, „Автоматика и телемеханика“, т. VIII, № 5, 1947.

2. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, ГТТИ, 1950.

3. Лурье А. И., Об устойчивости автоколебаний регулируемых систем, „Автоматика и телемеханика“, т. IX, № 5, 1948.

ГЛАВА XXXVII

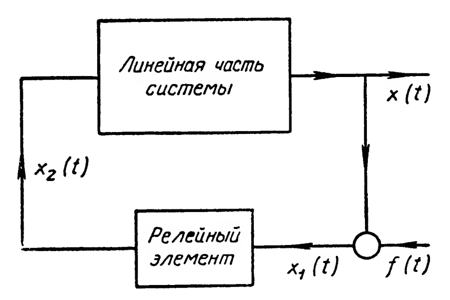
ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА АВТОКОЛЕБАНИЙ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В настоящей главе излагается частотный метод исследования автоколебаний и вынужденных колебаний в релейных системах автоматического регулирования с произвольным числом степеней свободы.

В основу метода положены понятия о передаточной функции и амплитудно-фазовой частотной характеристике, являющиеся весьма удобными, как это было показано в ряде предыдущих глав для полного и всестороннего анализа и синтеза линейных систем автоматического регулирования.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рассмотрим релейную систему автоматического регулирования, которая может быть представлена в виде соединения линейной части системы и релейного элемента, как показано на фиг. 21.



Фиг. 21. Схематическое изображение релейной системы автоматического регулирования.

Характеристика релейного элемента

$$x_2 = \Phi(x_1). \qquad (85)$$

Связь между выходной x_2 и входной x_1 величинами его существенно нелинейна и имеет вид, графически изображенный на фиг. 22,*а*. Частный случай этой характеристики при $x_0 = 0$ приведен на фиг. 22,*б*.

Линейная часть системы может описываться системой линейных дифференциальных уравнений в полных или частных производных. Мы предположим, что линейная часть системы имеет передаточную функцию

$$\frac{L\{x\}}{L\{x_1\}} = W(s). \qquad (86)$$

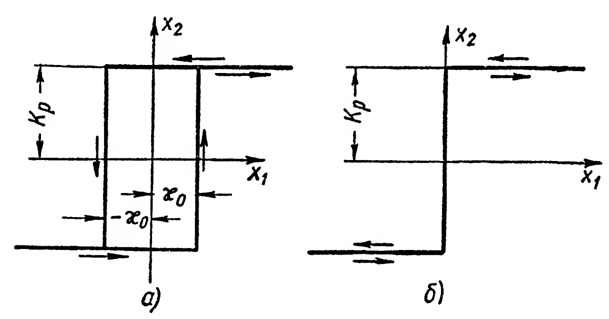
Передаточная функция, равная отношению изображений выходной величины линейной части системы к входной, может быть по известным

правилам, изложенным в главах VI и VII, получена по передаточным функциям или, что эквивалентно, по уравнениям отдельных звеньев.

В зависимости от свойств линейной части системы релейные системы автоматического регулирования могут быть подразделены на два типа: системы со статической линейной частью и системы с астатической линейной частью.

К первому типу относятся системы, в которых воздействие релейного элемента приводит, например, к скачкообразному изменению положения регулирующего органа. Системами этого типа являются двухпозиционные и вибрационные регуляторы.

Ко второму типу относятся системы, в которых воздействие релейного элемента приводит, например, к скачкообразному изменению скорости регулирующего органа. Системами этого типа являются системы с постоянной скоростью сервомотора.



Фиг. 22. Характеристики релейного элемента при $(а)\varkappa_0 = 0$ и $(б)\varkappa_0 \neq 0$.

Линейная часть системы может быть охарактеризована амплитудно-фазовой частотной или временной характеристиками.

Амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$, определяющая установившуюся реакцию линейной части системы на гармоническое воздействие с единичной амплитудой, может быть получена либо по передаточной функции $W(s)$ при замене в ней s на $j\omega$, либо найдена известными способами по экспериментальным данным.

Временная характеристика $h(t)$ представляет реакцию линейной части системы на воздействие вида единичного скачка.

В том случае, когда передаточная функция $W(s)$ имеет конечное число полюсов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и эти полюсы отличны друг от друга и не равны нулю, временная характеристика $h(t)$ определяется по известной формуле разложения

$$h(t) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu e^{\lambda_\nu t}, \qquad (87)$$

где

$$c_0 = W(0); \quad c_\nu = \lim_{\lambda \to \lambda_\nu} (s - \lambda_\nu)\, W(s). \qquad (88)$$

При наличии нулевых или кратных корней выражение для $h(t)$ существенно усложняется (см. главу V). Временную характеристику также можно определить экспериментальным путем.

Амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы $W(j\omega)$ может быть очень просто построена по амплитудно-фазовым характери-

стикам отдельных звеньев на основании известных правил для систем любой структуры. При этом особенно сильное упрощение достигается, как это было показано в главе XII, если применять логарифмические частотные характеристики, как расчетные, так и полученные на основе эксперимента.

В противоположность этому построение временной характеристики, например, по временным характеристикам отдельных звеньев, связано с некоторыми вычислительными затруднениями. Поэтому в основу исследования релейных систем целесообразно положить амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы.

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы, используя амплитудно-фазовую характеристику $W(j\omega)$ линейной части системы, ответить на все вопросы, связанные с существованием, устойчивостью и основными параметрами автоколебаний и вынужденных колебаний в релейных системах.

Далее, говоря об автоколебаниях, мы будем иметь в виду всегда симметричные автоколебания, определяемые полупериодом T, т. е. с частотой $\omega = \frac{\pi}{T}$ и симметричные вынужденные колебания, частота которых совпадает с частотой внешнего гармонического воздействия, не оговаривая этого каждый раз.

2. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ АВТОКОЛЕБАНИЙ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Предположим, что в релейной системе имеют место вынужденные колебания полупериода T, т. е. частоты $\omega = \frac{\pi}{T}$, вызванные гармоническим воздействием, приложенным ко входу релейного элемента:

$$f(t) = x_0 \sin(\omega t - \varphi), \tag{89}$$

где x_0 — амплитуда; φ — сдвиг фаз; $\omega = \frac{\pi}{T}$ — частота, так что

$$x_1(t) = x(t) + f(t), \tag{90}$$

тогда все величины, характеризующие состояние релейной системы, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x(t)$ будут изменяться также периодически с полупериодом T, т. е. с частотой $\frac{\pi}{T}$ (фиг. 23).

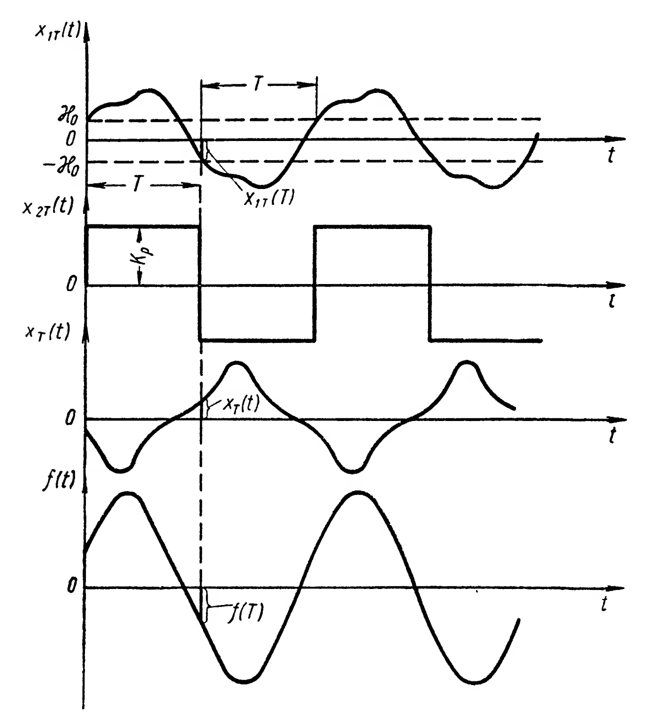
Обозначим эти периодически изменяющиеся величины через $x_{1T}(T)$, $x_{2T}(t)$ и $x_T(t)$.

Выходная величина релейного элемента $x_{2T}(t)$ представляет последовательность импульсов постоянной длительностью T, постоянной высоты k_p и чередующихся знаков. Эта последовательность импульсов, не зависящая от формы входной величины, воздействует на линейную часть системы и вызывает периодическое изменение выходной величины линейной части системы $x_T(t)$. Сумма $x_T(t)$ и $f(t)$ определяет $x_{1T}(t)$.

Как видно из фиг. 23, искомые вынужденные колебания или, точнее, периодическое решение может существовать, если будут выполнены следующие условия:

1) условие надлежащего момента переключения

$$[x_{1T}(t)]_{t=T} = x_{1T}(T) = -\varkappa_0; \tag{91}$$



Фиг. 23. К определению условий существования вынужденных колебаний.

2) условие надлежащего направления переключения

$$\left[\frac{dx_{1T}(t)}{dt}\right]_{t=T} = x'_{1T}(T) < 0; \tag{92}$$

3) условие отсутствия переключений внутри полупериода T

$$x_{1T}(t) > -\varkappa_0 \text{ при } 0 < t < T, \tag{93}$$

где $T = \frac{\pi}{\omega}$ — полупериод внешнего воздействия.

Воспользовавшись соотношениями (89) и (90), получаем

$$x_{1T}(t) = x_T(t) + x_0 \sin\left(\frac{\pi}{T} t - \varphi\right), \tag{94}$$

поэтому условия (91) — (93) можно после очевидных преобразований записать в виде

$$x_T(T) + x_0 \sin\varphi = -\varkappa_0; \tag{95}$$

$$\frac{T}{\pi} x'_T(T) - x_0 \cos\varphi < 0; \tag{96}$$

$$x_T(t) + x_0 \sin\left(\frac{\pi}{T} t - \varphi\right) > -\varkappa_0 \text{ при } 0 < t < T. \tag{97}$$

Условия (95) и (96) определяют амплитуды внешнего воздействия, при которых возможны вынужденные колебания полупериода T и сдвиг фаз φ этих колебаний.

Если внешние колебания отсутствуют, $f(t) = 0$, т. е. $x_0 = 0$, то

$$x_{вых\,T}(t) = x_{вх\,T}(t),$$

и условия (95), (96) и (97) переходят в условия существования автоколебаний

$$x_T(T) = -\varkappa_0; \tag{98}$$

$$\frac{T}{\pi} x'_T(T) < 0 \tag{99}$$

и

$$x_T(t) > -\varkappa_0; \text{ при } 0 < t < T. \tag{100}$$

В этом случае полупериод T искомых автоколебаний определяется как вещественный корень уравнения (98), удовлетворяющий уравнению (99).

Условия (97) и (100) автоматически проверяются при построении формы вынужденных колебаний или автоколебаний.

Легко видеть, что в том случае, когда внешнее периодическое воздействие приложено ко входу релейного элемента (см. фиг. 21), форма автоколебаний и вынужденных колебаний, если они имеют один и тот же полупериод, тождественны друг другу. Это следует из того, что в обоих случаях на линейную часть системы воздействует последовательность одних и тех же прямоугольных импульсов постоянной высоты и длительности, знаки которых чередуются.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕАКЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ СИСТЕМЫ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Для того чтобы получить приведенные выше условия существования колебаний в явной форме, необходимо найти предварительно функцию $x_T(t)$, представляющую установившуюся реакцию линейной части на последовательность прямоугольных импульсов чередующихся знаков (фиг. 23). Это можно сделать различными способами, описанными в литературе [1] — [5].

Однако все эти способы связаны с необходимостью вычисления полюсов передаточной функции $W(s)$ линейной части системы, что в тех случаях, когда система содержит распределенные параметры, элементы запаздывания, внутренние обратные связи и т. д., практически трудно выполнимо.

Кроме того, даже в случаях систем с сосредоточенными параметрами при наличии кратных и нулевых полюсов $W(s)$, полученные при этом выражения сильно усложняются. Поэтому мы воспользуемся несколько иным путем, основанным на простых физических соображениях и позволяющим решить все вопросы, связанные с автоколебаниями и вынужденными колебаниями по амплитудно-фазовой характеристике линейной части системы.

Как уже было отмечено, выходная величина релейного элемента представляет последовательность прямоугольных импульсов постоянной высоты k_p, постоянной длительности T и чередующихся знаков (фиг. 23). Эту последовательность импульсов можно представить в виде ряда Фурье

$$x_p(t) = \Phi(x_1(t)) = \frac{4}{\pi} k_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)} \sin(2m-1)\omega t, \qquad (101)$$

где $\omega = \frac{\pi}{T}$.

Линейная часть системы характеризуется амплитудно-фазовой характеристикой

$$W(j\omega) = H(\omega)\, e^{j\theta(\omega)}, \qquad (102)$$

где $H(\omega)$ — модуль, а $\theta(\omega)$ — фаза.

Для определения установившейся реакции линейной части системы $x_T(t)$ на последовательность импульсов можно найти установившуюся реакцию ее на каждую из гармоник ряда (101), а затем просуммировать эти реакции. Сделав это, получим

$$x_T(t) = \frac{4}{\pi} k_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{H[(2m-1)\omega]}{2m-1} \sin[(2m-1)\omega t + \theta((2m-1)\omega)], \qquad (103)$$

где $\omega = \frac{\pi}{T}$ — частота периодических колебаний в релейной системе и t изменяется от 0 до T*.

Полагая в уравнении (103) $t = T$ и замечая, что $\omega T = \pi$, найдем

$$x_T(T) = -\frac{4}{\pi} k_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{H[(2m-1)\omega]}{2m-1} \sin\theta((2m-1)\omega). \qquad (104)$$

Диференцируя уравнение (103) по t и затем полагая $t = T$, получим

$$\frac{T}{\pi} x'_T(T) = -\frac{4}{\pi} k_p \sum_{m=1}^{\infty} H[(2m-1)\omega] \cos\theta[(2m-1)\omega]. \qquad (105)$$

Обозначая через $U(\omega)$ и $V(\omega)$ действительную и мнимую части амплитудно-фазовой характеристики линейной части системы так, что

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \qquad (106)$$

и

$$\left.\begin{aligned} U(\omega) &= H(\omega)\cos\theta(\omega); \\ V(\omega) &= H(\omega)\sin\theta(\omega), \end{aligned}\right\} \qquad (107)$$

* В других интервалах $x_T(t)$ периодически повторяется.

перепишем уравнения (104) и (105) в форме

$$x_T(T) = -\frac{4}{\pi} k_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{V[(2m-1)\omega]}{2m-1}; \tag{108}$$

$$\frac{T}{\pi} x'_T(T) = -\frac{4}{\pi} k_p \sum_{m=1}^{\infty} U\big((2m-1)\omega\big). \tag{109}$$

4. ХАРАКТЕРИСТИКА РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Для практического определения условий существования вынужденных колебаний и автоколебаний удобно воспользоваться следующей геометрической интерпретацией.

Составим функцию

$$J(\omega) = ReJ + jJmJ, \tag{110}$$

где

$$JmJ = x_T(T) = -\frac{4}{\pi} k_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{V[(2m-1)\omega]}{2m-1}; \tag{111}$$

$$ReJ = \frac{T}{\pi} x'_T(T) = -\frac{4}{\pi} k_p \sum_{m=1}^{\infty} U\big((2m-1)\omega\big). \tag{112}$$

Эту функцию $J(\omega)$ назовем *характеристикой релейной системы.*

Задавая различные значения ω, построим на комплексной плоскости (фиг. 24) кривую[1] $J(\omega)$. Точка пересечения этой кривой с прямой $JmJ = -\varkappa_0$, расположенной в левой полуплоскости, определяет частоту автоколебаний $\omega = \omega_0$, удовлетворяющую условиям

$$JmJ = -\varkappa_0;$$
$$ReJ < 0, \tag{113}$$

которые совпадают с условиями (98) и (99).

Для определения амплитуды x_0 и сдвига фаз φ внешне приложенных колебаний, при которых будут иметь место вынужденные колебания частоты ω_0, нужно из точки $\omega = \omega_0$ на кривой $J(\omega)$, соответствующей заданной частоте, провести окружность радиуса x_0 (фиг. 25). Тогда углы, образованные радиусами этой окружности, проведенными в точках пересечения их с прямой $JmJ = -\varkappa_0$ (в левой полуплоскости), определяют сдвиг фаз φ искомых вынужденных колебаний частоты ω_0 при данной амплитуде x_0.

---

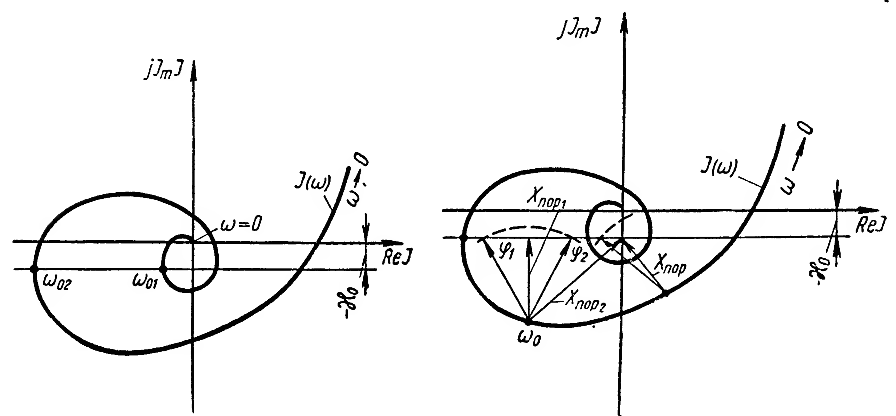
[1] Способ построения $J(\omega)$ описан ниже.

Из фиг. 25 следует, что в этом случае выполняются условия

$$\left.\begin{aligned} JmJ + x_0 \sin\varphi &= -x_0; \\ ReJ - x_0 \cos\varphi &< 0, \end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

эквивалентные условиям (95) и (96).

Если отсутствует пересечение окружности радиуса x_0 с прямой $JmJ = -x_0$ в левой полуплоскости J, то, значит, отсутствуют искомые вынужденные колебания. Это может быть, если амплитуда внешнего гармонического колебания x_0 меньше некоторой величины $x_{пор}$, которую мы назовем пороговым значением. Пороговое значение $x_{пор}$



Фиг. 24. Характеристика релейной системы. К определению автоколебаний.

Фиг. 25. Характеристика релейной системы. К определению вынужденных колебаний.

определяется как радиус окружности, касающейся прямой $JmJ = -x_0$, если значение $\omega_0 = \omega_0$ находится в левой полуплоскости J, или радиус окружности, пересекающей прямую $JmJ = -x_0$ в точке прохождения прямой через мнимую ось, если значение $\omega = \omega_0$ находится в правой полуплоскости J.

Итак, в релейной системе будут существовать вынужденные колебания, если амплитуда x_0 превышает пороговое значение, т. е.

$$x_0 > x_{пор\,1}. \qquad (115)$$

Для тех частот внешнего воздействия, которые расположены на кривой J в левой полуплоскости, при выполнении условия

$$x_{пор\,1} < x_0 < x_{пор\,2}, \qquad (116)$$

существуют два периодических решения, которым соответствуют различные фазы φ_1 и φ_2, такие, что

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \pm\pi. \qquad (117)$$

При

$$x_0 > x_{пор\,2} \qquad (118)$$

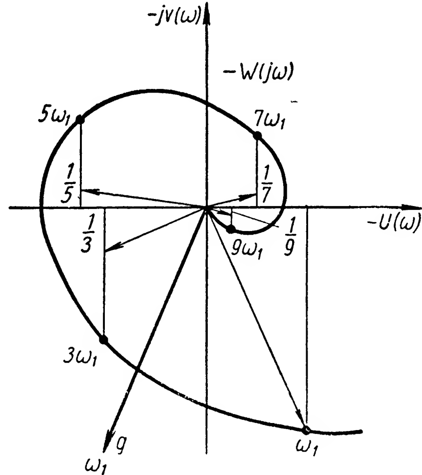
существует одно значение фазы и, значит, одно периодическое решение.

В том случае, когда значения $\omega = \omega_0$ расположены на кривой J в верхней части полуплоскости J, фаза φ изменяет свой знак.

Таким образом, характеристика релейной системы полностью решает вопросы, связанные с существованием автоколебаний и вынужденных колебаний.

Для построения характеристики релейной системы можно поступить следующим образом.

Изобразим на комплексной плоскости амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы со знаком минус, т. е. $-W(j\omega)$*, и отметим на ней точки ω_1, $3\omega_1$, $5\omega_1, \ldots, (2m-1)\omega_1$ (фиг. 26). Уменьшим ординаты $-W(j\omega)$, соответствующие этим точкам в 1, 3, 5, ..., $(2m-1)$ раз. Проводим к уменьшенным таким образом ординатам из начала координат векторы (фиг. 26).



Фиг. 26. Построение характеристики релейной системы $J(\omega)$ по амплитудно-фазовой частотной характеристике линейной части системы $W(j\omega)$.

Геометрическая сумма этих векторов, умноженная на $\frac{4}{\pi}k_p$, равна вектору характеристики релейной системы

$$J(\omega) = ReJ + jJmJ = -\frac{4}{\pi}k_p\left\{W(j\omega_1) + \sum_{m=2}^{\infty}\left[U[(2m-1)\omega_1] + \right.\right.$$
$$\left.\left. + j\frac{V[(2m-1)\omega_1]}{2m-1}\right]\right\}. \qquad (119)$$

Можно также определить $J(\omega)$ суммированием порознь абсцисс, уменьшенных указанным выше образом, и ординат $-W(j\omega)$. Повторяя эти построения для других значений ω, подобным образом находим значения $J(\omega)$ при любых значениях ω.

Увеличивая масштаб этих значений в $\frac{4}{\pi}k_p$ раз, найдем характеристику релейной системы $J(\omega)$. Проведя прямую $JmJ = -\varkappa_0$, как это уже было описано выше, находим частоты автоколебаний, пороговые значения и сдвиг фаз вынужденных колебаний.

---

* Заметим, что для систем автоматического регулирования $W(j\omega) = -\frac{M(j\omega)}{D(j\omega)}$, где знак минус указывает на то, что обратная связь является отрицательной. Поэтому $-W(j\omega) = \frac{M(j\omega)}{D(j\omega)}$.

5. УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОКОЛЕБАНИЙ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЕ

Автоколебания или вынужденные колебания, найденные указанным выше способом по характеристике релейной системы $J(\omega)$, могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Физически эти колебания могут наблюдаться в том случае, когда они устойчивы.

Для исследования устойчивости автоколебаний и вынужденных колебаний (в малом) можно воспользоваться известными из литературы строгими способами [1], [5].

Все эти способы состоят в том, что рассматривается непериодическое решение, близкое к найденному периодическому, и исследуется отклонение между ними. Периодическое решение устойчиво, если это отклонение стремится к нулю, и неустойчиво в противном случае.

Исследование устойчивости сводится к исследованию корней характеристических уравнений, порожденных некоторыми разностными уравнениями. Можно показать, что вынужденные колебания частоты ω_0 устойчивы, если все корни z_μ характеристического уравнения

$$\Psi(z)=\frac{x_0\omega_0}{2k_p}\cos\varphi+ +(1-z)\sum_{\nu=1}^{n} c'_\nu \frac{e^{\lambda_\nu\frac{\pi}{\omega_0}}}{1+e^{\lambda_\nu\frac{\pi}{\omega_0}}}\cdot\frac{1}{z+e^{\lambda_\nu\frac{\pi}{\omega_0}}}=0 \tag{120}$$

будут по модулю меньше единицы, т. е. если

$$|z_\mu|<1; \quad (\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{121}$$

Аналогичным образом, автоколебания частоты ω_0 будут устойчивыми, если все корни z_μ характеристического уравнения

$$\Psi(z)=\sum_{\nu=1}^{n} c'_\nu \frac{e^{\lambda_\nu\frac{\pi}{\omega_0}}}{1+e^{\lambda_\nu\frac{\pi}{\omega_0}}}\cdot\frac{1}{z+e^{\lambda_\nu\frac{\pi}{\omega_0}}}=0 \tag{122}$$

будут по модулю меньше единицы, т. е. если

$$|z_\mu|<1; \quad (\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{123}$$

В уравнениях (120) и (122), которые мы для краткости назовем уравнениями устойчивости, $c'_\nu=c_\nu\lambda_\nu$, где c_ν — коэфициенты формулы разложения (87), определяемые формулами (88), а λ_ν — полюсы передаточной функции линейной части системы $W(s)$, которые предполагаются здесь простыми и отличными от нуля. Для получения уравнения (122) из уравнения (120) нужно в последнем положить $x_0=0$ и разделить на $(1-z)$.

При наличии кратных или нулевых полюсов λ_ν у передаточной функции линейной части системы $W(s)$ выражения $\Psi(z)$ усложняются.

Зависимость уравнений устойчивости от полюсов передаточной функции линейной части системы $W(s)$ часто затрудняет их использование по той причине, что для сколько-нибудь сложной линейной части системы, содержащей внутренние обратные связи, элементы с распределенными постоянными, элементы с запаздыванием и т. п., вычисление этих полюсов становится весьма громоздким, а часто и практически неосуществимым. Поэтому преобразуем уравнения устойчивости к такой форме, которая не требовала бы предварительного определения полюсов $W(s)$, а была бы непосредственно связана с амплитудно-фазовой характеристикой линейной части системы (как, например, характеристика релейной системы) и позволила бы простыми геометрическими построениями получить искомые результаты.

Положим в уравнении устойчивости $z = e^{s\frac{\pi}{\omega_0}}$, тогда

$$\Psi^*(s) = \frac{x_0\omega_0}{2k_p}\cos\varphi +$$

$$+\left(1 - e^{-s\frac{\pi}{\omega_0}}\right)\sum_{\nu=1}^{n} c'_\nu \frac{e^{\lambda_\nu\frac{\pi}{\omega_0}}}{1 + e^{\lambda_\nu\frac{\pi}{\omega_0}}}\cdot\frac{1}{e^{s\frac{\pi}{\omega_0}} - e^{\lambda_\nu\frac{\pi}{\omega_0}}}. \qquad (124)$$

Условие устойчивости $|z_\mu| < 1$ заменится условием

$$Re s_\mu < 0,$$

где

$$s_\mu = \frac{\omega_0}{\pi}\ln z_\mu. \qquad (125)$$

По внешнему виду вторая часть уравнения устойчивости (124) напоминает передаточную функцию, подобную передаточной функции систем импульсного регулирования (см. главу XXI). Поэтому ее можно представить, как это было сделано в главе XXI, в форме, которая выражает $\Psi^*(z)$ через передаточную функцию линейной части системы.

Опуская выкладки, которые можно найти в [6], приведем окончательное выражение уравнения устойчивости вынужденных колебаний

$$\Psi^*(s) = \frac{\pi}{2k_p}\left[x_0\cos\varphi - Re\,J(\omega_0)\right] -$$

$$-\sum_{m=-\infty}^{\infty} W\left[s + j(2m-1)\,\omega_0\right] \qquad (126)$$

и уравнения устойчивости автоколебаний

$$\Psi^*(s) = \frac{1}{1 - e^{s\frac{\pi}{\omega_0}}}\left\{-\frac{\pi}{2k_p}Re\,J(\omega_0) -\right.$$

$$\left.-\sum_{m=-\infty}^{\infty} W\left[s + j(2m-1)\,\omega_0\right]\right\}. \qquad (127)$$

Для исследования устойчивости вынужденных колебаний представим уравнение устойчивости $\Psi^*(s)$ в форме

$$\Psi^*(s) = K + W^*(s).$$

Здесь

$$K = \frac{\pi}{2k_p}\left[x_0 \cos\varphi - Re\, J(\omega_0)\right] \qquad (128)$$

для данного значения частоты ω_0 и амплитуды x_0 постоянная величина. В силу условий существования вынужденных колебаний (114) величина K всегда положительна. Далее,

$$W^*(s) = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} W\left[s + j(2m-1)\omega_0\right]. \qquad (129)$$

Как видно из формулы (124), $\Psi^*(s)$ $j\omega_0 < s < -j\omega_0$,

где ω_0 — частота вынужденных колебаний имеет число полюсов $\lambda_\nu \pm j\omega_0$, равное n. Действительная часть этих полюсов совпадает с действительной частью полюсов λ_ν передаточной функции линейной части системы $W(s)$.

Устойчивость вынужденных колебаний определяется нулями функции $\Psi^*(s)$, число которых также равно n в указанной полосе.

Вынужденные колебания будут устойчивыми, если действительная часть этих нулей отрицательна.

Применив к формуле (124) рассуждения, аналогичные тем, которые применяются для установления критерия устойчивости систем прерывистого регулирования [3], приходим к следующему критерию устойчивости.

Вынужденные колебания частоты ω_0 *будут устойчивыми, если изменение аргумента* $\Psi^*(j\omega)$ *при возрастании* ω *от 0 до* ω_0 *будет равно* $m_1\pi$, *где* m_1 *— число полюсов передаточной функции линейной части системы* $W(s)$ *с положительной действительной частью, т. е. если*

$$\underset{0 \leqslant \omega \leqslant \omega_0}{\Delta \arg} \Psi^*(j\omega) = m_1\pi = \frac{m_1}{2}2\pi; \qquad (130)$$

В частности, если линейная часть системы устойчива, то

$$m_1 = 0$$

и

$$\underset{0 \leqslant \omega \leqslant \omega_0}{\Delta \arg} \Psi^*(j\omega) = 0, \qquad (131)$$

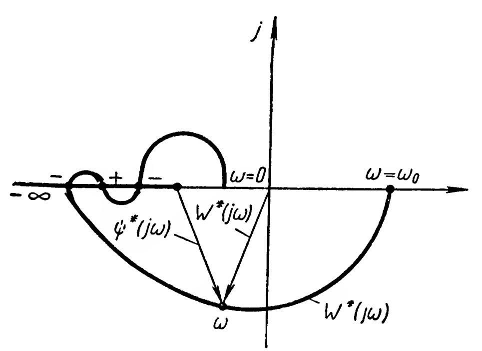
Если изобразить кривую $W^*(j\omega)$, то $\Psi^*(j\omega)$ будет вектором, проведенным из точки $-K$ к кривой $W^*(j\omega)$ (фиг. 27). По расположению точки $-K$, $j0$ относительно $W^*(j\omega)$ можно судить об изменении аргумента $\Psi^*(j\omega)$, а значит, и об устойчивости вынужденных колебаний.

Изменение аргумента $\Psi^*(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ω_0 будет равно нулю, если числа переходов $W^*(j\omega)$ (при возрастании ω) через отрезок действительной оси $(-\infty, -K)$ с верхней полуплоскости в нижнюю и с нижней полуплоскости в верхнюю равны друг другу.

Изменение аргумента $\Psi^*(j\omega)$ будет равно $\pm m_1\pi$, если разность между этими переходами равна $\pm\frac{m_1^*}{2}$.

Называя переход $W^*(j\omega)$ (с возрастанием ω от 0 до ω_0) через отрезок действительной оси ($-\infty$, $-K$) с верхней полуплоскости в нижнюю положительным, а с нижней плоскости в верхнюю — отрицательным (фиг. 27), критерий устойчивости вынужденных колебаний частоты ω_0 можно сформулировать следующим образом[1].

Вынужденное колебание частоты ω_0 будет устойчивым, если разность между положительными и отрицательными переходами $W^*(j\omega)$ отрезка ($-\infty$, $-K$) при возрастании ω от 0 до ω_0 равна $\frac{m_1}{2}$, где m_1 — число полюсов передаточной функции линейной части, и неустойчивым в любом другом случае. В наиболее распространенных случаях, если линейная часть устойчива, то *вынужденное колебание частоты ω_0 будет устойчивым, если разность между положительными и отрицательными переходами $W^*(j\omega)$ отрезка ($-\infty$, $-K$) равна нулю, и неустойчивым в любом другом случае.*



Фиг. 27. К критерию устойчивости вынужденных колебаний частоты ω_0.

Наконец, когда часть из полюсов передаточной функции линейной части равна нулю, т. е. линейная часть системы нейтральна, сформулированные выше критерии устойчивости остаются справедливыми, если, как это обычно делается, дополнить $W^*(j\omega)$ дугой бесконечно большого радиуса, описывающего положительный угол $\nu\frac{\pi}{2}$, где ν — число нулевых корней.

Таким образом, вопрос об устойчивости вышеуказанных колебаний частоты ω_0 сводится к построению

$$W^*(j\omega) = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} W\left[j\left(\omega + (2m-1)\,\omega_0\right)\right] \qquad (132)$$

и выяснению разности положительных и отрицательных переходов ее через отрезок ($-\infty$, $-K$).

$W^*(j\omega)$ можно построить по амплитудно-фазовой характеристике линейной части системы $-W(j\omega)$. Для этой цели, задавшись значением $\omega=\omega_1$, отметим на $-W(j\omega)$ (дополненной симметричной кривой для значений $\omega<0$) точки $\omega_1+\omega_0$, $\omega_1+3\omega_0$, $\omega_1+5\omega_0$, ..., $\omega_1-\omega_0$, $\omega_1-3\omega_0$, $\omega_1-5\omega_0$, ..., где ω_0 — частота вынужденных колебаний,

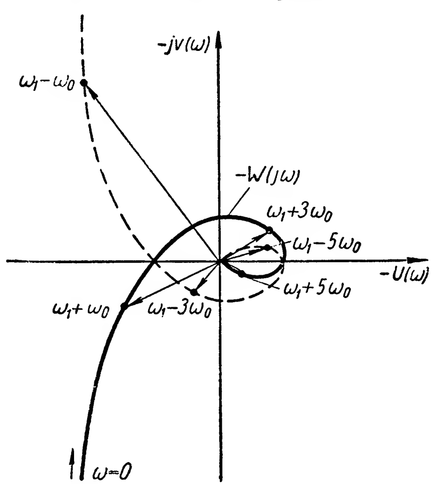
[1] Если значение $W^*(j\omega)$ при $\omega=0$ или $\omega=\omega_0$ находится на отрезке ($-\infty$, $-K$), то при этих значениях ω будем считать, что $W^*(j\omega)$ совершает половину перехода.

а ω_1 — любая частота, меньшая ω_0. Геометрическая сумма векторов, проведенных из начала координат к этим точкам (фиг. 28), согласно формуле (132), и определяет $W^*(j\omega)$ при $\omega = \omega_1$.

Задаваясь иными значениями ω в интервале $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_0$, аналогичным образом можно найти $W^*(j\omega)$ при всех интересующих нас значениях ω. В ряде случаев может оказаться более удобным построение $W^*(j\omega)$ производить путем сложения соответствующим образом смещенных вещественных и мнимых частей амплитудно-фазовой характеристики линейной части системы.

Если отделить в формуле (132) вещественные и мнимые части, то мы получим

$$\left.\begin{aligned} Re\, W^*(j\omega) &= U^*(\omega) = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} U(\omega + (2m-1)\omega_0); \\ Jm\, W^*(j\omega) &= V^*(\omega) = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} V(\omega + (2m-1)\omega_0). \end{aligned}\right\} \quad (133)$$



Фиг. 28. К построению $W^*(j\omega)$ по амплитудно-фазовой характеристике линейной части $W(j\omega)$.

Отсюда следует, что вещественная и мнимая части $W^*(j\omega)$ равны сумме вещественных и мнимых частей амплитудно-фазовых частотных характеристик линейной части системы $W\left[j(\omega + (2m-1)\omega_0)\right]$, где $m = 0 \pm 1 \pm 2 \ldots$

Для построения $U^*(\omega)$ и $V^*(\omega)$ изобразим графически вещественную и мнимую части амплитудно-фазовой частотной характеристики системы (фиг. 29, *б*) с обратным знаком, которые соответствуют, например, амплитудно-фазовой частотной характеристике (фиг. 29, *а*). Затем эти характеристики сместим вдоль оси частот на $(2m-1)\,\omega_0$ (фиг. 30).

Производя суммирование для каждого значения ω в интервале от 0 до ω_0, получаем $U^*(\omega)$ и $V^*(\omega)$.

Построенные таким образом $U^*(\omega)$ и $V^*(\omega)$ изображены на фиг. 30 жирной кривой в интервале $-\omega_0 \leqslant \omega \leqslant \omega_0$ и в остальных интервалах, где $U^*(\omega)$ и $V^*(\omega)$ периодически повторяются.

По найденным значениям $U^*(\omega)$ и $V^*(\omega)$ находим (фиг. 31)

$$W^*(j\omega) = U^*(\omega) + jV^*(\omega).$$

Отметим некоторые свойства $W^*(j\omega)$. При $\omega = 0$, учитывая (112), имеем

$$W^*(j0) = U^*(0) = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} W(j(2m-1)\omega_0) =$$

$$= -2\sum_{m=1}^{\infty} U\left((2m-1)\omega_0\right) = \frac{\pi}{2k_p} Re J(\omega_0), \quad (134)$$

при

$$\omega = \omega_0$$

$$W^*(j\omega_0) = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} W(j2m\omega_0) = -2\sum_{m=0}^{\infty} U(2m\omega_0). \qquad (135)$$

Если передаточная функция имеет полюсы, равные нулю, то слагаемое в левой части равенства (135) при $m=0$ обращается в бесконечность $W(0)=U(0)=\infty$, и, следовательно, в этом случае при $\omega=\omega_0$

$$W^*(j\omega_0)=\infty.$$

Величина

$$K=\frac{\pi}{2k_p}\times$$

$$\times[x_0\cos\varphi - ReJ(\omega_0)] \quad (136)$$

с точностью до множителя $\frac{\pi}{2k_p}$ определяется непосредственно по характеристике релейной системы. Если провести из точки характеристики, соответствующей частоте вынужденных колебаний ω_0, радиус — вектор x_0, то абсцисса точки пересечения его с прямой $JmJ(\omega_0)=-x_0$ и будет равна $\frac{2k_p}{\pi}K$ (фиг. 32).

Предположим, что линейная часть системы устойчива или нейтральна и что наибольшее по абсолютной величине пересечение кривой $W^*(j\omega)$ отрицательной части действительной оси имеет место при $\omega=0$ (фиг. 33); тогда условием устойчивости будет

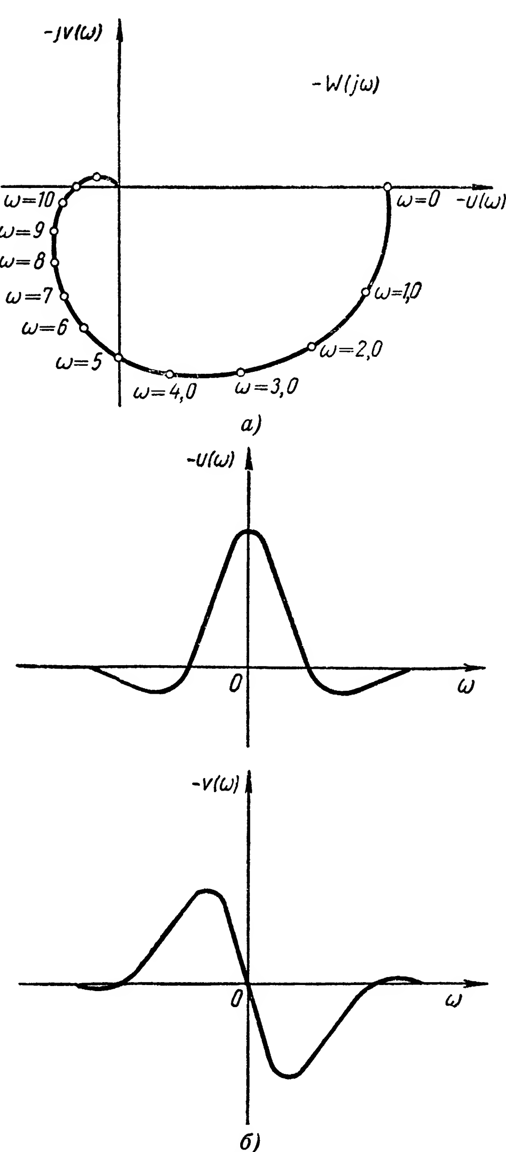
$$-K < W^*(j0) =$$

$$= U^*(0). \qquad (137)$$

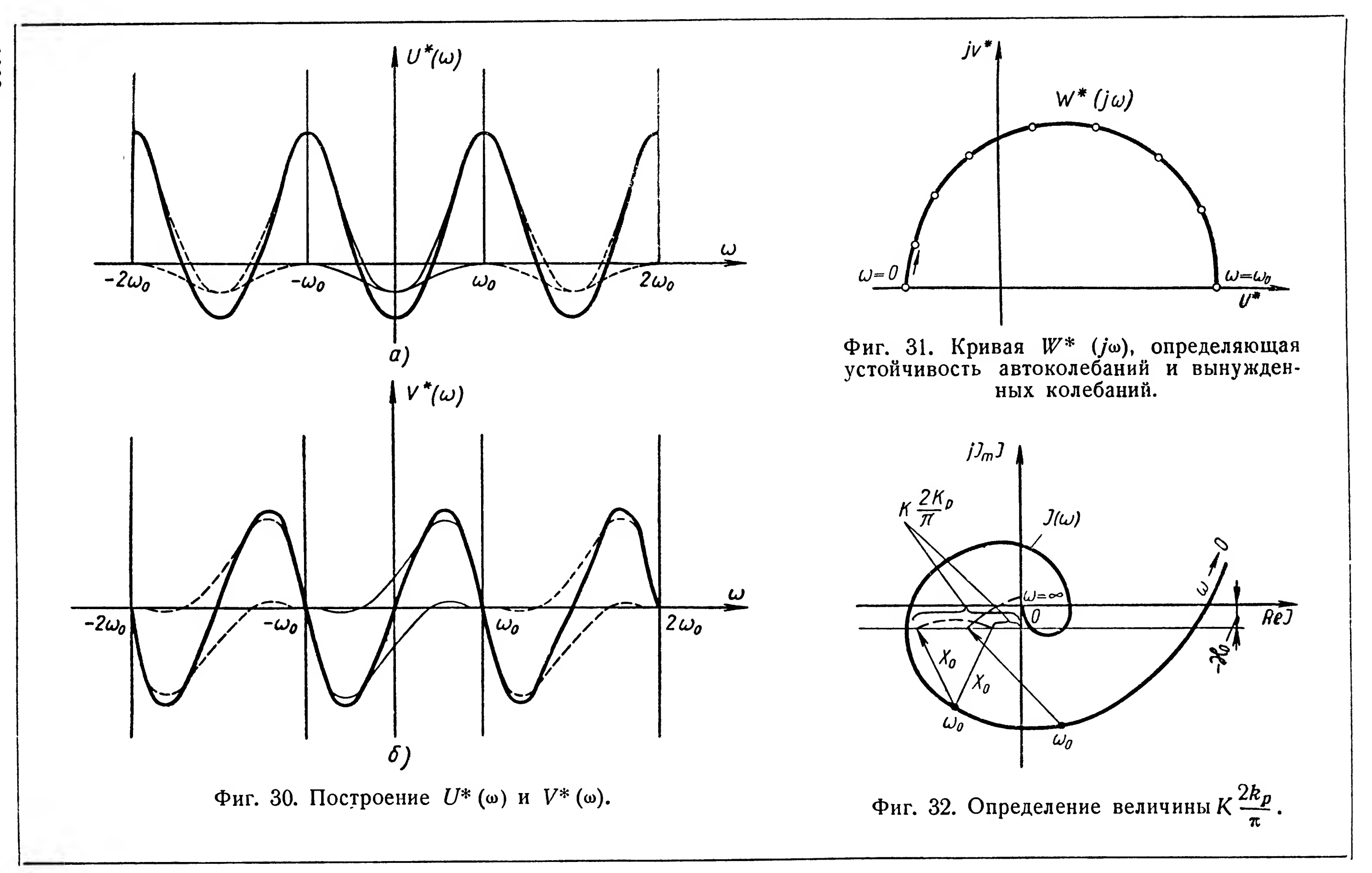
Учитывая равенства (134) и (135), это условие можно представить в виде

$$-\frac{\pi x_0}{2k_p}\cos\varphi < 0$$

или $\cos\varphi > 0$, (138)



Фиг. 29. Амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы.



Фиг. 30. Построение $U^*(\omega)$ и $V^*(\omega)$.

Фиг. 31. Кривая $W^*(j\omega)$, определяющая устойчивость автоколебаний и вынужденных колебаний.

Фиг. 32. Определение величины $K\frac{2k_p}{\pi}$.

откуда следует, что в этом случае вынужденные колебания, соответствующие $|\varphi| < 90°$, будут устойчивыми, а соответствующие $|\varphi| > 90$ — неустойчивыми.

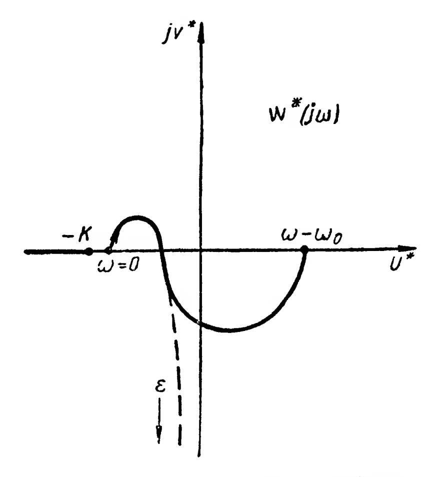
Для исследования устойчивости автоколебаний можно воспользоваться сформулированными выше критериями устойчивости, положив $x_0 = 0$, в выражении (136) для K тогда получим

$$K = -\frac{\pi}{2k_p} ReJ(\omega_0). \tag{139}$$

Но в силу равенства (134)

$$-K = W^*(j0) = U^*(0). \tag{140}$$

Следовательно, в этом случае $W^*(j\omega)$ при $\omega = 0$ проходит через точку $(-\infty, -K)$. Это является следствием того, что уравнение (124) при $x_0 = 0$ содержит лишний нуль $s = 0\left(e^{s\frac{\pi}{\omega_0}} = 1\right)$, который отсутствует в уравнении (122).



Фиг. 33. К определению необходимого условия устойчивости.

Для того чтобы применить сформулированные выше критерии устойчивости, нужно определить, имеется ли при $\omega = 0$ переход $W^*(j\omega)$ через отрезок $(-\infty, -K)$ или он отсутствует. Для этой цели достаточно рассмотреть поведение $W^*(j\omega)$ при ω, близких к 0.

Для этого найдем производную от $W^*(j\omega)$ выражения (132) по ω при $\omega = 0$:

$$\left[\frac{dW^*(j\omega)}{d\omega}\right]_{\omega=0} = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} W'(j(2m-1)\omega_0), \tag{141}$$

где ω_0 — частота автоколебаний, и

$$W'(j(2m-1)\omega_0) = \left[\frac{d}{d\omega} W(j(\omega + (2m-1)\omega_0))\right]_{\omega=0}. \tag{142}$$

Так как

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

то

$$W'(j(2m-1)\omega_0) = U'((2m-1)\omega_0) + jV'((2m-1)\omega_0). \tag{143}$$

Легко видеть, что

$$\left.\begin{aligned} U'((2m-1)\omega_0) &= \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{dU((2m-1)\omega_0)}{d\omega_0}; \\ V'((2m-1)\omega_0) &= \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{dV((2m-1)\omega_0)}{d\omega_0}, \end{aligned}\right\} \tag{144}$$

причем $U'((2m-1)\omega_0)$ — нечетная функция, а $V'((2m-1)\omega_0)$ четная функция ω_0. Принимая во внимание уравнения (143) и (144), выражение (141) можно представить в виде

$$\left[\frac{dW^*(j\omega)}{d\omega}\right]_{\omega=0} = -2j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{dV((2m-1)\omega_0)}{d\omega_0}. \tag{145}$$

С другой стороны, диференцируя уравнение (111) по ω_0, получаем

$$\frac{dJmJ(\omega_0)}{d\omega_0} = -\frac{4k_p}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{dV((2m-1)\omega_0)}{d\omega_0}, \tag{146}$$

следовательно, из формулы (145) имеем

$$\left[\frac{dW^*(j\omega)}{d\omega}\right]_{\omega=0} = j\frac{\pi}{2k_p} \cdot \frac{dJmJ(\omega_0)}{d\omega_0}. \tag{147}$$

Отсюда следует

$$\left[\frac{dU^*(\omega)}{d\omega}\right]_{\omega=0} = 0;$$

$$\left[\frac{dV^*(\omega)}{d\omega}\right]_{\omega=0} = \frac{\pi}{2k_p} \cdot \frac{dJmJ(\omega_0)}{d\omega_0}.$$

Отсюда заключаем, что угол наклона касательной к $W^*(j\omega)$ в точке $\omega=\omega_0$ равен

$$\frac{dV^*(\omega)}{dU^*(\omega)} = \frac{\pi}{2k_p} \cdot \frac{\left(\frac{dJmJ(\omega_0)}{d\omega_0}\right)}{0} = \pm\infty. \tag{148}$$

Таким образом, касательная $kW^*(j\omega)$ в точке $\omega=0$ вертикальна и образует с осью абсцисс углы (фиг. 34) $+90°$, если

$$\frac{dJmJ(\omega_0)}{d\omega_0} > 0 \tag{149}$$

и $-90°$ если

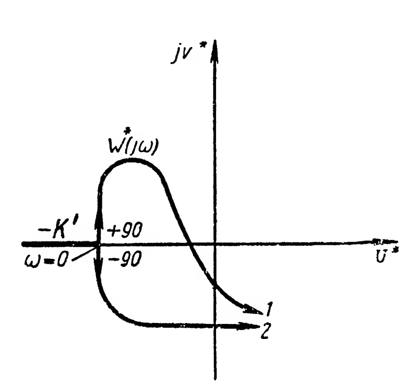
$$\frac{dJmJ(\omega_0)}{d\omega_0} < 0. \tag{150}$$

Применяя обычные рассуждения, связанные с обходом при малых значениях ω точки $s=0$ на комплексной плоскости [3], приходим к следующему заключению.

Если $\frac{dJmJ(\omega_0)}{d\omega_0} > 0$, то переход $W^*(j\omega)$ при $\omega=0$ через отрезок $(-\infty, -K)$ отсутствует.

Если $\frac{dJmJ(\omega_0)}{d\omega_0} < 0$, то $W^*(j\omega)$ при $\omega=0$ совершает половину положительного перехода.

Знак $\frac{dJmJ(\omega_0)}{d\omega_0}$ определяется по поведению характеристики $J(\omega)$ в точках пересечения ее с отрицательной частью прямой $JmJ = -\varkappa_0$, которые определяют частоты автоколебаний. Как следует из фиг. 35, $\frac{dJmJ(\omega_0)}{d\omega_0} > 0$, если характеристика $J(\omega)$ пересекает прямую $JmJ = -\varkappa_0$ в точке $\omega = \omega_0$ снизу вверх, и $\frac{dJmJ(\omega_0)}{d\omega_0} < 0$, если характеристика $J(\omega)$ пересекает прямую $JmJ = -\varkappa_0$ сверху вниз.



Фиг. 34. К определению перехода $W^*(j\omega)$ в точке $\omega = 0$ при исследовании устойчивости автоколебаний.

Фиг. 35. К необходимому условию устойчивости, определяемому по характеристике релейной системы.

Если линейная часть устойчива или нейтральна и отсутствует пересечение $W^*(j\omega)$ отрезка $(-\infty, -K)$, то тогда на основании ранее сформулированных критериев устойчивости заключаем, что автоколебания частоты ω_0 устойчивы в том случае, когда

$$\frac{dJmJ}{d\omega_0} > 0. \tag{151}$$

Это условие было получено ранее, исходя из физических соображений [3].

В общем случае, когда отрезок $(-\infty, -K)$ пересекается кривой $W^*(j\omega)$ при $\omega \neq 0$, условие (151) является лишь необходимым условием устойчивости автоколебаний.

Тот факт, что условие (151) в общем случае является только необходимым условием, иным путем был установлен П. В. Бромбергом и независимо от него Ю. И. Неймарком.

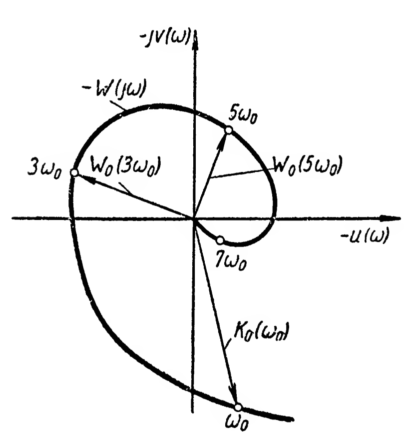
6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФОРМЫ АВТОКОЛЕБАНИЙ ИЛИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

После определения существования и устойчивости вынужденных колебаний и автоколебаний может возникнуть необходимость вычисления формы устойчивых автоколебаний или вынужденных колебаний.

Для этой цели проще всего использовать выражение (103):

$$x_T(t)=\frac{4}{\pi}k_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{H((2m-1)\,\omega_0)}{2m-1}\sin[(2m-1)\,\omega_0 t+\theta((2m-1)\,\omega)], \quad (152)$$

которое при изменении t в интервале длины $T(0<t<T)$ и описывает искомые автоколебания или вынужденные колебания частоты ω_0.



Фиг. 36. К вычислению формы автоколебаний или вынужденных колебаний в релейной системе.

Вычисление формы периодического решения $x_T(t)$ сводится к суммированию гармонических составляющих частот ω_0, $3\omega_0$, $5\omega_0$, ..., амплитуды и фазы которых определяются непосредственно из частотной характеристики линейной части системы как модули и аргументы $-W(j\omega)$, соответствующие частотам ω_0, $3\omega_0$, $5\omega_0$ ... (фиг. 36).

Если нас интересует не выходная величина линейной части системы, а какая-либо промежуточная величина, например x_3 (фиг. 37), то необходимо лишь воспользоваться указанным выше образом частотной характеристикой соответствующего участка линейной части системы.

В том случае, когда внешнее воздействие применено не ко входу релейной системы, как это предполагалось всюду ранее, а например, ко входу линейной части системы (фиг. 38), выходная величина линейной части системы, очевидно, будет равна

$$x_T(t)=\frac{4}{\pi}k_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{H((2m-1)\,\omega_0)}{2m-1}\sin[(2m-1)\,\omega_0 t+\theta((2m-1)\,\omega_0)]+$$
$$+x_0H(\omega_0)\sin(\omega_0 t-\varphi+\theta(\omega_0)), \quad (153)$$

причем во всех предыдущих рассуждениях следует x_0 изменить на $x_0H(\omega_0)$, а φ — на $\varphi-\theta(\omega_0)$.

В заключение отметим, что если пренебречь высшими гармониками, начиная с $3\omega_0$, то

$$J(\omega_0)\approx-\frac{4k_p}{\pi}W(j\omega_0); \quad (154)$$

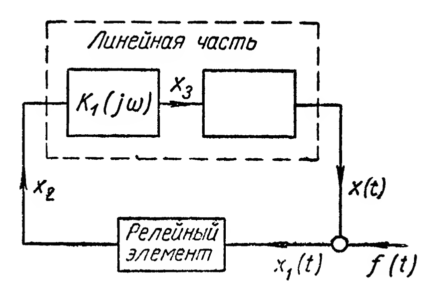
$$x_T(t)\approx\frac{4k_p}{\pi}H(\omega_0)\sin(\omega_0 t+\theta(\omega_0)), \quad (155)$$

и описанные выше построения будут эквиваленты известным построениям Л. С. Гольдфарба [7] (для автоколебаний) и М. А. Айзермана [8] (для вынужденных колебаний) (см. главу XXXIII).

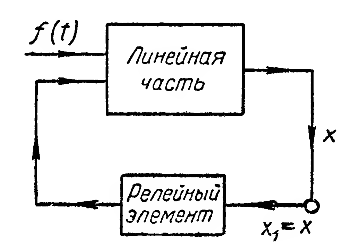
Что же касается устойчивости, то при условии пренебрежения частотами $\omega \geqslant 3\omega_0$

$$W^*(j\omega) \approx -W(j(\omega-\omega_0)) - W(j(\omega+\omega_0)); \\ -W(j(\omega-3\omega_0)), \qquad (156)$$

откуда следует, что устойчивость автоколебаний или вынужденных колебаний зависит от поведения $W(j\omega)$ при $0 < \omega < 3\,\omega_0$, что может при-



Фиг. 37. К определению промежуточной величины в линейной части системы.



Фиг. 38. Случай приложения внешнего воздействия к линейной части системы.

вести к результатам, отличных от тех, которые дает метод гармонического баланса.

Подробное выяснение этого вопроса выходит за пределы цели настоящей главы.

7. ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В РЕЛЕЙНОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЕ

Рассмотрим контактную следящую систему, схематически изображенную на фиг. 39. Передаточная функция линейной системы будет равна

$$W(s) = \frac{k_\partial}{(T_\lambda T_\mu s^2 + T_\mu s + 1)\,s}, \qquad (157)$$

где T_λ — постоянная времени цепи якоря двигателя в сек.;

T_μ — электромеханическая постоянная времени двигателя в сек.;

k_∂ — коэфициент усиления двигателя в сек$^{-1}$.

Частотная характеристика линейной части системы получится при подстановке $s = j\omega$. Она изображена на фиг. 40а при значениях $T_\lambda = 0{,}2$, $T_\mu = 5$ (кривая *1*) и $T_\lambda = 2$, $T_\mu = 0{,}5$ (кривая *2*)*, причем $k_\partial = 1$ сек.$^{-1}$

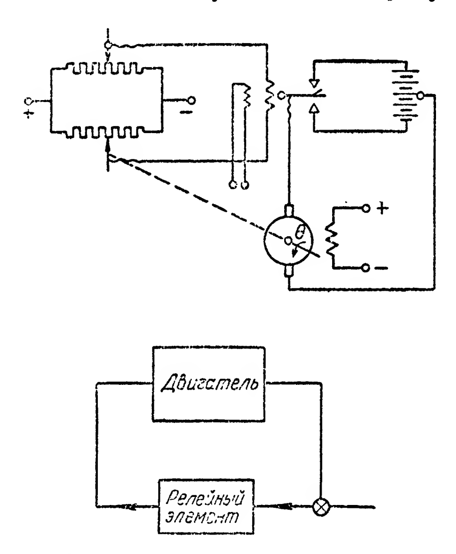
Пользуясь описанным выше способом построения J по амплитудно-фазовой характеристике $-W(j\omega)$, получаем кривые J, изображенные на фиг. 40б, представляющие характеристику рассматриваемой релейной следящей системы.

Проводя прямую $JmJ = -x_0$, находим в точке пересечения ее с характеристикой J частоту автоколебаний. При $x_0 = 0$, т. е. для релейной

* Данные в рассматриваемом примере, имеющем лишь иллюстрационное значение, выбраны таким образом, чтобы иметь сильно колебательную систему.

характеристики без гистерезиса, частота возможных автоколебаний определяется точкой пересения характеристики с осью абсцисс. При $\varkappa_0 \neq 0$ частота возможных колебаний уменьшается.

В том случае, когда $T_\lambda = 0$, $T_\mu = 5$, частотная характеристика $-W(j\omega)$ приобретает вид, показанный на фиг. 41а. Характеристика нелинейной системы, построенная описанным выше способом, изображена на фиг. 41б. В этом случае при $\varkappa_0 = 0$ автоколебания отсутствуют; при $\varkappa_0 \neq 0$ возникают автоколебания относительно высокой частоты. Как и ранее, эта частота автоколебаний уменьшается при увеличении $\varkappa_0$.



Фиг. 39. Контактная следящая система.

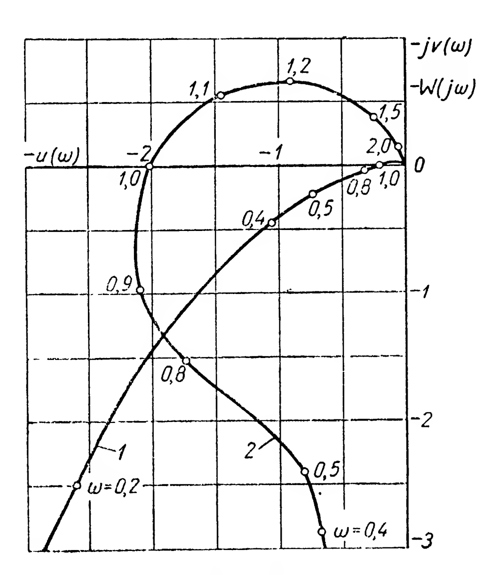
Так как $\varkappa_0$ характеризует трение или люфт в реле, то можно сделать вывод, что наличие трения или люфта в реле порождает автоколебания, которые не могут быть устранены никаким изменением линейной части.

Отметим, что частота автоколебаний при $\varkappa_0 = 0$ не зависит ни от k_p, ни от коэфициента усиления линейной части следящей системы.

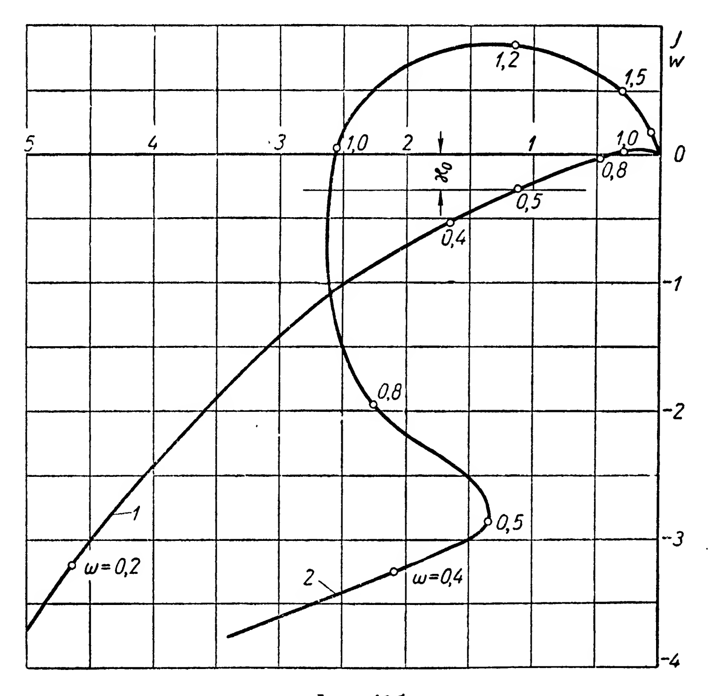
При $\varkappa_0 \neq 0$ частота автоколебаний зависит от коэфициента усиления; она повышается с ростом последнего.

В точках характеристики, соответствующих частоте автоколебаний ω_0, $\frac{dJmJ}{d\omega_0} > 0$, следовательно, необходимое условие устойчивости автоколебаний выполняется. Как будет показано далее, это необходимое условие устойчивости является и достаточным. Следовательно, найденные автоколебания частоты ω_0 устойчивы.

Если к дополнительной обмотке реле подвести внешнее синусоидальное напряжение амплитуды x_0, то эти устойчивые автоколебания могут быть сорваны в том случае, когда амплитуда x_0 превзойдет пороговое значение $x_{пор}$, которое может быть определено непосредственно по характеристике релейной системы J.



Фиг. 40а.



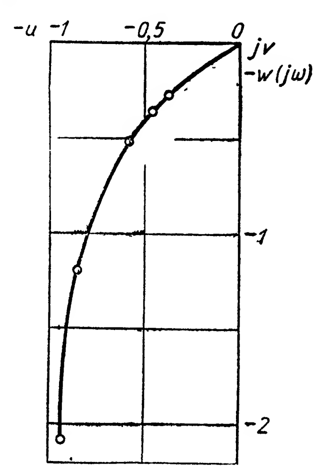
Фиг. 40б.

При достаточно большой частоте внешнего воздействия релейная система будет вести себя как линейная система.

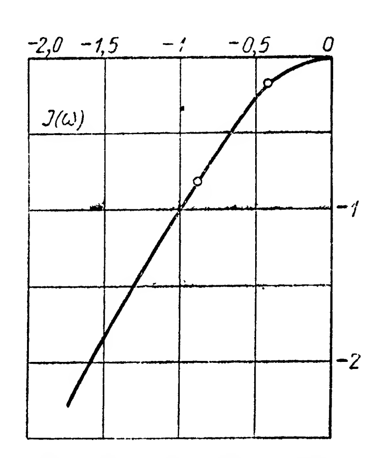
Зависимость пороговых значений $x_{пор}$ от частоты внешнего воздействия, определяемая непосредственно по характеристике релейной системы для значений параметров $T_\lambda = 0{,}2$, $T_\mu = 5$, приведена на фиг. 42а при $\varkappa_0 = 0$ и на фиг. 42б при $\varkappa_0 = 0{,}28$.

Область *I* соответствует отсутствию периодических решений $(x_0 < x_{пор})$.

Здесь автоколебания не подавляются вынужденными колебаниями.



Фиг. 41а. Частотная характеристика линейной части системы.



Фиг. 41б. Частотная характеристика нелинейной части системы.

Область *II* соответствует существованию двух периодических решений одной и той же частоты ω_0 $(x_{пор\,1} < x < x_{пор\,2})$, отличающихся фазой.

Область *III* соответствует одному периодическому решению $(x_0 > x_{пор\,2})$. В областях *II* и *III* автоколебания подавляются; в системе существуют лишь вынужденные колебания.

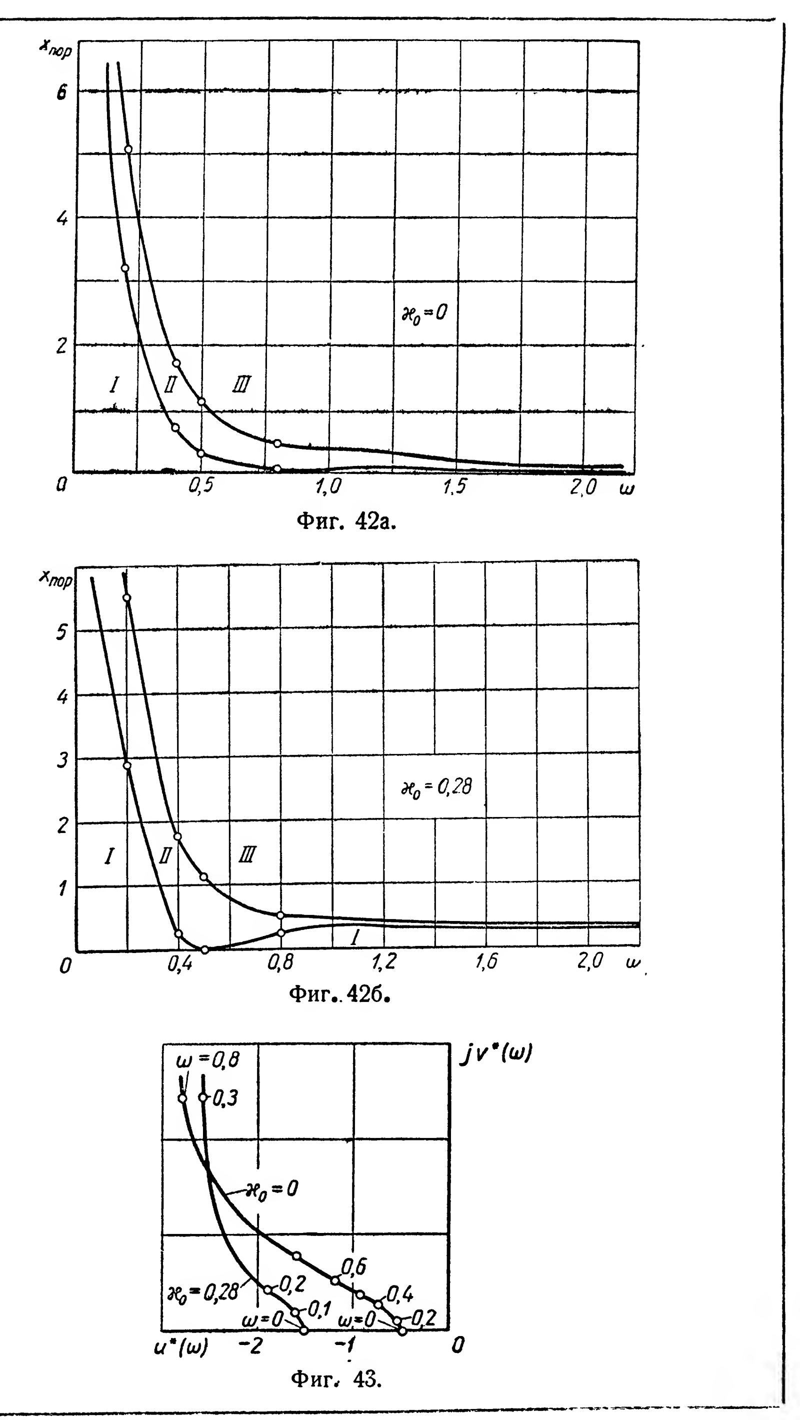
Рассмотрим теперь устойчивость вынужденных колебаний и автоколебаний.

Для этой цели построим по частотной характеристике линейной части системы $-W(j\omega)$ частотную характеристику $W^*(j\omega)$ описанными выше способами при $\varkappa_0 = 0$ и $\varkappa_0 = 0{,}28$ (фиг. 43) при значениях $T_\lambda = 0{,}2$, $T_\mu = 5$.

Так как $W^*(j\omega)$ пересекает вещественную ось только при $\omega = 0$, то мы приходим к заключению, что устойчивыми вынужденными колебаниями являются те, для которых $|\varphi| < 90°$, и что автоколебания частоты ω_0 также устойчивы.

Отметим, что при $\varkappa_0 = 0$ устойчивость как автоколебаний, так и вынужденных колебаний не зависит от k_p и от коэфициента усиления линейной части системы.

Приведенные графики полностью решают вопрос об автоколебаниях и вынужденных колебаниях в рассматриваемой релейной системе.



Фиг. 42а.

Фиг. 42б.

Фиг. 43.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, ГИТТЛ, 1951, гл. III.

2. Никольский Г. Н., Об одной задаче непрямого регулирования, „Инженерный сборник", т. 4, вып. 2, 1948.

3. Цыпкин Я. З., Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях, Энергоиздат, 1951, гл. IV.

4. Рябов Б. А., Определение параметров режима установившихся автоколебаний некоторых систем, ДАН СССР, т. 71, № 4, 1950.

5 Фрезер Р., Дункан В., Коллар А., Теория матриц и ее приложения, ИИЛ, 1950, гл. XV.

6. Цыпкин Я. З., Частотный метод исследования релейных систем автоматического регулирования, Сборник, посвященный памяти акад. А. А. Андронова, АН СССР, 1954.

7. Гольдфарб Л. С., О некоторых нелинейностях в системах регулирования, „Автоматика и телемеханика", т. 8, № 5, 1947.

8. Айзерман М. А., О построении резонансных графиков для систем, с нелинейной обратной связью, „Инженерный сборник", т. 13, 1952.

РАЗДЕЛ VIII

НЕКОТОРЫЕ ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В этом разделе излагаются два графо-аналитических метода построения переходных процессов в системах автоматического регулирования с нелинейными и переменными (зависящими от времени) параметрами исходящие из предположения, что диференциальные уравнения рассматриваемой системы известны.

Первый метод (метод секущих) разработан Д. А. Башкировым и сводится к следующему:

а) устанавливаются простые способы графического решения неоднородных уравнений (линейных с постоянными и переменными коэфициентами и нелинейных) первого и второго порядков при любой заданной возмущающей функции в правой части;

б) уравнения высоких порядков или системы приводятся к системам, состоящим из уравнений первого и второго порядков, и затем решаются либо поочередно, либо совместно, в зависимости от вида систем.

Второй метод (метод касательных) в отличие от метода секущих сводится по существу к одной и той же последовательности операций при решении линейных и нелинейных уравнений любого порядка, уравнений с переменными коэфициентами и систем уравнений.

ГЛАВА XXXVIII

ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ. МЕТОД СЕКУЩИХ

В настоящее время известен целый ряд численных и графических способов интегрирования нелинейных диференциальных уравнений.

Одним из наиболее совершенных способов численного интегрирования является разностный метод Адамса — Штермера [1]. Практическое значение разностного способа значительно ограничивается тем, что объем требуемой им вычислительной работы обычно очень велик.

Акад. С. А. Чаплыгин [2] предложил в 1920 г. новый метод приближенного интегрирования, позволяющий в отличие от других методов не только избегать накопления погрешностей, что свойственно численным и графическим методам интегрирования, но и получать результаты с любой наперед заданной степенью точности.

Наиболее простым из численных способов решения диференциальных уравнений является метод Эйлера. Он положен в основу почти всех известных графических способов, отличающихся друг от друга только по характеру геометрических построений (метод изоклин, метод М. В. Костенко и др).

Общим недостатком этой группы способов является малая точность результатов. При уменьшении шага интегрирования точность результатов может быть повышена до необходимой величины, однако при этом время, затрачиваемое на графическое интегрирование, оказывается очень большим.

Имеются более точные графические способы, являющиеся аналогами более точных численных способов, например метод последовательных приближений, метод Рунге — Кутта. Однако громоздкость и трудоемкость геометрических построений лишают их преимуществ, имеющихся у численных методов, вследствие чего они не получили распространения.

Наконец, существуют приближенные способы, известные только как чисто графические способы, например метод радиусов кривизны, метод Льенара и др. Их применение ограничено весьма узким классом уравнений частного вида, т. е. они не являются в достаточной степени универсальными [3].

Повидимому, только недостатками ранее известных графических методов решения диференциальных уравнений можно объяснить тот факт,

что вплоть до последнего времени эти методы фактически не применялись для исследования переходных и установившихся процессов в нелинейных системах регулирования.

Были известны только единичные случаи использования графических методов (например, диаграммы Прелля) для анализа работы простейших нелинейных систем частного вида, имеющих уравнения первого или второго порядка.

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДА

Ниже излагается графо-аналитический метод [4], позволяющий легко и быстро строить переходные и установившиеся процессы во многих нелинейных системах автоматического регулирования.

Особенность излагаемого метода заключается в том, что в его основу положены графические способы построения переходных процессов для типовых линейных звеньев систем регулирования: апериодического, интегрирующего и колебательного.

Соответствующие уравнения имеют вид

$$(T_1 p + 1)\, x = f(t); \tag{1}$$

$$T_2 p x = f(t); \tag{2}$$

$$(T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1)\, x = f(t), \tag{3}$$

где T_1, T_2 — постоянные времени;
x — искомая функция;
$f(t)$ — некоторая возмущающая функция;
$p \equiv \frac{d}{dt}$.

Способы решения уравнений (1) — (3) затем распространяются на уравнения типа

$$(T_1 p + 1)\, x = (\theta_1 p + 1) f; \tag{4}$$

$$(T_1 p + 1)\, x = \theta_1 p f; \tag{5}$$

$$(T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1)\, x = (\theta_1 p + 1) f; \tag{6}$$

$$(T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1)\, x = \theta_1 p f; \tag{7}$$

$$(T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1)\, x = (\theta_1 \theta_2 p^2 + \theta_2 p + 1) f; \tag{8}$$

$$(T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1)\, x = (\theta_1 \theta_2 p^2 + \theta_2 p) f; \tag{9}$$

$$(T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1)\, x = (\theta_1 \theta_2 p^2 + 1) f; \tag{10}$$

$$(T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1)\, x = \theta_1 \theta_2 p^2 f, \tag{11}$$

где θ_1 и θ_2 — постоянные времени.

Способы графического интегрирования уравнений типа (4) — (11) разработаны таким образом, что для нахождения решения x нет надобности в графическом или аналитическом определении производных функции f, достаточно иметь лишь график этой функции. Имея удобные и простые способы построения переходных процессов в типовых звеньях динамических систем, можно определять переходные процессы в каждом

из звеньев и в том случае, если они образуют некоторую разомкнутую, а также замкнутую одноконтурную или многоконтурную цепь. При этом решение производится последовательными ступенями; значения всех функций определяются для значений времени, отстоящих друг от друга на один и тот же интервал (шаг интегрирования). Получающиеся графики дают полное представление о характере изменения не только регулируемой величины, но также и всех других величин или координат систем, на входе и выходе всех ее звеньев.

Применяя этот метод, мы получаем возможность детального исследования достаточно широкого класса систем автоматического регулирования, линейных и нелинейных.

Одно из свойств данного метода состоит в том, что он легко позволяет изменить величину шага интегрирования на отдельных участках времени. Благодаря этому можно увеличивать шаг интегрирования там, где функции не претерпевают быстрых изменений, и тем ускорять решение и уменьшать шаг интегрирования там, где функции изменяются резко, например вблизи экстремальных точек, что позволяет детально выявлять особенности процессов, представляющие интерес для исследователя. Если функции, характеризующие исследуемый процесс, являются разрывными, то оказывается возможным изменять величину шага интегрирования Δt вблизи точек разрыва таким образом, чтобы разрывы попадали на границы двух основных участков интегрирования.

Точность метода вполне достаточна для решения технических задач. Как показывает опыт применения метода при надлежащем шаге интегрирования, переходные процессы могут быть графически построены с той же точностью, с какой можно выполнить любое другое графическое построение.

При одинаковом шаге интегрирования точность метода одного порядка с точностью численного разностного метода Адамса — Штермера (если расчет ведется с учетом первых и вторых разностей), однако по сравнению с последним графо-аналитический метод требует в 20—40 раз меньше времени.

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА И МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ЭКСПОНЕНТЫ

Рассмотрим прежде всего некоторые свойства и методы построения экспоненты, т. е. решения уравнения (1) при $f(t) = C = \text{const}$ и $[x(t)]_{t=0} = x(0)$ (фиг. 1), имеющие существенное значение для дальнейшего изложения. Это решение имеет вид

$$x(t) = C + [x(0) - C]\, e^{-\frac{t}{T}}, \qquad (12)$$

т. е. асимптотически стремится к прямой $x = C$.

Замечательным свойством экспоненты является равномерность относительного затухания. Это свойство будет использовано для точного графического построения экспоненты, а затем и для решения весьма широкого класса диференциальных уравнений.

Указанное свойство состоит в следующем.

Рассмотрим несколько равностоящих друг от друга моментов времени, например t_k, $t_k + \Delta t$, $t_k + 2\Delta t$, и найдем для них отклонения $x(t) - C$ экспоненты от асимптоты. Учитывая формулу (12), придем к заключению, что имеет место соотношение

$$\frac{x(t_k) - C}{x(t_k + \Delta t) - C} = \frac{x(t_k + \Delta t) - C}{x(t_k + 2\Delta t) - C} = e^{-\frac{\Delta t}{T}}, \qquad (13)$$

свидетельствующее о равномерности относительного затухания отклоненения экспоненты от асимптоты.

Проведем секущие через точки экспоненты

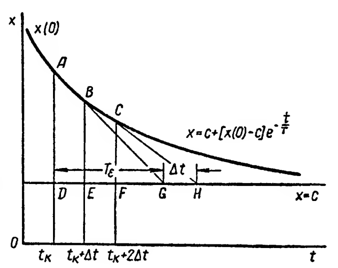
$$A\,[t_k,\ x(t_k)];\quad B\,[t_k + \Delta t];\quad x(t_k + \Delta t);\quad C\,[t_k + 2\Delta t];\quad x(t_k + 2\Delta t)$$

так, как показано на фиг. 1.

Обозначая буквами D, E, F проекции точек A, B, C на асимптоту $x = C$ и буквами G, N — точки пересечения секущих AB и BC с асимптотой, можно показать [4], что величины отрезков $\overline{DG}$ и $\overline{EH}$, являющихся проекциями отрезков секущих AG и BH на асимптоту, равны между собой.

Обозначая

$$\overline{DG} = EH = T_\varepsilon,$$



Фиг. 1. Построение экспоненты.

найдем на основании формул (12) и (13)

$$T_\varepsilon = \frac{\Delta t}{1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}}}. \qquad (14)$$

Представляя знаменатель выражения (14) в виде ряда

$$1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}} = \frac{\Delta t}{T} - \frac{1}{2!}\cdot\frac{\Delta t^2}{T^2} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{\Delta t^3}{T^3} - \ldots$$

и производя деление, найдем

$$T_\varepsilon = T + \frac{\Delta t}{2}\left(1 + \frac{1}{6\varepsilon} - \frac{2}{6!\,\varepsilon^3} - \frac{2}{7!\,\varepsilon^5} - \ldots + \ldots\right), \qquad (15)$$

где $\varepsilon = \frac{T}{\Delta t}$.

Из выражения (15) можно заключить, что при большом ε точная формула (14) может быть заменена более простой приближенной формулой

$$T_\varepsilon = T + \frac{\Delta t}{2}, \qquad (16)$$

причем точность последней при заданной величине T быстро возрастает с уменьшением Δt.

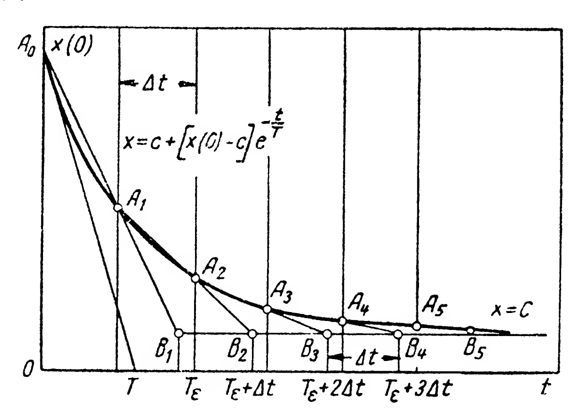
Итак, если между двумя точками экспоненты $A\,[t_k;\ x(t_k)]$ и $B\,[t_k + \Delta t;\ x(t_k + \Delta t)]$, отстоящими друг от друга во времени на Δt, проведена секущая, то проекция на ось абсцисс отрезка секущей, заключенного между точкой A и точкой пересечения секущей с асимптотой экспоненты (точка G на фиг. 1), есть величина постоянная.

В дальнейшем эта величина, для которой мы приняли обозначение T_ε, будет называться в целях краткости проекцией секущей.

Пользуясь сформулированными свойствами экспоненты, можно указать весьма простой и точный способ ее графического построения. Этот способ, очевидно, является способом решения уравнения первого порядка

$$T\frac{dx}{dt} + x = C \qquad (17)$$

с постоянной правой частью C, при заданной T и известном начальном значении $x(0)$ и состоит в том, что, задавшись заранее некоторым



Фиг. 2. Графическое решение уравнения $T\frac{dx}{dt} + x = C$.

произвольным шагом интегрирования Δt, мы можем, пользуясь формулой (14), найти проекцию секущей T_ε и путем последовательного проведения секущих определить точки экспоненты $x = x(t)$ с одинаковым интервалом во времени.

Графическое решение уравнения (17) удобно производить в следующем порядке (фиг. 2):

1) выбрать шаг интегрирования Δt и по формуле (14) определить T_ε;

2) провести на графике координатные оси t, x и разбить его на равные прямоугольные участки шириной Δt вертикальными прямыми $t = i\Delta t$ $(i = 1,\ 2,\ 3, \ldots, n)$;

3) провести асимптоту $x = C$ и отметить на ней точки

$$B_1\,[T_\varepsilon, C];\quad B_2\,[T_\varepsilon + \Delta t,\ C];\quad B_n\,[T_\varepsilon + (n-1)\,\Delta t,\ C],$$

отстоящие друг от друга на шаг интегрирования Δt;

4) отметить на оси ординат начальную точку экспоненты $A_0\ [0, x(0)]$ и соединить ее прямой с точкой B_1 на асимптоте; проекция отрезка $\overline{A_0B_1}$ на ось абсцисс равна T_ε, следовательно, прямая A_0B будет секущей экспоненты, пересекающейся с ней при $t=\Delta t$, поэтому точка A_1 пересечения прямой A_0B_1 и вертикальной прямой $t=\Delta t$ принадлежит экспоненте, ее ордината равна $x(\Delta t)$;

5) соединить прямой найденную точку $A_1\ [\Delta t,\ x\ (\Delta t)]$ с точкой B_2 на асимптоте; точка A_2 пересечения этой прямой и вертикальной прямой $t=2\Delta t$ будет принадлежать экспоненте, так как проекция отрезка A_1B_2 на ось абсцисс опять равна T_ε и, следовательно, прямая A_1B_2 является секущей экспоненты, проходящей через ее точки, имеющие интервал Δt;

6) продолжая построение, найти требуемое число точек $A_i\ [i\Delta t, x(i\Delta t)]$ экспоненты.

Имея в виду, что точность графических построений ограничена, мы можем заранее допустить некоторую неточность в определении величины T_ε, если обусловленные этой неточностью погрешности построения экспоненты будут по величине заведомо меньше собственно графических погрешностей, возникающих, например, из-за неточности визирования точек и проведения прямых на графике. Поэтому, выбрав достаточно малый шаг интегрирования Δt, мы с полным основанием можем определять T_ε не по точной формуле (14), а по весьма простой и удобной приближенной формуле (16), т. е. принимая $T_\varepsilon = T + \frac{1}{2}\Delta t$. Графическое решение уравнения (17) при этом также может быть представлено в упрощенном виде и заключается в следующем (фиг. 3):

1) весь график разбивают сеткой вертикальных прямых на прямоугольные участки шириной $\frac{\Delta t}{2}$, причем величину шага интегрирования Δt выбирают так, чтобы отношение $\frac{2T}{\Delta t}=2\varepsilon$ было целым числом[1] при $\varepsilon>1$*; проведем асимптоту экспоненты $x=C$, сместив ее на T вправо по оси времени, как показано на фиг. 3;

2) через начальную точку экспоненты

$$a_0\ [o;\ x(0)]$$

и точку на асимптоте

$$b_1=\left[T+\frac{\Delta t}{2};\ C\right]$$

проведем прямую; так как проекция на ось абсцисс прямой a_0b_1 равна $T+\frac{\Delta t}{2}\approx T_\varepsilon$, то данная прямая явится секущей.

Точка секущей a_2 при $t=\Delta t$ принадлежит экспоненте. Соединив точку a_2 прямой с точкой

$$b_3\left[T+\frac{3\Delta t}{2};\ C\right]$$

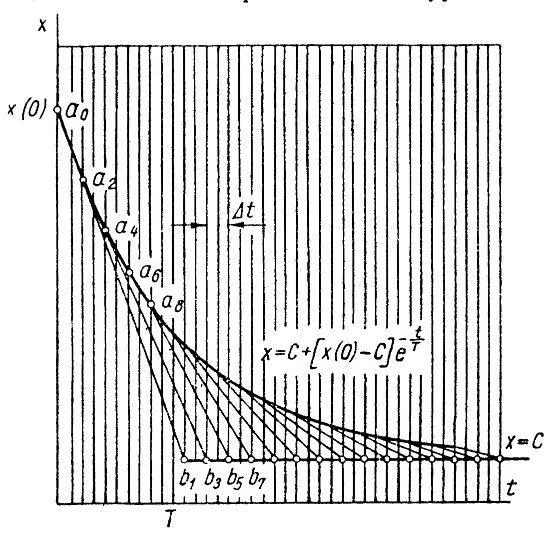
[1] Это условие не является обязательным и рекомендуется лишь для удобства решения.

* Желательно брать $\varepsilon>2$.

на асимптоте, получим вторую секущую экспоненты, так как проекция отрезка a_2b_3 на ось абсцисс опять равна

$$T+\frac{\Delta t}{2}\approx T_\varepsilon.$$

Точка a_4 второй секущей при $t=2\Delta t$ принадлежит экспоненте. В той же последовательности определяются и другие точки экспоненты.



Фиг. 3. Графическое решение уравнения $T\,\frac{dx}{dt}+x=C$.

Всякий раз, проводя из последней найденной точки

$$a_{2k}\,[k\Delta t;\ x(k\Delta t)]$$

экспоненты, соответствующей ее значению при $t=k\Delta t$, прямую в точку

$$b_{2k+1}\left[T+(2k+1)\frac{\Delta t}{2};\ C\right],$$

мы находим точку $a_{2(k+1)}$ экспоненты при $t=(k+1)\Delta t$.

3. РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ

Применим теперь приближенный способ построения экспоненты, изложенный выше, для отыскания решения неоднородного уравнения (1) при любой кусочно-непрерывной и ограниченной по модулю функции $f(t)$ и при любом знаке постоянной T. При достаточно малых значениях шага интегрирования внутри каждого малого участка $t_k\leqslant t\leqslant t_k+\Delta t$ функцию $f(t)$, стоящую в правой части уравнения (1), можно заменить постоянной величиной

$$f_k^*=f\left(t_k+\frac{\Delta t}{2}\right), \tag{18}$$

вследствие чего решение уравнения (1) на каждом участке может быть представлено в виде отрезка некоторой экспоненты.

Подставляя выражение (18) в правую часть уравнения (1), получим для участка $t_k \leqslant t \leqslant t_k + \Delta t$ приближенное уравнение

$$T\frac{dx}{dt} + x \approx f_k^*,$$

решение которого согласно формуле (12) можно представить приближенно так:

$$x(t)_{t_k \leqslant t \leqslant t_k + \Delta t} \approx f_k^* + \left[x(t_k) - f_k^*\right] e^{-\frac{(t - t_k)}{T}} \tag{19}$$

Подставляя в выражение (19) $t = t_k + \Delta t$, найдем

$$x(t_k + \Delta t) \approx f_k^* + \left[x(t_k) - f_k^*\right] e^{-\frac{\Delta t}{T}} \tag{20}$$

и затем

$$\Delta x_k = x(t_k + \Delta t) - x(t_k) \approx \left[f_k^* - x(t_k)\right]\left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}}\right). \tag{21}$$

Пользуясь формулой (14), произведем в выражении (21) замену

$$1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}} = \frac{\Delta t}{T_\varepsilon},$$

получим

$$\Delta x_k = \frac{f_k^* - x(t_k)}{T_\varepsilon}\Delta t. \tag{22}$$

Подставляя сюда значения f_k^* из формулы (18) и T_ε из формулы (16), придем к следующей формуле:

$$x(t_k + \Delta t) \approx x(t_k) + \frac{f\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right) - x(t_k)}{T + \frac{\Delta t}{2}}\Delta t. \tag{23}$$

Из приближенной формулы (23) вытекает следующий способ графического решения уравнения (1), применимый при любой кусочно-непрерывной функции $f(t)$ независимо от знака коэфициента T (фиг. 4) при условии, что $f(t)$ и T ограничены по модулю.

1. В координатах t, x строится смещенная кривая $\bar{f} = f(t - T)$. Вертикальными прямыми $t = k\frac{\Delta t}{2}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ весь график разбивается на участки шириной $\frac{\Delta t}{2}$, причем для удобства отношение $2\varepsilon = \frac{2T}{\Delta t}$ следует брать равным целому числу.

2. Через заданную начальную точку

$$a_0\,[0, x(0)]$$

строящейся кривой $x = x(t)$ и точку

$$b_1 \left[T + \frac{\Delta t}{2};\ f\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \right]$$

смещенной кривой $\bar{f} = \bar{f}(t)$ проводится прямая. Точка a_2 пересечения прямой $a_0 b_1$ и вертикальной прямой $t = \Delta t$ дает значение $x = x(\Delta t)$ искомой функции. Таким образом, точка a_2 имеет координаты Δt; $x(\Delta t)$.

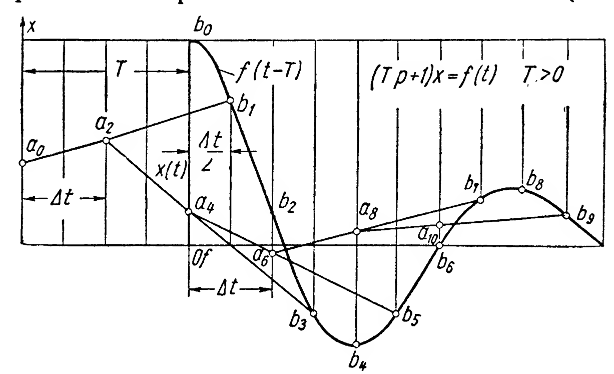
3. Через найденную точку

$$a_2 [\Delta t;\ x(\Delta t)]$$

и точку

$$b_3 \left[T + \frac{3\Delta t}{2};\ f\left(\frac{3\Delta t}{2}\right) \right]$$

кривой $\bar{f} = \bar{f}(t)$ проводится новая прямая. Точка a_4 пересечения этой прямой и вертикальной прямой $t = 2\Delta t$ дает значение $x(2\Delta t)$.



Фиг. 4. Графическое решение уравнения $T \frac{dx}{dt} + x = f(t)$.

Аналогичным же образом последовательно определяются остальные точки a_6, a_8, $a_{10}, \ldots$ кривой $x = x(t)$.

Для того чтобы наглядно пояснить способ графического интегрирования уравнения первого порядка с постоянными коэфициентами типа уравнения (1)

$$T \frac{dx}{dt} + x = f(t),$$

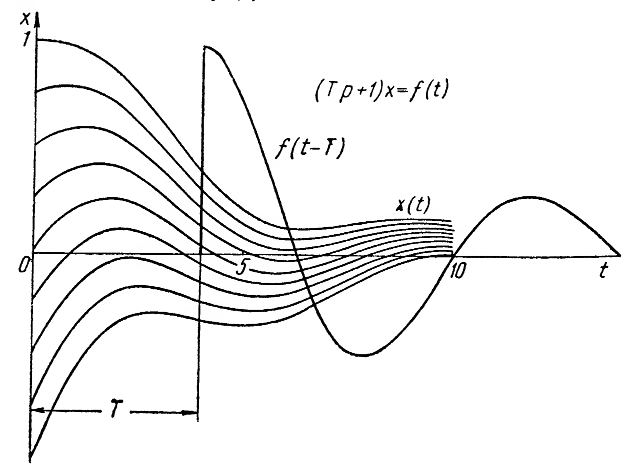
на фиг. 4 взята заведомо бóльшая величина участка интегрирования $\Delta t = 0{,}5T$ и указаны необходимые вспомогательные построения. Коэфициент T в примере на фиг. 4 взят положительным, поэтому кривая $\bar{f} = f(t - T)$ смещена вправо от начала координат.

На фиг. 5 дано решение уравнения с такими же величинами T и $f(t)$, что и в примере на фиг. 4, но при нескольких начальных условиях и при уменьшенной величине шага интегрирования $\Delta t = 0{,}1T$. При этом из графика видно, что решение достаточно хорошо апроксимируется ломаными, получающимися в процессе построения, без последующего соединения точек плавной кривой.

В качестве возмущающего воздействия $f(t)$ в примерах на фиг. 5 взята одна и та же определенная функция

$$f(t) = 1{,}02e^{-\frac{t}{6}} \cos(0{,}8t + 0{,}2),$$

с тем чтобы при желании можно было проверить точность предлагаемого графического метода. Однако очевидно, что соответствующие кривые $x = x(t)$ могут быть построены тем же способом при любой графически заданной функции $f(t)$.



Фиг. 5. Семейство решений уравнения $T\frac{dx}{dt} + x = f(t)$ при различных начальных условиях в случае, когда $f(t) = 1{,}02e^{-\frac{t}{6}} \cos(0{,}8t + 0{,}2)$.

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ИНТЕГРИРУЮЩЕГО ЗВЕНА

Уравнение интегрирующего звена удобно решать способом суммирования средних ординат (фиг. 6).

Имеем

$$T_2 px = f(t).$$

Пусть для начала некоторого малого участка интегрирования $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+2}$, где $t_k = k\frac{\Delta t}{2}$, $t_{k+2} = t_k + \Delta t$ известное значение искомой функции x равно $x(t_k) = x_k$, требуется найти значение этой функции $x(t_{k+2}) = x_{k+2}$ в конце участка.

Производя интегрирование, получим

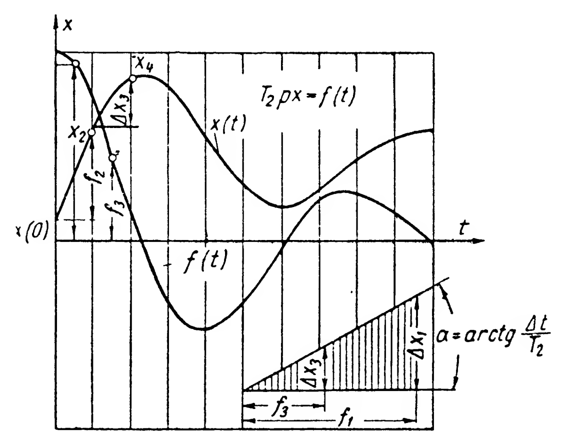
$$x_{k+2} = x_k + \frac{1}{T_2}\int_{t_k}^{t_{k+2}} f(t)\,dt \approx x_k + \frac{\Delta t_2}{T_2} f_{k+1},$$

где $f_{k+1} = f(t_{k+1})$ — значение функции f при $t = t_k + \frac{\Delta t}{2}$, т. е. в середине участка интегрирования.

Таким образом, при малом Δt диференциальному уравнению (2) соответствует разностное уравнение

$$x_{k+2} = x_k + \frac{\Delta t}{T_2} f_{k+1},$$

которое и принимается за основу при графическом интегрировании уравнения (2). В общем случае $\Delta t \neq T_2$, и тогда для умножения каждой из ординат f_{k+1} целесообразно в миллиметровой сетке построить прямую линию, образующую с осью абсцисс угол $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\Delta t}{T_2}$. Откладывая циркулем-измерителем по оси абсцисс отрезки, равные f_{k+1}, и измеряя



Фиг. 6. Решение уравнения интегрирующего звена $T_2 \frac{dx}{dt} = f(t)$.

соответствующие ординаты наклонной прямой, мы будем получать приращение функции x на участке интегрирования

$$\Delta x_{k+1} = \frac{\Delta t}{T_2} f_{k+1}$$

также в виде отрезка. Прибавляя к ординате x_k приращение Δx_{k+1}, найдем следующее значение x_{k+2}. Таким образом, если известно начальное значение $x_0 = x(0)$, могут быть найдены последовательно значения $x(\Delta t)$, $x(2\Delta t)$, $x(3\Delta t)$, . . . во всем интересующем нас интервале времени. Для этого, очевидно, достаточно знать следующие значения функции $f = f\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$, $f\left(\frac{3\Delta t}{2}\right)$, $f\left(\frac{5\Delta t}{2}\right)$. Результат получается в виде ряда точек интегральной кривой. В работе [4] указываются и другие графические способы решения уравнения интегрирующего звена.

5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ЗВЕНА

Для решения уравнения колебательного звена

$$(T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1) x = f(t)$$

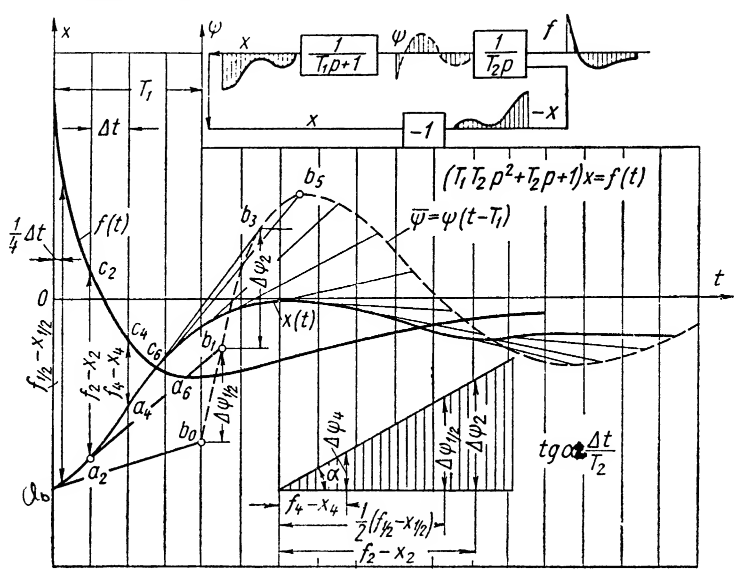
целесообразно представить колебательное звено в виде простейшей замкнутой системы регулирования, состоящей из интегрирующего и

инерционного звеньев. Структурная схема этой системы показана на фиг. 7. Соответствующая система диференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} (T_1 p + 1)\,x &= \psi; \\ T_2 p\psi &= f - x, \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

дающая при решении ее относительно x заданное уравнение (3), принимается за исходную при графическом построении переходного процесса в колебательном звене.

Функция ψ на выходе интегрирующего звена является в данном случае вспомогательной.



Фиг. 7. Решение уравнения колебательного звена
$$T_1 T_2 \frac{d^2x}{dt^2} + T_2 \frac{dx}{dt} + x = f(t).$$

Будем решать первое уравнение системы (24) методом секущих, а второе — методом суммирования средних ординат в соответствии со следующей системой разностных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_{k+2} &= x_k + \frac{\psi_{k+1} - x_k}{T_1 + \frac{\Delta t}{2}}\,\Delta t; \\ \psi_{k+1} &= \psi_{k-1} + \frac{\Delta t}{T_2}(f_k - x_k), \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

отвечающей при достаточно малом шаге интегрирования диференциальным уравнениям (24), а следовательно и уравнению (3).

Непосредственно из системы (24) видно, что если известны начальные значения $x_0 = x(0)$ и $\psi_1 = \psi\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$, можно найти произвольное

число значений $x_i = x\left(\frac{i\Delta t}{2}\right)$, $\psi_i = \psi_i\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ функций x и ψ в следующем порядке: x_2, ψ_3, x_4, ψ_5, . . . и т. д. Если же известны начальные значения $x_1 = x\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ и $\psi_0 = \psi(0)$, можно найти последовательно ψ_2, x_3, ψ_4, x_5 и т. д.

Определение исходных значений функций x и ψ и последующее построение кривой $x = x(t)$ рекомендуется производить в следующем излагаемом ниже порядке (фиг. 7).

Предварительные построения

1. Выбрав достаточно малый шаг интегрирования с соблюдением условия кратности величин $2T_1$ и Δt, построить в координатах t, x сетку вертикальных прямых $t = t_i = i\frac{\Delta t}{2}$ ($i = 1, 2, 3, \ldots$) либо воспользоваться миллиметровой бумагой. Построить график функции $f = f(t)$. Отметить на оси ординат начальную точку $a_0(0; x_0)$ кривой $x = x(t)$ в соответствии с начальными условиями.

2. Из сетки вертикальных прямых выделить ту прямую, абсцисса которой равна T_1.

Через начальную точку a_0 провести касательную к кривой $x = x(t)$, определяя ее угол наклона по заданной производной $px(0)$ в соответствии с начальными условиями. Точка b_0 пересечения касательной и вертикальной прямой $t = T_1$ даст согласно первому уравнению (24) начальное значение $\psi(0)$, на касательной же a_0b_0 найти точку

$$a_{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Delta t}{4};\ x\left(\frac{\Delta t}{4}\right)\right],$$

ординату которой при малом Δt можно считать равной $x\left(\frac{\Delta t}{4}\right)$.

3. Измерив на графике разность ординат

$$f\left(\frac{\Delta t}{4}\right) - x\left(\frac{\Delta t}{4}\right),$$

умножить ее на отношение $\frac{\Delta t}{2T_2}$.

4. Полученный отрезок прибавить, учитывая знак, к ординате точки $b_0[T_1; \psi(0)]$ и найти таким образом точку $b_1\left[T_1 + \frac{\Delta t}{2};\ \psi\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\right]$ смещенной кривой $\bar{\psi} = \psi(t - T_1)$.

5. Точки a_0 и b_1 соединить прямой. Точка a_2 пересечения прямой a_0b_1 и вертикальной прямой $t = \Delta t$ имеет согласно первому уравнению (25) ординату $x = x(\Delta t)$.

6. Измеряя разность ординат точки $c_2[\Delta t;\ f(\Delta t)]$ (на кривой $f = f(t)$) и точки $a_2[\Delta t;\ x(\Delta t)]$, умножить ее на отношение $\frac{\Delta t}{T_2}$ (при помощи наклонной прямой).

Найденный таким образом отрезок, равный $\frac{\Delta t}{T_2}[f(\Delta t) - x(\Delta t)]$, прибавить, учитывая знак, к ординате точки b_1 и найти в результате точку $b_3\left[T_1 + \frac{3\Delta t}{2};\ \psi\left(\frac{3\Delta t}{2}\right)\right]$ кривой $\overline{\psi} = \psi(t - T_1)$.

7. Соединяя точки a_2 и b_3 прямой, находим на ней точку $a_4\,[2\Delta t;\ x(2\Delta t)]$. Измерив разность ординат точки $c_4\,[2\Delta t;\ f(2\Delta t)]$ и точки a_4, умножить ее при помощи наклонной прямой на $\frac{\Delta t}{T_2}$ и полученный отрезок прибавить к ординате точки b_3. Таким образом находится точка $b_5\left[T_1 + \frac{5\Delta t}{2};\ \psi\left(\frac{5\Delta t}{2}\right)\right]$.

В той же последовательности определяются точки

$$a_6\,[3\Delta t;\ x(3\Delta t)],\quad b_7\left[T_1 + \frac{7\Delta t}{2};\ \psi\left(\frac{7\Delta t}{2}\right)\right],$$

$$a_8\,[4\Delta t;\ x(4\Delta t)],\quad b_9\left[T_1 + \frac{9\Delta t}{2};\ \psi\left(\frac{9\Delta t}{2}\right)\right]$$

и т. д.

6. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЗВЕНЬЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Как ни просты уравнения (4) и (5), решение их общепринятыми способами представит известные затруднения, если $f(t)$ не является аналитической функцией (например, имеет разрывы), а также тогда, когда в результате графического решения построена кривая функции $f(t)$, но ее аналитическое выражение неизвестно.

Ниже мы увидим, что элементарно простой способ решения уравнения (1), будучи несколько развит, позволяет найти решение уравнений (4) и (5).

Рассмотрим уравнение (4). Ему соответствуют два уравнения: уравнение (1)

$$(T_1 p + 1)\,x = f(t),$$

способ решения которого нам уже хорошо известен, и уравнение

$$y = (\theta p + 1)\,x, \tag{26}$$

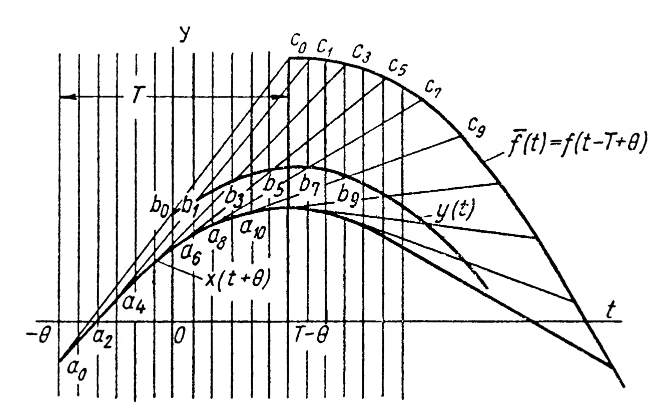
способ решения которого, очевидно, должен быть обратным по отношеиию к способу решения (1).

Для решения уравнения (4) (фиг. 8) примем шаг интегрирования равным Δt из условий $\Delta t < T$, $\Delta t < \theta$ и построим кривую $\overline{f}(t) = f(t - T + \theta)$. Соединим прямой точку $c_0\,[T - \theta;\ f(0)]$ кривой $\overline{f}(t)$ с начальной точкой $b_0\,[0;\ y(0)]$ искомой кривой $y(t)$.

Точка a_0 пересечения прямой $c_0 b_0$ и вертикальной прямой $t = -\theta$ даст начальное значение вспомогательной функции x. Затем, разбив график вертикальными прямыми на участки шириной $\frac{\Delta t}{2}$, соединим прямой точку $a_0\,[-\theta;\ x(0)]$ кривой $\overline{x} = x(t + \theta)$ с точкой $c_1\left[\frac{\Delta t}{2} + T - \theta\right]$ кривой $\overline{f} = \overline{f}(t)$.

Точка a_2 пересечения прямой a_0c_1 и вертикальной прямой $t = \Delta t - \theta$ даст значение вспомогательной функции, а точка b_1 пересечения прямой a_0c_1 и вертикальной прямой $t = \frac{\Delta t}{2}$ даст значение $y\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ искомой функции. Соединяя прямой найденную точку $a_2[\Delta t - \theta;\ x(t)]$ с точкой $c_3\left[\frac{3\Delta t}{2} + T - \theta;\ f\left(\frac{3\Delta t}{2}\right)\right]$, находим на этой прямой точки $a_4\ [2\Delta t - \theta;\ x(2\Delta t)]$ и $b_3\left[\frac{3\Delta t}{2};\ y\left(\frac{3\Delta t}{2}\right)\right]$, на прямой a_4c_5 — точки a_6 и b_5 и т. д.

В таком же порядке могут быть найдены и четные точки $b_2\ [\Delta t; y(\Delta t)]$, $b_4\ [2\Delta t; y(2\Delta t)], \ldots, b_{2k}\ [k\Delta t;\ y(k\Delta t)]$ кривой y, причем для



Фиг. 8. Решение уравнения $T_1 \frac{dx}{dt} + x = \theta_1 \frac{df}{dt} + f$.

этого потребуется определить нечетные точки $a_1\left[\frac{\Delta t}{2} - \theta;\ x\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\right]$, $a_3\left[\frac{3\Delta t}{2} - \theta;\ x\left(\frac{3\Delta t}{2}\right)\right], \ldots, a_{2k-1}\left[\frac{k-1}{2}\Delta t - \theta;\ x\left(\frac{k-1}{2}\Delta t\right)\right]$ вспомогательной кривой x.

Рассмотрим теперь уравнение (5). Его можно разложить на три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} (Tp+1)x &= f(t); \\ y &= (\theta p + 1)x; \\ z &= y - x. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Выше был изложен способ нахождения функции y, заданной первыми двумя уравнениями (1) и (26). Вычитая из ординат кривой y соответствующие по времени ординаты кривой x, которая строится одновременно с кривой y, мы тем самым найдем решение уравнения (5). Начальные значения $x(0)$ и $y(0)$ определяются алгебраически или геометрически по заданным $z(0)$ и $f(0)$ способами, следующими непосредственно из уравнений (27).

7. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЗВЕНЬЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ (4) — (11)

Уравнение второго порядка (3)

$$(T_1T_2p + T_2p + 1)\,x = f(t),$$

способы решения которого подробно рассмотрены выше, может в некоторых случаях принимать более сложную форму (4) — (11). Рассмотрим, например, решение уравнения (4):

$$(T_1T_2p^2 + T_2p + 1)\quad x = (\theta_2p + 1)\,f(t), \tag{28}$$

которое можно заменить системой из двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned}(T_1T_2p^2 + T_2p + 1)\quad x &= f(t);\\ u &= (\theta_2p + 1)\,x,\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

где x — вспомогательная функция, определяемая из формулы (3).

Для решения уравнения (3) необходимо найти начальные значения $x(0)$ и $px(0)$ вспомогательной функции по заданным $u(0)$, $pu(0)$, $f(0)$.

Чтобы сделать это, напишем уравнения (29) для момента $t = 0$:

$$T_1T_2p^2x(0) + T_2px(0) + x(0) = f(0);$$

$$\theta_2px(0) + x(0) = u(0)$$

и продиференцируем второе из них при $t = 0$:

$$\theta_2p^2x(0) + px(0) = pu(0).$$

Решая полученную систему из трех уравнений, найдем

$$x(0) = \frac{\Delta_x(0)}{\Delta_0(0)};\quad px(0) = \frac{\Delta_{px}(0)}{\Delta_0(0)},$$

где

$$\Delta_0(0) = \begin{vmatrix} T_1T_2 & T_2 & 1\\ 0 & \theta_2 & 1\\ \theta_2 & 1 & 0\end{vmatrix},$$

а $\Delta_x(0)$ и $\Delta_{px}(0)$ получаются из $\Delta_0(0)$ заменой свободными членами $f(0)$ и $u(0)$, $pu(0)$ третьего и второго столбцов соответственно. Заметим здесь, что при нулевых начальных условиях

$$f(0) = u(0) = pu(0)$$

начальные значения вспомогательной функции $x(0)$ и $px(0)$ оказываются также нулями:

$$x(0) = px(0) = 0.$$

После того как определены $x(0)$ и $px(0)$, следует решить уравнение (3) ранее описанным способом.

Согласно этому способу наряду с кривыми $x = x(t)$ и $f = f(t)$ мы должны строить вспомогательную функцию $\overline{\psi}(t) = \psi(t - T_1)$, причем

$$(T_1 p + 1)x = \psi; \quad T_2 p\psi = f(t) - x.$$

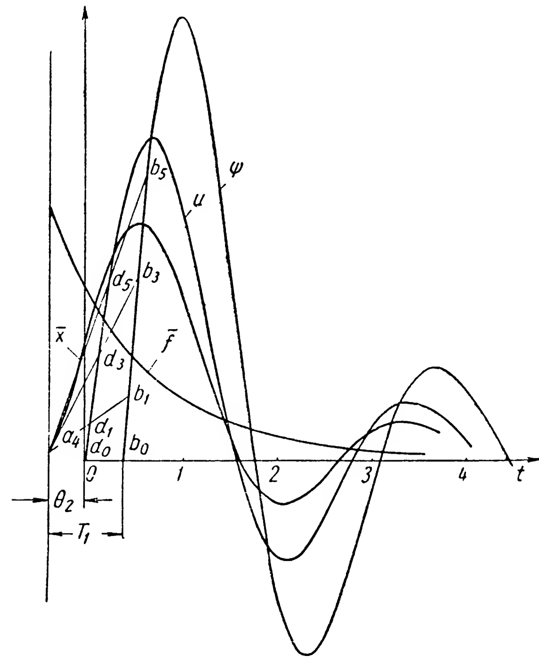
Отсюда получим, выражая ψ через $f(t)$,

$$(T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1)\psi = (T_1 p + 1) f(t).$$

Если $T_1 = \theta_2$, то $u = \psi$ при $u(0) = \psi(0)$, $pu(0) = p\psi(0)$, как нетрудно видеть из сопоставления последнего уравнения и уравнения (28), если же $T_1 \neq \theta_2$, то из уравнений

$$\left.\begin{aligned} (T_1 p + 1)x &= \psi; \\ u &= (\theta_2 p + 1)x \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

заключаем, что если обозначать d_i точки искомой кривой $u = u(t)$, а точки смещенных кривых $\overline{x}$ и $\overline{\psi}$ обозначать a_i и b_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, то точки d_1, d_3, d_5, $\ldots$, d_{2k+1} должны находиться на секущих $a_0 b_1$, $a_2 b_3$, $a_4 b_5$, $\ldots$, $a_{2k}\, b_{2k+1}$ и аналогично точки d_2, d_4, $\ldots$, d_{2k} — на секущих $a_1 b_2$, $a_3 b_4$, $a_5 b_6, \ldots, a_{2k-1}\, b_{2k}$, соединяющих точки смещенных кривых $\overline{x} = x(t + \theta_2)$ и $\overline{\psi} = \psi\ (t - T_1 + \theta_2)$ (фиг. 9), при условии $\Delta t \ll T_1$, $\Delta t \ll \theta_2$.



Фиг. 9. Решение уравнения
$T_1 T_2 \dfrac{d^2x}{dt^2} + T_2 \dfrac{dx}{dt} + x = \theta_2 \dfrac{df}{dt} + f.$

Уравнения (30), таким образом, могут быть решены совместно тем же способом, что и уравнения (1) и (26). Разница состоит только в том, что правая часть $f(t)$ уравнения (1) задана, правая часть ψ первого уравнения (30) предварительно определяется как вспомогательная функция при решении обычного уравнения второго порядка.

На фиг. 9 приведено в качестве примера решение уравнения

$$T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1 \quad u = (\theta_2 p + 1) f(t),$$

где $T_1 = 0{,}9$; $T_2 = 0{,}2$; $\theta_2 = 0{,}5$; $f(t) = [1]\, e^{-t}$ при начальных условиях $u(0) - pu(0) = 0$.

В работе [4] рассматриваются также способы решения уравнений типа (7) — (11) с производными в правой части.

8. О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ

Мы рассмотрели способы построения переходных процессов в типовых линейных звеньях систем автоматического регулирования.

Нелинейности, имеющие место в системах автоматического регулирования, часто сводятся к следующему:

а) коэфициенты T_1 и T_2 в уравнениях звеньев не являются постоянными, а представляют собой некоторые функции переменной x или других переменных, характеризующих состояние системы, например,

$$T_1 = T_1(x); \quad T_2 = T_2(x);$$

б) правая часть f (функция на входе звеньев) является некоторой нелинейной функцией времени и переменной x или других величин, определяющих состояние системы, например в случае звена первого порядка $f = f(t, x)$, а в случае звена второго порядка $f = f(t, x, px)$.

Типовыми примерами нелинейных уравнений первого и второго порядков являются следующие:

а) для нелинейного инерционного звена

$$(T_1 p + 1)x = f(t;\ x); \tag{31}$$

б) для нелинейного интегрирующего звена

$$T_2 px = f(t;\ x); \tag{32}$$

в) для нелинейного колебательного звена

$$(T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1)x = f(t;\ x;\ px). \tag{33}$$

Уравнение (31) решается в таком же порядке, как и линейное уравнение (1), с той, однако, разницей, что график правой части $f(t, x)$ не строится заранее, а определяется в ходе графического решения вместе с искомой функцией x.

При этом, поскольку для определения значений x для моментов времени $t = t_{2m} = m\Delta t$ $(m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ необходимо знать значения функции $f(t;\ x)$ для моментов времени $t = t_{2m+1} = \frac{2m+1}{2}\Delta t$, то очевидно, что решение должно производиться таким образом, чтобы определять значения x и f как для моментов времени, соответствующих четному числу половин участков интегрирования $t_m = 2m\frac{\Delta t}{2}$, так и для моментов времени, соответствующих нечетному числу половин участков интегрирования $t_{2m+1} = (2m+1)\frac{\Delta t}{2}$. Для того чтобы начать графическое решение, необходимо иметь два начальных значения функции x: $x(0)$ и $x\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$. Первое из них задано, второе может быть найдено, например, методом Эйлера, путем разбивки интервала $0 \leqslant t \leqslant \frac{\Delta t}{2}$ на более мелкие интервалы.

Уравнение нелинейного интегрирующего звена (32) решается, как и уравнение (2), способом суммирования средних ординат. То обстоя-

тельство, что функция $f(t)$ должна определяться в ходе самого графического решения, приводит к необходимости определять функцию x и функцию f как для четных моментов времени

$$t_{2m} = 2m \frac{\Delta t}{2},$$

так и для нечетных

$$t_{2m+1} = 2_{m+1} \frac{\Delta t}{2}.$$

Уравнение (33) нелинейного колебательного звена

$$(T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1) x = f(t;\ x;\ px)$$

для графического решения целесообразно заменить двумя уравнениями первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} (T_1 p + 1) x &= \psi; \\ T_2 p\psi &= \varphi(t;\ x;\ \psi) - x, \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

где

$$\varphi(t;\ x;\ \psi) = f\left(t;\ x;\ \frac{\psi - x}{T_1}\right),$$

поскольку

$$px = \frac{\psi - x}{T_1}.$$

Первое из уравнений (34) соответствует линейному инерционному звену и, следовательно, легко решается проведением секущих.

Второе уравнение соответствует нелинейному интегрирующему звену. Решение системы уравнений (34) должно производиться в том же порядке, что и решение системы уравнений (24), причем, для того чтобы иметь возможность одновременного построения графиков функций x, ψ, φ $(t,\ x,\ \psi)$, каждая из этих функций должна определяться как для четных $t = t_{2m}$, так и для нечетных $(t = t_{2m+1})$ моментов времени.

Строя переходный процесс в колебательном звене второго порядка, мы заменяем это звено замкнутой регулируемой системой, состоящей из двух звеньев первого порядка.

9. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В СИСТЕМЕ РЕГУЛИРОВАНИЯ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОЕ ЧИСЛО ЗВЕНЬЕВ

Покажем теперь, что переходный процесс может быть построен и тогда, когда система регулирования содержит произвольное число звеньев.

Имея в виду, что каждому звену второго порядка соответствуют два уравнения первого порядка типа (1), (2), мы без всякого ущерба для общности можем рассматривать только систему диференциальных

уравнений, состоящую из линейных и нелинейных уравнений первого порядка. Пусть эта система имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} (T_x p+1)x &= f_x(t;\ x;\ y;\ \ldots;\ \xi;\ \eta\ldots); \\ (T_y p+1)y &= f_y(t;\ x;\ y;\ \ldots;\ \xi;\ \eta\ldots); \\ T_\xi p\xi &= f_\xi(t;\ x;\ y;\ \ldots;\ \xi;\ \eta;\ \ldots); \\ T_\eta p\eta &= f_\eta(t;\ x;\ y;\ \ldots;\ \xi;\ \eta;\ \ldots), \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

причем в нее могут входить также и нелинейные диференциальные уравнения. Применим для графического решения уравнений первой группы (функции x, y, ...) метод секущей, а для графического решения уравнений второй группы (функции ξ, η, ...) метод суммирования средних ординат. Тогда графическое решение будет соответствовать следующей системе разностных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_{(k+2)} &= x_k + \frac{f_{x(k+1)} - x_k}{T_x + \frac{\Delta t}{2}}\Delta t; \\ y_{(k+2)} &= y_k + \frac{f_{y(k+1)} - y_k}{T_y + \frac{\Delta t}{2}}\Delta t; \\ \xi_{(k+2)} &= \xi_k + \frac{\Delta t}{T_\xi} f_{\xi(k+1)}; \\ \eta_{(k+2)} &= \eta_k + \frac{\Delta t}{T_\eta} f_{\eta\,(k+1)}, \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

где

$$x_i = x\left(i\frac{\Delta t}{2}\right);\ \ldots;\ \eta_i = \left(i\frac{\Delta t}{2}\right);$$

$$f_{x,\,i} = f_x\left(i\frac{\Delta t}{2};\ x_i;\ y_i;\ \ldots;\ \xi_i;\ \eta_i;\ \ldots\right);$$

$$f_{\eta,\,i} = f_\eta\left(i\frac{\Delta t}{2};\ x_i;\ y_i;\ \ldots;\ \xi_i;\ \eta_i\ldots\right);$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2\ \ldots\ k,\ k+1,\ k+2,\ \ldots).$$

Исследуя структуру разностных уравнений (36), легко прийти к выводу, что если для каждой из переменных x, y, ..., ξ, η... известно по два исходных значения x_0 и x_1, y_0 и y_1, ...; ξ_0 и ξ_1, η_0 и η_1, ..., то может быть найдено произвольное число последующих значений x_2, y_2, ξ_2, η_2, ..., x_3, y_3, ..., ξ_3, η_3, ..., x_4, y_4, ..., ξ_4, η_4, .. и т. д. для каждой из переменных. Характерно, что при шаге интегрирования, равном Δt, продвижение во времени за один цикл решения оказывается равным $\frac{\Delta t}{2}$, т. е. половине шага интегрирования [1].

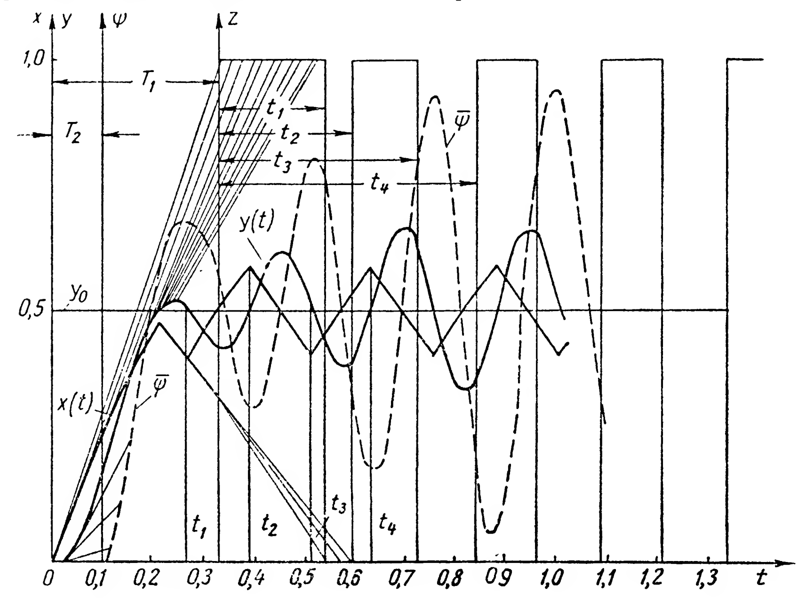
[1] В некоторых случаях, однако, можно так построить процесс решения, что продвижение за один цикл будет равно шагу интегрирования Δt, как это имеет место, например, при решении линейного уравнения второго порядка.

Что касается исходных значений x_1, $y_1, \ldots, \xi_1, \eta_1 \ldots$, необходимых для графического решения, то они могут быть найдены методом Эйлера (проведением не секущих, а касательных), при этом для увеличения точности можно разбить первый половинный участок $0 < t < \frac{\Delta t}{2}$ на два или на четыре участка, смотря по тому, какая точность требуется.

Итак, в какой бы последовательности ни были соединены звенья системы автоматического регулирования, переходный процесс в системе может быть построен, если только имеются способы построения переходных процессов в каждом отдельном звене этой системы. Точность графического решения зависит от величины шага интегрирования Δt. При достаточно малом шаге интегрирования может быть достигнута принципиально любая степень точности.

10. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА

Пример 1. Чтобы пояснить предлагаемый графо-аналитический метод, рассмотрим в виде примера нелинейную систему третьего порядка, содержащую инерционное звено, колебательное звено и релейный элемент.



Фиг. 10. Графическое построение переходного процесса в нелинейной системе.

Уравнения этой системы имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &(T_1p + 1)\,\Omega = k_1u; \\ &(T_2T_3p^2 + T_3p + 1)\,\beta = k_2\Omega; \\ &u = \begin{cases} u_{\max} & \beta < \beta_0; \\ 0 & \beta > \beta_0, \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

где Ω — скорость вращения электродвигателя;

β — угол поворота контактного рычага магнитного тахометра;

u — напряжение, подводимое через контакты тахометра к управляющей обмотке электродвигателя;

$T_1 = 0{,}33$ сек. — электромеханическая постоянная времени;

$T_2 = 0{,}1$ сек., $T_3 = 0{,}017$ сек. — постоянная времени магнитного тахометра;

$k_1 = 31{,}41$ *в·сек*, $k_2 = 0{,}00312$ сек. — постоянные коэфициенты;

$U_{max} = 30$ *в* — напряжение (действующее значение) на управляющей обмотке при замкнутых контактах тахометра;

β_0 — значение β, соответствующее заданной скорости вращения, в нашем примере $\beta_0 = 0{,}5\ \beta_{max}$, причем $\beta_{max} = k_2\Omega_{max}$, $\Omega_{max} = k_1 u_{max}$.

Обозначая $x = \frac{\Omega}{\Omega_{max}}$, $y = \frac{\beta}{\beta_{max}}$, $z = \frac{u}{u_{max}}$, получим следующую систему уравнений:

$$(T_1 p + 1)\,x = z;$$
$$(T_2 T_3 p^2 + T_3 p + 1)\,y = x;$$
$$z = \begin{cases} 1 & y < 0{,}5; \\ 0 & y > 0{,}5, \end{cases} \tag{38}$$

которую и примем за исходную для графического интегрирования.

Будем строить кривую $x = x(t)$ в координатах t, x, в этих же координатах следует строить и кривую $y = y(t)$, поскольку функция x является правой частью уравнения второго порядка, полученного для y (фиг. 10). Это уравнение

$$(T_2 T_3 p^2 + T_3 p + 1)\,y = x$$

следует заменить согласно способу решения уравнения второго порядка двумя уравнениями первого порядка:

$$\begin{aligned} (T_2 p + 1)\,y &= \psi; \\ T_3 p \psi &= x - y, \end{aligned} \tag{39}$$

где ψ — вспомогательная функция, являющаяся интегралом разности $x - y$.

В процессе графического решения должна строиться смещенная на T_2 вправо по оси ординат кривая $\overline{\psi} = \psi\,(t - T_2)$ (для нахождения y методом секущей), смещенная на T_1 вправо по оси времени кривая $\overline{z} = z\,(t - T)$ (для нахождения x по методу секущей). Для нахождения функции ψ по методу суммирования средних ординат следует построить наклонную прямую, образующая с осью абсцисс угол $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\Delta t}{T_3}$ (на фиг. 10 не показана). Решение производилось нами для нулевых начальных условий: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $py(0) = 0$.

На участке $0 < t < t_1$ кривая x является возрастающей экспонентой. Строится она проведением секущих через точки кривой z. По функции x, являющейся по отношению к колебательному звену входной величиной, строится график функции y, проведением секущих через точки кривой $\overline{\psi}$, получающейся в свою очередь суммированием отрезков $\frac{\Delta t}{T_3}(x - y)$. В тот момент, когда кривая $y = y(t)$ пересекает горизонтальную прямую $y = 0{,}5$ (соответствующую β_0), контакты регулятора размыкаются, и функция z (напряжение u) после $t = t_1$ становится равной нулю.

На участке от t_1 до t_2 кривая x является спадающей экспонентой; как и раньше, она строится проведением секущих через соответствующие точки кривой z. По кривой x определяется кривая y и в тот момент, когда последняя пересекает, уменьшаясь, прямую $y = 0{,}5$, функция z опять мгновенно возрастает от нуля до единицы. Вскоре убеждаемся, что автоколебания приняли установившийся характер.

Из графика можно определить длительность и характер переходного процесса, частоту и амплитуду автоколебаний, существующих в установившемся

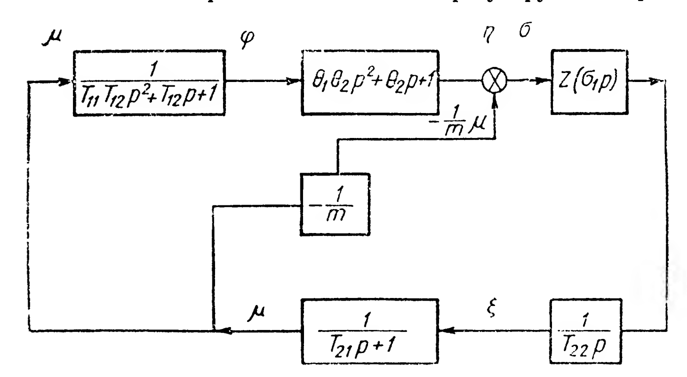
режиме: частота равна 4 *гц*, амплитуда колебаний скорости равна 810 оборотам в минуту, амплитуда колебаний угла β равна 0,47 радиана.

Как видно из графика, в ходе графического построения переходного и установившегося процессов в нелинейной системе 3-го порядка строились кривые четырех функций: x, y, z, ψ, из которых только одна (ψ) является вспомогательной. Три же другие функции (x, y, z) полностью относятся к величинам, характеризующим работу системы.

Пример 2. В ряде работ Б. В. Булгакова и А. И. Лурье исследовалась нелинейная регулируемая система, уравнения которой заданы в виде

$$\left.\begin{aligned} T^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -U\frac{d\varphi}{dt} - k\varphi - \mu; \\ V^2\frac{d^2\mu}{dt^2} &= -W\frac{d\mu}{dt} + \Phi(\sigma); \\ \sigma + b\varphi + X\frac{d\varphi}{dt} &+ Y^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{1}{m}\mu, \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

где T, U, V, W, X, Y — временные константы;
k, l, m — коэфициенты пропорциональности;
φ, μ, σ — обобщенные координаты системы;
$\Phi(\sigma)$ — некоторая функция на выходе суммирующего элемента, определяющая движение регулирующего органа системы.



Фиг. 11. Структурная схема нелинейной системы регулирования.

Найдем движение системы для случая, когда

$$\Phi(\sigma) = \begin{cases} 1 \text{ при } \sigma > 0{,}08; \\ 0 \quad\;\; (\sigma) < 0{,}08; \\ 1 \text{ при } \sigma < 0{,}08, \end{cases}$$

приняв для простоты $k = l = 1$. Применяем с этой целью графический метод для чего приведем формулы (40) к системе

$$\left.\begin{aligned} (T_{11}T_{12}p^2 + T_{12}p + 1)\,\varphi &= -\mu; \\ \eta &= (\theta_1\theta_3 p^2 + \theta_2 p + p)\,\varphi; \\ \sigma &= \eta - \frac{1}{m}\mu; \\ T_{22}p\xi &= \Phi(\sigma); \\ (T_{21}p + 1)\,\mu &= \xi, \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

где

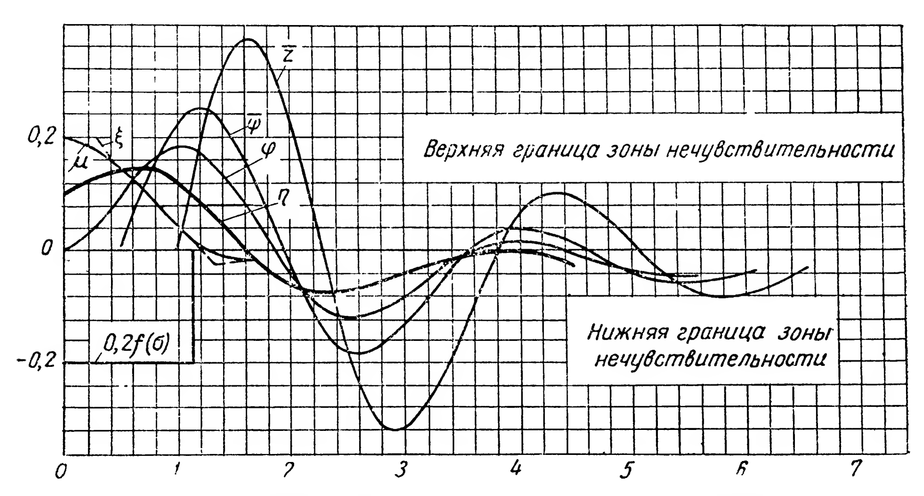
$$T_{11}T_{12} = T_1^2 T_{12} = U;\ \theta_1\theta_2 = Y^2,\ \theta_2 = X;$$

$$T_{21}T_{22} = V^2;\ T_{22} = W;$$

η, ξ — промежуточные вспомогательные координаты.

Легко заключить, что заданную систему уравнений (40) можно было бы привести к виду аналогичному системе уравнений (41) и при любых других значениях коэфициентов k и l.

Структурная схема регулируемой системы, соответствующая уравнениям (41), показана на фиг. 11. На ней нелинейным оператором z (σ, p) условно обозначено звено, преобразующее σ в Φ (σ).



Фиг. 12. Графическое решение системы уравнений (41).

Рассматривая уравнения (41), заключаем, что каждое из них может быть решено графически применением способов, изложенных выше.

Графическое решение (41) с указанием вспомогательных построений дано на фиг. 12. Решение произведено при следующих данных: $T_{11} = 1$; $T_{12} = 0,2$; $\theta_1 = 0,5$; $\theta_2 = 0,2$; $T_{21} = 0,2$; $T_{22} = 5$; $m = 10$, исходя из начальных условий $\varphi(0) = p\varphi(0)$; $\mu(0) = \xi(0) = -0,2$; $\eta_{t<0} = p\eta_{t<0} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, М. — Л. 1950.
2. Чаплыгин С. А., собр. соч., т. I, М. — Л. 1948.
3. Франк М. Л., Графические методы интегрирования обыкновенных диференциальных уравнений, М. — Л. 1938.
4. Башкиров Л. А., Графо-аналитический метод анализа переходных процессов в системах автоматического регулирования, диссертация, 1950.

ГЛАВА XXXIX

ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ. МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ

В настоящей главе излагается графо-аналитический метод решения обыкновенных диференциальных уравнений с нелинейными и зависящими от времени коэфициентами типа часто встречающегося при анализе систем автоматического регулирования.

Метод сводится по существу к одной и той же последовательности операций вне зависимости от порядка уравнения и не требует каких-либо предварительных преобразований исходного уравнения.

Идея метода касательных, изложенная в работе [1], была применена автором настоящей главы к решению задач теории регулирования и положена в основу настоящей работы по предложению В. В. Солодовникова.

Кривая, представляющая искомое решение, получается в виде небольших сопрягающихся прямолинейных отрезков, наклон которых определяется из диференциального уравнения по заданным начальным условиям чисто графическими приемами. Метод удобен для применения в тех случаях, когда нелинейные или зависящие от времени коэфициенты заданы в виде экспериментальных кривых, аналитическое выражение которых неизвестно.

Основное внимание уделено изложению методики решения уравнений с переменными коэфициентами вида

$$\psi_n(t)\frac{d^nx}{dt^n}+\psi_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\dots\psi_1(t)\frac{dx}{dt}+\psi_0(t)x=f(t)$$

и уравнений с нелинейными коэфициентами вида

$$\psi_n(x)\frac{d^nx}{dt^n}+\psi_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\dots\psi_1(x)\frac{dx}{dt}+\psi_0(x)x=f(t).$$

Метод при незначительных его изменениях применим также к решению уравнений, в которых функции ψ_i зависят одновременно от двух любых из следующих величин: t, x, $\frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$, а также к системам диференциальных уравнений.

Метод может обеспечить точность до 1—2%.

1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

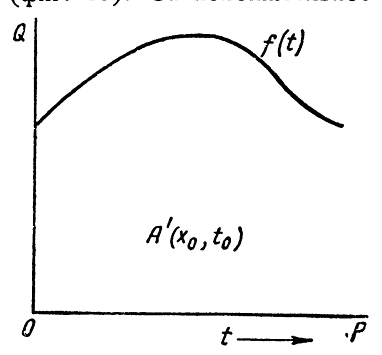
Поясним сущность метода на решении уравнения первого порядка вида

$$\psi_1(x)\frac{dx}{dt}+x=f(t)$$

при начальном условии

$$[x(t)]_{t=t_0}=x_0.$$

Нанесем на листе (лист 1) бумаги (удобнее всего миллиметровой) прямоугольную систему координат POQ (фиг. 13). За положительное направление отсчета времени t выберем положительное направление оси OP. Вдоль оси OQ будем откладывать значения функций $f(t)$, $x(t)$.

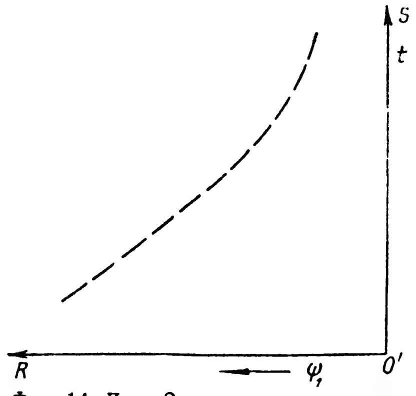


Фиг. 13. Лист 1 для решения уравнения первого порядка

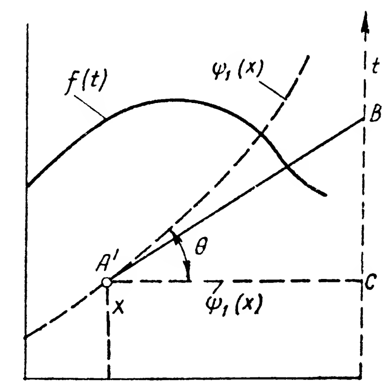
Построим в осях POQ функцию $f(t)$ и отметим точку $A'(t_0, x_0)$.

На другом листе (фиг. 14) прозрачной бумаги (кальки) построим прямоугольную систему координат $RO'S$ и будем откладывать вдоль оси $O'S$ значения времени t, а вдоль оси $O'R$ — значения функции $\psi_1(x)$.

Наложим лист 2 на лист 1 так, чтобы оси OP и $O'R$ совпали и ось $O'S$ (фиг. 15) проходила через точку A'. Отметим на листе 2 точку B, в которой ось $O'S$ пересекает кривую $f(t)$.



Фиг. 14. Лист 2 для решения уравнения второго порядка.



Фиг. 15. Графическое решение уравнения первого порядка.

Сохраняя теперь совпадение осей OP и $O'S$, будем передвигать лист 2 до тех пор, пока точка A' не окажется под кривой $\psi_1(t)$ (фиг. 15). В этом положении прямая $A'B$ является касательной к кривой $x(t)$ в точке A', так как

$$CB=f(t)-x$$

и

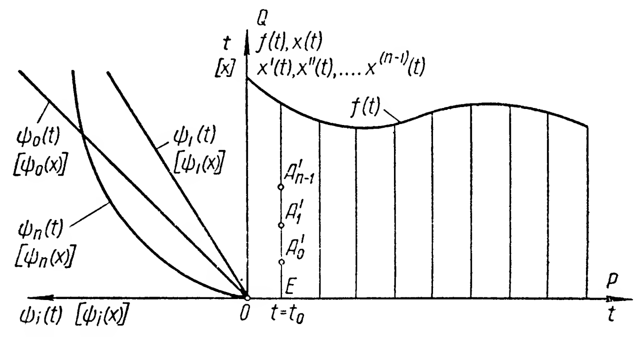
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{CB}{AC} = \frac{f(t) - x}{\psi_1(t)} = \frac{dx}{dt}.$$

Таким образом, если проколоть лист 2 в какой-нибудь точке P, находящейся на прямой $A'B$ вблизи A', то мы получим на листе 1 точку P', которая может рассматриваться как точка искомой интегральной кривой. Рассматривая теперь P' как начальную точку и повторив изложенный процесс, мы получим следующую точку кривой $x(t)$ и т. д.

2. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ, ОПИСЫВАЕМЫХ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ПОСТОЯННЫМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ (МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ)

Перейдем теперь к общему случаю, т. е. предположим, что поведение системы автоматического регулирования описывается диференциальным уравнением n-го порядка

$$\psi_n(t)\frac{d^n x}{dt^n} + \psi_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots \psi_1(t)\frac{dx}{dt}\Psi_0(t)\,x = f(t) \qquad (42)$$



Фиг. 16. Предварительные построения на листе I.

и что начальные условия имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0; \\ \frac{dx}{dt} &= x_1; \quad \ldots; \\ \frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}} &= x_{n-1} \end{aligned}\right\} t = t_0. \qquad (43)$$

В уравнении (42) коэфициенты $\psi_i(t)$ и функция $f(t)$ могут быть заданы как графически, так и аналитически.

Нанесем на листе бумаги прямоугольную систему координат POQ (фиг. 16). Условимся называть этот лист листом I.

Выберем за положительное направление отсчета времени t положительное направление оси OP, а за положительное направление отсчета

значений функций $\psi_i(t)$ — отрицательное направление оси OP. Вдоль оси OQ будем откладывать время t для функций $\Psi_i(t)$ и значения функций

$$f(t),\ x(t),\ x'(t)\ \ldots\ x^{(n-1)}(t).$$

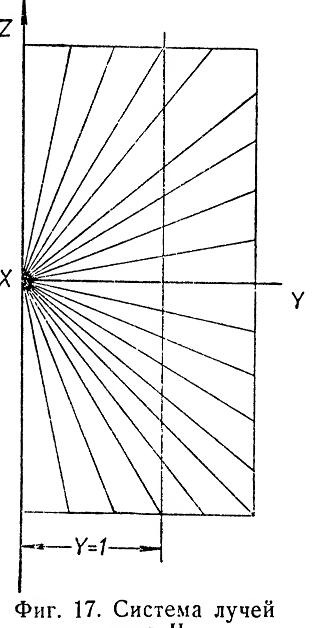
Построим в координатной системе POQ функции $\psi_i(t)$ и $f(t)$.

Масштабы t и $\psi_i(t)$ должны быть одинаковыми. Положительные направления на фиг. 16 отметим стрелками. Выберем шаг интегрирования Δt и разграфим первый квадрант прямыми, параллельными оси OQ, проходящими через точки $t_k = k\Delta t$, где Δt — шаг интегрирования; k — число интервалов интегрирования.

Нанесем на линии $t = t_0$ точки A'_0, A'_1, ... A'_{n-1}, соответствующие начальным условиям

$$EA'_0 = x_0;\quad EA'_1 = x_1,\ \ldots\ EA'_{n-1} = x_{n-1}.$$

Далее на листе прозрачной бумаги (назовем его листом II) нанесем прямоугольную систему координат ZXY, линию $Y = 1$ в масштабе $\psi_i(t)$ и систему лучей [1], выходящих из начала координат X (фиг. 17).



Фиг. 17. Система лучей листа II.

Произведя подготовительные построения, наложим лист II на лист I так, чтобы оси XY и OP совпали, а линия $Y = 1$ листа II проходила через точки A'_0, A'_1, ..., A'_{n-1} листа I Отметим на листе II точки A_0, A_1, ..., A_{n-1} соответственно над точками A'_0, A'_1, ..., A'_{n-1}.

Переместим лист II по листу I таким образом, чтобы начало координат листа II совпадало с точкой A'_0 листа I, а ось XZ листа II совпадала с линией $t = t_0$ листа I. Тогда прямая, проходящая через точку A'_0 листа I и точку A_1 листа II, будет являться касательной к искомой интегральной кривой $x(t)$ в точке A'_0.

На фиг. 18 приведен метод построения касательной к $x(t)$. В дальнейшем на листе II, чтобы не затемнять чертежа, мы вместо системы лучей будем изображать только луч, участвующий в построении.

Покажем, что прямая A'_0A_1 действительно является касательной к интегральной кривой $x(t)$.

Из $\Delta A'_0CA_1$ (фиг. 18) находим, что

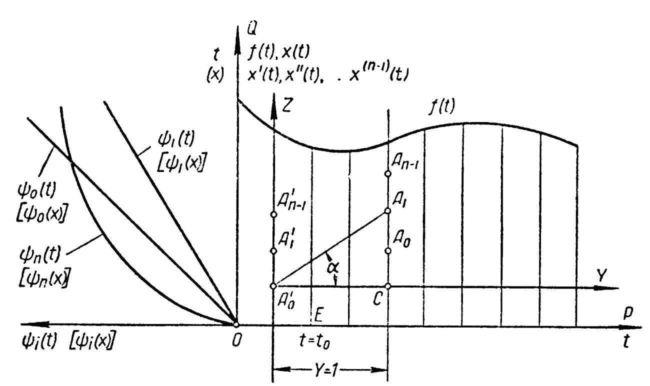
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1C}{A'_0C} = \frac{A_1C}{1} = x'(t_0).$$

[1] Лучи на листе II можно не наносить, а соединить необходимые точки с помощью линейки, причем при построении переходного процесса мы не очень много проиграем во времени, зато заметно выиграем в точности.

Точка F на фиг. 18, получаемая в результате пересечения прямой $t = t_0 + \Delta t$ с прямой $A_0'A_1$, будет являться точкой, соседней к A_0', а отрезок $A_0'F$ — приближенным значением $x(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta t$.

Используем то же правило для построения приближенных значений $\frac{dx}{dt}$.

Переместим лист II вертикально, пока точка X не окажется над точкой A_1' листа I. Тогда попрежнему $A_1'A_2$ — касательная к кривой $\frac{dx}{dt}$ в точке A_1', а пересечение прямой $A_1'A_2$ с линией $t = t_0 + \Delta t$



Фиг. 18. Построение касательной к $x(t)$.

даст точку, соседнюю к A_1', и мы найдем приближенное значение $\frac{dx}{dt}$ на интервале

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta t.$$

Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока точка x листа II не окажется в точке A_{n-2} листа I и пока мы не найдем касательную $A_{n-2}'A_{n-1}$ к кривой $\frac{dx^{n-2}}{dt^{n-2}}$ в точке A_{n-2}'.

Точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ на листе I проще всего наносить путем прокалывания листа II.

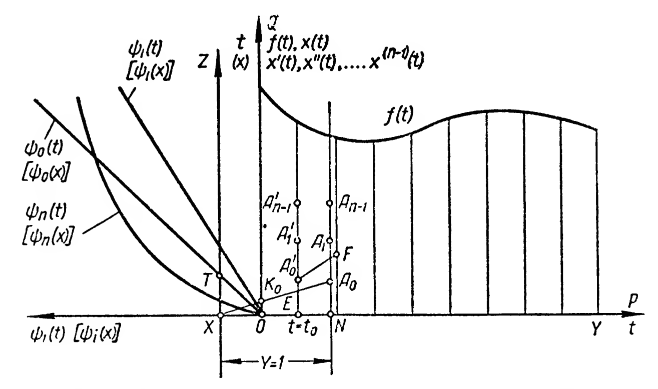
Для того чтобы найти касательную к кривой $\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ в точке A_{n-1}', поступим следующим образом: наложим лист II на лист I так, чтобы начало координат листа II совпадало с точкой E листа I (фиг. 19), а ось XZ совпадала с линией $t = t_0$. Точка E является пересечением линии $t = t_0$ с осью OP.

Отметим на оси XZ точку T, выбрав ее так, чтобы отрезок $XT = t_0$. Затем, сохраняя совпадение осей OP и XY, будем смещать лист II до тех пор, пока точка T не окажется над кривой $\psi_0(t)$.

Отметим луч, проходящий через точку A_0 и X листа II, и предположим, что он пересекает ось OQ листа I в точке K_0. Пусть мы располагаем устройством для складывания нескольких вертикальных от-

резков. Простейшим устройством такого рода может служить полоска бумаги, вдоль края которой отмечаются длины отрезков.

На суммирующем устройстве отметим величину отрезка OK_0 (фиг. 19), равную $\psi_0(t)\ x(t)$ при $t=t_0$.



Фиг. 19. Определение произведения $\psi_0(t)\,x(t)$.

Действительно, из треугольника XA_0N следует, что

$$\frac{OK_0}{A_0 N}=\frac{OX}{XN},$$

но

$$XO=\psi_0(t)$$

при $t=t_0$;

$$XN=1,\ \ AN=x(t)$$

при $t=t_0$, тогда

$$OK_0=\frac{\psi_0(t)\,x(t)}{1}=\psi_0(t)\,x(t).$$

Передвинем лист II так, чтобы точка T оказалась над кривой $\psi_1(t)$, отметим луч, проходящий через A_1 и X. Точку пересечения OA и луча A_1X обозначим через K_1, тогда попрежнему отрезок

$$OK_1=\psi_1(t)\frac{dx}{dt}.$$

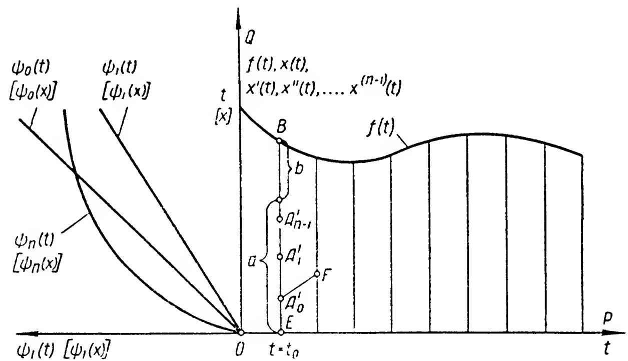
Будем продолжать этот процесс, помещая точку T над кривыми $\psi_2(t)\ldots\ \psi_{n-1}(t)$, и отмечать отрезки $OK_2,\ \ldots\ OK_{n-1}$. После того как мы найдем все произведения уравнения (42), кроме $\psi_n(t)\frac{d^nx}{dt^n}$, сложим полученные отрезки на суммирующем устройстве и получим величину

$$a=OK_0+OK_1+\ldots OK_{n-1}=\psi_0(t)\,x(t)+\psi_1(t)\frac{dx}{dt}+$$

$$+\ldots\psi_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}.$$

Примечания: 1. При решении уравнений с постоянными коэфициентами точку T можно не наносить.

2. Часто точки, соседние к A_0' A_1', ... A_{n-2}', можно определять с помощью измерителя. Например, на листе II на линии $t = t_0 + 1$ измерителем откладываем



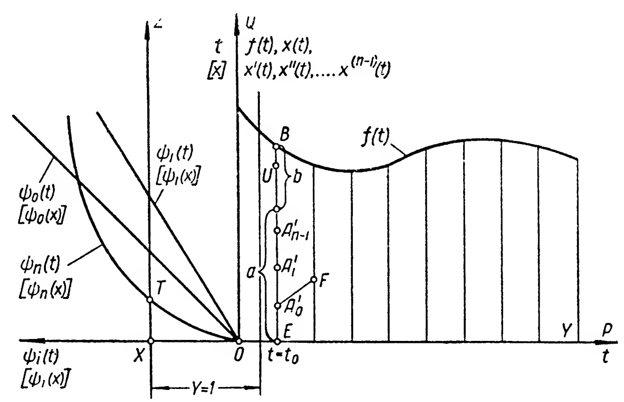
Фиг. 20. Определение отрезка b.

отрезок $A_1C = x_1$ и соединяем $A_0'CA_1$; в результате получим, как и прежде, точку F.

Вычтя величину отрезка a (фиг. 20) из отрезка EB [B — точка пересечения линии $t = t_0$ с кривой $f(t)$], найдем отрезок

$$b = EB - a = f(t) - \left[\psi_0(t)\, x(t) + \psi_1(t) \frac{dx}{dt} + \dots \psi_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \right]$$

при $t = t_0$.



Фиг. 21. Построение отрезка $A_{n-1}' U$.

Передвинем лист II так, чтобы точка T оказалась под кривой $\psi_n(t)$ (оси OP и XY должны совпадать), и отметим точку U на листе II таким образом, чтобы $A_{n-1}'U = b$ (фиг. 21).

Далее перемещаем лист II до тех пор, пока ось ZX не совпадет с осью OQ, тогда линия $A_{n-1}'U$ будет касательной к кривой $\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ в точке A_{n-1}', и мы можем приближенно найти точку, соседнюю с точ-

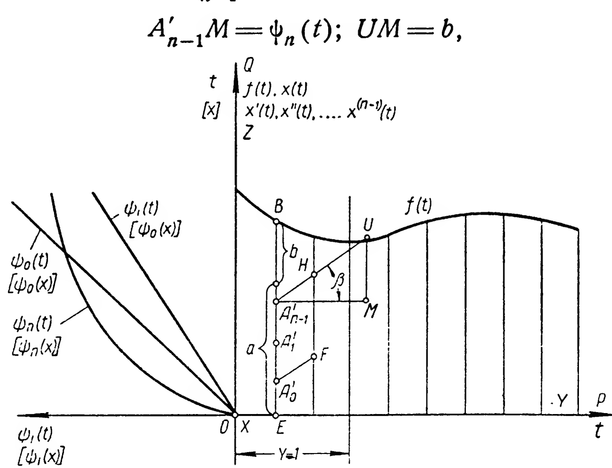
кой A'_{n-1} и принадлежащую кривой $\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$, как точку пересечения прямой $A'_{n-1}U$ с линией $t = t_0 + \Delta t$ (точка H на фиг. 22).

Действительно, из треугольника $A'_{n-1}UM$ находим, что

$$\frac{UM}{A'_{n-1}M} = \operatorname{tg}\beta = \frac{d^n x}{dt^n},$$

так как

$$A'_{n-1}M = \psi_n(t); \quad UM = b,$$



Фиг. 22. Определение $\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$.

и, следовательно,

$$\frac{UM}{A'_{n-1}M} = \frac{b}{\psi_n(t)} = \frac{f(t) - \left[\psi_0(t)\,x(t) + \psi_1(t)\frac{dx}{dt} + \ldots \psi_{n-1}(t)\,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right]}{\psi_n(t)} =$$

$$= \frac{d^n x}{dt^n}.$$

После того как мы приближенно построили участки кривых $x(t)$, $x'(t), \ldots, x^{n-1}(t)$ в интервале t_0, $t_0 + \Delta t$, принимаем точки, соседние к $A'_0, A'_1, \ldots, A'_{n-1}$ (на линии $t_0 = \Delta t$), за исходные и повторяем весь изложенный выше процесс.

В результате получим участки кривых в интервале $t_0 + \Delta t$, $t_0 + 2\Delta t$ и т. д. Кривые, полученные таким образом, приближенно будут соответствовать $x(t)$, $x'(t), \ldots, x^{n-1}(t)$ *.

3. МЕТОД ДОБАВОЧНОГО ПОЛУШАГА

Для повышения точности процесса решения можно применять метод добавочного полушага. Этот метод заключается в следующем.

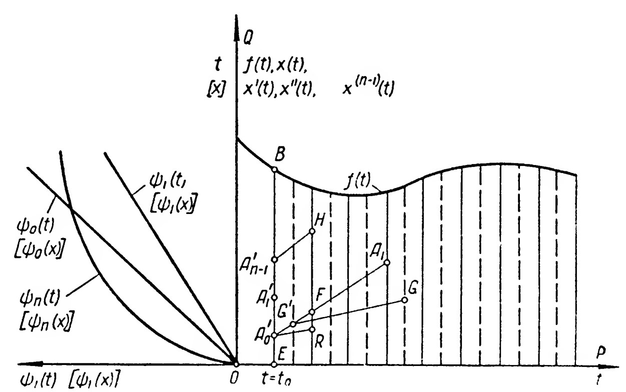
Разделим выбранный шаг интегрирования пополам (фиг. 23).

Далее, исходя из точки $A'_0(t_0, x_0)$, при помощи листа II определяем изложенным выше способом касательную в A'_0 и проводим линию A'_0F с наклоном A'_0A_1.

* Процесс построения $x(t)$ можно вести без вспомогательного листа II.

Точку пересечения прямой $A_0'F$ с прямой $t_0 + \frac{\Delta t}{2}$ обозначим через G' и принимаем ее за исходную. Таким же способом определяем наклон в точке G' (линия $G'G$) и, возвратившись в точку A_0', проведем линию $A_0'R$ с этим вновь найденным наклоном (линия $A_0'R \parallel G'G$). Отрезок $A_0'R$ принимаем за приближенное значение $x(t)$ на интервале $t_0 < t < t_0 + \Delta t$.

Точно так же найдем участок кривой $x(t)$ на интервале $t_0 + \Delta t$, $t_0 + 2\Delta t$ и т. д.



Фиг. 23. Метод добавочного полушага.

Метод добавочного полушага следует начинать с $\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ производной. По производной $\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ корректируем $\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}$, по $\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}$ корректируем $\frac{d^{n-3}x}{dt^{n-3}}$ и т. д. вплоть до $x(t)$.

4. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В СЛУЧАЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ, ОПИСЫВАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Рассмотрим диференциальное уравнение системы автоматического регулирования

$$\psi_n(x)\frac{d^n x}{dt^n} + \psi_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots \psi_1(x)\frac{dx}{dt} + \psi_0(x)\,x = f(t) \qquad (44)$$

и предположим, что начальные условия имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0; \\ \frac{dx}{dt} &= x_1; \\ \frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}} &= x_{n-1}; \end{aligned}\right\} t = t_0. \qquad (45)$$

Для построения переходного процесса нанесем на листе I прямоугольную систему координат POQ. Выберем за положительное направление времени t положительное направление оси OP, а за положительное направление функций $\psi_i(x)$ — отрицательное направление оси OP.

Вдоль оси OQ будем откладывать x и значения функций $f(t)$, $x(t)$, $x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)$.

Построим в координатной системе POQ функции $\psi_i(x)$ и $f(t)$.

Масштабы $\psi_i(x)$ и t должны быть выбраны одинаковыми.

Выберем шаг интегрирования Δt и разграфим первый квадрант прямыми, параллельными оси OQ листа I, проходящими через точки $t_k = K\Delta t$.

Нанесем на листе I на линии $t=t_0$ точки $A'_0, A'_1 \ldots A'_{n-1}$, соответствующие начальным условиям $EA'_0 = x_0$; $EA'_1 = x_1 \ldots EA'_{n-1} = x_{n-1}$ (см. фиг. 16).

Прозрачный лист остается прежним (см. фиг. 17). Очевидно, что построение точек, соседних $A'_0, A'_n, \ldots A'_{n-2}$ (на линии $t = t_0 + \Delta t$), производится тем же способом, что и в линейных системах с постоянными и переменными коэфициентами (см. фиг. 18). Попрежнему

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1C}{A'_0C} = \frac{A_1C}{1} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0}.$$

Точка F, получаемая в результате пересечения прямой $t = t_0 + \Delta t$ с прямой A'_0A_1, будет являться точкой, соседней к A'_0, а отрезок A'_0F — приближенным значением $x(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta t$.

Таким же способом найдем приближенные значения $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt}$, $\ldots$, $\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta t$.

Способ определения $\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ производной точно такой же, как и для линейных диференциальных уравнений. Единственное изменение, которое нужно учесть, состоит в том, что точка T на листе II выбирается в данном случае из условия $XT = x_0$.

На фиг. 19 и 20 мы специально взяли $xT = x_0 = t_0$, чтобы при применении метода касательных к решению нелинейных диференциальных уравнений пользоваться теми же фигурами, какими мы пользовались выше при описании применения метода к уравнениям с переменными коэфициентами.

Находим произведения

$$\psi_0(t)\,x(t) \ldots \psi_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}.$$

Покажем например, каким образом можно найти произведение

$$\psi_0(x)\,x(t).$$

Из треугольника XAN следует (см. фиг. 19)

$$\frac{OK_0}{A_0N}=\frac{OX}{NX},$$

но

$$XO=\psi_0(x)$$

при $t=t_0$, $XN=1$;

$$A_0N=x(t)$$

при $t=t_0$, тогда

$$OK_0=\frac{\psi_0(x)\,x(t)}{1}=\psi_0(x)\,x(t).$$

Таким же способом находим остальные произведения.

На суммирующем устройстве складываем найденные произведения (отрезок a) и вычитаем из $f(t)$. В результате получим отрезок

$$b=EB-a=f(t)-\left[\psi_0(x)\,x(t)+\psi_1(x)\frac{dx}{dt}+\ldots\psi_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right]$$

при $t=t_0$ (см. фиг. 19 и 20), после чего находим приближенное значение $\frac{d^nx}{dt^n}$ (фиг. 21 и 22).

Из треугольника $A'_{n-1}UM$ видно, что

$$\frac{UM}{A'_{n-1}M}=\frac{b}{\psi_n(x)}=\frac{f(t)-\left[\psi_0(x)\,x(t)+\psi_1(x)\frac{dx}{dt}+\ldots\psi_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right]}{\psi_n(x)}=$$

$$=\frac{d^nx}{dt^n}.$$

Отрезок $A'_{n-1}H$ является приближенным значением производной $\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ на интервале $t_0\leqslant t\leqslant t+\Delta t$.

Повторяя весь изложенный процесс, находим $x(t)$, $\frac{dx}{dt}\ldots\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ на интервале $t+\Delta t\leqslant t\leqslant t+\Delta t$ и т. д.

5. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В СЛУЧАЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ, ОПИСЫВАЕМЫХ СИСТЕМАМИ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод касательных позволяет приближенно интегрировать непосредственно систему уравнений, не сводя последнюю к одному уравнению.

Перейдем к интегрированию систем деференциальных уравнений. Для того чтобы не усложнять данного вопроса, рассмотрим систему из двух уравнений.

Пусть поведение системы автоматического регулирования описывается уравнениями

$$\psi_n(t)\frac{d^n x}{dt^n}+\psi_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots\psi_1(t)\frac{dx}{dt}+\psi_0(t)\,x(t)=f(t)+$$

$$+\varphi_{m-1}(t)\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\varphi_{m-2}(t)\frac{d^{m-2}y}{dt^{m-2}}+\ldots\varphi_1(t)\frac{dy}{dt}+\varphi_0(t)\,y(t);\quad (46)$$

$$\eta_m(t)\frac{d^m y}{dt^m}+\eta_{m-1}(t)\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\ldots\eta_1(t)\frac{dy}{dt}+\eta_0(t)\,y(t)=$$

$$=\xi_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\xi_{n-2}(t)\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\ldots\xi_1(t)\frac{dx}{dt}+\xi_0(t)\,x(t)+$$

$$+f_1(t),\quad (47)$$

а начальные условия имеют вид:

для уравнения (48)

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0;\\ \frac{dx}{dt}&=x_1;\\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}&=x_{n-1},\end{aligned}\right\}\ \text{при}\ t=t_0,$$

а для уравнения (49)

$$\left.\begin{aligned} y&=y_0;\\ \frac{dy}{dt}&=y_1\ldots;\\ \frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}&=y_{m-1}\end{aligned}\right\}\ \text{при}\ t=t_0.$$

Метод касательных остается справедливым и при приближенном интегрировании систем диференциальных уравнений, поэтому мы не будем подробно излагать его в этом случае, а изложим лишь порядок операций.

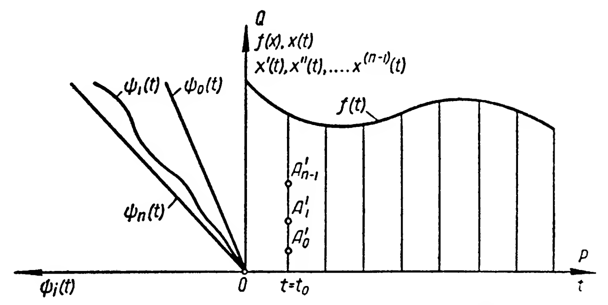
На миллиметровой бумаге нанесем две координатные системы POQ (фиг. 24) и $P_1O_1Q_1$ (фиг. 25).

Выберем за положительное направление времени t положительные направления осей OP и O_1P_1, а за положительные направления функций $\psi_i(t)$ и $\eta_k(t)$ — соответственно отрицательные направления осей OP и O_1P_1. Вдоль осей OQ и O_1Q_1 отложим время t и соответственно значения функций $f(t)$, $x(t)$, $x'(t)$, ..., $x^{n-1}(t)$ и $f_1(t)$, $y(t)$, $y'(t)$, ..., $y^{n-1}(t)$.

Построим в координатной системе POQ функции $\psi_i(t)$ и $f(t)$, а в координатной системе $P_1O_1Q_1$ — функции $\eta_k(t)$ и $f_1(t)$.

Масштабы t, $\psi_i(t)$ и $\eta_k(t)$ должны быть одинаковыми. Выберем шаг интегрирования Δt и разграфим первые квадранты системы POQ и $P_1O_1Q_1$ прямыми, параллельными осям OQ и O_1Q_1, проходящими через точки $t_k=k\Delta t$. Прозрачный лист остается прежним (см. фиг. 17).

В координатной системе POQ на линии $t=t_0$ отметим начальные условия x_0, x_1, $\ldots x_{n-1}$ (соответственно точки A'_0, A'_1, $\ldots$, A'_{n-1}), а в координатной системе $P_1O_1Q_1$ — начальные условия y_0, y, $\ldots$, y_{m-1} (соответственно точки B'_0, B'_1 $\ldots$ B'_{m-1}).



Фиг. 24. Координатная система POQ.

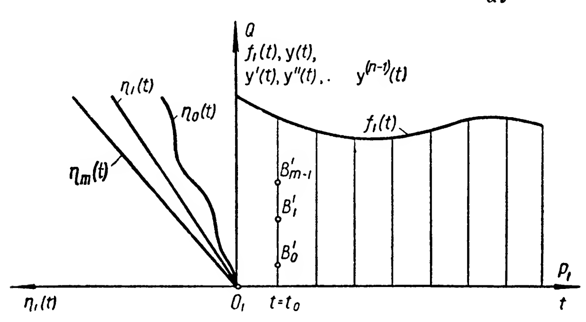
Применяя методы, изложенные выше, определяем:

1) в координатной системе POQ:

а) графически точки, соседние к A'_0, A'_1 $\ldots$ A'_{n-2};

б) графически произведения

$$\psi_0(t)\,x(t),\ \psi_1(t)\frac{dx}{dt},\ \ldots,\quad \psi_{n-1}(t)\,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}};$$



Фиг. 25. Координатная система $P_1O_1Q_1$.

в) аналитически или графически произведения

$$\varphi_0(t)\,y(t),\ \varphi_1(t)\frac{dy}{dt},\ \ldots,\quad \varphi_{n-1}(t)\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}};$$

г) на суммирующем устройстве складываем произведения пп. „б" и „в" с функцией $f(t)$;

д) графически точку, соседнюю к A'_{n-1};

2) в координатной системе $P_1O_1Q_1$:

а) графически точки, соседние к B'_0, B'_1, $\ldots$, B'_{m-2};

б) графически произведения

$$\eta_0(t)\,y(t),\ \eta_1(t)\frac{dy}{dt},\ \ldots,\quad \eta_{m-1}(t)\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}};$$

в) аналитически или графически произведения

$$\xi_0(t)\,x(t),\ \ \xi(t)\frac{dx}{dt},\ \dots,\ \ \xi_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}};$$

г) на суммирующем устройстве складываем произведения пп. „б“ и „в“ с функцией $f_1(t)$;

д) графически точку, соседнюю к B'_{m-1} и т. д.

В результате получим в координатной системе POQ приближенные кривые $x(t)$, $\frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$, а в координатной системе $P_1O_1Q_1$ — приближенные кривые $y(t)$, $\frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}$.

При решении систем диференциальных уравнений, так же как и при решении одного диференциального уравнения, справедлив метод добавочного полушага.

Порядок решения систем из S диференциальных уравнений такой же, как и для системы из двух диференциальных уравнений.

В случае решения нелинейных систем метод остается справедливым, если учесть, что XT на линии $y = 1$ берется равным x при соответствующем времени t.

6. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КАСАТЕЛЬНЫХ

Рассмотрим примеры применения метода касательных, которые позволят нам составить представление о точности метода.

Пример 1. Найти решение диференциального уравнения четвертого порядка с постоянными коэфициентами $x^{(IV)} - x = 0$ при следующих начальных условиях:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1; \\ \frac{dx}{dt} &= 0; \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -1; \\ \frac{d^3x}{dt^3} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } t = 0.$$

Решение уравнения приведено на фиг. 26. Ошибка, отнесенная к максимальному значению x, равна 1,1%.

Пример 2. Рассмотрим уравнение Лежандра:

$$(1 - t^2)\frac{d^2x}{dt^2} - 2t\frac{dx}{dt} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right\}x = 0$$

при $n = 7$ и $m = 2$.

Выберем начальные условия так, чтобы решение представляло собой нормированную присоединенную функцию Лежандра.

Задача состоит в том, чтобы найти в интервале $0 \leqslant t \leqslant 0{,}8$ решение уравнения

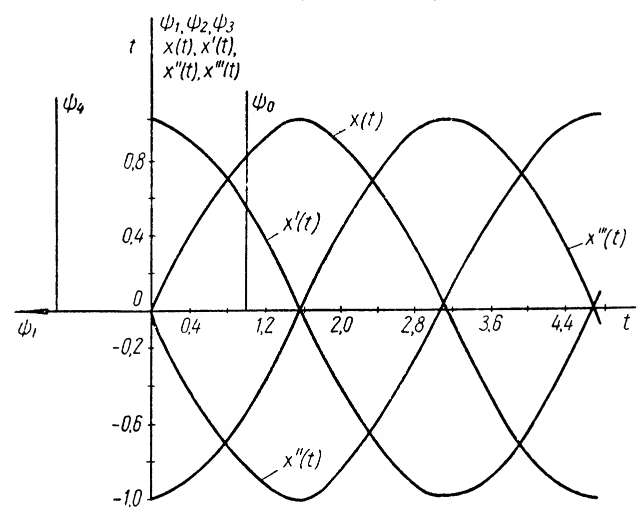
$$(1 - t^2)\frac{d^2x}{dt^2} - 2t\frac{dx}{dt} + \left(56 - \frac{4}{1-t^2}\right)x = 0.$$

При начальных условиях $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 5{,}85$ при $t = 0$.

Для того чтобы уравнение Лежандра было удобнее интегрировать, заменим $\frac{dx}{dt}$ через $\frac{1}{10}\,\frac{dx}{dt}$, тогда уравнение перепишется в виде

$$10\,(1 - t^2)\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{10}\,\frac{dx}{dt}\right) - 20t\left(\frac{1}{10}\,\frac{dx}{dt}\right) + \left(56 - \frac{4}{1 - t^2}\right)x = 0\,.$$

Кроме того, возьмем линию $Y = 30$ на листе II вместо $Y = 1$, последнее обстоятельство уменьшит множители $\left(56 - \frac{4}{1 - t^2}\right)$ и $-20t$ в 30 раз. Длина



Фиг. 26. Решение уравнения $x^{(IV)} - x = 0$.

$10\,(1 - t^2)$ также должна быть уменьшена в 30 раз, поэтому необходимо нанести кривую $\frac{1}{3}\,(1 - t^2)$ вместо $10\,(1 - t^2)$ в том же масштабе, что и t.

Итак, для удобства принимаем следующие масштабы для переменных:

1 единица для $x\,(t)$ и $x'\,(t)$ равна $\frac{1}{2}$ единицы t;

1 единица для t (вдоль оси Q) равна $\frac{1}{2}$ единицы t;

1 единица для $\psi_i\,(t)$ равна $\frac{1}{100}$ единицы t;

1 единица вдоль Y равна $\frac{1}{100}$ единицы t.

Построим на листе I кривые

$$\psi_0\,(t) = \left(56 - \frac{4}{1 - t^2}\right);$$

$$\psi_1\,(t) = -20t;$$

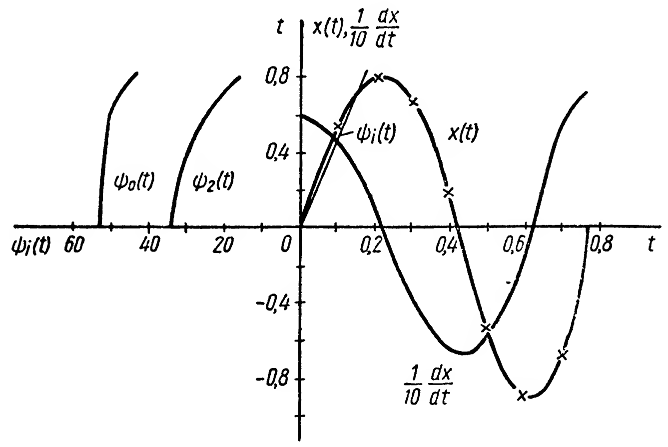
$$\psi_2\,(t) = \frac{100}{3}\,(1 - t^2)$$

и на листе II проведем линию $Y = 30$.

В результате получим кривые $x(t)$ и $\frac{1}{10}\frac{dx}{dt}$.

На фиг. 27 приведено точное решение уравнения Лежандра (отмечено крестиками), построенное графически.

Из фигуры видно, что графически построенное решение практически совпадает с точным решением.



Фиг. 27. Решение уравнения Лежандра.

Пример 3. Решить диференциальное уравнение

$$(t^2+2)\,x'''-2tx''+(t^2+2)\,x'-2tx=0$$

при следующих начальных условиях:

$$\left.\begin{aligned} x&=1;\\ \frac{dx}{dt}&=1;\\ \frac{d^2x}{dt^2}&=1 \end{aligned}\right\}\quad \text{при } t=0.$$

Для удобства построения принимаем следующие масштабы для переменных:

1 единица для $x(t)$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ равна 1 единице t;

1 единица для t вдоль оси OQ равна $\frac{1}{2}$ единицы t;

1 единица для $\psi_i(t)$ равна $\frac{1}{10}$ единицы t.

Построим на листе I кривые

$$\psi_0(t)=-2t;\quad \psi_1(t)=t^2+2;\quad \psi_2(t)=-2t;\quad \psi_3(t)=t^2+2.$$

На листе II проведем линию $Y=10$.

В результате построения получим кривые, приведенные на фиг. 28,

$$x(t);\ \frac{dx}{dt}\ \text{и}\ \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Максимальная ошибка при $t=0,5$ сек. не превышает $2,0\%$.

Пример 4. Решить нелинейное диференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3x\frac{dx}{dt} + x^3 = 0$$

при начальных условиях $x = 1$, $\frac{dx}{dt} = 0$ при $t = 0$.

Принимаем следующие масштабы для переменных:

1 единица для $x(t)$ и $\frac{dx}{dt}$ равна 1 единице для t;

1 единица для x вдоль оси OQ равна 1 единице для t;

1 единица для $\psi_i(t)$ равна 1 единице для t.

На листе I строим кривые $\psi_0(x) = x^2$, $\psi_1(x) = 3x$, $\psi_2(x) = 1$, на листе II проводим линию $Y = 1$.

В результате построения получим $x(t)$ и $x'(t)$.

На фиг. 29 приведено решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3x\frac{dx}{dt} + x^3 = 0.$$

Максимальная ошибка при $t = 1{,}5$ сек. не превышает $0{,}72\%$, а ошибка, отнесенная к максимальному значению $x(t)$, не превышает $0{,}5\%$.

Пример 5. Решить систему уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2t\frac{dx}{dt} + 2x = \sin t - y;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 2e^{-t^2} - 2x$$

при следующих начальных условиях:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1; \\ \frac{dx}{dt} &= 0; \\ y &= 0; \\ \frac{dy}{dt} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ при } t = 0.$$

Примечание. Произведение $2x$ определялось аналитически.

Максимальная ошибка при $t = 1$ сек. не превышает 3%, а ошибка, отнесенная к максимальному значению $x(t)$, равна 1%.

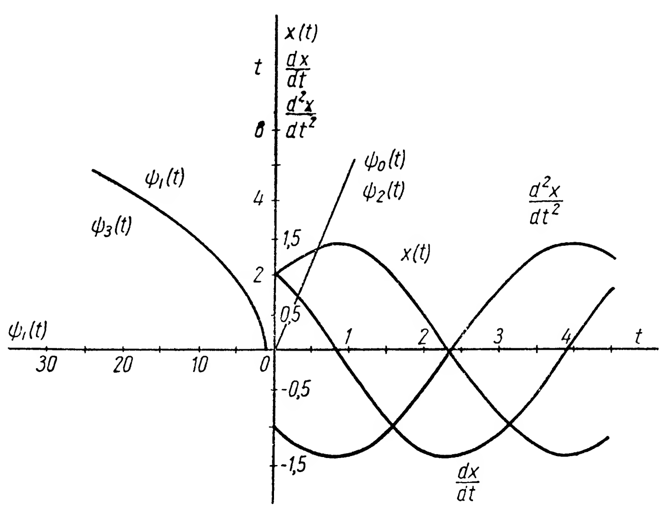
Решение системы и некоторые вспомогательные построения приведены на фиг. 30а и 30б.

Пример 6. Рассмотрим систему автоматического регулирования, изображенную на фиг. 31.

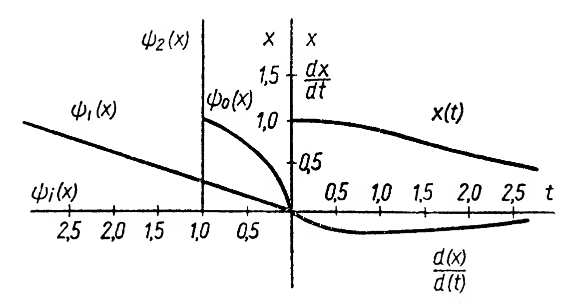
Уравнение движения объекта регулирования берем в виде

$$\psi_2(t)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \psi_1(t)\frac{d\varphi}{dt} + \psi_0(t)\varphi = -N\eta,$$

где φ — отклонение от состояния, предписанного системе в качестве нормального, $\psi_2(t)\frac{d^2\varphi}{dt^2}$; $\psi_1(t)\frac{d\varphi}{dt}$; $\psi_0(t)\varphi$; $N\eta$ — соответственно инерция, демпфирование, восстанавливающая сила объекта регулирования и воздействие регулирующего органа.



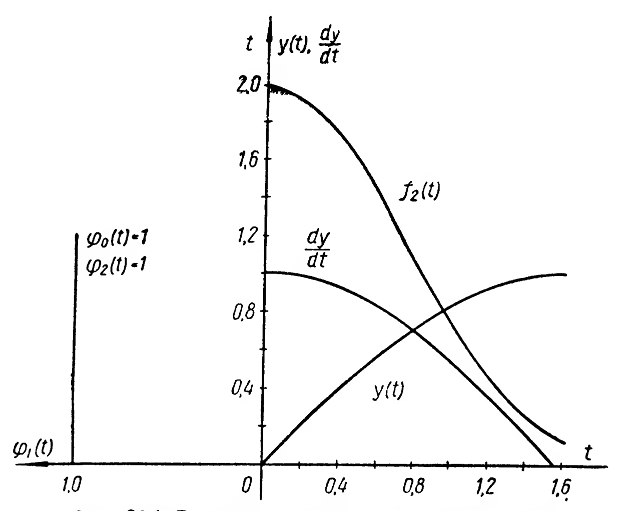
Фиг. 28. Решение уравнения $(t^2+2)\,x''' - 2tx''' + (t^2+2)\,x' - 2tx = 0$.



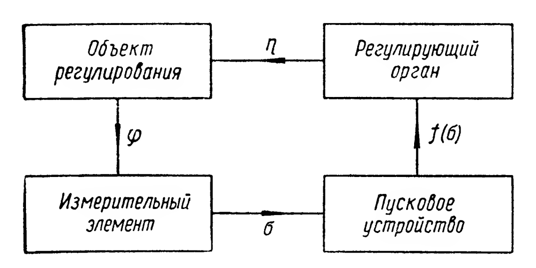
Фиг. 29. Решение уравнения $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3x\,\dfrac{dx}{dt} + x^3 = 0$.



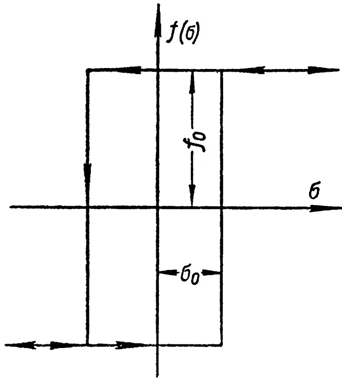
Фиг. 30а. Решение системы двух уравнений.



Фиг. 30б. Решение системы двух уравнений.



Фиг. 31. Структурная схема системы автоматического регулирования.



Фиг. 32. Характеристика пускового устройства.

Уравнение регулирующего органа имеет вид

$$\xi_2(t)\,\ddot{\eta} + \xi_1(t)\,\dot{\eta} + \xi_0(t)\,\eta = f(\sigma).$$

Здесь $f(\sigma)$ — нелинейная функция от 0, имеющая вид по фиг. 32.

Уравнение чувствительного элемента

$$\sigma = j_0\varphi + j_1\dot{\varphi}.$$

Данная система уравнений характерна для многих систем автоматического регулирования, в которых нелинейность вносит золотник сервомотора.

Решение проводилось при следующих параметрах: $\psi_2(t) = 1$; $\psi_1(t) = 2{,}9$; $\psi_0(t) = 9$; $\xi_2(t) = 1$; $\xi_1(t) = 9{,}72$; $\xi_0(t) = 2{,}6$; $f_0 = 3{,}4$; $\sigma = 0{,}003$; $N = 7{,}2$; $j_0 = 0{,}125$; $j_1 = 0{,}25$.

Начальные условия были выбраны

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = 0{,}4; \quad \eta = 0{,}3; \\ &\dot{\varphi} = 0; \quad \dot{\eta} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } t = 0.$$

Для удобства проведения графического решения проведем линию $Y = 5$ вместо $Y = 1$ на листе II, это уменьшит множители $\psi_1(t) = 2{,}9$; $\psi_0(t) = 9$; $\xi_1(t) = 9\,72$; $\xi_0(t) = 2{,}6$ в 5 раз.

Длина $\psi_2(t) = \xi_2(t) = 1$ должна быть уменьшена в то же число раз. Поэтому лучше нанести кривые $\frac{1}{5}\psi_2(t)$; $\frac{1}{5}\xi_2(t)$ вместо $\psi_2(t) = 1$ и $\xi_2(t) = 1$ в том же масштабе, что и t.

Принимаем следующие масштабы для переменных:

1 единица для φ, $\dot{\varphi}$, η, $\dot{\eta}$ равна 1 единице для t;

1 единица для ψ_i и ξ_i равна $\frac{1}{5}$ единице для t.

На листе I построим две прямоугольные системы координат POQ и $P'O'Q'$.

На координатной системе POQ построим кривые $\psi_0(t) = 9$; $\psi_1(t) = 2{,}9$; $\psi_2(t) = 1$.

На координатной системе $P'O'Q'$ построим кривые $\xi_0(t) = 2{,}6$; $\xi_1(t) = 9{,}72$; $\xi_2(t) = 1$ и на листе II проведем линию $Y = 5$ в масштабе $\psi_i(t)$ или, что то же, $\xi_i(t)$.

Для того чтобы приступить к графическому интегрированию системы, необходимо величины $N\eta$ и $j_0\varphi + j_1\dot{\varphi}$ разделить на 5, т. е. взять равными $1{,}45\eta$ и $0{,}025\varphi + 0{,}05\dot{\varphi}$.

Приведем последовательность решения данной системы уравнений:

1) φ и η находим изложенным выше способом;

2) для построения $\dot{\varphi}$:

а) графически находим произведения $\psi_0(t)\,\varphi$ и $\psi_1(t)\,\dot{\varphi}$;

б) аналитически находим $N\eta$;

в) сложим величины $\psi_0(t)\,\varphi$; $\psi_1(t)\,\dot{\varphi}$ и $N\eta$;

г) найдем описанным выше способом $\dot{\varphi}$ и т. д.;

3) для построения $\dot{\eta}$:

а) графически находим произведения $\xi_0(t)\,\eta$ и $\xi(t)\,\dot{\eta}$;

б) аналитически находим σ, а по σ находим $f(\sigma)$;

в) сложим величины $\xi_0(t)\,\eta$; $\xi_1(t)\,\dot{\eta}$ и $f(\sigma)$;

г) находим $\dot{\eta}$ и т. д.

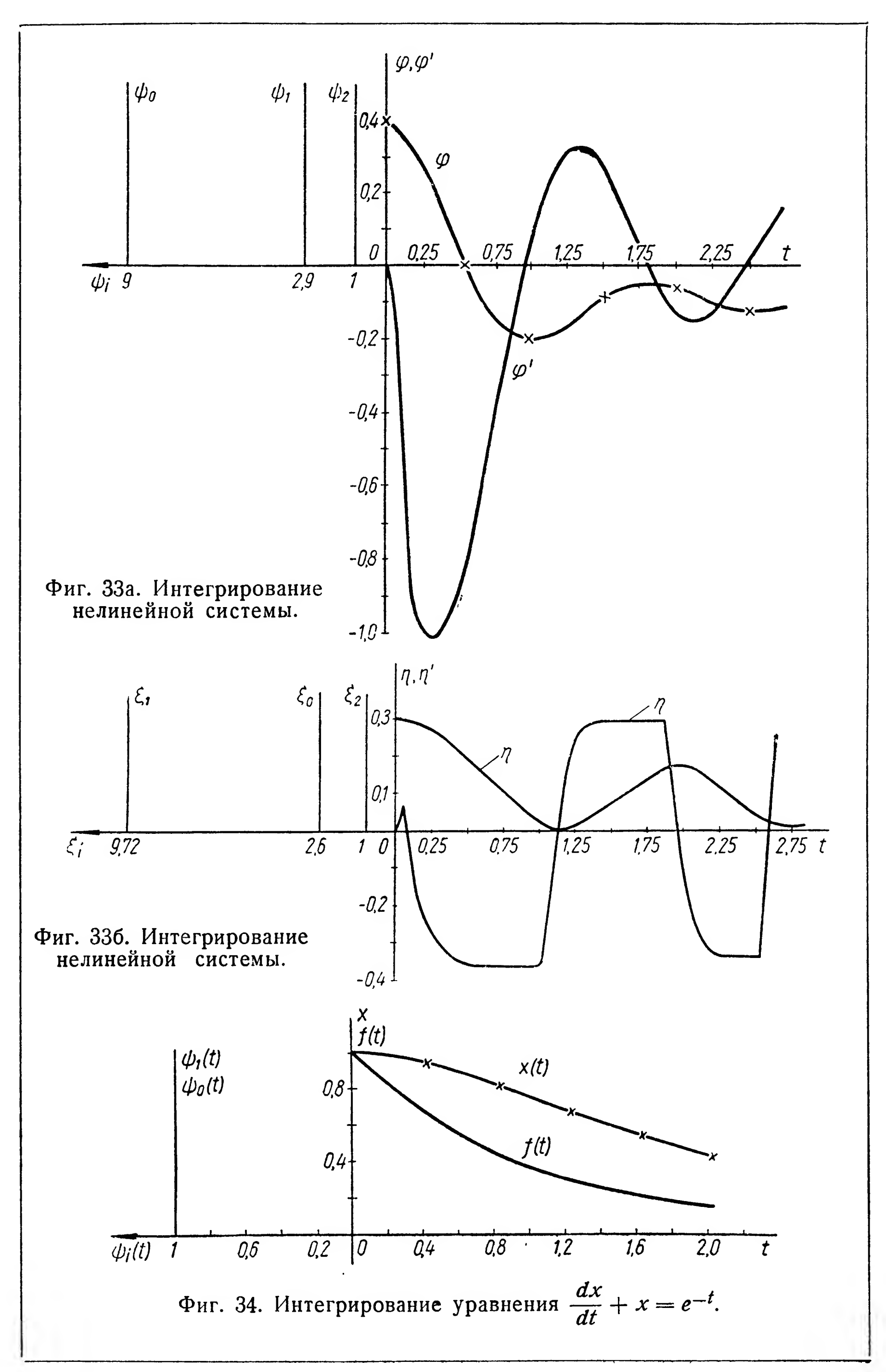
На фиг. 33а и 33б построены кривые переходных процессов по координатам φ и η (крестиками отмечены экспериментальные данные).

Пример 7. Решить уравнение

$$\frac{dx}{dt} + x = e^{-t}$$

при начальных условиях $x = 1$ при $t = 0$.

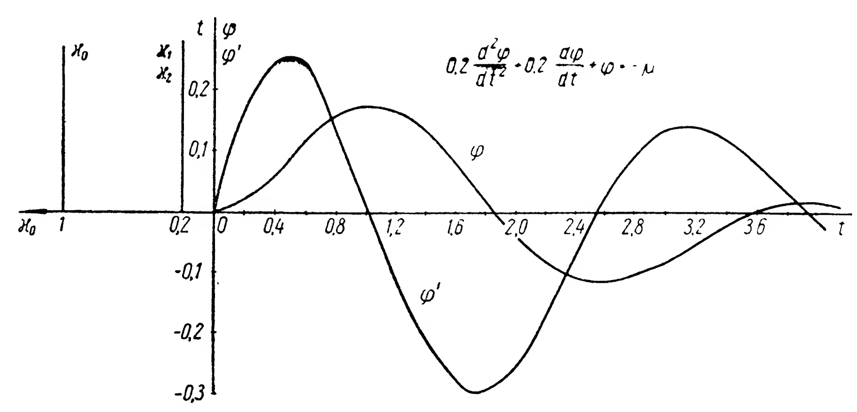
На фиг. 34 приведено графическое решение уравнения.



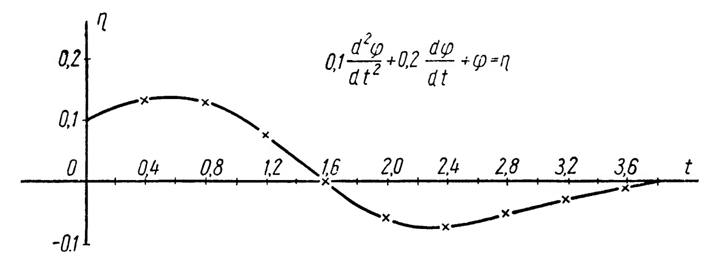
Фиг. 33а. Интегрирование нелинейной системы.

Фиг. 33б. Интегрирование нелинейной системы.

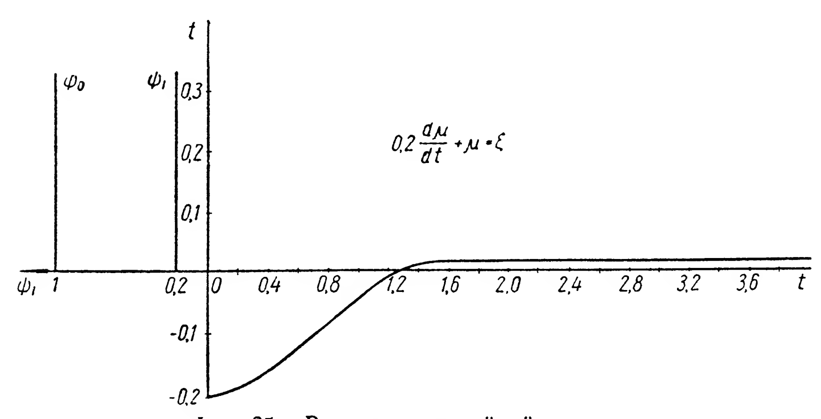
Фиг. 34. Интегрирование уравнения $\frac{dx}{dt} + x = e^{-t}$.



Фиг. 35а. Решение нелинейной системы.



Фиг. 35б. Решение нелинейной системы.



Фиг. 35в. Решение нелинейной системы.

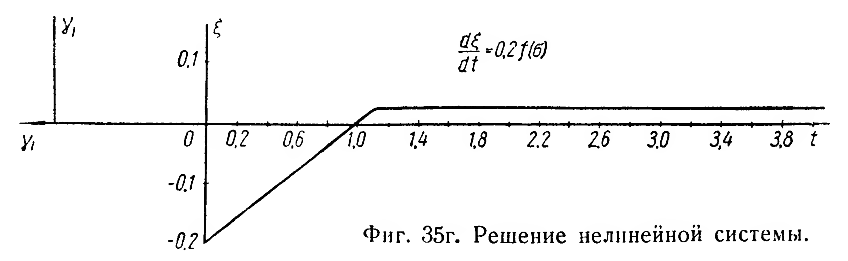
Пример 8. Рассмотрим нелинейную систему, изображенную на фиг. 11 (пример взят из книги Д. А. Башкирова „Графоаналитический метод анализа переходных процессов в системах автоматического регулирования").

Эта система описывается следующими уравнениями:

$$(T_{11}T_{12}p^2 + T_{12}p + 1)\varphi = -\mu; \qquad (\theta_1\theta_2 p^2 + \theta_2 p + 1)\varphi = \eta;$$

$$\sigma = \eta - \frac{1}{m}\mu; \qquad T_{22}p\xi = f(\sigma); \qquad (T_{12}p + 1)\mu = \xi.$$

Решение данной системы было проведено при следующих данных: $T_{11} = 1$, $T_{12} = 0{,}2$; $\theta_1 = 0{,}5$; $\theta_2 = 0{,}2$; $T_{21} = 0{,}2$; $T_{22} = 5$; $m = 10$, исходя из начальных условий $\varphi(0) = p\varphi(0) = 0$; $\mu(0) = \xi(0) = -0{,}2$; $\eta_t < 0 + p\eta_{t<0} = 0$.



Фиг. 35г. Решение нелинейной системы.

Нелинейная функция $f(\sigma)$ бралась

$$f(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma > 0{,}08; \\ 0 & |\sigma| < 0{,}08; \\ -1 & \sigma < 0{,}08. \end{cases}$$

Если в исходную систему подставить численные значения параметров, получим систему уравнений, удобную для решения методом касательных:

$$0{,}2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 0{,}2\frac{d\varphi}{dt} + \varphi = -\mu; \qquad 0{,}1\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 0{,}2\frac{d\varphi}{dt} + \varphi = \eta;$$

$$0{,}2\frac{d\mu}{dt} + \mu = \xi; \qquad \frac{d\xi}{dt} = 0{,}2f(\sigma);$$

$$f(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma > 0{,}08; \\ 0 & |\sigma| < 0{,}08; \\ -1 & \sigma < 0{,}08. \end{cases}$$

Графическое решение с указанием некоторых вспомогательных построений дано на фиг. 35а — 35г.

ЛИТЕРАТУРА

U. A. Bailey, The graphical solution of ordinary differential equations, Philosophical Magazine, S. 7, vol. 26, № 173, July, 1938, c. 1—31.

ТАБЛИЦА *h*-ФУНКЦИЙ

$\varkappa = 0{,}00$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	0,9386	20,0	0,9668	30,0	0,9795	40,0	0,9837
0,4	0,1269	10,4	0,9428	20,4	0,9673	30,4	0,9796	40,4	0,9840
0,8	0,2502	10,8	0,9459	20,8	0,9680	30,8	0,9797	40,8	0,9843
1,2	0,3671	11,2	0,9480	21,2	0,9689	31,2	0,9797	41,2	0,9846
1,6	0,4748	11,6	0,9493	21,6	0,9699	31,6	0,9797	41,6	0,9849
2,0	0,5712	12,0	0,9498	22,0	0,9710	32,0	0,9797	42,0	0,9851
2,4	0,6548	12,4	0,9499	22,4	0,9720	32,4	0,9799	42,4	0,9853
2,8	0,7250	12,8	0,9499	22,8	0,9729	32,8	0,9800	42,8	0,9854
3,2	0,7810	13,2	0,9501	23,2	0,9736	33,2	0,9802	43,2	0,9855
3,6	0,8244	13,6	0,9505	23,6	0,9741	33,6	0,9806	43,6	0,9855
4,0	0,8561	14,0	0,9514	24,0	0,9745	34,0	0,9809	44,0	0,9855
4,4	0,8777	14,4	0,9527	24,4	0,9747	34,4	0,9813	44,4	0,9855
4,8	0,8912	14,8	0,9545	24,8	0,9747	34,8	0,9817	44,8	0,9855
5,2	0,8986	15,2	0,9564	25,2	0,9747	35,2	0,9821	45,2	0,9856
5,6	0,9019	15,6	0,9586	25,6	0,9747	35,6	0,9825	45,6	0,9857
6,0	0,9028	16,0	0,9606	26,0	0 9748	36,0	0,9828	46,0	0,9859
6,4	0,9028	16,4	0,9624	26,4	0,9750	36,4	0,9830	46,4	0,9860
6,8	0,9031	16,8	0,9639	26,8	0,9753	36,8	0,9831	46,8	0,9863
7,2	0,9044	17,2	0,9650	27,2	0,9757	37,2	0,9831	47,2	0,9865
7,6	0,9070	17,6	0,9658	27,6	0,9763	37,6	0,9831	47,6	0,9867
8,0	0,9110	18,0	0,9662	28,0	0,9769	38,0	0,9831	48,0	0,9869
8,4	0,9160	18,4	0,9664	28,4	0,9776	38,4	0,9832	48,4	0,9870
8,8	0,9218	18,8	0,9664	28,8	0,9782	38,8	0,9832	48,8	0,9872
9,2	0,9277	19,2	0 9664	29,2	0,9788	39,2	0,9833	49,2	0,9872
9,6	0,9336	19,6	0,9665	29,6	0,9792	39,6	0,9835	49,6	0,9873
10,0	0,9386	20,0	0,9668	30,0	0,9795	40,0	0,9837	50,0	0,9873

$\varkappa = 0,05$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	0,9800	20,0	1,0013	30,0	1,0074	40,0	1,0054
0,4	0,1332	10,4	0,9837	20,4	1,0015	30,4	1 0073	40,4	1,0055
0,8	0,2627	10,8	0,9867	20,8	1,0020	30,8	1,0071	40,8	1,0056
1,2	0,3857	11,2	0,9887	21,2	1,0026	31,2	1,0069	41,2	1,0058
1,6	0,4985	11,6	0,9896	21,6	1,0034	31,6	1,0066	41,6	1,0058
2,0	0,5997	12,0	0,9898	22,0	1,0042	32,0	1,0064	42,0	1,0058
2,4	0,6872	12,4	0,9896	22,4	1,0050	32,4	1,0061	42,4	1,0057
2,8	0.7605	12,8	0,9892	22,8	1,0056	32,8	1,0060	42,8	1,0056
3,2	0,8194	13,2	0,9891	23,2	1,0060	33,2	1,0060	43,2	1,0055
3,6	0,8647	13,6	0,9892	23,6	1,0064	33,6	1,0061	43,6	1,0052
4,0	0,8978	14,0	0,9899	24,0	1,0064	34,0	1,0062	44,0	1,0051
4,4	0,9204	14,4	0,9911	24,4	1,0063	34,4	1,0064	44,4	1,0048
4,8	0,9341	14,8	0,9925	24,8	1,0061	34,8	1,0066	44,8	1,0046
5,2	0,9414	15,2	0,9942	25,2	1,0058	35,2	1,0068	45,2	1,0044
5,6	0,9447	15,6	0,9961	25,6	1,0054	35,6	1,0069	45,6	1,0043
6,0	0,9452	16,0	0,9979	26,0	1,0053	36,0	1,0069	46,0	1,0043
6,4	0,9449	16,4	0,9996	26,4	1,0052	36,4	1,0069	46,4	1,0043
6,8	0,9449	16,8	1,0009	26,8	1,0052	36,8	1,0067	46,8	1,0043
7,2	0,9460	17,2	1,0017	27,2	1,0055	37,2	1,0065	47,2	1,0043
7,6	0,9485	17,6	1,0022	27,6	1,0058	37,6	1,0063	47,6	1,0043
8,0	0,9513	18,0	1,0023	28,0	1,0062	38,0	1,0060	48,0	1,0043
8,4	0,9573	18,4	1,0022	28,4	1,0065	38,4	1,0057	48,4	1,0042
8,8	0,9629	18,8	1,0019	28,8	1,0069	38,8	1.0056	48,8	1,0042
9,2	0,9689	19,2	1,0015	29,2	1,0071	39,2	1,0055	49,2	1,0041
9,6	0,9746	19,6	1,0013	29,6	1,0073	39,6	1,0054	49,6	1,0040
10,0	0,9800	20,0	1,0013	30,0	1,0074	40,0	1,0054	50,0	1,0038

$\varkappa = 0,10$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	1,0085	20,0	1,0107	30,0	1,0044	40,0	0,9979
0,4	0,1411	10,4	1,0119	20,4	1,0102	30,4	1,0041	40,4	0,9979
0,8	0,2745	10,8	1,0141	20,8	1,0100	30,8	1,0035	40,8	0,9980
1,2	0,4030	11,2	1,0152	21,2	1,0100	31,2	1,0030	41,2	0,9981
1,6	0,5220	11,6	1,0153	21,6	1,0103	31,6	1,0024	41,6	0,9981
2,0	0,6276	12,0	1,0145	22,0	1,0105	32,0	1,0018	42,0	0,9982
2,4	0,7190	12,4	1,0134	22,4	1,0107	32,4	1,0014	42,4	0,9981
2,8	0,7953	12,8	1,0122	22,8	1,0108	32,8	1,0011	42,8	0,9981
3,2	0,8572	13,2	1,0111	23,2	1,0108	33,2	1,0008	43,2	0,9979
3,6	0,9032	13,6	1,0104	23,6	1,0105	33,6	1,0006	43,6	0,9977
4,0	0,9371	14,0	1,0102	24,0	1,0100	34,0	1,0006	44,0	0,9975
4,4	0,9596	14,4	1,0105	24,4	1,0093	34,4	1,0005	44,4	0,9973
4,8	0,9733	14,8	1,0113	24,8	1,0085	34,8	1,0006	44,8	0,9971
5,2	0,9798	15,2	1,0123	25,2	1,0078	35,2	1,0006	45,2	0,9970
5,6	0,9824	15,6	1,0136	25,6	1,0070	35,6	1,0005	45,6	0,9970
6,0	0,9814	16,0	1,0146	26,0	1,0063	36,0	1,0004	46,0	0,9970
6,4	0,9794	16,4	1,0154	26,4	1,0057	36,4	1,0001	46,4	0,9971
6,8	0,9784	16,8	1,0160	26,8	1,0054	36,8	0,9998	46,8	0,9972
7,2	0,9785	17,2	1,0161	27,2	1,0051	37,2	0,9995	47,2	0,9974
7,6	0,9799	17,6	1,0159	27,6	1,0050	37,6	0,9992	47,6	0,9974
8,0	0,9831	18,0	1,0152	28,0	1,0049	38,0	0,9989	48,0	0,9975
8,4	0,9878	18,4	1,0143	28,4	1,0050	38,4	0,9985	48,4	0,9977
8,8	0,9941	18,8	1,0134	28,8	1,0050	38,8	0,9983	48,8	0,9976
9,2	0,9990	19,2	1,0123	29,2	1,0050	39,2	0,9981	49,2	0,9976
9,6	1,0042	19,6	1,0115	29,6	1,0048	39,6	0,9980	49,6	0,9976
10,0	1,0085	20,0	1,0107	30,0	1,0044	40,0	0,9979	50,0	0,9975

$\varkappa = 0{,}15$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	1,0251	20,0	1,0042	30,0	0,9967	40,0	0,9980
0,4	0,1459	10,4	1,0272	20,4	1,0034	30,4	0,9965	40,4	0,9984
0,8	0,2876	10,8	1,0282	20,8	1,0027	30,8	0,9963	40,8	0,9987
1,2	0,4218	11,2	1,0280	21,2	1,0024	31,2	0,9959	41,2	0,9991
1,6	0,5452	11,6	1,0268	21,6	1,0023	31,6	0,9956	41,6	0,9993
2,0	0,6553	12,0	1,0249	22,0	1,0023	32,0	0,9953	42,0	0,9996
2,4	0,7502	12,4	1,0224	22,4	1,0023	32,4	0,9952	42,4	0,9999
2,8	0,8291	12,8	1,0200	22,8	1,0022	32,8	0,9952	42,8	1,0000
3,2	0,8921	13,2	1,0175	23,2	1,0020	33,2	0,9953	43,2	1,0001
3,6	0,9399	13,6	1,0159	23,6	1,0016	33,6	0,9955	43,6	1,0001
4,0	0,9738	14,0	1,0146	24,0	1,0009	34,0	0,9957	44,0	1,0001
4,4	0,9959	14,4	1,0139	24,4	1,0002	34,4	0,9960	44,4	1,0001
4,8	1,0085	14,8	1,0138	24,8	0,9993	34,8	0,9964	44,8	1,0000
5,2	1,0141	15,2	1,0140	25,2	0,9984	35,2	0,9968	45,2	1,0002
5,6	1,0147	15,6	1,0143	25,6	0,9976	35,6	0,9970	45,6	1,0003
6,0	1,0126	16,0	1,0143	26,0	0,9970	36,0	0,9972	46,0	1,0004
6,4	1,0096	16,4	1,0147	26,4	0,9964	36,4	0,9975	46,4	1,0006
6,8	1,0069	16,8	1,0145	26,8	0,9961	36,8	0,9974	46,8	1,0008
7,2	1,0052	17,2	1,0139	27,2	0,9960	37,2	0,9975	47,2	1,0011
7,6	1,0053	17,6	1,0130	27,6	0,9959	37,6	0,9974	47,6	1,0013
8,0	1,0069	18,0	1,0116	28,0	0,9961	38,0	0,9974	48,0	1,0016
8,4	1,0100	18,4	1,0101	28,4	0,9964	38,4	0,9973	48,4	1,0016
8,8	1,0138	18,8	1,0085	28,8	0,9967	38,8	0,9974	48,8	1,0017
9,2	1,0179	19,2	1,0068	29,2	0,9967	39,2	0,9976	49,2	1,0017
9,6	1,0219	19,6	1,0054	29,6	0,9968	39,6	0,9978	49,6	1,0017
10,0	1,0251	20,0	1,0042	30,0	0,9967	40,0	0,9980	50,0	1,0016

$\varkappa = 0,20$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	1,0304	20,0	0,9945	30,0	0,9987	40,0	1,0020
0,4	0,1523	10,4	1,0312	20,4	0,9938	30,4	0,9989	40,4	1,0021
0,8	0,3001	10,8	1,0309	20,8	0,9935	30,8	0,9990	40,8	1,0022
1,2	0,4399	11,2	1,0293	21,2	0,9935	31,2	0,9990	41,2	1,0023
1,6	0,5682	11,6	1,0269	21,6	0,9938	31,6	0,9990	41,6	1,0024
2,0	0,6824	12,0	1,0235	22,0	0,9942	32,0	0,9990	42,0	1,0023
2,4	0,7806	12,4	1,0199	22,4	0,9946	32,4	0,9990	42,4	1,0023
2,8	0,8618	12,8	1,0163	22,8	0,9950	32,8	0,9992	42,8	1,0022
3,2	0,9260	13,2	1,0130	23,2	0,9954	33,2	0,9996	43,2	1,0020
3,6	0,9741	13,6	1,0101	23,6	0,9954	33,6	1,0000	43,6	1,0017
4,0	1,0076	14,0	1,0081	24,0	0,9953	34,0	1,0003	44,0	1,0014
4,4	1,0285	14,4	1,0066	24,4	0,9950	34,4	1,0008	44,4	1,0011
4,8	1,0395	14,8	1,0059	24,8	0,9946	34,8	1,0013	44,8	1,0009
5,2	1,0430	15,2	1,0055	25,2	0,9943	35,2	1,0018	45,2	1,0006
5,6	1,0412	15,6	1,0055	25,6	0,9940	35,6	1,0021	45,6	1,0005
6,0	1,0366	16,0	1,0055	26,0	0,9939	36,0	1,0024	46,0	1,0004
6,4	1,0312	16,4	1,0053	26,4	0,9939	36,4	1,0025	46,4	1,0003
6,8	1,0261	16,8	1,0049	26,8	0,9941	36,8	1,0025	46,8	1,0003
7,2	1,0221	17,2	1,0041	27,2	0,9945	37,2	1,0025	47,2	1,0003
7,6	1,0203	17,6	1,0030	27,6	0,9951	37,6	1,0023	47,6	1,0003
8,0	1,0200	18,0	1,0017	28,0	0,9957	38,0	1,0021	48,0	1,0002
8,4	1,0213	18,4	1,0000	28,4	0,9964	38,4	1,0020	48,4	1,0002
8,8	1,0236	18,8	0,9984	28,8	0,9972	38,8	1,0019	48,8	1,0001
9,2	1,0262	19,2	0,9968	29,2	0,9979	39,2	1,0018	49,2	0,9999
9,6	1,0287	19,6	0,9955	29,6	0,9983	39,6	1,0018	49,6	0,9997
10,0	1,0304	20,0	0,9945	30,0	0,9987	40,0	1,0020	50,0	0,9995

$\varkappa = 0,25$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	1,0270	20,0	0,9906	30,0	1,0039	40,0	0,9987
0,4	0,1585	10,4	1,0266	20,4	0,9907	30,4	1,0039	40,4	0,9987
0,8	0,3123	10,8	1,0252	20,8	0,9911	30,8	1,0036	40,8	0,9988
1,2	0,4578	11,2	1,0224	21,2	0,9919	31,2	1,0034	41,2	0,9989
1,6	0,5909	11,6	1,0190	21,6	0,9928	31,6	1,0031	41,6	0,9990
2,0	0,7090	12,0	1,0148	22,0	0,9941	32,0	1,0027	42,0	0,9989
2,4	0,8099	12,4	1,0105	22,4	0,9953	32,4	1,0025	42,4	0,9988
2,8	0,8931	12,8	1,0062	22,8	0,9964	32,8	1,0022	42,8	0,9987
3,2	0,9580	13,2	1,0023	23,2	0,9973	33,2	1,0021	43,2	0,9986
3,6	1,0058	13,6	0 9992	23,6	0,9980	33,6	1,0021	43,6	0,9984
4,0	1,0382	14,0	0,9969	24,0	0,9984	34,0	1,0021	44,0	0,9983
4,4	1,0573	14,4	0,9955	24,4	0,9986	34,4	1,0021	44,4	0,9981
4,8	1,0659	14,8	0,9949	24,8	0,9987	34,8	1,0022	44,8	0,9980
5,2	1,0664	15,2	0,9947	25,2	0,9987	35,2	1,0023	45,2	0,9979
5,6	1,0616	15,6	0,9950	25,6	0,9986	35,6	1,0022	45,6	0,9980
6,0	1,0540	16,0	0,9954	26,0	0,9988	36,0	1,0021	46,0	0,9981
6,4	1,0457	16,4	0,9958	26,4	0,9990	36,4	1,0018	46,4	0,9983
6,8	1,0375	16,8	0,9959	26,8	0,9994	36,8	1,0015	46,8	0,9985
7,2	1,0310	17,2	0,9957	27,2	1,0000	37,2	1,0011	47,2	0,9988
7,6	1,0262	17,6	0,9952	27,6	1,0006	37,6	1,0006	47,6	0,9990
8,0	1,0242	18,0	0,9943	28,0	1,0013	38,0	1,0001	48,0	0,9993
8,4	1,0235	18,4	0,9933	28,4	1,0020	38,4	0,9997	48,4	0,9995
8,8	1,0242	18,8	0,9923	28,8	1,0028	38,8	0,9994	48,8	0,9996
9,2	1,0253	19,2	0,9915	29,2	1,0034	39,2	0,9990	49,2	0,9997
9,6	1,0264	19,6	0,9908	29,6	1,0037	39,6	0,9988	49,6	0,9997
10,0	1,0270	20,0	0,9906	30,0	1,0039	40,0	0,9987	50,0	0,9998

$\varkappa = 0,30$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	1,0175	20,0	0,9943	30,0	1,0029	40,0	0,9982
0,4	0,1648	10,4	1,0162	20,4	0,9948	30,4	1,0024	40,4	0,9987
0,8	0,3247	10,8	1,0144	20,8	0,9958	30,8	1,0017	40,8	0,9991
1,2	0,4755	11.2	1,0116	21,2	0,9971	31,2	1,0011	41,2	0,9995
1,6	0,6128	11,6	1,0078	21,6	0,9986	31,6	1,0003	41,6	0,9998
2,0	0,7325	12,0	1,0036	22,0	1,0001	32,0	0,9996	42,0	1,0002
2,4	0,8385	12,4	0,9990	22,4	1,0014	32,4	0 9990	42,4	1,0005
2,8	0,9235	12,8	0,9950	22,8	1,0026	32,8	0,9985	42,8	1,0006
3,2	0,9882	13,2	0,9915	23,2	1,0036	33,2	0,9982	43.2	1,0007
3,6	1,0351	13,6	0,9888	23,6	1,0043	33,6	0,9981	43,6	1,0007
4,0	1,0656	14,0	0 9871	24,0	1,0045	34,0	0,9981	44,0	1,0007
4,4	1,0821	14,4	0,9864	24 4	1,0045	34,4	0,9982	44,4	1,0007
4,8	1,0876	14,8	0,9867	24,8	1,0042	34,8	0,9983	44,8	1,0006
5,2	1,0845	15,2	0 9875	25,2	1,0039	35,2	0,9985	45,2	1,0007
5,6	1,0762	15,6	0,9888	25,6	1,0035	35,6	0,9985	45,6	1,0007
6,0	1,0648	16,0	0,9903	26,0	1,0031	36,0	0,9985	46,0	1,0008
6,4	1,0527	16,4	0,9917	26,4	1,0028	36,4	0 9985	46,4	1,0009
6,8	1,0416	16,8	0,9930	26,8	1,0027	36,8	0,9998	46,8	1,0011
7,2	1,0322	17,2	0,9938	27,2	1,0027	37,2	0,9982	47,2	1,0013
7,6	1,0252	17,6	0,9943	27,6	1,0029	37,6	0,9980	47,6	1,0014
8,0	1,0206	18,0	0,9943	28,0	1,0030	38,0	0,9978	48,0	1,0016
8,4	1,0184	18,4	0,9942	28,4	1,0032	38,4	0,9977	48.4	1,0016
8,8	1,0176	18,8	0,9940	28,8	1,0034	38,8	0,9977	48,8	1,0016
9,2	1,0175	19,2	0.9938	29,2	1.0035	39,2	0,9978	49,2	1,0014
9,6	1,0178	19,6	0,9938	29,6	1,0033	39,6	0,9980	49,6	1,0012
10,0	1,0175	20,0	0,9943	30,0	1,0029	40,0	0,9982	50,0	1,0010

68 Коллектив авторов 1309

$\varkappa = 0,35$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	1,0053	20,0	1,0008	30,0	0,9987	40,0	1,0011
0,4	0,1712	10,4	1,0046	20,4	1,0013	30,4	0,9984	40,4	1,0013
0,8	0,3370	10,8	1,0030	20,8	1,0020	30,8	0,9980	40,8	1,0016
1,2	0,4931	11,2	1,0005	21,2	1,0029	31,2	0,9976	41,2	1,0017
1,6	0,6355	11,6	0,9973	21,6	1,0039	31,6	0,9972	41,6	1,0018
2,0	0,7605	12,0	0,9938	22,0	1,0048	32,0	0,9968	42,0	1,0019
2,4	0,8663	12,4	0,9903	22,4	1,0057	32,4	0,9968	42,4	1,0018
2,8	0,9515	12,8	0,9871	22,8	1,0063	32,8	0,9967	42,8	1,0016
3,2	1,0162	13,2	0,9846	23,2	1,0066	33,2	0,9969	43,2	1,0014
3,6	1,0616	13,6	0,9831	23,6	1,0064	33,6	0,9973	43,6	1,0010
4,0	1,0897	14,0	0,9825	24,0	1,0059	34,0	0,9977	44,0	1,0006
4,4	1,1030	14,4	0,9832	24,4	1,0052	34,4	0,9983	44,4	1,0002
4,8	1,1044	14,8	0,9847	24,8	1,0042	34,8	0,9989	44,8	0,9999
5,2	1,0973	15,2	0,9870	25,2	1,0030	35,2	0,9995	45,2	0,9995
5,6	1,0847	15,6	0,9896	25,6	1,0019	35,6	1,0000	45,6	0,9993
6,0	1,0693	16,0	0,9922	26,0	1,0009	36,0	1,0005	46,0	0,9992
6,4	1,0535	16,4	0,9948	26,4	1,0001	36,4	1,0008	46,4	0,9991
6,8	1,0390	16,8	0,9969	26,8	0,9995	36,8	1,0009	46,8	0,9992
7,2	1,0267	17,2	0,9985	27,2	0,9991	37,2	1,0009	47,2	0,9992
7,6	1,0175	17,6	0,9997	27,6	0,9989	37,6	1,0009	47,6	0,9992
8,0	1,0113	18,0	1,0003	28,0	0,9988	38,0	1,0008	48,0	0,9992
8,4	1,0076	18,4	1,0006	28,4	0,9989	38,4	1,0008	48,4	0,9993
8,8	1,0060	18,8	1,0006	28,8	0,9990	38,8	1,0008	48,8	0,9993
9,2	1,0054	19,2	1,0005	29,2	0,9990	39,2	1,0008	49,2	0,9991
9,6	1,0055	19,6	1,0005	29,6	0,9989	39,6	1,0009	49,6	0,9991
10,0	1,0053	20,0	1,0008	30,0	0,9987	40,0	1,0011	50,0	0,9939

$\varkappa = 0,40$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	0,9937	20,0	1,0039	30,0	0,9992	40,0	0,9992
0,4	0,1774	10,4	0,9941	20,4	1,0035	30,4	0,9944	40,4	0,9992
0,8	0,3493	10,8	0,9939	20,8	1,0033	30,8	0,9996	40,8	0,9991
1,2	0,5099	11,2	0,9927	21,2	1,0033	31,2	0,9997	41,2	0,9993
1,6	0,6571	11,6	0,9911	21,6	1,0035	31,6	0,9997	41,6	0,9993
2,0	0,7853	12,0	0,9888	22,0	1,0037	32,0	0,9996	42,0	0,9992
2,4	0,8928	12,4	0,9867	22,4	1,0038	32,4	0,9998	42,4	0,9992
2,8	0,9783	12,8	0,9849	22,8	1,0037	32,8	1,0000	42,8	0,9991
3,2	1,0420	13,2	0,9839	23,2	1,0033	33,2	1,0003	43,2	0,9990
3,6	1,0853	13,6	0,9836	23,6	1,0027	33,6	1,0008	43,6	0,9988
4,0	1,1102	14,0	0,9845	24,0	1,0017	34,0	1,0013	44,0	0,9986
4,4	1,1196	14,4	0,9864	24,4	1,0007	34,4	1,0017	44,4	0,9985
4,8	1,1166	14,8	0,9890	24,8	0,9994	34,8	1,0020	44,8	0,9985
5,2	1,1048	15,2	0,9922	25,2	0,9982	35,2	1,0024	45,2	0,9985
5,6	1,0878	15,6	0,9958	25,6	0,9971	35,6	1,0027	45,6	0,9986
6,0	1,0680	16,0	0,9992	26,0	0,9962	36,0	1,0028	46,0	0,9989
6,4	1,0483	16,4	1,0022	26,4	0,9955	36,4	1,0027	46,4	0,9992
6,8	1,0306	16,8	1,0045	26,8	0,9953	36,8	1,0024	46,8	0,9995
7,2	1,0160	17,2	1,0062	27,2	0,9953	37,2	1,0020	47,2	0,9998
7,6	1,0049	17,6	1,0072	27,6	0,9957	37,6	1,0013	47,6	1,0002
8,0	0,9976	18,0	1,0074	28,0	0,9962	38,0	1,0009	48,0	1,0006
8,4	0,9934	18,4	1,0071	28,4	0,9969	38,4	1,0004	48,4	1,0008
8,8	0,9918	18,8	1,0064	28,8	0,9976	38,8	0,9999	48,8	1,0011
9,2	0,9918	19,2	1,0055	29,2	0,9983	39,2	0,9995	49,2	1,0011
9,6	0,9928	19,6	1,0047	29,6	0,9988	39,6	0,9993	49,6	1,0011
10,0	0,9937	20,0	1,0039	30,0	0,9992	40,0	0,9992	50,0	1,0009

$\varkappa = 0,45$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	0,9852	20,0	1,0011	30,0	1,0033	40,0	0,9981
0,4	0,1834	10,4	0,9878	20,4	0,9997	30,4	1,0033	40,4	0,9985
0,8	0,3614	10,8	0,9896	20,8	0,9989	30,8	1,0032	40,8	0,9991
1,2	0,5280	11,2	0,9905	21,2	0,9984	31,2	1,0029	41,2	0,9996
1,6	0,6786	11,6	0,9906	21,6	0,9982	31,6	1,0023	41,6	1,0000
2,0	0,8095	12,0	0,9899	22,0	0,9983	32,0	1,0018	42,0	1,0004
2,4	0,9181	12,4	0,9893	22,4	0,9984	32,4	1,0014	42,4	1,0008
2,8	1,0020	12,8	0,9888	22,8	0,9985	32,8	1,0009	42,8	1,0010
3,2	1,0658	13,2	0,9889	23,2	0,9984	33,2	1,0008	43,2	1,0011
3,6	1,1063	13,6	0,9896	23,6	0,9982	33,6	1,0006	43,6	1,0010
4,0	1,1273	14,0	0,9913	24,0	0,9978	34,0	1,0006	44,0	1,0009
4,4	1,1321	14,4	0,9936	24,4	0,9972	34,4	1,0004	44,4	1,0008
4,8	1,1242	14,8	0,9967	24,8	0,9967	34,8	1,0004	44,8	1,0007
5,2	1,1075	15,2	1,0000	25,2	0,9961	35,2	1,0005	45,2	1,0006
5,6	1,0855	15,6	1,0035	25,6	0,9956	35,6	1,0004	45,6	1,0006
6,0	1,0616	16,0	1,0065	26,0	0,9955	36,0	1,0001	46,0	1,0007
6,4	1,0337	16,4	1,0091	26,4	0,9957	36,4	0,9999	46,4	1,0007
6,8	1,0179	16,8	1,0107	26,8	0,9962	36,8	0,9994	46,8	1,0008
7,2	1,0013	17,2	1,0115	27,2	0,9970	37,2	0,9989	47,2	1,0008
7,6	0,9891	17,6	1,0114	27,6	0,9980	37,6	0,9985	47,6	1,0008
8,0	0,9818	18,0	1,0103	28,0	0,9990	38,0	0,9981	48,0	1,0008
8,4	0,9782	18,4	1,0089	28,4	1,0003	38,4	0,9977	48,4	1,0007
8,8	0,9777	18,8	1,0069	28,8	1,0013	38,8	0,9976	48,8	1,0006
9,2	0,9793	19,2	1,0048	29,2	1,0022	39,2	0,9977	49,2	1,0003
9,6	0,9823	19,6	1,0029	29,6	1,0029	39,6	0,9979	49,6	0,9999
10,0	0,9852	20,0	1,0011	30,0	1,0033	40,0	0,9981	50,0	0,9996

$\varkappa = 0{,}50$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	0,9819	20,0	0,9950	30,0	1,0031	40,0	1,0007
0,4	0,1899	10,4	0,9871	20,4	0,9937	30,4	1,0028	40,4	1,0011
0,8	0,3752	10,8	0,9913	20,8	0,9931	30,8	1,0020	40,8	1,0014
1,2	0,5452	11,2	0,9943	21,2	0,9932	31,2	1,0010	41,2	1,0017
1,6	0,6997	11,6	0,9961	21,6	0,9938	31,6	1,0000	41,6	1,0019
2,0	0,8314	12,0	0,9968	22,0	0,9947	32,0	0,9990	42,0	1,0019
2,4	0,9402	12,4	0,9971	22,4	0,9958	32,4	0,9982	42,4	1,0017
2,8	1,0272	12,8	0,9971	22,8	0,9969	32,8	0,9975	42,8	1,0014
3,2	1,0837	13,2	0,9973	23,2	0,9979	33,2	0,9973	43,2	1,0011
3,6	1,1242	13,6	0,9978	23,6	0,9987	33,6	0,9972	43,6	1,0005
4,0	1,1410	14,0	0,9992	24,0	0,9991	34,0	0,9973	44,0	1,0000
4,4	1,1407	14,4	1,0011	24,4	0,9994	34,4	0,9974	44,4	0,9995
4,8	1,1275	14,8	1,0034	24,8	0,9995	34,8	0,9981	44,8	0,9991
5,2	1,1055	15,2	1,0059	25,2	0,9995	35,2	0,9986	45,2	0,9988
5,6	1,0789	15,6	1,0083	25,6	0,9995	35,6	0,9990	45,6	0,9985
6,0	1,0508	16,0	1,0101	26,0	0,9997	36,0	0,9993	46,0	0,9985
6,4	1,0235	16,4	1,0113	26,4	1,0000	36,4	0,9996	46,4	0,9985
6,8	1,0019	16,8	1,0118	26,8	1,0004	36,8	0,9997	46,8	0,9987
7,2	0,9844	17,2	1,0112	27,2	1,0010	37,2	0,9998	47,2	0,9988
7,6	0,9723	17,6	1,0098	27,6	1,0017	37,6	0,9999	47,6	0,9990
8,0	0,9658	18,0	1,0076	28,0	1,0025	38,0	1,0000	48,0	0,9992
8,4	0,9641	18,4	1,0049	28,4	1,0031	38,4	1,0000	48,4	0,9996
8,8	0,9659	18,8	1,0021	28,8	1,0036	38,8	1,0000	48,8	0,9997
9,2	0,9702	19,2	0;9992	29,2	1,0039	39,2	1,0002	49,2	0,9998
9,6	0,9760	19,6	0,9968	29,6	1,0038	39,6	1,0003	49,6	0,9999
10,0	0,9819	20,0	0,9950	30,0	1,0034	40,0	1,0007	50,0	0,9999

$\varkappa = 0{,}55$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	0,9843	20,0	0,9907	30,0	0,9996	40,0	0,9994
0,4	0,1962	10,4	0,9924	20,4	0,9906	30,4	0,9990	40,4	0,9993
0,8	0,3856	10,8	0,9989	20,8	0,9913	30,8	0,9984	40,8	0,9993
1,2	0,5622	11,2	1,0034	21,2	0,9927	31,2	0,9978	41,2	0,9994
1,6	0,7203	11,6	1,0060	21,6	0,9946	31,6	0,9972	41,6	0,9994
2,0	0,8556	12,0	1,0071	22,0	0,9968	32,0	0,9968	42,0	0,9994
2,4	0,9657	12,4	1,0071	22,4	0,9990	32,4	0,9968	42,4	0,9994
2,8	1,0491	12,8	1,0063	22,8	1,0008	32,8	0,9969	42,8	0,9993
3,2	1,1066	13,2	1,0055	23,2	1,0024	33,2	0,9973	43,2	0,9992
3,6	1,1395	13,6	1,0049	23,6	1,0038	33,6	0,9979	43,6	0,9990
4,0	1,1511	14,0	1,0046	24,0	1,0042	34,0	0,9988	44,0	0,9988
4,4	1,1452	14,4	1,0050	24,4	1,0044	34,4	0,9996	44,4	0,9987
4,8	1,1266	14,8	1,0057	24,8	1,0042	34,8	1,0005	44,8	0,9988
5,2	1,0996	15,2	1,0065	25,2	1,0036	35,2	1,0014	45,2	0,9989
5,6	1,0683	15,6	1,0075	25,6	1,0029	35,6	1,0021	45,6	0,9992
6,0	1,0355	16,0	1,0081	26,0	1,0023	36,0	1,0025	46,0	0,9995
6,4	1,0068	16,4	1,0081	26,4	1,0016	36,4	1,0028	46,4	0,9999
6,8	0,9842	16,8	1,0073	26,8	1,0012	36,8	1,0026	46,8	1,0004
7,2	0,9667	17,2	1,0058	27,2	1,0009	37,2	1,0023	47,2	1,0007
7,6	0,9559	17,6	1,0039	27,6	1,0007	37,6	1,0019	47,6	1,0011
8,0	0,9517	18,0	1,0013	28,0	1,0007	38,0	1,0014	48,0	1,0015
8,4	0,9529	18,4	0,9986	28,4	1,0007	38,4	1,0008	48,4	1,0017
8,8	0,9581	18,8	0,9958	28,8	1,0008	38,8	1,0003	48,8	1,0016
9,2	0,9660	19,2	0,9934	29,2	1,0005	39,2	0,9999	49,2	1,0015
9,6	0 9753	19,6	0,9917	29,6	1,0001	39,6	0,9996	49,6	1,0012
10,0	0,9843	20,0	0,9907	30,0	0,9996	40,0	0,9994	50,0	1,0009

$\varkappa = 0{,}60$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0 0	0,0000	10,0	0,9925	20,0	0,9922	30,0	0,9992	40,0	0,9977
0,4	0,2027	10,4	1,0029	20,4	0,9933	30,4	0,9996	40,4	0,9982
0,8	0,3960	10,8	1,0107	20,8	0,9950	30,8	0,9997	40,8	0,9988
1,2	0,5789	11,2	1,0156	21,2	0,9971	31,2	0,9998	41,2	0,9996
1,6	0,7405	11,6	1,0180	21,6	0,9999	31,6	0,9998	41,6	1,0002
2,0	0,8776	12,0	1,0178	22,0	1,0023	32,0	0,9997	42,0	1,0007
2,4	0,9876	12,4	1,0161	22,4	1,0045	32,4	0,9999	42,4	1,0011
2,8	1,0694	12,8	1,0133	22,8	1,0061	32,8	1,0001	42,8	1,0013
3,2	1,1233	13,2	1,0100	23,2	1,0071	33,2	1,0006	43,2	1,0014
3,6	1,1534	13,6	1,0070	23,6	1,0076	33,6	1,0010	43,6	1,0014
4,0	1,1579	14,0	1,0046	24,0	1,0071	34,0	1,0014	44,0	1,0012
4,4	1,1466	14,4	1,0028	24,4	1,0059	34,4	1,0018	44,4	1,0009
4,8	1,1222	14,8	1,0018	24,8	1,0044	34,8	1,0022	44,8	1,0007
5,2	1,0899	15,2	1,0013	25,2	1,0026	35,2	1,0024	45,2	1,0005
5,6	1,0546	15,6	1,0012	25,6	1,0008	35,6	1,0023	45,6	1,0004
6,0	1,0203	16,0	1,0012	26,0	0,9992	36,0	1,0020	46,0	1,0002
6,4	0,9900	16,4	1,0008	26,4	0,9978	36,4	1,0016	46,4	1,0001
6,8	0,9660	16,8	1,0004	26,8	0,9969	36,8	1,0010	46,8	1,0000
7,2	0,9499	17,2	0,9995	27,2	0,9964	37,2	1,0001	47,2	0,9999
7,6	0,9416	17,6	0,9981	27,6	0,9962	37,6	0,9993	47,6	0,9999
8,0	0,9407	18,0	0,9966	28,0	0,9965	38,0	0,9986	48,0	0,9998
8,4	0,9459	18,4	0,9948	28,4	0,9970	38,4	0,9979	48,4	0,9999
8,8	0,9553	18,8	0,9934	28,8	0,9977	38,8	0,9973	48,8	0,9999
9,2	0,9672	19,2	0,9923	29,2	0,9983	39,2	0,9972	49,2	0,9997
9,6	0,9803	19,6	0,9920	29,6	0,9988	39,6	0,9973	49,6	0,9993
10,0	0,9925	20,0	0,9922	30,0	0,9992	40,0	0,9977	50,0	0,9990

$\varkappa = 0{,}65$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	1,0055	20,0	0,9981	30,0	1,0036	40,0	1,0003
0,4	0,2080	10,4	1,0166	20,4	0,9992	30,4	1,0039	40,4	1,0009
0,8	0,4096	10,8	1,0244	20,8	1,0007	30,8	1,0038	40,8	1,0015
1,2	0,5960	11,2	1,0282	21,2	1,0020	31,2	1,0032	41,2	1,0019
1,6	0,7601	11,6	1,0288	21,6	1,0041	31,6	1,0025	41,6	1,0021
2,0	0,8986	12,0	1,0258	22,0	1,0054	32,0	1,0017	42,0	1,0023
2,4	1,0080	12,4	1,0210	22,4	1,0065	32,4	1,0009	42,4	1,0020
2,8	1,0875	12,8	1,0149	22,8	1,0067	32,8	1,0002	42,8	1,0016
3,2	1,1378	13,2	1,0061	23,2	1,0064	33,2	0,9996	43,2	1,0010
3,6	1,1611	13,6	1,0029	23,6	1,0055	33,6	0,9992	43,6	1,0003
4,0	1,1618	14,0	0,9983	24,0	1,0039	34,0	0,9990	44,0	0,9997
4,4	1,1444	14,4	0,9948	24,4	1,0021	34,4	0,9989	44,4	0,9990
4,8	1,1145	14,8	0,9931	24,8	0,9999	34,8	0,9990	44,8	0,9984
5,2	1,0776	15,2	0,9922	25,2	0,9976	35,2	0,9991	45,2	0,9980
5,6	1,0386	15,6	0,9926	25,6	0,9959	35,6	0,9991	45,6	0,9980
6,0	1,0007	16,0	0,9937	26,0	0,9945	36,0	0,9993	46,0	0,9979
6,4	0,9714	16,4	0,9951	26,4	0,9936	36,4	0,9993	46,4	0,9982
6,8	0,9500	16,8	0,9959	26,8	0,9936	36,8	0,9991	46,8	0,9986
7,2	0,9352	17,2	0,9967	27,2	0,9942	37,2	0,9989	47,2	0,9991
7,6	0,9306	17,6	0,9972	27,6	0,9951	37,6	0,9987	47,6	0,9997
8,0	0,9340	18,0	0,9973	28,0	0,9967	38,0	0,9986	48,0	1,0003
8,4	0,9438	18,4	0,9972	28,4	0,9984	38,4	0,9987	48,4	1,0007
8,8	0,9580	18,8	0,9970	28,8	1,0002	38,8	0,9990	48,8	1,0011
9,2	0,9742	19,2	0,9969	29,2	1,0017	39,2	0,9993	49,2	1,0012
9,6	0,9908	19,6	0,9974	29,6	1,0029	39,6	0,9997	49,6	1,0013
10,0	1,0055	20,0	0,9981	30,0	1,0036	40,0	1,0003	50,0	1,0012

$\varkappa = 0{,}70$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	1,0202	20,0	1,0025	30,0	1,0053	40,0	0,9996
0,4	0,2165	10,4	1,0313	20,4	1,0021	30,4	1,0044	40,4	0,9995
0,8	0,4214	10,8	1,0376	20,8	1,0019	30,8	1,0030	40,8	0,9995
1,2	0,6117	11,2	1,0387	21,2	1,0019	31,2	1,0013	41,2	0,9995
1,6	0,7798	11,6	1,0354	21,6	1,0021	31,6	0,9997	41,6	0,9996
2,0	0,9187	12,0	1,0286	22,0	1,0024	32,0	0,9980	42,0	0,9996
2,4	1,0276	12,4	1,0196	22,4	1,0024	32,4	0,9968	42,4	0,9995
2,8	1,1040	12,8	1,0100	22,8	1,0018	32,8	0,9958	42,8	0,9994
3,2	1,1499	13,2	1,0005	23,2	1,0012	33,2	0,9955	43,2	0,9993
3,6	1,1678	13,6	0,9924	23,6	1,0004	33,6	0,9958	43,6	0,9991
4,0	1,1627	14,0	0,9869	24,0	0,9991	34,0	0,9964	44,0	0,9990
4,4	1,1393	14,4	0,9835	24,4	0,9977	34,4	0,9972	44,4	0,9990
4,8	1,1041	14,8	0,9826	24,8	0,9964	34,8	0,9982	44,8	0,9991
5,2	1,0629	15,2	0,9836	25,2	0,9954	35,2	0,9996	45,2	0,9994
5,6	1,0212	15,6	0,9862	25,6	0,9947	35,6	1,0008	45,6	0,9997
6,0	0,9838	16,0	0,9900	26,0	0,9947	36,0	1,0015	46,0	1,0001
6,4	0,9538	16,4	0,9938	26,4	0,9952	36,4	1,0021	46,4	1,0005
6,8	0,9337	16,8	0,9974	26,8	0,9962	36,8	1,0024	46,8	1,0009
7,2	0,9237	17,2	1,0006	27,2	0,9978	37,2	1,0023	47,2	1,0013
7,6	0,9236	17,6	1,0028	27,6	0,9995	37,6	1,0020	47,6	1,0017
8,0	0,9324	18,0	1,0043	28,0	1,0013	38,0	1,0016	48,0	1,0017
8,4	0,9473	18,4	1,0046	28,4	1,0032	38,4	1,0011	48,4	1,0017
8,8	0,9680	18,8	1,0044	28,8	1,0046	38,8	1,0006	48,8	1,0014
9,2	0,9860	19,2	1,0038	29,2	1,0054	39,2	1,0002	49,2	1,0010
9,6	1,0048	19,6	1,0031	29,6	1,0056	39,6	0,9998	49,6	1,0004
10,0	1,0202	20,0	1,0025	30,0	1,0053	40,0	0,9996	50,0	0,9998

$\varkappa = 0{,}75$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	1,0356	20,0	1,0006	30,0	1,0011	40,0	0,9966
0,4	0,2218	10,4	1,0448	20,4	0,9981	30,4	0,9999	40,4	0,9973
0,8	0,4334	10,8	1,0473	20,8	0,9962	30,8	0,9988	40,8	0,9984
1,2	0,6280	11,2	1,0441	21,2	0,9951	31,2	0,9973	41,2	0,9995
1,6	0,7980	11,6	1,0360	21,6	0,9948	31,6	0,9963	41,6	1,0004
2,0	0,9383	12,0	1,0248	22,0	0,9953	32,0	0,9957	42,0	1,0013
2,4	1,0454	12,4	1,0119	22,4	0,9961	32,4	0,9956	42,4	1,0020
2,8	1,1188	12,8	0,9995	22,8	0,9970	32,8	0,9961	42,8	1,0023
3,2	1,1600	13,2	0,9882	23,2	0,9979	33,2	0,9970	43,2	1,0024
3,6	1,1720	13,6	0,9794	23,6	0,9988	33,6	0,9982	43,6	1,0021
4,0	1,1606	14,0	0,9746	24,0	0,9993	34,0	0,9995	44,0	1,0018
4,4	1,1314	14,4	0,9733	24,4	0,9993	34,4	1,0011	44,4	1,0012
4,8	1,0915	14,8	0,9755	24,8	0,9996	34,8	1,0025	44,8	1,0005
5,2	1,0466	15,2	0,9793	25,2	0,9997	35,2	1,0038	45,2	0,9999
5,6	1,0033	15,6	0,9861	25,6	0,9997	35,6	1,0042	45,6	0,9994
6,0	0,9659	16,0	0,9930	26,0	0,9999	36,0	1,0044	46,0	0,9991
6,4	0,9376	16,4	0,9999	26,4	1,0002	36,4	1,0041	46,4	0,9989
6,8	0,9211	16,8	1,0079	26,8	1,0008	36,8	1,0032	46,8	0,9988
7,2	0,9159	17,2	1,0102	27,2	1,0014	37,2	1,0020	47,2	0,9990
7,6	0,9214	17,6	1,0129	27,6	1,0020	37,6	1,0005	47,6	0,9991
8,0	0,9357	18,0	1,0136	28,0	1,0027	38,0	0,9991	48,0	0,9993
8,4	0,9555	18,4	1,0127	28,4	1,0031	38,4	0,9978	48,4	0,9996
8,8	0,9787	18,8	1,0102	28,8	1,0032	38,8	0,9970	48,8	0,9997
9,2	1,0010	19,2	1,0072	29,2	1,0029	39,2	0,9964	49,2	0,9999
9,6	1,0211	19,6	1,0037	29,6	1,0023	39,6	0,9963	49,6	1,0000
10,0	1,0356	20,0	1,0006	30,0	1,0015	40,0	0,9966	50,0	0,9999

$\varkappa = 0,80$

t	$h_{\varkappa}(t)$	t	$h_{\varkappa}(t)$	t	$h_{\varkappa}(t)$	t	$h_{\varkappa}t$	t	$h_{\varkappa}t$
0,0	0,0000	10,0	1,0490	20,0	0,9914	30,0	0,9990	40,0	0,9996
0,4	0,2280	10,4	1,0544	20,4	0,9879	30,4	0,9993	40,4	1,0008
0,8	0,4451	10,8	1,0520	20,8	0,9862	30,8	0,9995	40,8	1,0020
1,2	0,6441	11,2	1,0435	21,2	0,9863	31,2	0,9995	41,2	1,0028
1,6	0,8165	11,6	1,0307	21,6	0,9884	31,6	0,9996	41,6	1,0034
2,0	0,9566	12,0	1,0149	22,0	0,9915	32,0	0,9997	42,0	1,0035
2,4	1,0620	12,4	0,9991	22,4	0,9951	32,4	1,0000	42,4	1,0032
2,8	1,1318	12,8	0,9847	22,8	0,9990	32,8	1,0003	42,8	1,0024
3,2	1,1679	13,2	0,9735	23,2	1,0022	33,2	1,0006	43,2	1,0014
3,6	1,1736	13,6	0,9665	23,6	1,0048	33,6	1,0011	43,6	1,0003
4,0	1,1563	14,0	0,9650	24,0	1,0066	34,0	1,0014	44,0	0,9991
4,4	1,1214	14,4	0,9674	24,4	1,0073	34,4	1,0018	44,4	0,9979
4,8	1,0770	14,8	0,9740	24,8	1,0069	34,8	1,0020	44,8	0,9970
5,2	1,0295	15,2	0,9828	25,2	1,0060	35,2	1,0022	45,2	0,9964
5,6	0,9851	15,6	0,9931	25,6	1,0041	35,6	1,0017	45,6	0,9964
6,0	0,9491	16,0	1,0026	26,0	1,0022	36,0	1,0010	46,0	0,9973
6,4	0,9244	16,4	1,0120	26,4	1,0004	36,4	1,0003	46,4	0,9979
6,8	0,9120	16,8	1,0185	26,8	0,9989	36,8	0,9993	46,8	0,9989
7,2	0,9127	17,2	1,0221	27,2	0,9978	37,2	0,9984	47,2	0,9998
7,6	0,9240	17,6	1,0223	27,6	0,9972	37,6	0,9976	47,6	1,0009
8,0	0,9438	18,0	1,0198	28,0	0,9969	38,0	0,9970	48,0	1,0018
8,4	0,9682	18,4	1,0154	28,4	0,9971	38,4	0,9968	48,4	1,0026
8,8	0,9940	18,8	1,0096	28,8	0,9975	38,8	0,9971	48,8	1,0029
9,2	1,0177	19,2	1,0027	29,2	0,9981	39,2	0,9976	49,2	1,0028
9,6	1,0370	19,6	0,9965	29,6	0,9986	39,6	0,9985	49,6	1,0023
10,0	1,0490	20,0	0,9914	30,0	0,9990	40,0	0,9996	50,0	1,0014

$\varkappa = 0{,}85$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	1,0586	20,0	0,9796	30,0	1,0062	40,0	0,9994
0,4	0,2413	10,4	1,0583	20,4	0,9782	30,4	1,0070	40,4	0,9993
0,8	0,4567	10,8	1,0505	20,8	0,9798	30,8	1,0068	40,8	0,9993
1,2	0,6592	11,2	1,0365	21,2	0,9839	31,2	1,0060	41,2	0,9995
1,6	0,8342	11,6	1,0194	21,6	0,9898	31,6	1,0044	41,6	0,9996
2,0	0,9742	12,0	1,0003	22,0	0,9969	32,0	1,0023	42,0	0,9996
2,4	0,1775	12,4	0,9831	22,4	1,0035	32,4	1,0003	42,4	0,9995
2,8	1,1430	12,8	0,9693	22,8	1,0091	32,8	0,9982	42,8	0,9993
3,2	1,1734	13,2	0,9608	23,2	1,0130	33,2	0,9967	43,2	0,9993
3,6	1,1732	13,6	0,9568	23,6	1,0158	33,6	0,9960	43,6	0,9992
4,0	1,1496	14,0	0,9611	24,0	1,0152	34,0	0,9958	44,0	0,9992
4,4	1,1094	14,4	0,9692	24,4	1,0129	34,4	0,9958	44,4	0,9992
4,8	1,0615	14,8	0,9805	24,8	1,0092	34,8	0,9966	44,8	0,9992
5,2	1,0118	15,2	0,9933	25,2	1,0050	35,2	0,9977	45,2	0,9995
5,6	0,9675	15,6	1,0066	25,6	0,9997	35,6	0,9990	45,6	1,0000
6,0	0,9341	16,0	1,0179	26,0	0,9956	36,0	1,0002	46,0	1,0006
6,4	0,9138	16,4	1,0253	26,4	0,9916	36,4	1,0015	46,4	1,0010
6,8	0,9072	16,8	1,0295	26,8	0,9897	36,8	1,0020	46,8	1,0014
7,2	0,9139	17,2	1,0293	27,2	0,9890	37,2	1,0023	47,2	1,0016
7,6	0,9306	17,6	1,0256	27,6	0,9899	37,6	1,0019	47,6	1,0016
8,0	0,9552	18,0	1,0185	28,0	0,9918	38,0	1,0016	48,0	1,0015
8,4	0,9836	18,4	1,0095	28,4	0,9947	38,4	1,0012	48,4	1,0012
8,8	1,0106	18,8	0,9997	28,8	0,9983	38,8	1,0007	48,8	1,0007
9,2	1,0335	19,2	0,9906	29,2	1,0014	39,2	1,0002	49,2	0,9998
9,6	1,0505	19,6	0,9839	29,6	1,0042	39,6	0,9998	49,6	0,9993
10,0	1,0586	20,0	0,9796	30,0	1,0062	40,0	0,9994	50,0	0,9982

$\varkappa = 0,90$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	1,0631	20,0	0,9718	30,0	1,0146	40,0	0,9925
0,4	0,2409	10,4	1,0571	20,4	0,9752	30,4	1,0122	40,4	0,9939
0,8	0,4683	10,8	1,0427	20,8	0,9819	30,8	1,0088	40,8	0,9958
1,2	0,6751	11,2	1,0241	21,2	0,9908	31,2	1,0035	41,2	0,9983
1,6	0,8512	11,6	1,0045	21,6	1,0007	31,6	0,9983	41,6	1,0010
2,0	0,9911	12,0	0,9845	22,0	1,0100	32,0	0,9935	42,0	1,0034
2,4	1,0915	12,4	0,9682	22,4	1,0171	32,4	0,9902	42,4	1,0049
2,8	1,1530	12,8	0,9576	22,8	1,0213	32,8	0,9882	42,8	1,0060
3,2	1,1767	13.2	0,9535	23,2	1,0229	33,2	0,9879	43,2	1,0061
3,6	1,1703	13,6	0,9564	23,6	1,0208	33,6	0,9893	43,6	1,0049
4,0	1,1413	14,0	0.9652	24,0	1,0158	34,0	0,9924	44,0	1,0035
4,4	1,0960	14,4	0,9779	24,4	1,0090	34,4	0,9958	44,4	1,0015
4,8	1,0448	14,8	0,9930	24,8	1,0014	34,8	0,9996	44,8	0,9995
5,2	0,9946	15,2	1,0085	25,2	0,9937	35,2	1,0040	45,2	0,9977
5,6	0,9525	15,6	1,0224	25,6	0,9873	35,6	1,0071	45,6	0,9963
6,0	0,9220	16,0	1,0314	26,0	0,9838	36,0	1,0090	46,0	0,9954
6,4	0,9064	16.4	1,0353	26,4	0,9812	36,4	1,0097	46,4	0,9954
6,8	0,9060	16,8	1,0345	26,8	0,9822	36,8	1,0090	46,8	0,9960
7,2	0,9188	17,2	1,0289	27,2	0,9858	37,2	1,0068	47,2	0,9968
7,6	0,9415	17,6	1,0201	27,6	0,9911	37,6	1,0041	47,6	0,9980
8,0	0,9703	18,0	1,0082	28,0	0,9970	38,0	1,0011	48,0	0,9997
8,4	1,0003	18,4	0,9963	28,4	1,0036	38,4	0,9981	48,4	1,0012
8,8	1,0270	18,8	0,9852	28,8	1,0094	38,8	0,9950	48,8	1.0025
9,2	1,0479	19,2	0,9778	29,2	1,0131	39,2	0.9926	49,2	1,0031
9,6	1,0605	19,6	0,9726	29,6	1.0150	39,6	0,9917	49,6	1,0033
10,0	1,0631	20,0	0,9718	30,0	1,0146	40,0	0,9925	50,0	1,0029

$\varkappa = 0{,}95$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	1,0616	20,0	0,9750	30,0	1,0116	40,0	0,9960
0,4	0,2465	10,4	1,0499	20,4	0,9848	30,4	1,0052	40,4	1,0008
0,8	0,4816	10,8	1,0306	20,8	0,9949	30,8	0,9980	40,8	1,0062
1,2	0,6876	11,2	1,0096	21,2	1,0057	31,2	0,9904	41,2	1,0108
1,6	0,8688	11,6	0,9889	21,6	1,0162	31,6	0,9856	42,6	1,0130
2,0	1,0076	12,0	0,9697	22,0	1,0239	32,0	0,9828	42,0	1,0134
2,4	1,1055	12,4	0,9569	22,4	1,0276	32,4	0,9827	42,4	1,0119
2,8	1,1604	12,8	0,9515	22,8	1,0272	32,8	0,9851	42,8	1,0088
3,2	1,1787	13,2	0,9536	23,2	1,0228	33,2	0,9899	43,2	1,0040
3,6	1,1659	13,6	0,9624	23,6	1,0145	33,6	0,9961	43,6	0,9997
4,0	1,1322	14,0	0,9758	24,0	1,0056	34,0	1,0030	44,0	0,9954
4,4	1,0820	14,4	0,9925	24,4	0,9954	34,4	1,0090	44,4	0.9914
4,8	1,0290	14,8	1,0093	24,8	0,9866	34,8	1,0134	44,8	0,9894
5,2	0,9794	15,2	1,0235	25,2	0,9804	35,2	1,0162	45,2	0,9892
5,6	0,9392	15,6	1,0342	25,6	0,9773	35,6	1,0164	45,6	0,9902
6,0	0,9136	16,0	1,0396	26,0	0,9776	36,0	1,0144	46,0	0,9931
6,4	0,9038	16,4	1,0382	26,4	0,9811	36,4	1,0101	46,4	0,9964
6,8	0,9100	16,8	1,0307	26,8	0,9869	36,8	1,0048	46,8	1,0009
7,2	0,9258	17,2	1,0205	27,2	0,9953	37,2	0,9985	47,2	1,0051
7,6	0,9551	17,6	1,0073	27,6	1,0042	37,6	0,9928	47,6	1,0084
8,0	0,9865	18,0	0,9927	28,0	1,0113	38,0	0,9992	48,0	1,0105
8,4	1,0178	18,4	0,9813	28,4	1,0177	38,4	0,9866	48,4	1,0110
8,8	1,0420	18,8	0,9775	28,8	1,0207	38,8	0,9964	48,8	1,0099
9,2	1,0584	19,2	0,9681	29,2	1,0208	39,2	0,9980	49,2	1,0076
9,6	1,0662	19,6	0,9701	29,6	1,0177	39,6	0,9915	49,6	1,0042
10,0	1,0616	20,0	0,9750	30,0	1,0116	40,0	0,9960	50,0	1,0004

$\varkappa = 1{,}00$

t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$	t	$h_\varkappa(t)$
0,0	0,0000	10,0	1,0557	20,0	0,9856	30,0	0,9974	40,0	1,0103
0,4	0,2524	10,4	1,0384	20,4	0,9979	30,4	0,9896	40,4	1,0141
0,8	0,4915	10,8	1,0164	20,8	1,0099	30,8	0,9836	40,8	1,0156
1,2	0,7054	11,2	0,9934	21,2	1,0200	31,2	0,9803	41,2	1,0146
1,6	0,8844	11,6	0,9730	21,6	1,0266	31,6	0,9801	41,6	1,0113
2,0	1,0220	12,0	0,9581	22,0	1,0288	32,0	0,9831	42,0	1,0064
2,4	1,1157	12,4	0,9507	22,4	1,0265	32,4	0,9886	42,4	1,0005
2,8	1,1664	12,8	0,9513	22,8	1,0201	32,8	0,9958	42,8	0,9946
3,2	1,1786	13,2	0,9595	23,2	1,0108	33,2	1,0035	43,2	0,9898
3,6	1,1599	13,6	0,9734	23,6	1,0001	33,6	1,0104	43,6	0,9865
4,0	1,1193	14,0	0,9907	24,0	0,9898	34,0	1,0155	44,0	0,9856
4,4	1,0669	14,4	1,0085	24,4	0,9814	34,4	1,0182	44,4	0,9868
4,8	1,0122	14,8	1,0240	24,8	0,9762	34,8	1,0179	44,8	0,9901
5,2	0,9636	15,2	1,0350	25,2	0,9748	35,2	1,0148	45,2	0,9949
5,6	0,9274	15,6	1,0400	25,6	0,9774	35,6	1,0094	45,6	1,0004
6,0	0,9070	16,0	1,0385	26,0	0,9835	36,0	1,0028	46,0	1,0057
6,4	0,9035	16,4	1,0312	26,4	0,9919	36,4	0,9958	46,4	1,0101
6,8	0,9154	16,8	1,0193	26,8	1,0014	36,8	0,9896	46,8	1,0128
7,2	0,9391	17,2	1,0050	27,2	1,0104	37,2	0,9852	47,2	1,0135
7,6	0,9698	17,6	0,9906	27,6	1,0175	37,6	0,9832	47,6	1,0120
8,0	1,0022	18,0	0,9782	28,0	1,0216	38,0	0,9839	48,0	1,0087
8,4	1,0312	18,4	0,9698	28,4	1,0223	38,4	0,9871	48,4	1,0041
8,8	1,0528	18,8	0,9665	28,8	1,0195	38,8	0,9922	48,8	0,9989
9,2	1,0645	19,2	0,9684	29,2	1,0137	39,2	0,9985	49,2	0,9940
9,6	1,0652	19,6	0,9753	29,6	1,0059	39,6	1,0048	49,6	0,9901
10,0	1,0557	20,0	0,9856	30,0	0,9974	40,0	1,0103	50,0	0,9878

ЛИТЕРАТУРА[1]

I. Работы отечественных авторов

Айзерман М. А., О затухании колебательного движения, характеризуемого линейным дифференциальным уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами, «Автоматика и телемеханика» № 1, 1940, стр. 55—65, фиг. 3.

Айзерман М. А., Влияние нелинейных характеристик на сходимость процесса автоматического регулирования и на условия генерации колебаний, «Известия АН СССР. ОТН» № 12, 1944, стр. 826—835, фиг. 7, библ. 2 назв.

Айзерман М. А., Критерии сходимости процессов автоматического регулирования, учитывающие нелинейность характеристик элементов установки, диссертация на степень доктора технических наук, Институт автоматики и телемеханики, АН СССР, 1946.

Айзерман М. А., О некоторых структурных условиях устойчивости систем автоматического регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 9, № 2, 1948, стр. 104—122, фиг. 13, библ. 8 назв.

Айзерман М. А., Нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Машгиз, М. 1950, стр. 24, фиг. 13 (Внитоприбор, Комитет промышленных приборов и автоматики).

Айзерман М. А., Выделение областей устойчивости регулируемых систем, лекция на семинаре по теории автоматического регулирования, Машгиз, М. 1950, стр. 18, фиг. 7.

Айзерман М. А., Введение в динамику автоматического регулирования двигателей, Машгиз, М. 1950, стр. 151, фиг. 118, библ. 65 назв.

Айзерман М. А., Физические основы применения методов малого параметра к решению нелинейных задач теории автоматического регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 14, № 5, 1953, стр. 597—603, фиг. 3, библ. 8 назв.

Андронов А. А., Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний, Доклады VI съезда русских физиков, 1928, стр. 23—24.

Андронов А. А. и Баутин Н. Н., Движение нейтрального самолета, снабженного автопилотом, и теория точечных преобразований поверхностей, «Доклады АН СССР», новая серия, т. 43, № 5, 1944, стр. 197—202, фиг. 2, библ. 8 назв.

Андронов А. А. и Баутин Н. Н., Об одном вырожденном случае общей задачи прямого регулирования, «Доклады АН СССР», новая серия, т. 46, № 7, 1945, стр. 304—306, фиг. 1, библ. 2 назв.

Андронов А. А. и Баутин Н. Н., Стабилизация курса нейтрального самолета автопилотом с постоянной скоростью сервомотора и зоной нечувствительности, «Доклады АН СССР», новая серия, т. 46, № 4, 1945, стр. 158—161, фиг. 1, библ. 4 назв.

[1] Литература составлена канд. техн. наук А. В. Храмым.

Андронов А. А., Баутин Н. Н. и Горелик Г. С., Теория непрямого регулирования при учете кулоновского трения в чувствительном элементе, «Автоматика и телемеханика», т. 7, № 1, 1946, стр. 15—41, фиг. 15, библ. 15 назв.

Андронов А. А. и Майер А. Г., Задача Мизеса в теории прямого регулирования и теория точечных преобразований поверхностей, «Доклады АН СССР», новая серия, т. 43, № 2, 1944, стр. 58—62, фиг. 2, библ. 16 назв.

Андронов А. А. и Майер А. Г., О задаче Вышнеградского в теории прямого регулирования, «Доклады АН СССР», новая серия т. 47, № 5, 1945, стр. 345—348, фиг. 2, библ. 7 назв.

Андронов А. А. и Майер А. Г., Простейшие линейные системы с запаздыванием, «Автоматика и телемеханика», т. 7, № 2—3, 1946, стр. 95—106, фиг. 8, библ. 15 назв.

Андронов А. А и Майер А. Г., Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 8, № 5, 1947, стр. 314—334, фиг. 6, библ. 18 назв.

Андронов А. А., Майер А. Г., Задача Вышнеградского (продолжение) «Автоматика и телемеханика», т. 14, № 5, 1953, стр. 505—530, фиг. 14.

Байда Л. И., Ушаков В. Б. и Фремке А. В., Следящие системы в авторегулировании, «Автоматика и телемеханика» № 3, 1937, стр. 69—78, фиг. 8.

Баранчук Е. И., Динамические ошибки приборов, предназначенных для измерения быстроменяющихся величин, «Автоматика и телемеханика», т. 11, 1950, стр. 171—177.

Башкиров Д. А., Графоаналитический метод анализа переходных процессов в системах автоматического регулирования, Ленинградская Краснознаменная военно-воздушная академия, кандидатская диссертация, Л. 1950.

Бейрах З. Я., Теория регулятора температуры, «Советское котлотурбостроение» № 1, 1938, стр. 17—21, фиг. 5.

Березин С. Я., К вопросу определения установившихся погрешностей работы следящих приводов при гармоническом возмущении, «Автоматика и телемеханика». т. 14, № 4, 1953, стр. 403—406, фиг. 3, библ. 3 назв.

Бесекерский В. А., Применение вибраторов для устранения нелинейностей в автоматических регуляторах, «Автоматика и телемеханика», т. 8, № 6, 1947, стр. 411—417, фиг. 11, библ. 2 назв.

Блох З. Ш., Регулирование машин, Гостехиздат, М.—Л. 1950, стр. 350, фиг. 139, библ. 8 назв.

Блох З. Ш., О монотонности переходных процессов в линейных системах автоматического регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 11, № 2, 1950, стр. 83—104, фиг. 2, библ. 6 назв.

Блох З. Ш., Динамика линейных систем автоматического регулирования машин, Гостехиздат, М. 1952. стр. 491, фиг. 230.

Бобов К. С., Теория работы вибрационных регуляторов напряжения авиационного типа, «Автоматика и телемеханика» № 6, 1940, стр. 37—49, фиг. 9, библ. 4 назв.

Бобов К. С., Анализ следящих систем, используемых для дистанционного управления, докторская диссертация, М. 1950.

Богданов Е. М., Анализ процессов регулирования реверсивных станов холодной прокатки, «Вестник электропромышленности» № 9, 1939, стр. 4—9, фиг. 4.

Боднер В. А., Автоматика авиационных двигателей, Оборонгиз, М.1952, стр. 336, фиг. 181, библ. 69 назв.

Бромберг П. В., Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования, Оборонгиз, 1953, стр. 224, фиг. 19, библ. 38 назв.

Булгаков А. А., О предельной амплитуде синусоидальной отработки угла в следящих электроприводах, «Автоматика и телемеханика», т. 13, № 6, 1952, стр. 664—668, фиг. 6, библ. 3 назв.

Булгаков Б. В., Автоколебания регулируемых систем, «Доклады АН СССР», новая серия, т. 37, № 9, 1942, стр. 283—287, фиг. 2, библ. 3 назв.

Булгаков Б. В., О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами, «Доклады АН СССР», новая серия, т. 51, № 5, 1946, стр. 339—342, библ. 4 назв.

Булгаков Б. В., Некоторые задачи теории регулирования с не линейными характеристиками, «Прикладная математика и механика», т. 10, № 3, 1946, стр. 313—332, фиг. 3, библ. 8 назв.

Булгаков Б. В., Колебания, т. I, Гостехиздат, М.—Л. 1949, стр. 464, фиг. 39, библ. 148 назв. (по главам).

Булгаков Б. В., Цепи регулирования со звеньями, имеющими по нескольку степеней свободы, «Прикладная математика и механика», т. 14, вып. 6, 1950, стр. 619—634, фиг. 5, библ. 13 назв.

Булгаков Б. В., Вопросы синтеза корректирующих цепей, «Известия ОТН АН СССР» № 1, 1952, стр. 21—40, фиг. 19, библ. 9 назв.

Булгаков Б. В. и Кузовков Н. Т., О накоплении возмущений в линейных системах с переменными параметрами, «Прикладная математика и механика», т. XIV, вып. 1, 1950, стр. 7—12, библ. 3 назв.

Булгаков Б. В. и Литвин-Седой М. З., Об одной задаче автоматического регулирования с нелинейной характеристикой, «Автоматика и телемеханика», т. 10, № 5, 1949, стр. 329—341, фиг. 5, библ. 3 назв.

Ведров В. С., Об устойчивости движения, «Труды ЦАГИ», вып. 327, 1937, стр. 16, библ. 1 назв.

Ведров В. С., Динамическая устойчивость самолета, Оборонгиз, 1938, стр. 295, библ. 44 назв.

Веллер В. Н., Структурный анализ и синтез следящих и регулирующих систем, «Автоматика и телемеханика», т. 13, № 1, 1953, стр. 104—106, фиг. 2, библ. 3 назв.

Виккер Д. А., Эффект запаздывания в процессах автоматического регулирования, «Автоматика и телемеханика» № 6, 1937, стр. 59—76, фиг. 3.

Виккер Д. А., Регулирование угловой скорости первичных двигателей в случаях длительно меняющихся нагрузок, «Автоматика и телемеханика» № 3, 1939, стр. 109—118.

Воробьев Ю. В., Об исследовании устойчивости одного класса систем автоматического регулирования с волновыми процессами в отдельных звеньях, «Автоматика и телемеханика», т. 9, № 4, 1948, стр. 280—284, библ. 8 назв.

Вознесенский И. Н., К вопросу о выборе схемы регулирования теплофикационных турбин, «За советское энергооборудование», сб. статей, Л. 1934.

Вознесенский И. Н., О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров, «Автоматика и телемеханика» № 4 — 5, 1938, стр. 65—78.

Вознесенский И. Н., О принципах и схемах автоматического регулирования, «Прикладная механика и математика» т. 6, вып. 1, 1942, стр. 101—110, фиг. 1, библ. 8 назв.

Воронов А. А., Элементы теории автоматического регулирования, Воениздат, М. 1950, стр. 319, фиг. 120, библ. 83 назв.

Воронов А. А., К приближенному построению кривых переходного процесса по вещественной частотной характеристике, «Автоматика и телемеханика», т. 13, № 6, 1952, стр. 747—749, фиг. 2, табл. 1, библ. 1 назв.

Вышнеградский И. А., Об общей теории регуляторов, «Comptes Rendus ... de l'Academie des Sciences», т. 83, № 5, Paris, 1876, стр. 318—321.

Вышнеградский И. А., О регуляторах прямого действия, «Известия СПБ практического технологического института», 1877, стр. 21—62.

Вышнеградский И. А., О регуляторах непрямого действия, «Известия СПБ практического технологического института», 1878, стр. 1—48.

Вюнш Г., Регуляторы количества и давления, перев. с нем. Л. Д. Бурмана, Госэнергоиздат, М.—Л. 1932, стр. 152.

Гальперин И. И., Структурное исследование регулируемых систем, «Известия Всесоюзного теплотехнического института имени Ф. Э. Дзержинского» № 4, 1941, стр. 23—31, фиг. 19.

Ганкин М. З., Предварительная оценка и выбор некоторых параметров изодромных систем автоматического регулирования по виду границы Д-раз-

биения, «Автоматика и телемеханика», т. 13, № 2, 1952, стр. 145—151, фиг. 5, библ. 9 назв.

Гантмахер Ф. Р., О работе проф. Г. В. Щипанова «Теория и методы проектирования автоматических регуляторов», «Известия АН СССР. ОТН» № 3, 1940, стр. 108—111.

Гантмахер Ф. Р. и Христианович С. А., Анализ основных положений работы проф. Г. В. Щипанова «Теория и методы проектирования автоматических регуляторов», «Автоматика и телемеханика» № 5, 1940, стр. 123—128.

Герасимов С. Г., Физические основы динамики регулирования тепловых процессов, ОНТИ, М. 1937, стр. 73.

Герасимов С. Г., Основы динамики регулирования тепловых процессов, характеризуемых одним параметром, докторская диссертация, Всесоюзный теплотехнический институт имени Ф. Э. Дзержинского, М. 1940.

Герасимов С. Г., Некоторые вопросы теории регулирования теплотехнических процессов, «Известия Всесоюзного технического института имени Дзержинского» № 10, 1947, стр. 1—6, фиг. 6, библ. 8 назв. в подстр. прим.

Герасимов С. Г., Теоретические основы автоматического регулирования тепловых процессов, Госэнергоиздат, М.—Л. 1949, стр. 328, фиг. 128, библ. 29 назв.

Герасимов С. Г., Дудников Е. Г., Чистяков С. Ф., Автоматическое регулирование котельных установок, Госэнергоиздат, М.—Л. 1950, стр. 424, фиг. 187.

Гольдфарб Л. С., Электронный регулятор напряжения постоянного тока, «Электричество» № 16, 1937, стр. 20—24, фиг. 7.

Гольдфарб Л. С., Условия апериодичности некоторых систем авторегулирования, «Бюллетень Всесоюзного электротехнического института имени В. И. Ленина» № 8, 1940, стр. 19—23, фиг. 10.

Гольдфарб Л. С., О нелинейности регулируемых систем, «Бюллетень Всесоюзного электротехнического института имени В. И. Ленина» № 3, 1941, стр. 44—47, фиг. 9. библ. 3 назв.

Гольдфарб Л. С., О некоторых нелинейностях в системах регулирования, «Автоматика и телемеханика» № 5, 1947, стр. 349—383, фиг. 38, библ. 10 назв.

Гольдфарб Л. С., Устойчивость и автоколебания в нелинейных системах автоматического регулирования и управления, диссертация на степень доктора технических наук, Московский ордена Ленина энергетический институт имени В. М. Молотова, сентябрь 1948.

Гольдфарб Л. С., Анализ устойчивости электронно-ионного регулятора напряжения, «Автоматика и телемеханика», т. 9, № 3, 1948, стр. 245—250, фиг. 5, библ. 5 назв.

Гольдфарб Л. С., К вопросу о теории вибрационных регуляторов, «Автоматика и телемеханика», т. 9, № 6, 1948, стр. 413—431, фиг. 18, библ. 8 назв.

Горелик Г. С., К теории запаздывающей обратной связи, «Журнал технической физики», т. 9, вып. 5, 1939, стр. 450—454, фиг. 4, библ. 5 назв.

Грдина Я. И., Движение регуляторов прямого действия и его устойчивость, «Вестник общества технологов», 1898, № 4, стр. 103—111, фиг. 4, № 5, стр. 151—165, фиг. 6, № 6—7, стр. 240—241.

Грдина Я. И., Устойчивость движения машины, управляемой центробежным регулятором, «Вестник Общества технологов», 1900, № 5, стр. 228—234, фиг. 3, № 6, стр. 267—275, фиг. 7, № 7, стр. 314—323, фиг. 2, № 8, стр. 356—363, фиг. 2, № 9, стр. 386—405, фиг. 1, № 10, стр. 442—447, фиг. 1.

Грдина Я. И., К вопросу о динамической устойчивости центробежных регуляторов, «Известия Днепропетровского горного института имени Артема Сергеева», май 1927, стр. 41—70.

Грдина Я. И., К вопросу о динамической устойчивости центробежных регуляторов при прерывном регулировании, «Вестник инженеров и техников» № 1, 1931, стр. 2—7, № 2, стр. 48—51.

Гречанинов А. В., Об устойчивости движения регуляторов, «Технический сборник и вестник промышленности», 1896, № 1, стр. 4—14, № 3,

стр. 89—93, № 4, стр. 132—137, фиг. 2, № 6, стр. 215—226, фиг. 3, № 10, стр. 397—403, фиг. 2, 1897 № 2. стр. 49—55, № 4, стр. 159—161, № 5, стр. 181—184, № 6, стр. 234—240, № 7, стр. 277—282.

Долголенко Ю. В., Устойчивость и автоколебания релейной системы регулирования с запаздыванием, «Автоматика и телемеханика», т. 13, № 2, 1952, стр. 109—120, фиг. 13, библ. 7 назв.

Долголенко Ю. В., Устойчивость и автоколебания одного класса релейных систем автоматического прерывистого регулирования, «Инженерный сборник», т. 13, 1952, стр. 161—176, фиг. 11, библ. 6 назв.

Доманский Б. И., Автоматическое регулирование, в кн.: «Введение в автоматику и телемеханику», ч. 4, раздел второй, Госэнергоиздат, Л.—М. 1950, стр. 277—358, фиг. 61, библ. 50 в конце книги.

Дудников Е. Г., Введение в теорию непрерывного регулирования с постоянной скоростью закрытия, «Автоматика и телемеханика» № 6, 1939, стр. 67—84, фиг. 13, библ. в подстр. прим.

Егоров К. В., Динамика регулирования температуры, кандидатская диссертация, ВТИ—МЭИ, 1938.

Еругин Н. П., Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования, «Прикладная математика и механика», т. 16, вып. 5, 1952 стр. 620—628, библ. 8 назв.

Ершов Б. А., Об устойчивости в целом некоторой системы автоматического регулирования, «Прикладная математика и механика», т. 17, вып. I, 1953, стр. 61—72, фиг. 3, библ. 2 назв.

Есьман И. Г., Регулирование водяных турбин, «Известия СПБ политехнического института», вып. 3—4, 1905, стр. 221—265.

Жуковский Н. Е., Теория регулирования хода машин. Курс лекций, прочитанных в МВТУ, записанных студентами Д. В. Лавровским, Г. В. Фестером, Н. А. Мартьяновым, М. 1909.

Жуковский Н. Е., Теория регулирования хода машин, изд. 2-е. под ред. А. П. Котельникова и Л. П. Смирнова, доп. в качестве учебного пособия ГУУЗ НКТП СССР, Госмашметиздат, М.—Л. 1933.

Ивахненко А. Г., Выбор нелинейных связей и синтез схемы автоматических регуляторов обратным методом, в кн. «Сборник научно-технических статей» вып. 2, АН УССР, Киев 1948, стр. 60—77, фиг. 4, библ. 9 назв.

Ивахненко А. Г., Выбор нелинейных связей и синтез схемы автоматических регуляторов обратным методом, Юбилейный сборник № 2 Киевского политехнического института, 1948.

Ивахненко А. Г., Исследование качества процессов в устойчивых следящих и программных системах регулирования обратным методом, «Сборник трудов Института электротехники АН УССР», вып. 6, 1951, стр. 89—121, фиг. 10, библ. 12 назв.

Ивахненко А. Г., О способах устранения установившейся составляющей ошибки систем автоматического регулирования, «Доклады АН СССР», т. 87. № 6, 1952, стр. 949—952, библ. 7 назв.

Ивахненко А. Г., Теория компаундирующих регуляторов, «Сборник трудов института электротехники АН УССР» № 10, 1953, стр. 5—37, фиг. 10, библ. 7 назв.

Ивахненко А. Г. и Крыжановский О. М., Условия устойчивости и апериодичности систем регулирования с постоянной скоростью сервомотора, «Сборник научно-технических статей Института электротехники АН УССР», вып. 1, 1948, стр. 49—79, фиг. 212, библ. 7 назв.

Иносов В. Л., Исследование параллельной работы регулирующих систем, «Сборник научно-технических статей Института электротехники АН УССР», вып. 1, АН УССР, Киев 1948, стр. 25—48, фиг. 14, библ. 6 назв.

Иносов В. Л., Определение переходного процесса в устойчивых линейных системах, «Сборник научно-технических статей Института электротехники АН УССР», вып. 2, 1948, стр. 19—46, фиг. 9, библ. 14 назв.

Иносов В. Л., Регулирование нескольких параметров, в кн. «Сборник научно-технических статей Института электротехники АН УССР», вып. 1, АН УССР, Киев 1948, стр. 10—24, фиг. 9, библ. 4 назв.

Иносов В. Л., Анализ сложных регулирующих систем, диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, Институт электротехники АН УССР, Киев 1949.

Иносов В. Л., Исследование устойчивости энергетических систем частотным методом и оптимальные характеристики автоматического регулирования напряжения для генераторов, работающих на дальние электропередачи, «Сборник трудов Института электротехники АН УССР», вып. 8, 1952, стр. 63—73, фиг. 4.

Иносов В. Л., Стабилизация регуляторов дополнительным контуром, «Сборник научно-технических статей Института электротехнки АН УССР», 1949, вып. 3, стр. 71—80, фиг. 14, библ. 1 назв.

Иосифьян А. Г., Коган Б. М., Шереметьевский Н. Н., Теория амплидинно-сельсинной синхронно-следящей системы, «Электричество» № 3, 1946, стр. 41—47, фиг. 10, библ. 5 назв.

Иоффе Г. Ш., Влияние электронного автопилота на автоколебания самолета, «Труды МАИ» № 3, 1946, стр. 80—86, фиг. 6, библ. 2 назв.

Казакевич В. В., К теории спусковых регуляторов, «Автоматика и телемеханика», т. 12, № 1, 1951, стр. 41—60, фиг. 18, библ. 7 назв.

Кантор С. А., Регулирование турбомашин, Машгиз, М.—Л. 1946, стр. 200, фиг. 137.

Картвелишвили Н. А., Об условиях качества автоматического регулирования, «Доклады АН СССР», новая серия, т. 61, № 1, 1948, стр. 21—23, фиг. 2.

Картвелишвили Н. А., О критерии качества непрерывного регулирования параллельно работающих машин, «Известия АН Арм. ССР», т. 3, № 3, физ.-мат., естеств. и техн. науки, 1949, стр. 281—297, фиг. 2, библ. 3 назв.

Кириллов И. И., Регулирование турбин с отбором пара, в кн. «Регулирование паровых турбин», ОНТИ Гл. ред. энерг. лит., М.—Л. 1936, стр. 44—77, фиг. 15.

Кириллов И. И., Влияние на устойчивость движения вторичных явлений в системе непрямого регулирования, диссертация на степень доктора технических наук, Ленинградский политехнический институт, 1940.

Кириллов И. И., Регулирование паровых турбин, Энциклопедический справочник «Машиностроение», т. 13, 1949, стр. 173—181.

Коган Б. Я., Автоматическое регулирование скорости многодвигательных электроприводов, диссертация на степень кандидата технических наук, Институт автоматики и телемеханики АН СССР, 1945.

Козлов А. С., Основы теории автопилотов (издание Военно-инженерной академии имени проф. Н. Е. Жуковского, М. 1944.

Корнилов Ю. Г., Теоретические основы исследования систем авторегулирования, «Автоматика и телемеханика» № 4, 1936, стр. 7—38, фиг. 19.

Корнилов Ю. Г., Элементы теории автоматического регулирования, конспект лекций, читанных в Институте усовершенствовация по энергетике, автоматике и связи в 1938—1939 гг., М. 1939, стр. 108.

Корнилов Ю. Г., Аналитическая теория прерывистого регулирования и эффекта запаздывания, диссертация на степень кандидата технических наук, Ленинградский политехнический институт, 1940.

Корнилов Ю. Г., О влиянии нечувствительности регулятора на динамику непрямого регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 11, № 1, 1950, стр. 39—57, фиг. 21, библ. 8 назв.

Корнилов Ю. Г., Условия автономности систем непрерывного и прерывистого регулирования определенных классов, «Автоматика и телемеханика» № 1, 1951, стр. 7—14, библ. 12 назв.

Корнилов Ю. Г., и Пивень В. Д., Основы теории автоматического регулирования в приложении к теплосиловым установкам, Машгиз, М.—Л. 1947, стр. 308, фиг. 113, библ. 41 назв.

Котельников В. А., Продольная устойчивость самолета с автопилотом типа АВП-12, кандидатская диссертация, 1940.

Котельников В. А., Продольная устойчивость самолета с автопилотом типа АВП-12, Институт летных исследований, «Труды ЛИИ» № 2, изд-во Бюро новой техники, М. 1941, стр. 60.

Кощеев П. С., К теории следящих систем, «Автоматика и телемеханика» № 5, 1940, стр. 77—88, фиг. 2.

Красовский А. А., О вибрационном способе линеаризации некоторых нелинейных систем, «Автоматика и телемеханика», т. 9, № 1, 1948, стр. 20—29, фиг. 6, библ. 7 назв.

Красовский А. А., О выборе параметров автоматического регулятора, диссертация на степень кандидата технических наук, Краснознаменная ордена Ленина военно-инженерная академия имени Н. Е. Жуковского, 1948

Красовский А. А., Интегральные оценки качества процесса регулирования, Машгиз, М. 1949, стр. 24, фиг. 7, библ. 7 назв. (Внитоприбор, Комитет промышленных приборов и автоматики).

Красовский А. А., Оценка отклонений в простейших релейных системах автоматического регулирования, «Автоматика и телемеханика». т. 14, № 2, 1953, стр. 137—143, фиг. 6, библ. 2 назв.

Красовский А. А., Поспелов Г. С., Некоторые методы вычисления приближенных временных характеристик линейных систем автоматического регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 14, № 6, 1953, стр. 675—689, фиг. 4, библ. 5 назв.

Крыжановский О. М., Критерии оптимальности переходных процессов регулирования, доклад на конференции Института горной механики, посвященной 30-летию УССР, Киев 1947.

Крыжановский О. М., Исследование регуляторов хода шахтных подъемных машин при постоянном запаздывании в тормозной системе, «Записки Института горной механики АН УССР» № 9, Киев 1951, стр. 45—65, фиг. 14, библ. 16 назв.

Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Основные проблемы нелинейной механики, «Известия АН УССР» № 4, 1933. стр. 475—498, фиг. 6.

Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, издание АН УССР, Киев 1937, стр. 364, фиг. 78, библ. 30 назв.

Кувшинников С. П., Влияние катаракта на динамическую устойчивость непрямого регулирования паровых турбин, «Советское котлотурбостроение» № 2, 1938, стр. 87—89, фиг. 2.

Кувшинников С. П., Процесс регулирования систем с изменяющимися динамическими постоянными, «Труды НИИ 1» МАП СССР, вып. 27, изд. БНТ, 1947, стр. 1—9, фиг. 2.

Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И., Прохождение некоторых случайных функций через линейные системы, «Автоматика и телемеханика», т. 14, № 2, 1953, стр. 144—163, фиг. 2, библ. 11 назв.

Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И., Прохождение случайных функций через нелинейные системы, «Автоматика и телемеханика» т. 14, № 4, 1953, стр. 375—391, фиг. 2, библ. 8 назв.

Кулебакин В. С., К теории автоматических вибрационных регуляторов для электрических машин, «Теоретическая и экспериментальная электротехника» № 4, 1932, стр. 3—21, фиг. 1.

Кулебакин В. С., Об определении основных параметров автоматических регуляторов, «Автоматика и телемеханика» № 6, 1940, стр. 3—24, фиг. 20.

Кулебакин В. С., Общие основы автоматического регулирования, «Автоматика и телемеханика» № 4, 1940, стр. 4—21, фиг. 10.

Кулебакин В. С., К теории самолетных вибрационных регуляторов напряжения, «Юбилейный сборник научных трудов Военно-инженерной академии имени Н. Е. Жуковского», т. I, 1942, стр. 92—110, фиг. 8, библ. 2 назв.

Кулебакин В. С., О поведении непрерывно возмущаемых автоматизированных линейных систем, «Доклады АН СССР», т. 68, № 5, 1949, стр. 855—858, библ. 5 назв.

Кулебакин В. С., О выборе оптимальных параметров автоматических регуляторов и следящих систем, «Доклады АН СССР», т. 77, 1951, стр. 265—267, библ. 3 назв.

Куракин К. И., К вопросу о качестве следящих систем и систем автоматического регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 12, № 2, 1951, стр. 97—112, фиг. 13, библ. 13 назв.

Куракин К. И., О выборе оптимальных характеристик линейных следящих систем, «Автоматика и телемеханика» № 4, 1953, стр. 392—402, фиг. 7, библ. 9 назв.

Кухтенко А. И., Автоматическое регулирование рудничных турбомашин, диссертация на степень кандидата технических наук, Донецкий индустриальный институт, 1940.

Лебедев С. А., Анализ искусственной устойчивости генераторов, «Электричество» № 4, 1938, стр. 31—37, фиг. 9.

Лернер А. Я., Улучшение динамических свойств автоматических компенсаторов при помощи нелинейных связей, 1, «Автоматика и телемеханика» № 2, 1952, стр. 134—144, фиг. 6, библ. 11 назв.

Лернер А. Я., Улучшение динамических свойств автоматических компенсаторов при помощи нелинейных связей, II, «Автоматика и телемеханика» № 4, 1952, стр. 429—444, фиг. 15, библ. 3 назв.

Летов А. М., К задаче об автопилоте, кандидатская диссертация, МГУ, 1945.

Летов А. М., К задаче об автопилоте, «Вестник Московского университета» № 1, 1946, стр. 123—129, фиг. 10, библ. 14 назв.

Летов А. М., Об одном особом случае исследования устойчивости систем регулирования, «Прикладная механика и математика», т. 12, № 6, 1948, стр. 729—736, библ. 1 назв.

Летов А. М., Собственно неустойчивые регулируемые системы, «Прикладная математика и механика», т. 14, вып. 2, 1950, стр. 183—192, фиг. 2, библ. 7 назв.

Летов А. М., Устойчивость регулируемых систем с двумя исполнительными органами, «Прикладная математика и механика», т. 17, вып. 4, 1953, библ. 4 назв.

Летов А. М., К теории качества нелинейных регулируемых систем, «Автоматика и телемеханика». т. 14, № 5, 1953, стр. 588—596, фиг. 1, библ. 6 назв.

Лехтман И. Я., К расчету релейных следящих систем, «Автоматика и телемеханика», т. 12, № 1, 1951, стр. 15—27, фиг. 13, библ. 9 назв.

Лифшиц Н. А., Следящие системы непрерывного действия, Военная Краснознаменная академия связи имени С. М. Буденного, Л. 1950, стр. 418, 413—415.

Лившиц Н. А., Спицин Д. В., Данилин А. В., под ред. Н. А. Лившица, Следящие устройства, 3 главы в кн. «Теория и расчет элементов автоматических систем. Приводные механизмы», гл. XIII, XIV, XV, М. 1939, стр. 194—306.

Лоссиевский В. Л., Автоматические регуляторы, Оборонгиз, М. 1944, стр. 391, библ. по главам.

Лоссиевский В. Л., Автоматическое регулирование, Изд-во АН СССР, М.—Л. 1946, стр. 123, библ. 21 назв.

Лоссиевский В. Л., Основы автоматического регулирования технологических процессов, Оборонгиз, М. 1949, стр. 227, фиг. 112, библ. 54 назв.

Лоссиевский В. Л., Основы автоматического регулирования, Госэнергоиздат, М.—Л. 1950, стр. 110, фиг. 39, библ. 8 назв (Обществ. университет Всесоюзного совета научных инженерно-технических обществ).

Лузин Н. Н., К изучению матричной теории дифференциальных уравнений, «Автоматика и телемеханика» № 5, 1940, стр. 3—66, фиг. 1, библ. 4 назв.

Лузин Н. Н., Кузнецов П. И., К абсолютной инвариантности и инвариантности до ε в теории дифференциальных уравнений. I, «Доклады АН СССР», т. 51, № 4, 1946, стр. 247—249, библ. 1 назв.

Лузин Н. Н., Кузнецов П. И., К абсолютной инвариантности и инвариантности до ε в теории дифференциальных уравнений, II, «Доклады АН СССР», т. 51, № 5, 1946, стр. 331—333, библ. 1 назв.

Лузин Н. Н., Кузнецов П. И., К абсолютной инвариантности и инвариантности до ε в теории дифференциальных уравнений, III, «Доклады АН СССР» т. 80, № 3, 1951, стр. 325—327, библ. 1 назв.

Лурье А. И., Об устойчивости одного класса регулируемых систем, «Прикладная математика и механика» т. 9, № 5, 1945, стр. 353—367, фиг. 1, библ. 6 назв.

Лурье А. И., Влияние силы трения в измерительных органах регулятора на процесс непрямого регулирования, «Советское котлотурбостроение» № 3, 1946.

Лурье А. И., Влияние силы трения в измерительном органе регулятора на процесс непрямого регулирования, «Инженерный сборник», т. 4, № 1, 1947, стр. 150—164, фиг. 10, библ. 2 назв.

Лурье А. И., Об автоколебаниях в некоторых регулируемых системах, «Автоматика и телемеханика», т. 8, № 5, 1947, стр. 335—348, библ. 4 назв.

Лурье А. И., Об устойчивости автоколебаний регулируемых систем, «Автоматика и телемеханика», т. 9, № 5, 1948, стр. 361—362, библ. 2 назв.

Лурье А. И., О канонической форме уравнений теории автоматического регулирования, «Прикладная математика и механика», т. 12, № 5, 1948, стр. 651—666, библ. 6 назв.

Лурье А. И., О собственных неустойчивых регулируемых системах, «Прикладная математика и механика», т. 11, вып. 2, 1951, стр. 251—254, библ. 5 назв.

Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехтеоретиздат, М.—Л. 1951, стр. 216, фиг. 24, библ. по разделам.

Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, докторская диссертация, Харьков 1892.

Малкин И. Г., Об устойчивости систем автоматического регулирования, «Прикладная математика и механика», вып. 4, 1950, стр. 495—499.

Малкин И. Г., Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования, «Прикладная математика и механика», т. 16, вып. 3, 1952, стр. 365—368, библ. 3 назв.

Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехтеоретиздат, 1952, стр. 432.

Марьяновский Д. И., Устойчивость линейных систем автоматического регулирования, «Электричество» № 9, 1946, стр. 15—30, фиг. 26, библ. 3 назв.

Марьяновский Д. И., Системы автоматического регулирования без внутренних обратных связей, диссертация на степень кандидата технических наук, Институт автоматики и телемеханики АН СССР, 1947.

Марьяновский Д. И., Система автоматического регулирования с жесткими внутренними обратными связями, «Вестник электропромышленности» № 3, 1949, стр. 8—15, фиг. 24.

Марьяновский Д. И., Исследование устойчивости системы регулирования при введении внутренних связей, «Электричество» № 3, 1950, стр. 51—56, фиг. 6.

Марьяновский Д. И., Изменение параметров систем регулирования внутренними связями, «Электричество» № 2, 1950, стр. 21—32, фиг. 20, библ. 3 назв.

Мееров М. В., Системы автоматического регулирования, устойчивые при сколь угодно малой статической ошибке, и следящие системы, устойчивые при любой сколь угодно малой динамической ошибке, докторская диссертация, Институт автоматики и телемеханики АН СССР, М. 1947.

Мееров М. В., Принципы построения систем авторегулирования с малой установившейся ошибкой, «Вестник электропромышленности», т. 10, № 2, 1949, стр. 84—98, фиг. 10, библ. 8 назв.

Мееров М. В., Об одном случае применения границы Д-разбиения для оценки качества систем автоматического регулирования, «Известия АН СССР. ОТН» № 12, 1950, стр. 1784—1894, фиг. 12, библ. 6 назв.

Мееров М. В., Об использовании кривой Д-разбиения для исследования качества систем автоматического регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 12, № 6, 1951, стр. 453—464, фиг. 14, библ. 9 назв.

Мееров М. В., Основы автоматического регулирования электрических машин, Госэнергоиздат, М.—Л. 1952, стр. 175, фиг. 20.

Мееров М. В., Некоторые вопросы выбора структурной схемы системы автоматического регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 13, № 4, 1952, стр. 405—416, фиг. 12, библ. 8 назв.

Мееров М. В., О стабилизации систем, содержащих элементы запаздывания, «Автоматика и телемеханика», т. 14, № 5, 1953, стр. 647—658, фиг. 11, библ. 12 назв.

Михайлов А. В., Метод гармонического анализа в теории регулирования, «Автоматика и телемеханика» № 3, 1938, стр. 27—81, фиг. 37.

Михайлов А. В., О новом методе исследования замкнутых регулируемых цепей, «Автоматика и телемеханика» № 4—5, 1938, стр. 170—171.

Михайлов А. В., Теория устойчивости линейных цепей обратной связи с сосредоточенными постоянными, «Журнал технической физики» № 1, 1939, стр. 20—31, фиг. 10.

Михайлов А. В., О методе проектирования автоматических регуляторов, предложенном проф. В. Г. Щипановым, «Автоматика и телемеханика» № 5, 1940, стр. 129—143, фиг. 4.

Михайлов А. В., Метод исследования апериодичности авторегулирующих систем, 1 кн. «Тезисы и доклады на научном совещании по теории регулирования», изд-во АН СССР, М.—Л. 1940, стр. 137—138.

Михайлов А. В., Метод исследования устойчивости авторегулирующих систем, в кн. «Тезисы и конспекты докладов на научном совещании по теории регулирования». АН СССР, М.—Л. 1940, стр. 139—141.

Михайлов А. В., Критерий апериодичности авторегулирующих систем, «Автоматика и телемеханика» № 1, 1941, стр. 21—32, фиг. 4.

Михайлов Л. Н., Некоторые замечания относительно теории полной компенсации возмущений, «Автоматика и телемеханика» № 5, 1940, стр. 145—154, фиг. 1.

Моисеев Н. Д., О некоторых вопросах теории устойчивости, «Труды Военно-воздушной академии имени Н. Е. Жуковского», вып. 45, М. 1939, стр. 58, библ. 8 назв.

Моисеев Н. Д., О некоторых методах теории технической устойчивости, ч. 1-я, О выводе достаточных условий технической устойчивости методом грубой мажорации, «Труды Военно-воздушной академии имени Н. Е. Жуковского», вып. 135, 1945, стр. 29.

Мясников Н. Н., Критерий Михайлова и оценка корней характеристического уравнения, «Автоматика и телемеханика», т. 10, № 4, 1949, стр. 267—273.

Мясников Н. Н., Теория прямого регулирования по Вышнеградскому и влияние эффекта запаздывания, «Известия АН СССР. ОТН» № 9, 1953, стр. 1217—1228, фиг. 12, библ. 1 назв.

Николаи Е. Л., К расчету центробежного регулятора прямого действия, Юбилейный сборник Научно-технического кружка, Ленинградский технологический институт, 1928, стр. 9.

Николаи Е. Л., Регулирование машин. По лекциям и под редакцией Е. Л. Николаи составил К. С. Митревич, Изд-во Кубуч, Л. 1930, стр. 164, фиг. 77.

Николаи Е. Л., О работе проф. Г. В. Щипанова «Теория и методы проектирования автоматических регуляторов», «Прикладная математика и механика», т. 6, № 1, 1942, стр. 111—114.

Никольский Г. Н., К вопросу об автоматической устойчивости корабля на заданном курсе, «Труды Центральной лаборатории проводной связи» № 1, Л.—М. 1934, стр. 34—75.

Никольский Г. Н., К вопросу об автоматическом пилотировании самолетов, диссертация на степень доктора технических наук, Ленинградский политехнический институт, 1945.

Неймарк Ю. И., Структура Д-разбиения пространства полиномов и диаграммы Вышнеградского и Найквиста, «Доклады АН СССР», т. 59, № 5, 1948, стр. 853—856, библ. 11 назв.

Неймарк Ю. И., Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива, «Автоматика и телемеханика», т. 9, № 3, 1948, стр. 190—203, фиг. 10, библ. 13 назв.

Неймарк Ю. И., К вопросу о влиянии гидравлического удара на регулирование турбин, «Автоматика и телемеханика», т. 9, № 4, 1948, стр. 299—301, фиг. 3, библ. 2 назв.

Неймарк Ю. И., Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределенных), ЛКВВИА, Л. 1949, стр. 140, фиг. 59, библ. стр. 137—138.

Неймарк Ю. И., О структуре областей устойчивости одноконтурных систем, «Автоматика и телемеханика», т. 11, № 1, 1950, стр. 58—72, фиг. 20, библ. 5 назв.

Неймарк Ю. И., О периодических режимах и устойчивости релейных систем, «Автоматика и телемеханика», т. 14, № 5, 1953, стр. 556—569, фиг. 9, библ. 9 назв.

Неймарк Ю. И., Кубланов И. М., Исследование периодических режимов и их устойчивости для простейшей распределенной системы релейного регулирования температуры, «Автоматика и телемеханика», т. 14, № 1, 1953, стр. 34—43, фиг. 6.

Ольденбург Р. и Сарториус Г., Динамика автоматического регулирования, пер. с нем. под ред. А. В. Михайлова, Госэнергоиздат, 1949.

Петров Б. Н., Анализ автоматических копировальных систем, диссертация на степень доктора технических наук, Институт автоматики и телемеханика АН СССР, 1945.

Петров Б. Н., О построении преобразования структурных схем, «Известия АН СССР. ОТН» № 12, 1945, стр. 1146—1162, фиг. 12, библ. 1 назв.

Петров В. В., Об автоколебаниях двухкаскадных следящих механизмов с релейным управлением, «Автоматика и телемеханика», т. 12, № 1, 1951, стр. 28—40, фиг. 15, библ. 16 назв.

Петров В. В. и Уланов Г. М., Теория двух простейших релейных систем авторегулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 11, № 5, 1950, стр. 289—299, фиг. 8, библ. 2 назв.

Петров В. В. и Уланов Г. М., О стабилизирующем эффекте импульса по ускорению в обратной связи релейной следящей системы, «Автоматика и телемеханика», т. 12, № 5, 1951, стр. 389—397, фиг. 8, библ. 8 назв.

Петров В. В. и Уланов Г. М., Использование жесткой и скоростной обратной связей для подавления автоколебаний двухкаскадного сервомеханизма с релейным управлением, «Автоматика и телемеханика», т. 13, № 2, 1952, стр. 121—133, фиг. 8, библ. 7 назв.

Петров В. В. и Уланов Г. М., Дополнение к статье «Использование жесткой и скоростной обратных связей для подавления автоколебаний двухкаскадного сервомеханизма с релейным управлением», «Автоматика и телемеханика», т. 13, № 6, 1952, стр. 744—746, фиг. 4, библ. 2 назв.

Попов В. К., К теории следящего электропривода при статическом моменте, пропорциональном скорости, и при восстанавливающем моменте, пропорциональном углу рассогласования, «Известия АН СССР. ОТН» № 7—8, 1944, стр. 462—472, библ. 1 назв.

Попов В. К., Об анализе линейных следящих приводов с непрерывным управлением, «Труды Ленинградского политехнического института» № 2, 1947, стр. 152—167, фиг. 15, библ. 11 назв.

Попов Е. К., Теория авторегулирования и ее применение к электрическим машинам в приводах, в кн. «Тезисы и конспекты докладов на научном совещании по теории регулирования», АН СССР, М.—Л. 1940, стр. 161—169.

Попов Е. К., Автоматическое регулирование электрических машин в приводах, «Автоматика и телемеханика» № 1, 1941, стр. 93—114, фиг. 14.

Попов Е. П., Учет влияния нелинейностей при расчете следящих систем, «Автоматика и телемеханика», т. 14, № 6, 1953, стр. 690—711, фиг. 14, библ. 8 назв.

Поповский А. М., К теории регулирования прямоточного котла, диссертация на степень кандидата технических наук, Институт автоматики и телемеханики АН СССР, М. 1947.

Поповский А. М., О свободе выбора параметров автономных процессов регулирования нескольких взаимосвязанных величин, «Автоматика и телемеханика», т. 10, № 6, 1949, стр. 401—423, библ. 13 назв.

Поповский А. М., Графо-аналитический способ построения *Д*-разбиения для систем регулирования взаимосвязанных величин, «Автоматика и телемеханика», т. 13, № 5, 1952, стр. 525—535, фиг. 5, библ. 6 назв.

Поспелов Г. С., Побудительная стабилизация релейно-контактных систем автоматического регулирования, «Труды Военно-воздушной академии имени Н. Е. Жуковского», НТК, вып. 335, М. 1949, стр. 48, фиг. 19, библ. 11 назв.

Р е р и х К. Э., Теория регулирования машин, ч. 1-я, Петроград 1916, стр. 193, фиг. 33.

Р у б и н ч и к А. М., Приближенный метод оценки качества регулирования в линейных системах, в сб. «Устройства и элементы теории автоматики и телемеханики», Машгиз, М. 1952, стр. 197—246, фиг. 20, библ. 9 назв.

Р я б о в Б. А., Определение параметров режима установившихся автоколебаний некоторых систем, «Доклады АН СССР» т. 71, № 4, 1950, стр. 663—666, фиг. 4, библ. 4 назв.

С а д о в с к и й И. М., Асинхронный серводвигатель как элемент системы регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 13. № 6, 1952, стр. 669—674, фиг. 2, библ. 5 назв.

С и д о р о в А. И., Плоские регуляторы быстроходных машин, СПБ. 1895, стр. 2, VI, 172, фиг. 59.

С т а н и с л а в с к и й Б. И., Основы теории электрических счетнорешающих устройств, Оборонгиз, М—Л. 1948, стр. 174, фиг. 147.

С т р е л к о в С. П., К общей теории линейных усилителей, «Автоматика и телемеханика», т. 10, № 4, 1949, стр. 274—289, фиг. 6, библ. 2 назв.

С о к о л о в А. А., Критерий устойчивости линейных систем регулирования с распределенными параметрами и его приложения, «Инженерный сборник», т. II, вып. 2, 1946, стр. 3—26, фиг. 13, библ. 4 назв.

С о к о л о в Т. Н., Электромеханические системы автоматического управления, Госэнергоиздат, Л.—М. 1952, стр. 252.

С о л о д о в н и к о в В. В., Некоторые методы исследования систем автоматического регулирования, диссертация на степень кандидата технических наук, Всесоюзный электротехнический институт имени В. И. Ленина, М. 1939.

С о л о д о в н и к о в В. В., Применение операторного метода к исследованию процесса регулирования скорости гидротурбины, «Автоматика и телемеханика» № 1, 1941, стр. 5—20, фиг. 3, библ. 9 назв.

С о л о д о в н и к о в В. В., Об уравнении регулирования и об основной задаче теории регулирования, «Бюллетень Всесоюзного электротехнического института» № 4, 1941, стр. 37—41, фиг. 3.

С о л о д о в н и к о в В. В., Интегральное уравнение системы регулирования, «Бюллетень Всесоюзного электротехнического института» № 5, 1941, стр. 46—47.

С о л о д о в н и к о в В. В., Об одном приближенном методе исследования динамики систем регулирования и следящих систем, «Известия АН СССР. ОТН» № 12, 1945, стр. 1179—1202, фиг. 10, библ. 12 назв.

С о л о д о в н и к о в В. В., Об одном применении операторного исчисления к динамическим системам с переменными параметрами, «Известия АН СССР. ОТН» № 12, 1945, стр. 1203—1212, библ. 7 назв.

С о л о д о в н и к о в В. В., Устойчивость линейных следящих систем и систем регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 7, № 1, 1946, стр. 43—68, фиг. 9, библ. 14 назв.

С о л о д о в н и к о в В. В., Исследование динамики следящих электроприводов и систем авторегулирования методом частотных характеристик, «Электричество» № 4, 1947, стр. 22—28, фиг. 10, библ. 14 назв.

С о л о д о в н и к о в В. В., Метод частотных характеристик в теории регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 8, № 2, 1947, стр. 65—88, фиг. 12, библ. 14 назв.

С о л о д о в н и к о в В. В., Частотный метод анализа следящих и регулируемых систем, докторская диссертация, Институт автоматики и телемеханики АН СССР, М. 1948.

С о л о д о в н и к о в В. В., Критерий качества регулирования, «Доклады АН СССР», новая серия, т. 60, № 6, 1948, стр. 977—980, фиг. 1, библ. 4 назв.

С о л о д о в н и к о в В. В., Критерий отсутствия перерегулирований и критерий монотонности, «Доклады АН СССР», новая серия, т. 62, № 5, 1948, стр. 599—602, фиг. 3, библ. 3 назв.

С о л о д о в н и к о в В. В., Об условиях, при которых перерегулирования не могут быть велики, «Автоматика и телемеханика», т. 9, № 4, 1948, стр. 293—298, фиг. 5, библ. 3 назв.

С о л о д о в н и к о в В. В., Применение метода логарифмических частотных характеристик к исследованию устойчивости и к оценке качества следящих и регулируемых систем, «Автоматика и телемеханика», т. 9, № 2, 1948, стр. 85—103, фиг. 12, библ. 5 назв.

С о л о д о в н и к о в В. В., О применении трапецоидальных частотных характеристик к анализу качества систем автоматического регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 10, № 5, 1949, стр. 362—376, фиг. 10, библ. 7 назв.

С о л о д о в н и к о в В. В., Анализ качества следящих систем по их амплитудно-фазовым характеристикам, «Известия АН СССР. ОТН» № 4, 1949, стр. 473—491, фиг. 10, библ. 11 назв.

С о л о д о в н и к о в В. В., Анализ и синтез следящих и регулируемых систем, находящихся под влиянием стационарных случайных воздействий, «Известия АН СССР. ОТН» № 11, 1950, стр. 1648—1679, фиг. 4, библ. 14.

С о л о д о в н и к о в В. В., Частотный метод анализа качества систем автоматического регулирования, лекция на семинаре по теории автоматического регулирования, Машгиз, М. 1950, стр. 40, фиг. 44 (Внитоприбор, Комитет промышленных приборов и автоматики).

С о л о д о в н и к о в В. В., Синтез корректирующих устройств следящих систем при типовых воздействиях, «Автоматика и телемеханика», т. 12, № 5, 1951, стр. 352—388, фиг. 25, библ. 15 назв.

С о л о д о в н и к о в В. В., О динамической точности и оптимальных характеристиках следящих систем и преобразующих устройств, «Доклады АН СССР», т. 77, № 2, 1951, стр. 269—272, фиг. 3, библ. 8 назв.

С о л о д о в н и к о в В. В., Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, Гостехиздат, М.—Л. 1952, стр. 367, фиг. 82.

С о л о д о в н и к о в В. В., Синтез корректирующих устройств следящих систем при помощи оптимальных и типовых логарифмических частотных характеристик, «Автоматика и телемеханика», т. 14, № 5, 1953, стр. 531—555, фиг. 10, библ. 6 назв.

Т а л ь А. А., Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования применительно к «инерционным» регуляторам и объектам с саморегулированием, кандидатская диссертация, М. 1949.

Т а л ь А. А., Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования с учетом воздействий по производной регулируемого параметра и саморегулирования объекта, «Автоматика и телемеханика», т. 14, № 5, 1953, стр. 604—637, фиг. 12, библ. 25 назв.

Т е о д о р ч и к К. Ф., Типы движений управляемых реле сервомеханизмов, «Журнал технической физики», т. 8, вып. 10, 1938, стр. 960—967, фиг. 11.

Т е о д о р ч и к К. Ф., Автоколебательные системы, изд. 3-е, Гостехиздат, М.—Л. 1952, стр. 271, фиг. 149, библ. 11 назв.

Т р о и ц к и й В. А., О канонических преобразованиях уравнений теории автоматического регулирования, «Прикладная математика и механика», т. 17, вып. 1, 1953, стр. 49—60, библ. 3 назв.

Т у п и ц ы н А. И., О форме кривой переходного процесса при минимуме интегральной квадратичной погрешности, «Автоматика и телемеханика», т. 14, № 4, 1953, стр. 407—417, фиг. 9, библ. 10 назв.

У д е р м а н Э. Г., Об одном методе определения параметров линейных систем авторегулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 10, № 2, 1949, стр. 113—121, фиг. 1, библ. 4 назв.

У л а н о в Г. М., Исследование автоматического регулирования наддува авиадвигателя, кандидатская диссертация, Институт автоматики и телемеханики АН СССР, 1948.

У л а н о в Г. М., О максимальном отклонении регулируемой величины в переходном процессе, «Автоматика и телемеханика», т. 9, № 3, 1948, стр. 168—175, фиг. 2, библ. 6 назв.

У м а н с к и й В. Б., Исследование процесса регулирования хода шахтной подъемной машины, «Горный журнал» № 6, 1934, стр. 51—60, фиг. 18.

У м а н с к и й В. Б., Исследование процесса регулирования шахтной подъемной машины, диссертация на степень доктора технических наук, Московский горный институт, 1939.

Фельдбаум А. А., Интегральные критерии качества регулирования. «Автоматика и телемеханика», т. 9, № 1, 1948, стр. 3—19, фиг. 4, библ. 5 назв.
Фельдбаум А. А., Введение в теорию нелинейных цепей, Госэнергоиздат, М.—Л. 1948, стр. 324, фиг. 159, библ. на стр. 315—324.
Фельдбаум А. А., Методы исследования переходных процессов в самоустанавливающихся системах, докторская диссертация, М. 1948.
Фельдбаум А. А., О распределении корней характеристического уравнения систем регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 9, № 4, 1948, стр. 253—279, фиг. 13, библ. 4 назв.
Фельдбаум А. А., Простейшие релейные системы автоматического регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 10, № 4, 1949, стр. 249—266, фиг. 16, библ. 12 назв.
Фельдбаум А. А., Исследование динамики систем автоматического регулирования по методу обобщенного интегрального критерия, «Электричество» № 7, 1951, стр. 18—24, фиг. 4, библ. 13 назв.
Фельдбаум А. А., Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования, «Автоматика и телемеханика» № 6, 1953, стр. 712—728, фиг. 11, библ. 8 назв.
Фиалко Г. М., Костромитин Л. А. и Девятов Б. Н., Определение оптимальных параметров регуляторов технологических процессов, «Автоматика и телемеханика» № 4, 1952, стр. 417—424, фиг. 9, библ. 14 назв.
Харкевич А. А., Об измерении суммарной квадратичной погрешности, «Журнал технической физики», т. 7, вып. 10, 1937, стр. 1083—1095, фиг. 22.
Харкевич А. А., О некоторых частотных соотношениях между частотными характерстиками и переходными функциями, «Журнал технической физики». 1939, т. 9, вып. 9, стр. 831—838, фиг. 8, библ. 7 назв.; вып. 11, стр. 1008—1013, фиг. 5.
Цыпкин Я. З., Критерий устойчивости линейных систем с обратной связью, «Журнал технической физики», т. 16, № 6, 1946, стр. 723—728, фиг. 4, библ. 4 назв.
Цыпкин Я. З., Устойчивость систем с обратной связью, «Радиотехника» № 5, 1946, стр. 33—44, фиг. 8, библ. 11 назв.
Цыпкин Я. З., Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью, «Автоматика и телемеханика». т. 7, № 2—3, 1946, стр. 107—128, фиг. 19, библ. 27 назв.
Цыпкин Я. З., Степень устойчивости систем с запаздывающей обратной связью, «Автоматика и телемеханика», т. 8, № 3, 1947, стр. 145—156, фиг. 6, библ. 4. назв.
Цыпкин Я. З., Системы с запаздывающей обратной связью, докторская диссертация, Институт автоматики и телемеханики АН СССР, М. 1947.
Цыпкин Я. З., Устойчивость и степень устойчивости систем прерывистого регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 9, № 2, 1948, стр. 123—143, фиг. 15, библ. 16 назв.
Цыпкин Я. З., Устойчивость одного класса систем автоматического регулирования с распределенными параметрами, «Автоматика и телемеханика», т. 9, № 3, 1948, стр. 176—189, фиг. 11, библ. 23 назв.
Цыпкин Я. З., Теория прерывистого регулирования, I. Система с принудительным ритмом размыкания цепи. Уравнения и характеристики систем прерывистого регулирования, «Автоматика и телемеханика»», т. 10, № 3, 1949, стр. 189—224, фиг. 24, библ. 15 назв.
Цыпкин Я. З., Теория прерывистого регулирования, II. Устойчивость систем прерывистого регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 10, № 5, 1949, стр. 343—361, фиг. 17, библ. 13 назв.
Цыпкин Я. З., Теория прерывистого регулирования, III. Переходные процессы в системах прерывистого регулирования, «Автоматика и телемеханика, т. 11, № 5, 1950, стр. 300—319, фиг. 10, библ. 1 назв.
Цыпкин Я. З., Критерии устойчивости линейных систем автоматического регулирования, лекция на семинаре по теории автоматического регулирования, Машгиз, М. 1950, стр. 27, фиг. 23, библ. 9 назв. (Внитоприбор, Комитет промышленных приборов и автоматики).

Цыпкин Я. З., Устойчивость и автоколебания в релейных системах автоматического регулирования, «Труды Ленинградской Краснознаменной военно-воздушной академии», вып. 32, 1950, стр. 38—66.

Цыпкин Я. З., Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях, Госэнергоиздат, М.—Л. 1951, стр. 220, библ. 47 назв.

Цыпкин Я. З., Вынужденные колебания в релейных системах автоматического регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 13, № 5, 1952, стр. 501—524, фиг. 17, библ. 9 назв.

Цыпкин Я. З., О верхней границе степени устойчивости одноконтурных систем автоматического регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 13, № 4, 1952, стр. 425—428, библ. 9 назв.

Цыпкин Я. З., Частотный метод анализа систем прерывистого регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 14, № 1, 1953, стр. 11—33, фиг. 20, библ. 13 назв.

Цыпкин Я. З., Расчет систем прерывистого регулирования при наличии стационарных случайных воздействий, «Автоматика и телемеханика», т. 14, № 4, 1953, стр. 353—374, фиг. 9, библ. 15 назв.

Цыпкин Я. З., Об устойчивости периодических режимов в релейных системах автоматического регулирования, «Автоматика и телемеханика», т. 14, № 5, 1953, стр. 638—646, фиг. 5, библ. 12 назв.

Цыпкин Я. З. и Бромберг П. В., О степени устойчивости линейных систем, «Известия АН СССР. ОТН» № 12, 1945, стр. 1163—1168, фиг. 3, библ. 3 назв.

Чеботарев Н. Г., Задача Гурвица для трансцендентных функций, «Труды Ленинградской Краснознаменной военно-воздушной академии», вып. 7, 1945, стр. 7.

Чеботарев Н. Г. Письмо Н. Г.. Чеботарева об одной математической задаче, возникшей в связи с оценкой отклонения регулируемой координаты, если возмущающая сила ограничена по модулю, «Автоматика и телемеханика», т. 9, № 4, 1948, стр. 331—334.

Чебышев П. Л., О центробежном уравнителе, Отчет и речи, произнесенные в торжественном собрании Московского технического училища 20 (8) сентября 1871 г.

Чернов Е. И., Исследование маломощного сервомеханизма на переменном токе, «Автоматика и телемеханика», т. 13, № 1, 1952, стр. 13—27, фиг. 1, библ. 10 назв.

Четаев Н. Г., Устойчивость движения, ОГИЗ, Гостехиздат, М.—Л. 1946, стр. 204.

Чижов Д. С., Об уравнивателях паров в паровых машинах, употребляемых в виде конического отвеса, в кн. «Записки о приложении начал механики к исчислению действий некоторых из машин наиболее употребляемых», СПБ. 1823, стр. 143—146, чертеж № 14.

Чиколев В. Н., Дифференциальный регулятор дуговой лампы, «Электричество» № 3—4, 1880, стр. 52—53.

Шембель Б. К., Эквивалентный импеданц нелинейного элемента линейной системы, «Журнал технической физики», т. 9, вып. 6, 1939, стр. 514—524, фиг. 9, библ. 4 назв.

Шенфер К. И., Синхронный двигатель с автоматическим регулированием, «Электричество» № 5—6, 1928, стр. 82—85.

Шкабара Е. А., Прецизионная система регулирования скорости двигателя постоянного тока, в кн. «Сборник научно-технических статей Института электротехники АН УССР», вып. 2, 1948, стр. 85—92, фиг. 5.

Шкабара Е. А., Определение максимальной степени устойчивости систем авторегулирования, «Сборник трудов Института электротехники АН УССР», вып. 4, 1949, стр. 98—116, фиг. 8, библ. 2 назв.

Щегляев А. В., Регулирование паровых турбин, Госэнергоиздат, М.—Л. 1933, стр. 47.

Щегляев А. В., Регулирование паровых турбин, ОНТИ. М.—Л. 1938, стр. 392, фиг. 250.

Щегляев А. В., Задача регулирования современных паровых турбин, докторская диссертация, Московский энергетический институт имени В. М. Молотова, М. 1949.

Регулирование паровых турбин, ОНТИ НКТП СССР, М.—Л. 1938, стр. 392, фиг. 250.

Щипанов Г. В., Теория и методы проектирования автоматических регуляторов, «Автоматика и телемеханика» № 1, 1939, стр. 49—66, фиг. 8.

Щипанов Г. В., О рецензии Ф. Р. Гантмахера на мою работу «Теория и методы проектирования автоматических регуляторов», «Известия АН СССР. ОТН» № 3, 1940, стр. 111—113.

Щукин А. И., Переходные процессы в синхронно-следящих системах (МВО СССР, Всесоюзный заочный энергетический институт), М. 1952, стр. 79, фиг. 29, библ. 12 назв.

Якименко И. М., Электромашинный усилитель как элемент регулирующей системы, «Электричество» № 9, 1948, стр. 20—26, фиг. 7, библ. 3 назв.

II. РАБОТЫ ЗАРУБЕЖНЫХ АВТОРОВ

Ahrendt W. R. & Taplin J. F., Автоматическое регулирование, Washington DC 1947.

Ahrendt W. R. & Taplin J. F., Автоматическое регулирование, McGraw-Hill C°, N.-Y. — Toronto — London 1951, стр. 412, библ. стр. 399—400.

Airy G. B., О регуляторе для часового механизма, обеспечивающего равномерное движение экваториалов, «Memoirs of the Royal Astronomical Society», т. XI, 1840, стр. 249—267.

Bauersfeld W., Автоматическое регулирование турбин, J. Springer, Berlin 1905, стр. 208, фиг. 126.

Bayard M., Отношения между вещественными и мнимыми частями импеданца и определение импеданцев в функции одной из этих частей, «Revue generalè de l'Electricité», 1935, т. 37, № 21, стр. 659—664.

Behar M. F., Введение в теорию регулирования температуры, Instruments» № 12, 1940, № 1—2, 1941.

Bode H. W., Зависимость между затуханием и фазой при расчете усилителей с обратной связью, «Bell System technical Journ.», т. 19, июль 1940, стр. 421—454.

Bode H. W., Анализ цепей и расчет усилителей с обратной связью. Van Nostrand C°, N.-Y. 1945, стр. 551.

Bode H., Shannon C., Упрощенный способ получения результатов теории сглаживания и упреждения, «Proc. IRE», т. 38, № 4, 1950, стр. 417—425.

Brown G. S. & Campbell D. P., Основы теории следящих систем, John Wiley & Sons, N.-Y. Chapman, L. 1948, XIV, стр. 400, библ. стр. 389—393.

Brown G. S. and Hall A. C., Динамика и расчет следящих систем, «Trans. ASME» т. 68, июль 1946, стр. 503—524.

Callender A., Hartree D. R. and Porter A., Запаздывание в системах автоматического регулирования, ч. I, «Philosoph. Transactions», т. 235, 1936, стр. 415—444.

Callender A., Hartree D. R., Porter A. & Stevenson A., Запаздывание в системах автоматического регулирования, II, «Proceed. of Royal Society», т. 161, 1937, стр. 460.

Cann D. A., Анализ релейной следящей системы, «Trans. ASME», т. 69 ч. II, 1947, стр. 1079—1088.

Chestnut H., Получение частотных характеристик следящих систем, «GE Review», т. 50, № 12, 1947, стр. 38—44, фиг. 4. библ. 8 назв.

Chestnut H. & Mayer R. W., Сравнение работы следящих систем в установившемся и переходном режимах, «Trans. AIEE», т. 68, 1949, стр. 765—777.

Chestnut H., Mayer R. W., Расчет регулирующих и следящих систем, т. 1, John Wiley, N.-Y. 1951, стр. 506.

Dutilh J. R., Теория нелинейных следящих систем, «Radio frequency» № 5, 1950, № 5, стр. 1—7.
Dutilh J. R., Теория релейных следящих систем, «L'onde Electrique», октябрь 1950, стр. 438—445.
Eggers H. H., Теория прерывистого регулирования температуры, «ETZ», т. 69, № 10, 1948, стр. 329—332.
Evans W. R., Синтез систем регулирования при помощи метода распределения корней, «Trans. AIEE», т. 69. N.-Y. 1950, также «El. Eng.». № 5, 1950, стр. 405.
Farcot J., Сервомотор или порабощенный мотор, Paris 1873, стр. 92, фиг. 56, 4 л. чертежей.
Farrington G. H., Теоретические основы регулирования, «Journ. IEE», т. 94, № 1, 1947, стр. 23—38.
Farrington G. H., Основы автоматического регулирования, Chapman & Hall, London 1951, стр. 285, фиг. 169, библ. 12 назв.
Ferrel E. B., Сервопроблема как проблема передачи, «Proc. IRE», т. 33, ноябрь 1945, стр. 763—767, русск. пер. ВЭП № 10—11, 1946, стр. 21.
Fraser L., Устойчивость и стабилизация самолетов, «Bull. de l'Association technique maritime et aeronautique» № 48, 1949.
Frey W., Обобщение критериев устойчивости Найквиста и Леонарда, «Brown Boveri Review», т. 33, 1946, стр. 59—65.
Graham Robert E., Теория линейных следящих исстем, «Bell System Techn. Journal», т. 25, № 4, 1946, стр. 616—651.
Görk E., Критерий устойчивости «Arch. Electrisch. Uebertrag», т. 4, № 3, 1950, стр. 89—96.
Hall A. C., Анализ и синтез линейных следящих систем, Massach. Inst. Technology Press Cambridge, Mass. 1943.
Hall A. C., Применение теории цепей к расчету следящих систем, «Journ. Franklin Inst.», т. 242, № 4, 1946.
Harris H, Анализ и расчет следящих систем, ASME Advance Paper, 46—F (сессия Общества инженеров-механиков от 30 октября 1946), стр. 13.
Harris H. Jr., Частотная характеристика систем автоматического регулирования, «Trans. AIEE», т. 65, 1946, стр. 539—545.
Hartmann W. W., Связь диаграммы Найквиста с распределением полюсов и нулей в комплексной плоскости, «Proc. IRE», т. 38, № 12, 1950, стр. 1454.
Hazen H. L., Теория следящих систем, Journ. Franklin Inst.», т. 218, сентябрь 1934, стр. 279—331.
Hazen H. L., Расчет и испытание высококачественных следящих систем, «Journ. Franklin Inst.», т. 218, ноябрь 1934, стр. 543—580.
Hazenbroek P., Waerden B. L., Теоретическое рассмотрение оптимальной настройки регуляторов, «Trans. ASME», т. 72, № 3, 1950, стр. 309—315.
Hazenbroek P., Waerden B. L., Оптимальная настройка регуляторов, «Trans. ASME», т. 72, № 3, 1950, стр. 317—322.
Heinrich G., О компенсации влияния трения при помощи добавочного колебательного движения, «ZAMM», т. 22, 1942, стр. 136—142.
Herr Donald and Gerst Irving, Анализ и оптимальный синтез линейных следящих систем, «Trans. AIEE», т. 66, 1947, Techn. Reprint, стр. 47—165.
Herrard E., Стабилизация следящих систем, подвергающихся колебаниям большой амплитуды, «Trans. AIEE», т. 71, ч. II, 1952, стр. 90—94.
Hopkin A. M., Анализ следящих систем с насыщением при помощи метода фазовой плоскости, «Trans. AIEE», т. 70, ч. 1, 1951, стр. 631—639.
Hort W., Развитие теории непрерывного регулирования и теоретические исследования прерывистого регулирования, «Zeitschrift f. Mathem. u. Phys.», т. 50, № 3, 1904, стр. 233—279.

Hurwitz A., Об условиях, при которых уравнение имеет корни только с отрицательной вещественной частью, «Mathematische Annalen», т. 46, 1895, стр. 273—284.

Ivanoff A., Теоретические основы автоматического регулирования температуры, «Journ. of the Institute of Fuel», т. 7, 1934, стр. 117—138.

Ivanoff A., Влияние характеристик регулируемого объема на работу автоматического регулятора, «Proc. of the Soc. of Chemical Industry», т. 18, 1936, стр. 138—151.

James H. M., Nichols N. B., Pliilips R. S. и др., Теория следящих систем, McGraw Hill Book Company 1947, русск. перев. под ред. Я. З. Цыпкина, изд. 1-е, М. 1951, изд. 2-е, М.—Л. 1953.

Jones R. W., Критерии устойчивости для некоторых нелинейных систем. Papers contrib. to the Conf. at Cranfield, 1951, Лондон 1952, стр. 319—324, диск. 324—328.

Johnson E. C., Гармонический анализ систем автоматического регулирования, содержащих нелинейные элементы, «Trans. AIEE», т. 71, ч. II, 1952, стр. 169—181.

Juillard E., Автоматический регулятор электрических машин, Лозанна 1928, стр. 173; русск. перев. под ред. В. С. Кулебакина, М.—Л. 1933.

Kirby M. T., Устойчивость следящих систем с линейно изменяющимися элементами, «Trans. ASME», т. 69, 1950, стр. 1662—1668.

Kochenburger R. J., Частотный метод анализа и синтеза контакторных следящих систем, «Trans. AIEE», т. 69, ч. 1-я, 1950, стр. 270—284.

König H., Периодические и апериодические колебания в чувствительных регулирующих устройствах, «Zeitschrift f. techn. Physik» № 11, 1937, стр. 426—431, фиг. 5; реферат статьи в «АиТ» № 4—5, 1938, рецензия А. В. Михайлова там же.

Krautwig F., Исследование устойчивости прерывистых регуляторов, «Archiv für Elektrotechnik» № 2, 1941, стр. 117—126, фиг. 7, библ. 7 назв.

Ku Y. H., Анализ нелинейных электромеханических задач, «Journ. of the Frankl. Inst.», т. 255, № 1, январь 1953, стр. 9—31.

Ku Y. H., Метод решения нелинейных дифференциальных уравнений третьего и более высокого порядка, «Journ. of the Frankl. Inst.», т. 256, № 3, сентябрь 1953, стр. 229—244, фиг. 8, библ. 3.

Küpfmüller K., О динамике автоматических регуляторов с усилителями, «Elektrische Nachrichten Technik», т. 5, № 11, 1928, стр. 459—467.

Küpfmüller K., Регулирование систем с запаздыванием, «Arch. El. Übertragung», Darmstadt, т. 7, февраль 1953, стр. 71—78.

Lang M., Теория переходных процессов регулирования электрических промышленных печей, «Elektrowärme» № 9, 1934, стр. 201—208, фиг. 8.

Lauer Henri, Следящая система с нелинейным трением, «Journ. Franklin Inst.», т. 255, № 6, 1953, стр. 497—511, фиг. 13.

Lawden D. F., Общая теория импульсных следящих систем, «Proc. IEE», т. 98, ч. IV, Monograph. № 4, L. 1951.

Léauté H., О колебаниях с длинными периодами в машинах с гидравлическим приводом, «Journ. de l'Ecole polytechnique», т. LV, 1885.

Léauté H., О возмущенном движении двигателей, вызванном внезапным (резким) изменением нагрузки, «Journ. de l'Ecole polytechnique», Paris, 1891.

Lécornu L. F. A., Регулирование хода машин, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1898, стр. 218; Enc. des aide-memoire publ. sous la direction de M. Léauté, № 214 B.

Lee Y. W., Применение статистических методов к решению задач связи, Res. Lab. Electronics MIT, 1950, Techn. Rep. № 181.

Lee Y. W., Cheatham T. P., Wiesner J. B., Применение корреляционного анализа к обнаруживанию периодических сигналов в шуме, «Proc. IRE», т. 38, 1950, стр. 1165—1171, т. 39, 1951, стр. 1094—1096.

Lehman G., Заметка о максимуме точности вполне устойчивых следящих систем, «L'Onde Electrique», т. 30, № 27, 1950, стр. 267—270.

Leonhard A., Новый метод исследования устойчивости, «Archiv für Elektrotechnik», т. 38, H. № 1/2, 1944, стр. 17—28.

Leonhard A., Критерий устойчивости, в особенности для систем регулирования с заранее предписанной степенью устойчивости, «Arch. f. Electrotechnik», т. 42, № 2/3, 1948, стр. 100—107.
Levinson N., Эвристическое представление математической теории упреждения и фильтрации Винера, «Journ. of Math. and Physics», т. 25 № 2, 1947, стр. 110—119.
Levinson N., Применение критерия Винера (средне-квадратичной ошибки) для расчета фильтров, «Journ. of Math. and Physics», т. 25, № 4, 1947, стр. 261—278.
Liversidge J. H., Зазор и упругость в замкнутом контуре системы автоматического регулирования, Papers contrib. to the Conf. at Cranfield, 1951. London 1952, стр. 343—372. Диск. 373—375.
Mac Coll L. A., Основы теории следящих систем, Van Nostrand, N.-Y. 1945, русск. перев. под ред. Я. З. Цыпкина, М. 1947, стр. 150.
Mac Donald D., Моделирующие установки для решения задач следящих систем, «The Review of Scientif. Instruments», т. 21, № 2, 1950, стр. 154—157.
Mac Donald D., Нелинейные элементы для улучшения работы следящих систем, «Proc. National Electronic Conference», т. 6, 1950, стр. 400—421.
Mack C., Расчет оптимальных параметров следящей системы, Philos. Magazine», т. 40, № 308, 1948, стр. 922—928.
Macmillan R. H., Введение в теорию автоматического регулирования, Cambridge Univers. Press., 1951, стр. 195, библ. стр. 171—175.
Marcy H. T., Параллельные цепи в следящих системах, «El. Engineering», т. 65, № 8—9, 1946, стр. 521—529.
Mason C. E. & Philbrick G. A., Автоматическое регулирование систем с запаздыванием, «Trans. ASME», т. 62, май 1940, стр. 295—309.
Maxwell James Clark, О регуляторах, «Proc. of the Royal Soc. of London», т. 16, 1868, стр. 270—283.
Michell I. G. L., Porter A., Влияние трения на режим следящих систем при медленно меняющихся скоростях, «Proc IEE», ч. II, т. 98, № 63, 1951, стр. 287—311.
Miller K. S. & Schwarz R. J., Анализ импульсной следящей системы, «Journ. Appl. Physics», т. 21, № 4, 1950, стр. 290—294.
Mills K. L., Угольный регулятор напряжения, «El. Eng.», январь 1951, стр. 48.
Minorsky N., Устойчивость на курсе автоматически управляемых тел, «Journ. of Am. Soc. of Naval Engineers», т. 34, № 2, 1922, стр. 280.
Minorsky N., Проблемы регулирования, «Journ Frankl. Inst.», т. 232, № 5, 1941, стр. 451—487, № 6, стр. 519—551.
Minorsky N., Самовозбуждающиеся колебания в динамических системах с запаздыванием, «Journ. Applied Mechanics», т. 9, № 2, 1942, стр. 65—71.
Minorsky N., Введение в нелинейную механику, J. W. Edwards Ann. Arbor, Michigan 1947.
Minorsky N, Нелинейные системы автоматического регулирования, Papers contrib. to the Conference at Cranfield, 1951, London 1952, стр. 309—318.
Mitereff S. D., Принципы рационального решения проблемы автоматического регулирования, «Trans. ASME», т. 57, май 1935, стр. 159—163.
Mises R., К теории регуляторов «E. и M.» т. 26, № 37, 1908, стр. 763—789, фиг. 3, библ. 4 назв.
Mises R., Регулирование хода машин, Enc. der mathematischen Wissenschaften, IV, 2, 1911, стр. 254—296.
Moore J. R., Системы, основанные на комбинировании разомкнутого и замкнутого цикла регулирования, «Proc. IRE», т. 39, № 11, 1951, стр. 1421—1432.
N. Nyquist H., Теория регенерации, «Bell system Techn. Journ.», т. 11, январь 1932, стр. 126—147.
Oldenbourg R. C. & Sartorius H., Динамика автоматического регулирования, Verlag von R. Oldenbourg, München 1944, стр. 283, фиг. 112, библ. 31; имеются амер. перев., 1948, русск. перев., 1949.

Oppelt W., Сравнительное рассмотрение различных задач регулирования с целью установления закономерностей регулирования, «Luftfahrtforschung», т. 16, вып. 8, 1939, стр. 447—472.

Oppelt W., Основные законы регулирования, Wolfenbuttel, Hannover 1947.

Oppelt W., Построение схем регулирования при помощи частотных методов, «Archiv. Electrisch. Ubertrag», т. 4, № 1, 1950, стр. 11—16.

Oppelt W., Колебательные явления в релейных системах регулирования, Pap. contrib. to the Conf. at Cranfield 1951, London 1952, стр. 449—456. Диск., стр. 456—466.

Pélegrin M. J., Применение статистических методов в теории следящих систем, Pap. contrib. to the Conf. at Cranfield 1951, London 1952, стр. 123—137.

Peterson E., Kreer J. G. & Ware L. A., Теория регенерации и эксперимент, «Bell Syst. Techn. Journ.», т. 13, 1934, стр. 680—700.

Petr T., Расчет следящих систем с вязким трением, «Elektrotechn. Obzor», т. 39, 1950, стр. 110—116.

Pipes L. A., Анализ систем регулирования с запаздыванием, «Journ. of appl. Physics», т. 19, № 7, 1948, стр. 617—623, библ. 15 назв.

Porter A., Основные принципы построения систем автоматического регулирования, «Proc. Inst. Mech. Eng.», т. 159, 1948, стр. 25—40, фиг. 26, библ. 9 назв.

Porter A., Введение в теорию следящих систем. Methuen, London, Wiley, N.-Y. 1950, стр. 51, 154, фиг. 70, библ. по главам.

Porter A. & Stoneman F., Lawden M. A., Новый подход к расчету импульсных следящих систем, «Proc. IEE», II, т. 97, № 59, 1950, стр. 597—611.

Prinz D. G., Введение в теорию автоматических регуляторов и следящих систем, «J. Scientific Instrum.», т. 21, 1944, стр. 53—64.

Proell R., Механика центробежных регуляторов и их псевдоастатический вариант, «Zivilingenieur», 1872, стр. 323.

Proell R., О регуляторе Прелля непрямого действия, «Z. d. VDI», 1884, т. 28, № 24, стр. 457—460, № 25, стр. 473—477, фиг. 9.

Ragazzini T. R. & Zadeh Lofti A., Вероятностный критерий для расчета следящих систем, «Journ. of Applied physics», т. 20, февраль 1949, стр. 141—144.

Ragazzini J. R. & Zadeh L. A., Анализ импульсных систем, «AIEE. Techn. Paper», апрель 1952, стр. 52—161.

Rice S. O., Математический анализ случайных помех, «Bell System Techn. Journal», т. 23, 1944, стр. 282—332, т. 24, стр. 46—156.

Russel D., Weaver C., Синтез следящих систем при помощи метода распределения корней, «El. Eng.», январь 1953, «Trans. AIEE», ч. II, т. 71, 1952, стр. 95.

Rutherford C. T., Практическое применение частотного метода для анализа систем регулирования, «Proc. Inst. Mech. Engrs», т. 162, № 3, 1950, стр. 334—345, диск. 344—354.

Schmidt Walter, Регулирование прямого действия, Berlin 1944.

Schwaiger A., Проблема регулирования в электротехнике, Teubner, Leipzig 1909.

Schwarz J. W., Кусочно-линейные следящие системы, «Trans. AIEE», т. 71, ч. II, январь 1953, стр. 401—405.

Smith E. S., Автоматические регуляторы, их теория и применение, «Trans. ASME», т. 58, № 4, 1936, стр. 291—302.

Smith E. S., Техника автоматического регулирования, McGrow Hill Book Co, N.-Y. 1944, стр. 367.

Smith H. C., Lawden D. F., Bailey A. E., Характеристики следящих систем прерывистого действия, Papers contrib. to the Conf. at Cranfield, 1951, London 1952, стр. 377—404. Диск. 404—407.

Sobczyk A., Стабилизация следящих систем, работающих на несущей частоте. I. Логарифмические амплитудно-фазовые характеристики систем автоматического регулирования, «Journ. Franklin Inst.», т. 246, 1948, стр. 21—43.

S o b c z y k A., Стабилизация следящих систем, работающих на несущей частоте. II. Расчетные формулы для следящих систем с дифференцирующими звеньями, «Journ. Franklin Inst.», т. 246, 1948, стр. 95—121.

S o b c z y k A., Стабилизация следящих систем, работающих на несущей частоте. III. Методы получения фазового сдвига на несущей частоте, «Journ. Franklin Inst.», т. 246, 1948, стр. 187—214.

S t e i n T., Регулирование и выравнивание в паровых установках, русск. перев., ГНТИ, 1931, стр. 188.

S t o d o l a A., О регулировании турбин, «Schweizerische Bauzeitung», 1893, т. XXII, № 17, стр. 113—117; № 18, стр. 121—122; № 19, стр. 126—128; № 20, стр. 134—135; 1894, т. XXIII, № 17, стр. 108—112; № 18, стр. 115—117; русск. перев. изд. АН СССР, 1949.

S t o d o l a A., К вопросу о регулировании гидравлических двигателей, «Schweizerische Bauzeitung», т. 23, 1894, стр. 55.

S t o d o l a A., Принцип регулирования Сименсов и американские инерционные регуляторы, «Z. d. VDI», 1899, т. 53, № 18, стр. 506—516; № 20, стр. 573—579; русск. перев. изд. АН СССР, 1949.

T h o m a H., Регулятор Тиррилля, изд. J. Springer, Berlin 1914, стр. 87, фиг. 29.

T o l l e M., Регулирование силовых машин, J. Springer, Berlin 1905, стр. 461, фиг. 372, табл. 9; русск. перев. Госэнергоиздат, 1951, стр. 254.

T r i n k s W., Регуляторы и регулирование первичных двигателей, D. Van Nostrand Co. L. 1919, стр. XVII, 236, фиг. 140.

T u s t i n A., Влияние зазора и линейного трения на устойчивость системы регулирования замкнутого цикла, «Journ. IEE», т. 94, ч. IIA, май 1947, стр. 143—151.

T u s t i n A., Анализ динамики линейных систем при помощи рядов, «Journ. IEE», ч. IIA, т. 94, № 1, 1947, стр. 30.

T u s t i n A., Анализ влияния некоторых нелинейностей в системах регулирования замкнутого цикла, «Journ. IEE», т. 94, ч. IIA, № 1, 1947, стр. 143—149.

V a z s o n y i A., Обобщение критериев устойчивости Найквиста, «Journ. of applied Physics», т. 20, 1949, стр. 863—867.

W e i s s H. K., Теория регулирования скорости, «Journ. of Aeronautical Sciences», т. 6, № 4, февраль 1939, стр. 147—152.

W e i s s H., Анализ релейных следящих систем, «Journ. of Aeronautical Sciences», Pa, 1946, July, т. 13, № 7, стр. 364—375, библ. 15.

W e s t c o t t J. H., Вывод соотношений между шириной полосы частот и средне-квадратичной ошибкой следящих систем из свойств частотных характеристик, Pap. contrib. to the Conf. at Cranfield 1951, London 1952, стр. 45—60. Диск. стр. 61—64.

W h i t e l e y A. L., Теория следящих систем и в особенности их стабилизации, «Journ. IEE», т. 93, ч. II, № 34, 1946, стр. 353—372, фиг. 13.

W h i t e l e y A. L., Основные принципы построения автоматических регуляторов и следящих систем, «Journ. IEE», ч. IIA, т. 94, 1947, стр. 5—22.

W i e n e r N o r b e r t, Экстраполяция, интерполяция и сглаживание стационарных рядов и их технические приложения, John Wiley & Sons, N.-Y. 1949.

Z a d e h L. A. & R a g a z z i n i J. R., Обобщение теории упреждения Винера, «Journ. of Appl. Physics», т. 21, 1950, стр. 645.

Z i e g l e r J. G. & N i c h o l s N. B., Оптимальные настройки автоматических регуляторов, «Trans. ASME», т. 64, № 8, 1942, стр. 759—768.

Z i e g l e r J. G. & N i c h o l s N. B., Запаздывания процесса в схемах автоматического регулирования, «Trans. ASME», т. 65, № 5, 1943, стр. 433—444.

АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Б

В

Г

Д

З

И

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Х

Ц

Ч

Ш

Э

Технический редактор *А. Я. Тихонов*
Корректор *Н. Г. Гончаров*
Обложка художника *А. Л. Бельского*

Сдано в производство 12/X 1953 г.
Подписано к печати 7/VIII 1954 г. Т-04573.
Тираж 12 000 экз. Печ. л. 71 (3 вкл.).
Уч.-изд. л. 75,5. Бум. л. 35,5. Формат $60 \times 92^{1}/_{6}$.
Зак. 1309

1-я тип. Машгиза, Ленинград,
ул. Моисеенко, 10


Москва, Третьяковский проезд, 1